Проверка статистических гипотез

Малов Сергей Васильевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

23 окт. / 7 ноября 2020 г.

План

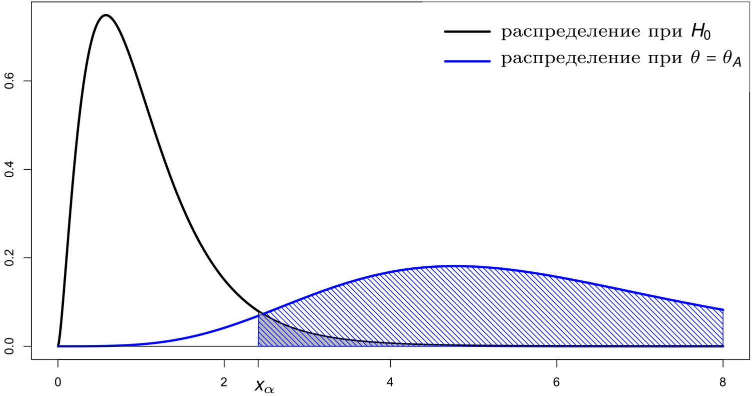
1. Мощность критерия
2. Критерии отношения правдоподобия
3. Проверка односторонней гипотезы
4. Параметрический критерий отношения правдоподобия

Мощность критерия

Мощность критерия определяется при каждом значении $\theta \in \Theta_A$ и зависит от уровня значимости критерия

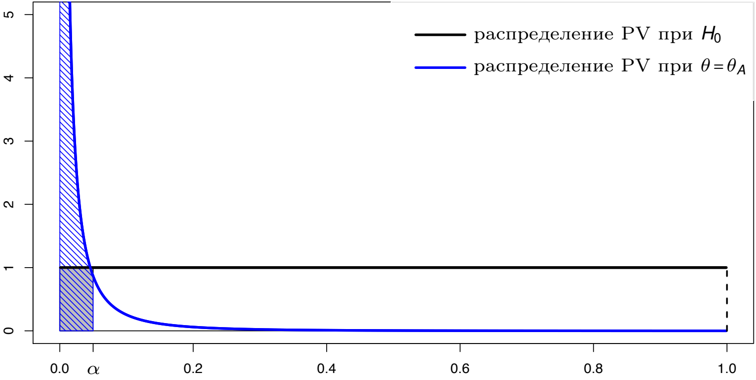
- Уменьшение уровня значимости влечет уменьшение мощности соответствующего критерия
- Для нерандомизованного критерия ϕ, построеннного на базе статистики T с доверительным множеством $\{X : T(X) \in I_\alpha\}$ мощность вычисляется по формуле $b_\phi(\theta) = P_\theta(T(X) \in I_\alpha)$
  - для распределений T с носителем $\mathbb{R}_+$ характен выбор доверительного множества $\{X : T(X) \le x_\alpha\}$
  - в частном случае доверительного множества $\{X : T(X) \le x_\alpha\}$,
$$b_\phi(\theta) = 1 - F_{T,\theta}(F_0^{-1}(1 - x_\alpha)), \ \theta \in \Theta_A.$$
  - F_0 – функция распределения T при основной гипотезе
- Исходя из распределения P-значения при альтернативе, мощность вычисляется следующим образом
$$b_\phi(\theta) = P_\theta(PV \le \alpha), \ \theta \in \Theta_A.$$

Различение гипотез при фиксированной альтернативе $\theta_A \in \Theta_A$ с использованием статистики критерия



Мощность критерия

Различение гипотез при фиксированной альтернативе $\theta_A \in \Theta_A$ с использованием P-значения



- Очевидно, что рассматриваемый критерий несмещенный

Вычисление достаточного объема выборки

Недостаточное как и избыточное количество наблюдений неблагоприятно влияет на интерпретацию результатов проверки статистических гипотез

- При недостаточном количестве наблюдений мощность мала, поэтому значимый результат часто простое стечение обстаятельств
- При избыточном количестве наблюдений статистический критерий может улавливать значимые, но не существенные отличия от основной гипотезы или расматриваемой модели статистического эксперимента
- Постановке статистического эксперимента часто предшествует исследование по определению достаточного объема выборки

Вычисление достаточного объема выборки

Постановка задачи определения достаточного объема выборки для проверки основной гипотезы $H_0 : \theta \in \Theta_0$ при альтернативе $H_A : \theta \in \Theta_A$ с использованием известного критерия.

