La logique floue

Devoir de philosophie des mathématiques

MAUGIN Narada

Mai 2025

1 Introduction

Dans la tradition logico-mathématique héritée de Frege et de Cantor, deux principes se combinent : *l'intégralité*, un ensemble « contient tout » ce qu'exprime son prédicat et la *bivalence*, toute proposition est soit vraie, soit fausse. Or, dès que l'on quitte les prédicats mathématiquement tranchés (« être pair », « être un nombre premier »), cette netteté s'effrite. Par exemple, combien de grains faut-il pour avoir un tas ? À quel moment devient-on « grand » ou « chauve » ? Ces prédicats vagues semblent exiger une approche différente pour pouvoir les aborder. C'est pour répondre à ces défis que Lotfi A. Zadeh a développé la logique et la théorie des ensembles flous en 1965. Ces travaux proposent une réponse formelle : remplacer l'appartenance tout-ou-rien par une fonction d'appartenance graduelle $\mu_A : Univers \to [0, 1]$. La logique floue qui l'accompagne distribue alors la « vérité » sur l'intervalle continu $[0, 1]$. Sans supplanter la logique classique, cette formalisation rigoureuse de l'imprécision s'ajoute aux autres cadres non traditionnels, notamment les logiques intuitionniste, modale et multi-valuée, et fournit un outil spécifique pour raisonner sur des prédicats imprécis.

Le présent travail cherche donc à répondre à la probablématique suivante : comment la logique classique trouve-t-elle ses limites face aux prédicats vagues, de quelle manière la logique floue surmonte ces difficultés et quels sont les conséquences philosophiques de cette théorie ?

Pour apporter des élements de réponses, nous procéderons en trois temps. Nous commencerons d'abord par rappeler les principes de la logique classique et analyser rigoureusement les difficultés que posent le paradoxe sorite dans ce cadre. Nous analyserons ensuite comment les ensembles flous et leurs fonctions d'appartenance offrent une solution en redéfinissant la notion d'intégralité. Enfin, nous tirerons les conséquences philosophiques de cette refonte, en interrogeant le rôle ontologique et épistémologique d'éventuels « objets flous », ainsi que les rapprochements possibles avec les modèles probabilistes de l'incertitude.

2 Cadre classique de la logique

2.1 Bivalence et intégralité

En théorie des ensembles classique, l'appartenance a un caractère absolu : pour tout objet x et tout ensemble E, on a soit $x \in E$, soit $x \notin E$. De même, toute proposition p est soit vraie ($\top$), soit fausse ($\bot$). Il n'y a pas de niveau intermédiaire. Ce principe se traduit par la validité universelle des principes du tiers exclu ($p \vee \neg p$ est une tautologie) et de non-contradiction ($p \wedge \neg p$ toujours faux) dans la logique classique. Un concept est alors défini par une frontière nette entre les éléments qui l'instancient et ceux qui ne l'instancient pas. Chaque objet satisfait alors intégralement un prédicat ou ne le satisfait pas du tout. Par exemple, le prédicat « être pair » en arithmétique partitionne l'ensemble des entiers en deux : tout entier est soit entièrement pair, soit entièrement impair, et il n'existe pas d'entier « semi-pair ».

Philosophiquement, cette vision correspond à l'idée que chaque concept s'applique à toutes les choses ou à aucune de façon absolue. Cependant, de nombreux prédicats vagues en montrent les limites. Pour des propriétés telles que « grand », « vieux », « chauve » ou « riche », une variation progressive de l'objet (quelques centimètres de taille en plus, quelques cheveux en moins, etc.) ne produit pas de changement brutal de statut conceptuel dans l'usage ordinaire. Pourtant, en logique classique, on est forcé d'établir un seuil arbitraire au-delà duquel l'énoncé passe de faux à vrai. Bertrand Russell avait déjà pointé ce problème : « *La loi du tiers exclu est vraie lorsque des symboles précis sont employés, mais elle ne l'est pas lorsque les symboles sont vagues, comme, en fait, le sont tous les symboles* ».

