*Облизанов Александр, гр. 8382*

Исправлено

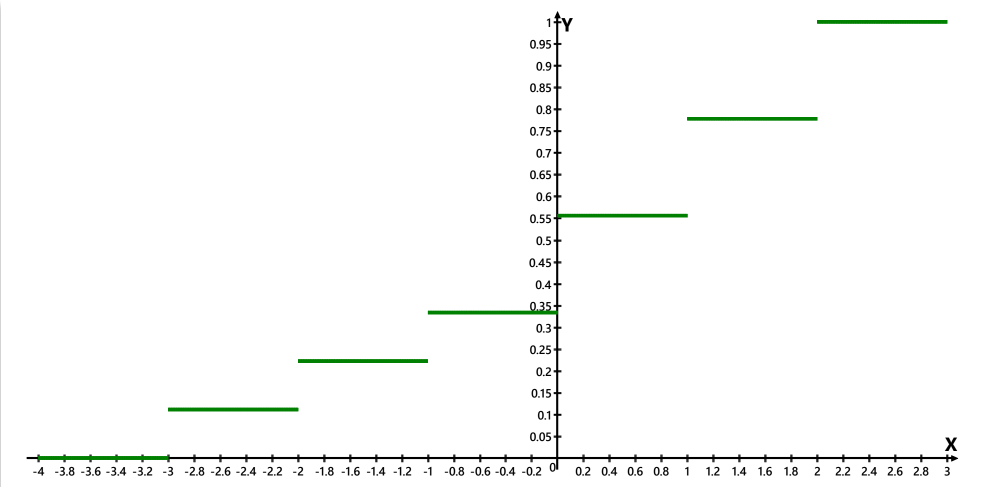
# ДЗ к 03.10.2020 по статистическому анализу

**2. Получены результаты наблюдений: $(1, -3, 0, 2, -1, 2, 0, 1, -2)$. Построить вариационный ряд и ранги. Найти эмпирическую функцию распределения, эмпирическое распределение. Найти выборочные аналоги мат ожидания, дисперсии, медианы, квартилей.**

Вариационный ряд: $(\mathbf{-3, -2, -1, 0, 0, 1, 1, 2, 2})$

Ранги: $(\mathbf{6 \div 7, 1, 4 \div 5, 8 \div 9, 3, 8 \div 9,\ 4 \div 5, 6 \div 7, 2}) \to (\mathbf{6, 1, 4, 8, 3, 9, 5, 7, 2})$

Эмпирическая функция распределения:




$$F_n(x) = \begin{cases} 0, x \le -3 \\ \frac{1}{9}, x \in (-3, -2] \\ \frac{2}{9}, x \in (-2; -1] \\ \frac{3}{9}, x \in (-1; 0] \\ \frac{5}{9}, x \in (0; 1] \\ \frac{7}{9}, x \in (1; 2] \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

Эмпирическое распределение – дискретное.

| $\boldsymbol{\xi_n}$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{P_n}$ | $1/9$ | $1/9$ | $1/9$ | $2/9$ | $2/9$ | $2/9$ | $1$ |

Мат. ожидание

$$E_{F_n}(x) = \bar{X} = -3 * \frac{1}{9} - 2 * \frac{1}{9} - 1 * \frac{1}{9} + 0 * \frac{2}{9} + 1 * \frac{2}{9} + 2 * \frac{2}{9} = 0$$

Дисперсия

$$D_{F_n}(x) = 3^2 * \frac{1}{9} + 2^2 * \frac{1}{9} + 1^2 * \frac{1}{9} + 0^2 * \frac{2}{9} + 1^2 * \frac{2}{9} + 2^2 * \frac{2}{9} = \frac{8}{3}$$

Медиана

$$Med = x_{(5)} = 0$$

Квартили

$$Q_1 = z_{\frac{1}{4}} = x_{(2)} = -2; Q_3 = z_{\frac{3}{4}} = x_{(7)} = 1$$

**3. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – выборка из распределения с плотностью распределения $p_\theta$. Найти минимальную достаточную статистику, если**

**А)**

$$\boldsymbol{p_\theta(x) = \begin{cases} \theta * e^{-\theta x}, x \ge 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}} \text{ (показательное)}$$