- Рассматривается асимптотическая модель статистического эксперимента
  - вводится набор статистических критериев $\phi = \{\phi\}_{i \in \mathbb{N}}$, построенных по определенному правилу
  - возможны точный или асимптотический подходы
- Выбирается уровень значимости критерия $\alpha \in (0, 1)$
  - $\sup_{\theta \in \Theta_0} b_{\phi_n}(\theta) \le \alpha$ при каждом n
- Выбирается область существенного отклонения $\Theta_A^* \subseteq \Theta_A$ от основной гипотезы
  - если $\mathrm{dist}(\Theta_0, \Theta_A) = 0$ или при проверке значимости отклонений от H_0 данное действие является необходимым
- Выбирается граница надежности исследования β
- Находится наименьший объем выборки n_0: $\inf_{\theta \in \Theta_A^*} b_{\phi_{n_0}}(\theta) \ge \beta$

При наличии достаточного объема выборки n_0 критерий ϕ_{n_0} гарантирует успешное выявление существенного отклонения с вероятностью, не меньшей чем β

План

1. Мощность критерия
2. Критерии отношения правдоподобия
3. Проверка односторонней гипотезы
4. Параметрический критерий отношения правдоподобия

Параметрический и непараметрический подходы

Различают параметрические и непараметрические гипотезы

- Гипотеза параметрическая, если она допускает представление в виде $H : \theta \in \Theta^* \subseteq \mathbb{R}^d$
- В остальных случаях гипотеза непараметрическая
- Параметрическая гипотеза может быть сформулирована и в непараметрической модели
  - формально, непараметрическая модель искусственно адаптируется к семипараметрической
- Тип критерия определяется типом основной гипотезы и альтернативы
  - критерий параметрический, если основная и альтернативная гипотезы параметрические
  - критерий непараметрический, если хотя бы одна из гипотез непараметрическая

Проверка простой гипотезы при простой альтернативе

Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ – статистический эксперимент

- $H_0 : \theta = \theta_0$ – простая основная гипотеза
- $H_A : \theta = \theta_A$ – простая альтернатива
- Не умаляя общности считаем, что $\mathcal{P} = \{P_{\theta_0}, P_{\theta_1}\}$
- Введем статистику отношения правдоподобия

$$LR(X, \theta_1, \theta_0) = \frac{L(X; \theta_1)}{L(X; \theta_0)} = \frac{p_{\theta_1}(X)}{p_{\theta_0}(X)}.$$

  - $p_{\theta_0(X)} = \frac{dP_{\theta_0}}{d\mu}$ и $p_{\theta_1} = \frac{dP_{\theta_0}}{d\mu}$ – плотности распределений по отношению к доминирующей мере μ
  - обычно μ – мера Лебега или считающая мера
  - в качестве меры μ можно выбрать $(P_{\theta_0} + P_{\theta_1})/2$
  - значение статистики отношения правдоподобия не зависит от доминирующей меры

Теорема (Лемма Неймана–Пирсона)

(i). Существует наиболее мощный критерий уровня значимости α.

(ii). Данный критерий представляется в виде

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } LR(x) > c; \\ p, & \text{при } LR(x) = c; \\ 0, & \text{при } LR(x) < c, \end{cases}$$

где константа c и вероятность $p \in [0, 1)$ находятся из уравнения

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\phi(X) = P_{\theta_0}(LR(X) > c) + p\,P_{\theta_0}(LR(X) = c) = \alpha.$$

(iii). В области $LR(x) \neq c$ наиболее мощный критерий ϕ определен однозначно.

- Константа c находится однозначно
- Если $P_{\theta_0}(LR(X) = c) > 0$, то константа $p \in [0, 1)$ находится однозначно

Фундаментальная лемма Неймана–Пирсона

Доказательство. (ii). Пусть ϕ^*– произвольный критерий уровня значимости α. Рассмотрим множество $S = S_+ \cup S_-$, где $S_+ = \{x : \phi(x) > \phi^*(x)\}$, $S_- = \{x : \phi(x) < \phi^*(x)\}$. Тогда, поскольку $1 = \phi(x) \geq \phi^*(x)$ при $p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x) > 0$, и $0 = \phi(x) \leq \phi^*(x)$ при $p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x) < 0$,

$$\mathbb{E}_{\theta_1}\phi - \mathbb{E}_{\theta_1}\phi^* - c(\mathbb{E}_{\theta_0}\phi - \mathbb{E}_{\theta_0}\phi^*) = \int_{\mathfrak{X}} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x)\mu(dx) =$$

$$= \int_{S_+ \cup S_-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x))\mu(dx) \geq 0.$$

Далее отметим, что $\mathbb{E}_{\theta_0}\phi - \mathbb{E}_{\theta_0}\phi^* \geq 0$. Следовательно, критерий ϕ – наиболее мощный.

(iii). Пусть ϕ, ϕ^* наиболее мощные критерии;

$$S_\delta = \{x : (\phi(x) - \phi^*(x))(p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x)) > \delta\}$$

Тогда,

$$0 = \int_{S_+ \cup S_-} (\phi(x) - \phi^*(x))(p_{\theta_1}(x) - cp_{\theta_0}(x))\mu(dx) \geq \delta\mu(S_\delta)$$

Далее выбираем $\delta = \delta_n = 1/n$ ($S_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_{1/n}$) и переходим к пределу $\mu(S_0) = \lim_{n\to\infty} \mu(S_{1/n}) = 0$ ■

Построение наиболее мощного критерия

Задача

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения Бернулли $\mathrm{Bi}(\theta, 1)$. Построить наиболее мощный критерий проверки $H_0 : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_A : \theta = \theta_1$ уровня значимости α $(\theta_0 > \theta_1)$.