2.2 Paradoxe du sorite

Cette approche conduit aux paradoxes sorites. Par exemple, on ne saurait dire à quel instant précis une personne devient chauve en ôtant un à un ses cheveux. Pourtant, il semble que l'on puisse raisonner par récurrence. Si on considère pour tout $n \in [0, N]$, la proposition $P(n)$ « un homme ayant n cheveux n'est pas chauve ». On a alors $P(N)$ vraie pour N très grand. Si maintenant on suppose $P(n)$ vraie pour un certain $n \in [1, N]$, on déduit $P(n-1)$, car perdre un seul cheveu ne saurait rendre immédiatement chauve un individu non chauve. On a donc montré par récurrence qu'un homme sans aucun cheveu ($n = 0$) n'est pas chauve : c'est absurde. Ce paradoxe provient de ce que la logique classique oblige à considérer « être chauve

» comme un prédicat à valeur booléenne (vrai ou faux), ce qui rend l'argument « un cheveu de moins ne change rien » en apparence valable à chaque étape. Une telle progression continue rend alors inopérante une réponse discrète. Cette remarque suggère que certains prédicats, comme « être chauve », appellent à une quantification graduelle.

La logique classique a été considéré au début du XXe siècle, notamment par le Cercle de Vienne, comme « la » logique universelle unique, valable pour toute pensée rationnelle. Cependant, dès les années 1910, sont apparus des systèmes formels alternatifs (logiques trivalentes de Łukasiewicz, logiques modales, intuitionnistes, etc.) qui ont contesté l'exclusivité de la logique classique. « La » logique n'est alors plus unique, mais est consistitué d'un ensemble divers de systèmes formels chacun avec ses propres règles adaptées à un domaine ou à un type de problèmes. Ce pluralisme logique admet que les lois comme le tiers exclu ou la non-contradiction puissent être maintenues, modifiées ou abandonnées selon le système adopté. La logique floue s'inscrit dans ce mouvement. Avant d'en examiner les conséquences philosophiques, il convient d'introduire les principes formels des ensembles flous qui en forment la base.

3 Formaliser le vague : ensembles et logique flous

3.1 Fonction d'appartenance et α-coupes

La logique floue mathématise l'idée d'une appartenance gradualisée plutôt que binaire. Elle est formalisée par une théorie des ensembles flous qui revient à assouplir la subsomption par une fonction qui la distribue sur un ensemble de valeurs dans l'intervalle continu $[0,1]$ et non plus seulement dans $\{0,1\}$. Concrètement, à tout ensemble flou A sur un univers U est associée une fonction d'appartenance $\mu_A : U \to [0,1]$ telle que $\mu_A(x)$ indique le degré d'appartenance de l'élément x à A. Une valeur $\mu_A(x) = 1$ signifie que x appartient tout à fait à A, $\mu_A(x) = 0$ qu'il n'y appartient pas du tout, et les valeurs intermédiaires représentent des appartenances partielles ou graduelles. D'un point de vue formel, la théorie des ensembles flous conserve de nombreux opérateurs des ensembles classiques en les adaptant. On peut définir l'intersection $A \cap B$ de deux ensembles flous A et B par $\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$, l'union $A \cup B$ par $\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$, le complément $\neg A$ par $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$, etc.. Ces choix ne sont pas uniques : différentes définitions possibles des connecteurs logiques flous forment différentes logiques floues, chacune vérifiant certains axiomes et en abandonnant d'autres. Nous nous concentrons dans ce travail sur l'interprétation originale de Zadeh.

3.2 Le paradoxe sorite évité

Avec cette nouvelle théorie des ensembles se développe une véritable logique. Contrairement à la logique classique, la logique floue a une valence infinie : la valeur de vérité d'une proposition peut être n'importe quel réel de l'intervalle $[0, 1]$. Par exemple, on pourra fixer $\mu_{Grand}(1{,}80m) = 0,8$ et $\mu_{Grand}(1{,}70m) = 0,4$ pour traduire que 1,80m est plutôt grand, tandis que 1,70m l'est encore assez peu. Mais on peut aussi définir le concept de « début de semaine » en définissant une fonction d'appartenance $\mu_{\text{début}} : \{\text{lun}, \ldots, \text{dim}\} \to [0, 1]$ telle que $\mu(\text{lun}) = 1$, $\mu(\text{mar}) = 0,9$, $\mu(\text{mer}) = 0,6$, les autres jours valant 0. L'intégralité au sens flou est satisfaite, car pour tout jour de la semaine d, $0 \leq \mu_{\text{début}}(d) \leq 1$, tandis que l'intégralité classique, pour laquelle $\mu_{\text{début}}(d) \in \{0, 1\}$, est abandonnée.

