Доверительное оценивание

Малов Сергей Васильевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

17/24 октября 2020 г.

План

1. Постановка задачи доверительного оценивания
2. Доверительное оценивание вещественного параметра
3. Асимптотические доверительные интервалы
4. Доверительное оценивание векторно-значного параметра

Постановка задачи

Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ – статистический эксперимент

- $\mathcal{Y}$ – совокупность подмножеств множества Θ определенной формы
- $\alpha \in (0, 1)$ – малое число

Определение

Статистика $\hat{\Theta} : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$, удовлетворяющая условию

$$P_\theta(\theta \in \hat{\Theta}) \geq 1 - \alpha \quad \text{при любом} \quad \theta \in \Theta$$

называется доверительной оценкой параметра θ уровня доверия $1 - \alpha$.

- При каждом фиксированном $\theta \in \Theta$ доверительная оценка накрывает истинное значение параметра θ с вероятносью не менее, чем $1 - \alpha$.
- Точность доверительной оценки определяется размером доверительного множества.

План

Доверительные интервалы

Если параметр распределения — вещественное число ($\Theta \subseteq \mathbb{R}$), то для доверительного оценивания используются интервалы.

- Пусть $\alpha \in (0, 1)$ – малое число; $1 - \alpha$ – уровень доверия

Определение

Статистика $\hat{\Theta} : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая условию

$$P_\theta(\theta \in [T_1(X), T_2(X)]) \geq 1 - \alpha \quad \text{при любом} \quad \theta \in \Theta$$

называется доверительным интервалом параметра θ уровня доверия $1 - \alpha$.

- Различают односторонние ($T_1 \equiv \inf\{\Theta\}$ – правосторонний; $T_2 \equiv \sup\{\Theta\}$ – левосторонний) и двухсторонние доверительные интервалы.
- Чем короче длина двухстороннего доверительного интервала при фиксированном уровне доверия, тем точнее оценка.
- Точность доверительной оценки зависит от эффективности использования имеющейся статистической информации.

Построение доверительных интервалов

Метод построения доверительных интервалов

- Пусть $G(X, \theta)$ функция параметра и наблюдений, удовлетворяющая условиям
  - Распределение $G(X, \theta)$ не зависит от θ.
  - Для любого α существует множество I_α такое, что
    - $P_\theta(G(X, \theta) \in I_\alpha) \geq 1 - \alpha$
    - $\hat{\Theta} = \{\theta : G(X, \theta) \in I_\alpha\}$ – интервал
- Тогда $\hat{\Theta}$ — доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha$.
- Функцию $G(X, \theta)$ будем называть генератором доверительного интервала $\hat{\Theta}$

Оценивание параметров нормального распределения

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из двухпараметрического нормального распределения $N(a, \sigma^2)$

Для построения двухстороннего доверительного интервала для a уровня доверия $1 - \alpha$

- используем $G(X, a) = \sqrt{n-1}(\overline{X} - a)/s$
- согласно п. 4 леммы Фишера $G(X, a) \sim S_{n-1}$
- находим t_α: $S_{n-1}(t_\alpha) = 1 - \alpha/2$
  - S_{n-1} – функция распределния Стьюдента с $n-1$ ст.св.
  - в силу симметричности распределения Стьюдента $P_\theta(G(x, a) \in [-t_\alpha, t_\alpha]) = 1 - \alpha$
- решаем систему неравенств $-t_\alpha \le \sqrt{n-1}(\overline{X} - a)/s \le t_\alpha$
- решение системы: $\overline{X} - t_\alpha s/\sqrt{n-1} \le \theta \le \overline{X} + t_\alpha s/\sqrt{n-1}$
- доверительный интервал для параметра a при неизвестном σ

$$[\overline{X} - t_\alpha s/\sqrt{n-1}, \overline{X} + t_\alpha s/\sqrt{n-1}].$$

  - полученный доверительный интервал – наикратчайший

Оценивание параметров нормального распределения

Для построения двухстороннего доверительного интервала для σ^2 уровня доверия $1-\alpha$