Перепишем плотность в виде

$$p_\theta(x) = \theta * e^{-\theta x} * \mathbf{1}_{\{x \ge 0\}}$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1^n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta * e^{-\theta x_i} * \mathbf{1}_{\{x_i \ge 0\}} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{x_i \ge 0\}} =$$

$$= \theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}\mathbf{1}_{\{x_{(1)}\geq 0\}} = g_\theta\big(T(x_1^n)\big)h(x_1^n); \quad h(\vec{x}) \equiv 1$$

Отметим, что $\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{x_i\geq 0\}}$ не равно 0 только в случае, если $\forall i: x_i \geq 0 \to x_{(1)} \geq 0$

$$\to T(x_1^n) = \left(\bar{x}, x_{(1)}\right) \sim \left(\boldsymbol{\sum_{i=1}^n x_i\,, x_{(1)}}\right) - \text{минимальная Д. С.}$$

**Б)**

$$\boldsymbol{p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{p-1}e^{-\frac{x}{b}}}{\Gamma(p)b^p}, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}, \theta = (p, b), p > 0, b > 0}$$

Перепишем плотность в виде

$$p_\theta(x) = \frac{x^{p-1}e^{-\frac{x}{b}}}{\Gamma(p)b^p} * \mathbf{1}_{\{x\geq 0\}}$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1^n, \theta) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\Gamma(p)b^p}\right) x_i^{p-1} e^{-\frac{x_i}{b}} * \mathbf{1}_{\{x_i\geq 0\}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\Gamma(p)b^p}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p-1} e^{-\frac{1}{b}\sum_{i=1}^n x_i} * \mathbf{1}_{\{x_{(1)}\geq 0\}} = g_\theta\big(T(x_1^n)\big)h(x_1^n); \quad h(x_1^n) = 1$$

$$\to \boldsymbol{T(x_1^n) = \left(\prod_{i=1}^n x_i\,, \sum_{i=1}^n x_i\right)}$$

**Г)**

$$\boldsymbol{p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta}, x \in [0, \theta] \\ 0, x \notin [0, \theta] \end{cases}} \text{ (равномерное)}$$

Перепишем плотность в виде

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} * \mathbf{1}_{\{0\leq x\leq \theta\}}$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1^n, \theta) = \frac{1}{\theta^n} * \mathbf{1}_{\{\min\{x_i\}\geq 0\}} * \mathbf{1}_{\{\max\{x_i\}\leq \theta\}} = g_\theta\big(T(x_1^n)\big)h(x_1^n)$$

$$h(x_1^n) = \mathbf{1}_{\{\min\{x_i\}\geq 0\}}, \boldsymbol{T(x_1^n) = \max\{x_i\}}$$

**4. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – выборка из дискретного распределения с плотностью распределения $p_\theta$. Найти минимальную достаточную статистику, если**

**Б)**

$$\boldsymbol{q_\theta = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta = \lambda > 0}$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1^n, \theta) = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} * \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} = g_\theta\big(T(x_1^n)\big)h(x_1^n) \to h(x_1^n) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!} \to \boldsymbol{T(x_1^n) = \sum_{i=1}^n x_i}$$

**В)**

$$\boldsymbol{q_\theta = p(1-p)^x, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta = p \in (0, 1)}$$

Функция правдоподобия

$$L(x_1^n, \theta) = p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x} = g_\theta\big(T(x_1^n)\big)h(x_1^n) \to h(x_1^n) = 1 \to \boldsymbol{T(x_1^n) = \sum_{i=1}^n x_i}$$

**Г)**

$$\boldsymbol{q_\theta = \frac{\Gamma(x+s)}{\Gamma(x+1)\Gamma(s)}p^s(1-p)^x, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta = (p, s), p \in (0, 1), s > 0}$$

Функция правдоподобия

Достаточно рассмотреть только $s \in \{2, 3, \ldots\}$. Тогда

$$L(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma(X_i + s)}{\Gamma(X_i + 1)\Gamma(s)} p^{ns} (1-p)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{s-1} (X_i + j) \frac{p^{ns}(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}}{\Gamma(s)}.$$

Для вычисления $L(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ при всех $(s, p)$ необходимо знать

$$\prod_{i=1}^{n} (X_{(i)} + j) = j^n + \sum_{s=1}^{n} j^{n-s} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} \prod_{k=1}^{s} X_{(i_k)}$$

при каждом $j \in \mathbb{N}$. Таким образом, $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ – минимальная достаточная статистика.