Ce formalisme permet d'éviter le paradoxe de l'homme qui n'a aucun cheveu mais qui n'est pas chauve, que nous mentionnions précédemment. La théorie des ensembles flous attribue pour tout n une valeur $\mu_{\text{chauve}}(n)$ représentant le caractère chauve. La perte d'un cheveu fait alors légèrement diminuer ce niveau, plutôt que de laisser la valeur vraie/faux inchangée : par exemple $\mu_{\text{chauve}}(n - 1)$ sera inférieure à $\mu_{\text{chauve}}(n)$. Ainsi, l'implication $P(n) \to P(n - 1)$ n'est plus rigoureusement vraie mais seulement « presque vraie » (à un niveau très proche de 1). La chaîne inductive se rompt donc avant d'atteindre $n = 0$, et l'on évite de conclure à tort que $P(0)$ est vrai. En remplaçant les raisonnements tout-ou-rien par des degrés de vérité, cette logique parvient à respecter nos intuitions sur le paradoxe sorite et à lever l'apparente contradiction. La bivalence classique se trouve ainsi remplacée par une gradation continue du prédicat « être chauve ». Ainsi, une petite variation dans l'objet se traduit par une légère variation du degré, au lieu d'un passage abrupt du vrai au faux.

3.3 Quantificateurs flous

Cette logique peut amener également à repenser les quantificateurs classiques universel ($\forall$) et existentiel ($\exists$). La sémantique attribue à une formule $\forall x, P(x)$ un degré de vérité égal à l'infimum des degrés de vérité de $P(x)$ lorsque x parcourt le domaine et, naturellement, $\exists x, P(x)$ prend pour valeur le supremum de ces degrés. Autrement dit, la formule $\forall x, P(x)$ est d'autant plus vrai que $P(x)$ est vrai pour tous les x (il devient totalement faux dès qu'un contre-exemple apparaît), tandis que « $\exists x, P(x)$ » est d'autant plus vrai qu'il existe au moins un x satisfaisant $P(x)$ (et complètement faux si aucun ne le satisfait). Cette extension est donc cohérente et permet d'obtenir des quantificateurs flous tels que « la plupart », « presque tous », etc. Ceux-ci sont formellement représentés par des fonctions d'appartenance sur l'intervalle [0,1], qui à chaque proportion d'éléments satisfaisant une propriété donnée, font correspondre un degré de vérité. Par exemple, si μ_Q est la fonction correspondant au quantificateur flou « la plupart », alors l'énoncé « la plupart des X sont Y » aura pour degré de vérité $\mu_Q(p)$, où p désigne la fraction des éléments X pour lesquels Y est vérifié.

Cette approche entérine la fin de la bivalence des généralisations : un énoncé universel peut désormais être vrai à un certain point plutôt que totalement vrai ou totalement faux. Si une propriété ne vaut que pour presque tous les éléments d'un ensemble, l'assertion « tous les X sont Y » recevra un degré de vérité élevé (proche de 1) au lieu d'être jugée fausse comme en logique classique. Cette approche plus souple permet de représenter rigoureusement des généralisations imprécises de la langue courante (« presque tous », « la plupart »), sans forcer une universalité absolue questionnable dans ce cas-là.

4 Portée philosophique

Maintenant que nous avons présenté les bases de la théorie des ensembles flous et de sa logique associée, nous pouvons explorer quelques-unes de ses conséquences philosophiques.

4.1 Redéfinition de l'intégralité

Les ensembles flous remettent en cause ce que veut dire pour une collection que d'être intégrale. Car celle-ci n'est plus, dans cette théorie, délimitée par un contour absolument tranché : elle se distribue sur l'ensemble continu des valeurs de la fonction μ_A. On peut alors reconstituer l'ensemble A par ses différentes α-coupes. Pour chaque seuil $\alpha \in [0,1]$, l'α-coupe $A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$ est un sous-ensemble (au sens classique) de l'univers U contenant les éléments dont l'appartenance est au moins α. L'ensemble flou A est alors la collection de tous ces ensembles classiques, potentiellement une infinité. On peut alors dire que l'ensemble A couvre l'univers, non pas en ce que chaque élément lui appartient totalement ou à son complément, mais en ce que chaque élément contribue à A d'un certain poids, et au complément d'un poids complémentaire. En un sens, $A \cup \neg A = U$ reste valable. C'est-à-dire que pour tout x, $\mu_A(x) + \mu_{\neg A}(x) = 1$: la totalité est répartie entre A et $\neg A$. On obtient ainsi une forme affaiblie de l'intégralité classique : chaque objet partage entièrement son appartenance à A ou à $\neg A$, mais éventuellement en partie à l'un et en partie à l'autre. C'est une intégralité fractionnée, au lieu d'être une intégralité par inclusion/exclusion.