- используем $G(X,\sigma) = ns^2/\sigma^2$
- согласно п. 3 леммы Фишера $G(X,\sigma) \sim \chi^2_{n-1}$
- находим $(x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha})$: $K_{n-1}(x_{1,\alpha}) = \alpha/2$, $K_{n-1}(x_{2,\alpha}) = 1-\alpha/2$
  - K_{n-1} – функция распределния Хи-квадрат с $n-1$ ст.св.
  - тогда $\mathbb{P}(ns^2/\sigma^2 \in [x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}]) = 1-\alpha$
- решаем систему неравенств $x_{1,\alpha} \le ns^2/\sigma^2 \le x_{2,\alpha}$
- решение системы: $ns^2/x_{2,\alpha} \le \sigma^2 \le ns^2/x_{1,\alpha}$
- доверительный интервал для параметра σ^2 при неизвестном a

$$[ns^2/x_{2,\alpha}, ns^2/x_{1,\alpha}].$$

- для построения наикратчайшего доверительного интервала следует решить задачу оптимизации

$$x_{2,\alpha,\lambda} - x_{1,\alpha,\lambda} \to \min_\lambda$$

при условиях $K_{n-1}(x_{1,\alpha,\lambda}) = \lambda$ и $K_{n-1}(x_{2,\alpha}) = 1-\alpha+\lambda$.

Оценивание параметров нормального распределения

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_k$ – независимые выборки из двухпараметрических нормальных распределений $N(a_1, \sigma^2)$ и $N(a_2, \sigma^2)$ с одинаковой дисперсией соответственно.

- параметр модели $\theta = (a_1,\ a_2,\ \sigma)$, где $\sigma = \sigma_1$.

Построение доверительного интервала для $\theta = \beta a_1 + \gamma a_2$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

- По лемме Фишера п.1
$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - a_1}{\sigma} \in N(0,1), \quad \sqrt{k}\frac{\overline{Y} - a_2}{\sigma} \in N(0,1)$$
- По лемме Фишера п.3
$$\frac{ns_1^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{n-1}, \quad \frac{ks_2^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{k-1}$$
  - s_1 и s_2 – выборочные дисперсии
- В силу независимости выборок, используя свойства соответствующих распределений, заключаем, что
$$\xi = \beta\overline{X} + \gamma\overline{Y} - (\beta a_1 + \gamma a_2) \in N(0, (1/n + 1/k)\sigma^2)$$
  - $s^2/\sigma^2 = (ns_1^2 + ks_2^2)/\sigma^2 \in \chi^2_{n+k-2}$

Оценивание параметров нормального распределения

- Выбираем
$$G(X,Y;\theta)=\frac{\xi\Big/\left(\sqrt{1/n+1/k}\,\sigma\right)}{\sqrt{(n+k-2)^{-1}s^2/\sigma^2}}\sim S_{n+k-2}.$$
- Преобразуем
$$G(X,Y;\theta)=\frac{\sqrt{nk(n+k-2)}(\beta\overline{X}+\gamma\overline{Y}-(\beta a_1+\gamma a_2))}{\sqrt{(k+n)}\,s}$$
- Находим $t_\alpha : S_{n+k-2}=1-\alpha/2$.
- Получаем доверительный интервал для θ:
$$\left[\beta\overline{X}+\gamma\overline{Y}-\frac{\sqrt{k+n}\,s\,t_{\alpha/2}}{\sqrt{nk(n+k-2)}},\ \beta\overline{X}+\gamma\overline{Y}+\frac{\sqrt{k+n}\,s\,t_{\alpha/2}}{\sqrt{nk(n+k-2)}}\right]$$

Упражнение

Построить доверительный интервал для параметра θ по двум независимым выборкам из нормальных распределений $\mathcal{N}(a,\sigma_1^2)$ и $\mathcal{N}(a,\sigma_2^2)$ при условии, что $\sigma_1^2=r\sigma_2^2$ при некотором известном $r>0$.

- Задача построения точного доверительного интервала для θ, если σ_1 и σ_2 полностью неизвестны, неразрешима (проблема Беренса–Фишера)

Использование преобразования Смирнова

Преобразование Смирнова:

- Если случайная величина X имеет непрерывную функцию распределения F, то случайная величина $F(X)$ равномерно распределена на интервале $[0, 1]$

Если функция распределения элементов выборки $X_1, \ldots, X_n$ непрерывна и монотонно меняются по параметру (например, параметр сдвига), то можно выбрать

$$G(X; \theta) = -\sum_{i=1}^{n} \log F(X_i; \theta).$$

Тогда:

- $-\log F(X_i; \theta)$ имеет гамма-распределение $\Gamma(1, 1)$
- $G(X; \theta)$ имеет известное распределение $\Gamma(n, 1)$
- находим $x_{1,\alpha}, x_{2,\alpha}$: $G_{1,n}(x_{1,\alpha}) = \alpha/2$, $G_{1,n}(x_{2,\alpha}) = 1 - \alpha/2$
  - $G_{1,n}$ функция распределения $\Gamma(n, 1)$
- решаем систему уравнений $x_{1,\alpha} \leq -\log F(X_i; \theta) \leq x_{1,\alpha}$
- ввиду монотонности $F(x, \theta)$ по параметру решение данной системы интервал – доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha$

Использование преобразования Смирнова

Определение

Будем говорить, что распределение статистики T монотонно зависит от параметра, если функция распределения $F_T(x;\theta) = P_\theta(T < x)$ монотонно возрастает (или убывает) по параметру θ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}$.

- Обычно все разумные точечные оценки параметра обладают этим свойством
- Если дополнительно $F_T(x;\theta)$ –непрерывная функция θ, то уравнения $F_T(x;\theta) = \gamma$, $\gamma \in (0,1)$ разрешимы относительно параметра θ
- Для простоты выкладок считаем, что распределение T непрерывно

Использование преобразования Смирнова

Теорема

Пусть

(i) распределение статистики T монотонно зависит от параметра

(ii) $F_T(x;\theta)$ непрерывна по θ и по x

Тогда интервал с границами $b_2 = b(T(X), 1-\alpha_2)$ и $b_1 = b(T(X), \alpha_1)$ является доверительным уровня $1-\alpha$.

Доказательство. По теореме Смирнова $F_T(T;\theta)$ имеет равномерное на интервале $[0,1]$ распределение, т. е.

$$\mathbb{P}_\theta(\alpha_1 \le F_T(T;\theta) \le 1-\alpha_2) = 1-\alpha.$$

В силу монотонности F_T по θ решением неравенства под знаком вероятности является указанный интервал. ∎

- Данный метод остается верным, если $F_T(x;\theta)$ дискретны. Однако в этом случае при определении квантилей $F_T^{-1}(\gamma;\theta)$ следует удовлетворить неравенству

$$F_T(\inf\{F_T^{-1}(1-\alpha_2)\}) - F_T(\sup\{F_T^{-1}(\alpha_1)\}_+) \ge 1-\alpha.$$

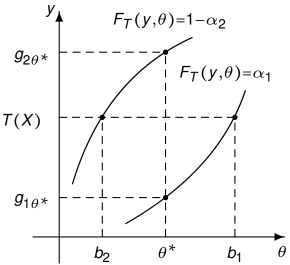
Использование преобразования Смирнова

Графическая интерпретация

- Пусть $g_1(\theta)$ и $g_2(\theta)$: $\mathbb{P}_\theta(g_1(\theta) \leq T(X) \leq g_2(\theta)) \geq 1 - \alpha$
- Для определенности $F_T(g_1(\theta)) \leq \alpha/2$; $1 - F_T(g_2(\theta)) \leq \alpha/2$
- В случае абс. непрерывного распределния используют равенства
- Сечение множества точек плоскости на уровне статистики T

$$D = \{(\theta', \theta) : g_1(\theta) \leq \theta' \leq g_2(\theta)\}.$$

– доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha$



Использование преобразования Смирнова

Задача

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения Бернулли $\mathrm{Bi}(1, \theta)$ с вероятностью успеха θ. Построить доверительный интервал для параметра θ

Решение. В качестве статистики, распределение которой непрерывно зависит от параметра, выберем $\overline{X}$. Очевидно,

$$F_T(k/n; \theta) = \sum_{j=0}^{k-1} C_n^j \theta^j (1-\theta)^{n-j}$$

(функция распределения монотонно возрастает по θ). Находим (θ_1, θ_2):

$$\sum_{j=n\overline{X}+1}^{n} C_n^j \theta_1^j (1-\theta_1)^{n-j} = \alpha/2 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{n\overline{X}-1} C_n^j \theta_2^j (1-\theta_2)^{n-j} = \alpha/2$$

Тогда, интервал $[\theta_1, \theta_2]$ будет доверительным уровня доверия $1-\alpha$. ■

План

Асимптотические доверительные интервалы

Мотивация

- Не всегда просто найти генератор доверительного интервала
- Построение точных доверительных интервалов в явном виде часто бывает затруднительно
- Асимптотический подход позволяет создать универсальный метод доверительного оценивания

Пусть $(\mathfrak{X}_n, \mathfrak{F}_n, \mathcal{P}_n)$, $\mathcal{P}_n = \{P_{\theta,n}, \theta \in \Theta\}$ – асимптотическая модель статистического эксперимента; $\alpha \in (0,1)$ – малое число.