4.2 Quel statut pour le tiers exclu ?

L'extension de la vérité à l'intervalle $[0,1]$ entraîne une révision de certains principes logiques classiques. Avec les opérations usuelles définies par Zadeh, nous obtenons que (où $V : \{\text{formules}\} \longrightarrow [0,1]$ est la fonction d'évaluation) la négation vaut $V(\neg p) = 1 - V(p)$, la conjonction $V(p \wedge q) = \min\big(V(p), V(q)\big)$ et la disjonction $V(p \vee q) = \max\big(V(p), V(q)\big)$. Dans ces conditions, ni la non-contradiction $\neg\big(p \wedge \neg p\big)$ ni le tiers exclu $\big(p \vee \neg p\big)$ ne sont nécessairement satisfaits. Par exemple, si p a une valeur de vérité $V(p) = 0,6$, alors $V(p \wedge \neg p) = \min(0,6,\ 0,4) = 0,4 \neq 0$. Ainsi, p et $\neg p$ sont simultanément partiellement vrais à hauteur de 0,4. Et $V(p \vee \neg p) = \max(0,6,\ 0,4) = 0,6 < 1$. Autrement dit, les tautologies de la logique classique deviennent de simples énoncés contingents dont la vérité dépend du degré de p. Il y a donc violation du tiers exclu et de la non-contradiction en général.

Ce relâchement des lois traditionnelles constitue l'essence même de la logique floue. Il permet de rendre compte de la gradation des prédicats vagues et de la variation continue des propriétés. Toutefois, la logique bivalente subsiste comme cas extrême : si toutes les valeurs se limitent à 0 ou 1, on retrouve exactement les opérations et les tautologies classiques. Cette logique apparaît ainsi non comme un rejet mais comme une généralisation, analogue à l'extension des entiers aux réels qui introduit des valeurs intermédiaires. Dans une perspective pluraliste, le choix d'un système logique dépend donc du domaine : la bivalence demeure adaptée aux concepts nets, comme l'avait noté Russell, tandis qu'une logique à degrés convient mieux lorsque les concepts le sont moins.

La remises en cause de tant de canons classique a naturellement suscité des débats quant à la légitimité de la logique floue en tant que « logique ». Ainsi Susan Haack note-t-elle qu'« *il ne serait guère exagéré de dire que la logique floue manque pratiquement de toutes les caractéristiques que les pionniers de la logique moderne attendaient d'une logique* ».

4.3 Ontologie de l'objet flou

La formalisation présentée conduit aussi à repenser la notion d'objet. En logique classique un objet possède une identité déterminée et des propriétés nettement définies. La théorie des ensembles traduit cette idée en posant $A = \{\, x \mid P(x) \,\}$, qui rassemble tous les éléments satisfaisant P et exclut tous les autres. Avec les ensembles flous, un même élément peut se trouver à la frontière du concept, puisque sa fonction d'appartenance μ_A peut prendre n'importe quelle valeur strictement comprise entre 0 et 1. La définition ontologique devient graduelle. Un « tas » reste-t-il un tas quand il ne subsiste que cent grains de sable ? dix grains ? Un objet flou peut être alors défini comme un objet qui satisfait un certain concept avec un degré compris strictement entre 0 et 1. Et donc, on ne peut plus, en général, affirmer ou nier catégoriquement toute propriété de cet objet, comme le demandait Aristote.

4.4 Interprétation des valeurs intermédiaires

L'introduction de degrés de vérité soulève également la question de l'interprétation du statut de ces valeurs intermédiaires. On peut d'abord adopter une lecture réaliste : certains objets et leurs propriétés seraient eux-mêmes graduels. Par exemple, il n'existe pas de nombre exact de cheveux à partir duquel une personne devient chauve, car la calvitie se manifeste de façon continue. Dans ce cadre, la fonction d'appartenance $\mu_A(x) \in [0, 1]$ constitue un relevé ontologique : elle indique dans quelle mesure l'objet x possède réellement la propriété A. Dire « c'est un tas » n'est plus un jugement catégorique mais l'assignation d'un degré de réalité à la propriété correspondante. La valeur $\mu_{\mathrm{Tas}}(n)$ décrit littéralement dans quelle mesure la configuration de n grains réalise l'essence même de la « tasité ». Plus généralement, elle cartographie la part de réalité que détient chaque objet relativement au concept A.