Определение

Статистика $\hat{\Theta}_n : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}^2$ вида $\hat{\Theta}_n(X) = [T_{1n}(X), T_{2n}(X)]$ (определенная при каждом $n \in \mathbb{N}$) и удовлетворяющая условию

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(\theta \in [T_{1n}(X), T_{2n}(X)]) \geq 1-\alpha \quad \text{при любом} \quad \theta \in \Theta$$

называется асимптотическим доверительным интервалом параметра θ уровня доверия $1-\alpha$.

- Как и в случае точного доверительного оценивания различают односторонние и двухсторонние доверительные интервалы.

Асимптотические доверительные интервалы

Метод построения асимптотических доверительных интервалов на базе асимптотически нормальной оценки параметра $\hat{\theta}$

- Асимптотическая нормальность
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}(X) - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2(\theta)).$$
- Если исходная последовательность распределений непрерывно меняется по θ, то из состоятельности оценки $\hat{\theta}(X) \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ по вероятности следует, что $\sigma(\hat{\theta}(X)) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma(\theta)$.
- Тогда
$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}(X) - \theta)}{\sigma(\hat{\theta}(X))} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$
- Выбираем $x_{\alpha/2}$ из условия $1 - \Phi(x_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- В силу симметричности стандартного нормального распределения $\Phi(x_{\alpha/2}) - \Phi(-x_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- Получаем асимптотический доверительный интервал (последовательность интервалов)
$$[\hat{\theta}(X) - x_{\alpha/2}\sigma(\hat{\theta}(X))/\sqrt{n}, \hat{\theta}(X) + x_{\alpha/2}\sigma(\hat{\theta}(X))/\sqrt{n}].$$

Асимптотические доверительные интервалы

Метод построения асимптотических доверительных интервалов на базе ОМП

- Пусть $\hat{\theta}(X)$ – оценка максимального правдоподобия
- При выполнении определенных условий регулярности
$$\sqrt{n}(\hat{\theta}(X) - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1/I(\theta)).$$
    - $I(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{I}_n(\theta)/n$
    - $\mathbb{I}_n(\theta)$ – информация Фишера
- Тогда,
$$\sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta}(X) - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$
- Выбираем $x_{\alpha/2}$ из условия $1 - \Phi(x_{\alpha/2}) = \alpha/2$
- В силу симметричности стандартного нормального распределения $\Phi(x_{\alpha/2}) - \Phi(-x_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$
- Получаем асимптотический доверительный интервал
$$\left[\hat{\theta}(X) - x_{\alpha/2} \Big/ \sqrt{nI(\hat{\theta})},\ \hat{\theta}(X) + x_{\alpha/2} \Big/ \sqrt{nI(\hat{\theta})}\right].$$

Оценивание параметров нормального распределения

Упражнение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из двухпараметрического нормального распределения $N(a, \sigma^2)$. Построить асимптотические доверительные интервалы для a и σ на базе ОМП $(\overline{X}, s^2)$.

Решение. Пусть $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \alpha/2$. Известно, что

$$I(a) = \mathbb{I}(a)/n = 1/\sigma^2; \qquad I(\sigma^2) = 1/(2\sigma^4)$$

Тогда

$$\sqrt{n}(\overline{X} - a)/s \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Получаем АДИ для параметра a

$$[\overline{X} - x_\alpha s/\sqrt{n}, \overline{X} + x_\alpha s/\sqrt{n}].$$

Аналогично,

$$\sqrt{n/2}(s^2 - \sigma^2)/s^2 \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Получаем АДИ для параметра σ^2

$$[s^2(1 - \sqrt{2}x_\alpha/\sqrt{n}), s^2(1 + \sqrt{2}x_\alpha/\sqrt{n})] \blacksquare$$

Оценивание параметра распределения Бернулли

Упражнение

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения Бернулли $\mathrm{Bi}(1, p)$. Построить асимптотические доверительные интервалы для p с использованием асимптотической нормальности (ЦПТ)

$$\sqrt{n}(\overline{X} - p)/\sqrt{p(1-p)} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Решение. I способ. Выбираем $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