Une seconde interprétation, de nature épistémique, considère au contraire que le flou provient de notre information limitée ou de la souplesse du langage. L'énoncé « Pierre est chauve » est, en soi, soit vrai soit faux, mais nous pouvons manquer de données ou de critères pour trancher. Une valeur comme $\mu_A(x) = 0{,}6$ représente alors notre confiance partielle en x pour avoir la propriété A. Autrement dit, μ_A mesure un état de connaissance et $\mu_A(x)$ exprime la part d'incertitude que nous devons encore lever sur x pour atteindre la bivalence idéale.

Ces interprétations ne s'excluent pas. Certaines zones de vague semblent appartenir à la nature (continua physiques, transitions de phase), tandis que d'autres renvoient à une imprécision empirique (erreur de mesure, connaissance lacunaire). Dans tous les cas, la logique floue élargit la réflexion en philosophie des mathématiques : doit-on reconnaître des « objets flous » dans notre ontologie, ou considérer les valeurs intermédiaires comme une mesure de notre ignorance de l'objet ?

Nous n'allons pas répondre à cette question dans le cadre de ce travail, mais nous pouvons noter que la relecture de l'intégralité comme distribution continue de degrés rapproche la logique floue de l'épistémologie bayésienne. Dans un cadre bayésien, on associe à chaque proposition p une probabilité épistémique $\Pr(p) \in [0, 1]$ représentant un niveau de crédence en p. Ici, la gradation porte sur la crédence du sujet plutôt que sur la vérité même, mais le passage d'une opposition stricte à un continuum est similaire. Zadeh a d'ailleurs proposé le concept de probabilité floue. Dans celui-ci, on peut combiner des assertions telles que « p est probablement vrai

» avec des quantificateurs flous comme « la plupart ». On obtient alors des énoncés du type « X pense avec probabilité 0,9 que Y est chauve à hauteur de 0,8 ». La connaissance se voit ainsi graduée à double titre : par l'imprécision des concepts, μ_A, et par l'incertitude des données, $\Pr(p)$.

5 Conclusion

Au terme de ce parcours, il apparaît clairement que le cadre de la logique classique, fondé sur la bivalence, s'avère inadéquat pour traiter les prédicats vagues. En effet, la logique binaire exige de trancher : un énoncé comme « X est chauve » doit être soit vrai soit faux. Or, le paradoxe sorite (« à partir de combien de grains a-t-on un tas ? ») illustre que se réduire à deux valeurs de vérités engendre des difficultés, que la logique floue surmonte. En admettant que le degré de vérité prenne n'importe quelle valeur entre zéro et un, elle capture l'intuition selon laquelle la variation progressive d'un concept ne provoque pas un basculement brutal de la valeur de vérité de l'objet. Grâce à ces degrés de vérité, on peut affirmer qu'une personne est chauve à 0,6 plutôt que de la qualifier arbitrairement de chauve ou de non-chauve. La notion d'intégralité s'en trouve redéfinie, l'appartenance à un concept n'étant plus une question dichotomique, mais une question de niveau, répartie de manière continue sur l'ensemble des valeurs intermédiaires entre appartenance totale et non-appartenance. Plus précisément, c'est l'ensemble de toutes les appartenances partielles possibles (via les α-coupes).

L'exploration de ces alternatives entraîne d'importantes conséquences philosophiques. D'une part, des principes fondamentaux comme le tiers exclu ne s'appliquent plus en général : l'énoncé « $\big(p \vee \neg p\big)$ » peut n'être vrai qu'en partie. D'autre part, elle soulève la question du statut des catégories floues : correspondent-elles à une indétermination objective de la réalité ou ne traduisent-elles que l'imprécision de nos concepts et de notre connaissance ? Enfin, reconnaître la validité de la logique floue aux côtés de la logique classique revient à entériner l'idée d'une pluralité de logiques. Il n'existe plus un unique système formel universel, mais une coexistence de plusieurs logiques adaptées à des domaines ou à des problématiques spécifiques : logique classique pour les domaines nets, logique floue pour les continuums, systèmes probabilistes pour l'aléa, voire combinaisons hybrides. Ainsi reconçue, la rationalité n'abandonne rien de son exigence de rigueur. Elle étend simplement sa palette d'outils pour rendre justice à la complexité réelle du monde, du langage et de la connaissance.