Тогда

$$\mathbb{P}(|\overline{X} - p| \le x_\alpha \sqrt{p(1-p)/n}) \approx 1 - \alpha.$$

Для построения доверительного интервала решаем неравенство

$$|\overline{X} - p| < x_\alpha \sqrt{p(1-p)/n} \Leftrightarrow ((x_\alpha^2/n) + 1)p^2 - 2(\overline{X} + (x_\alpha^2/n))p + \overline{X}^2 < 0$$

Решение: $p \in [p_1, p_2]$ – АДИ для параметра p, где

$$p_1 = \frac{1}{1 + x_\alpha^2/n}\left(\overline{X} + \frac{x_\alpha^2}{2n} - x_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \left(\frac{x_\alpha}{2n}\right)^2}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{1 + x_\alpha^2/n}\left(\overline{X} + \frac{x_\alpha^2}{2n} + x_\alpha \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n} + \left(\frac{x_\alpha}{2n}\right)^2}\right).$$

Оценивание параметра распределения Бернулли

Решение II способ. Выбираем $x_\alpha : \Phi(x_\alpha) = 1 - \alpha/2$.

Чтобы избежать решения квадратного уравнения можно точное выражение в знаменателе на его состоятельную оценку

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})}} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Решаем систему неравенств

$$-x_\alpha \le \sqrt{n}\frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})}} \le x_\alpha$$

и получаем АДИ: $\left[\overline{X} - x_\alpha\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})} \,/\, \sqrt{n}, \overline{X} + x_\alpha\sqrt{\overline{X}(1 - \overline{X})} \,/\, \sqrt{n}\right]$

III способ. Поскольку $\mathbb{D}_p X_1 = p(1 - p)$, для оценки знаменателя можно использовать выборочную оценку дисперсии,

$$\sqrt{n}(\overline{X} - p)/s \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Аналогично, решаем систему неравенств

$$-x_\alpha \le \sqrt{n}(\overline{X} - p)/s \le x_\alpha$$

и получаем АДИ: $[\overline{X} - x_\alpha s/\sqrt{n}, \overline{X} + x_\alpha s/\sqrt{n}]$ ∎

План

Доверительное оценивание

- В случае многомерного параметра можно говорить о доверительных интервалах для отдельных параметров и о доверительных множествах для всего параметра.
- Следует учитывать, что результаты, полученные для отдельных параметров, можно интерпретировать для каждого из параметров, но не для всех парамеров в совокупности.
- Иногда удается построить совместные доверительные интервалы для нескольких параметров или функций параметров.
- Метод множественного оценивания Шеффе устанавливает связь между доверительными эллипсоидами и совместными доверительными интервалами в случае совместного нормального распределения оценок параметров или функций параметров.

Построение доверительных множеств

Рассмотрим универсальный метод построения (асимптотических) доверительных множеств класса $\mathcal{Y}$ для d-мерного параметра $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$

- Пусть $G(X,\theta)$ функция параметра и наблюдений, удовлетворяющая условиям
  - Распределение (асимптотическое) $G(X,\theta)$ не зависит от θ.
  - Для любого α существует I_α такое, что $P_\theta(G(X,\theta) \in I_\alpha) \geq 1-\alpha$ и $\hat{\Theta} = \{\theta : G(X,\theta) \in I_\alpha\} \in \mathcal{Y}$.
- Тогда $\hat{\Theta}$ — доверительное множество уровня доверия $1-\alpha$.
- Функцию $G(X,\theta)$ – генератор доверительного множества $\hat{\Theta}$.

Построение доверительных эллипсоидов

Пусть $\hat{\theta}$ – (асимптотически) нормальная оценка θ

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0,\Sigma(\theta)),$$

$\Sigma(\theta)$ – положительно определенная $d\times d$-матрица при каждом $\theta\in\Theta$

- Если $\xi \sim \mathcal{N}(0,\Sigma)$: $\det(\Sigma)>0$, то квадратичная форма $\xi'\Sigma^{-1}\xi$ имеет χ^2_d-распределение
- Таким образом,

$$n(\hat{\theta}-\theta)'\Sigma^{-1}(\theta)(\hat{\theta}-\theta) \Rightarrow \chi^2_d.$$

- Подставляем состоятельную оценку $\widehat{\Sigma}=\Sigma(\hat{\theta})$ матрицы $\Sigma(\theta)$
  - $\hat{\theta}$ – состоятельная оценка параметра θ
  - $\Sigma(\hat{\theta})$ должна быть положительно-определенной
- Выбираем $x_\alpha : K_d(x_\alpha)=1-\alpha$.
- Получаем асимптотическое доверительное множество уровня доверия $1-\alpha$,

$$\widehat{\Theta}(X)=\{\theta\in\Theta : (\hat{\theta}-\theta)'\widehat{\Sigma}^{-1}(\hat{\theta}-\theta)\le x_\alpha/n\}$$

  - поскольку $\widehat{\Sigma}$ – положительно-определенная матрица, то данное множество является эллипсоидом

Совместные доверительные интервалы

Пусть $\theta \in \mathbb{R}^d$ – d-мерный параметр

- $\hat{\theta}$ – асимптотически нормальная оценка оценка θ

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta))$$

- $\vartheta_B = B'\theta$ – q-мерная линейная функция параметра θ
  - B – некоторая фиксированная $d \times q$ матрица
  - Тогда $\hat{\vartheta}_B = B'\theta$ – асимптотически нормальная оценка ϑ_B

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_B - \nu_B) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma_B(\theta))$$

    - $\Sigma_B(\theta) = B'\Sigma(\theta)B$ – асимптотическая матрица ковариации
- L_B — пространство линейных функций параметра ϑ_B $\{\psi : \psi = C'\vartheta_B\}$
  - При каждом выборе вектор-столбца C, $\hat{\psi}$ – асимптотически нормальная оценка ψ

$$\sqrt{n}(\hat{\psi} - \psi) \Rightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\psi}(\theta))$$

    - $\sigma^2_{\hat{\psi}}(\theta) = C'B'\Sigma(\theta)BC$
    - $\hat{\sigma}^2_{\hat{\psi}} = C'B'\Sigma(\hat{\theta})BC$ – состоятельная оценка асимптотической дисперсии ψ

Множественное оценивание

Теорема

Пусть $\alpha \in (0,1)$ – малое число; $x_\alpha : K_d(x_\alpha) = 1 - \alpha$. Тогда,

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\psi} - \hat{\sigma}_{\hat{\psi}}(x_\alpha/n)^{1/2} \le \psi \le \hat{\psi} + \hat{\sigma}_{\hat{\psi}}(x_\alpha/n)^{1/2},\ \forall\, \psi \in L_B) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \alpha.$$

Метод доверительных эллипсоидов Шеффе

- $\psi = (\psi_1(\theta), \ldots, \psi_k(\theta))$ – набор функций параметра θ, $k \ge d$ и для $i = 1, \ldots, k$:
  - $\psi_i(\theta) \in L_B$
  - $\hat{\psi}_i(X)$ – асимптотически нормальная оценка $\psi_i(\theta)$
  - $\hat{\sigma}_i^2(X)$ – оценка асимптотической дисперсии $\sqrt{n}(\hat{\psi}_i - \psi_i)$
- $x_\alpha : K_d(x_\alpha) = 1 - \alpha$
- $\Psi_i(X) = [\hat{\psi}_i - \hat{\sigma}_i(x_\alpha/n)^{1/2}, \hat{\psi}_i + \hat{\sigma}_i(x_\alpha/n)^{1/2}]$
- Тогда для любого $\theta \in \Theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\theta(\psi_1(\theta) \in \hat{\Psi}_1(X), \ldots, \psi_k(\theta) \in \hat{\Psi}_k(X)) \le 1 - \alpha$$

Множественное оценивание

Теорема (Неравенство Буля)

Пусть $A_1, \dots, A_d$ – произвольный набор событий. Тогда,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_k) \le \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_i).$$

Метод Бонферрони

- $\psi = (\psi_1(\theta), \dots, \psi_k(\theta))$ – набор произвольных функций параметра θ
- $\hat{\Psi}_i(X)$ – доверительный интервал для $\psi_i(\theta)$ уровня доверия $1 - \alpha/d$, $i = 1, \dots, k$
- Тогда для любого $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{P}_\theta(\psi_1(\theta) \in \hat{\Psi}_1(X), \dots, \psi_k(\theta) \in \hat{\Psi}_k(X)) \le 1 - \alpha$$