Решение. Функция правдоподобия имеет вид

$$L(X;\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n X_i}(1-\theta)^{(n-\sum_{i=1}^n X_i)}.$$

Тогда, статистика отношения правдоподобия равна

$$LR(X) = \frac{L(X;\theta_1)}{L(X;\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)^{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^n.$$

В силу монотонности статистики $LR(X)$ отеносительно МДС $\overline{X}$

$$LR(X) > c \Leftrightarrow \overline{X} < c^*$$

$$LR(X) < c \Leftrightarrow \overline{X} > c^*$$

при $c^* = \dfrac{\log c - n(\log(1-\theta_1) - \log(1-\theta_0))}{\log(\theta_1(1-\theta_0)) - \log(\theta_0(1-\theta_1))}$.

Построение наиболее мощного критерия

Решение (продолжение). Наиболее мощный критерий удобно записать в терминах $\overline{X}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } \overline{X} < c^*; \\ p, & \text{при } \overline{X} = c^*; \\ 0, & \text{при } \overline{X} > c^*. \end{cases}$$

Для нахождения c^* воспользуемся формулой Бернулли

$$P_{\theta_0}(\overline{X} \le c^*) = P(n\overline{X} \le nc^*) = \sum_{i=0}^{[nc^*]} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i},$$

где $[nc]$ – наибольшее целое число, меньшее nc. Константа c^* находится из соотношения

$$\sum_{i=0}^{n^*-1} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i} \le \alpha < \sum_{i=0}^{n^*} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i},$$

где $n^* = [nc^*]$ – целое число. В свою очередь, константа p находится из соотношения

$$p = (\alpha - \textstyle\sum_{i=0}^{n^*-1} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i})/(C_n^{n^*} \theta^{n^*} (1-\theta)^{n-n^*}).$$

Наиболее мощный критерий построен. ∎

Построение наиболее мощного критерия

Единственность наиболее мощного критерия

- Наиболее мощный критерий определен однозначно на множестве $\{X : LR(X) \neq c\}$
  - лемма Неймана–Пирсона п.3
  - наиболее мощный критерий единственный, если $P_{\theta_0}(LR(X) = c) = 0$
- В общем случае, на множестве $\{X : LR(X) = c\}$ наиболее мощный критерий не всегда определен однозначно
  - в последнем примере $\{X : LR(X) = c\} \Leftrightarrow \{\overline{X} = c^*\}$
  - пусть $p_0 = 1/2$, $n = 2k$ – четное число; c^* – нечетное
  - построим нерандомизованный критерий ϕ_1: $\phi_1(X) = \phi(X)$ при $\overline{X} \neq c^*$ и

$$\phi_1(X) = \begin{cases} 1, \ \sum\limits_{i=1}^{k} X_i > \sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i, \ \overline{X} = c^*; \\ 0, \ \sum\limits_{i=1}^{k} X_i < \sum\limits_{i=k+1}^{n} X_i, \ \overline{X} = c^*. \end{cases}$$

  - $\mathbb{E}_{\theta_A}(\phi_1) = \mathbb{E}_{\theta_A}(\phi) \Rightarrow \phi_1$ – наиболее мощный критерий.

План

1 Мощность критерия

2 Критерии отношения правдоподобия

3 Проверка односторонней гипотезы

4 Параметрический критерий отношения правдоподобия

Постановка задачи

Пусть $\theta_* \in \Theta \subseteq \mathbb{R}$ – фиксированное значение параметра

- Поставим задачу проверки
  - основной гипотезы $H_0 : \theta \leq \theta_*$
  - при альтернативе $H_A : \theta > \theta_*$.

Определение

Будем говорить, что семейство $\mathcal{P}$ имеет монотонное (относительно θ_* и T) отношение правдоподобия, если при каждом $\theta \in \Theta : \theta < \theta_*$, статистика отношения правдоподобия $LR(X; \theta, \theta_*)$ является монотонной функцией некоторой одномерной статистики $T(X)$ $(LR(X; \theta, \theta_0) = LR^*(T(X); \theta, \theta_0))$.

- В этом случае решение уравнения $LR(x; \theta, \theta_*) < c$ может быть записано с использованием статистики T
  - в виде $T < c^*$, если LR^* возрастает
  - в виде $T > c^*$, если LR^* убывает

Наиболее мощный критерий

Теорема

Пусть семейство $\mathcal{P}$ имеет монотонное отношение правдоподобия относительно θ_* и некоторой статистики T (для определенности считаем, что LR^* возрастает). Тогда существует равномерно наиболее мощный критерий проверки гипотезы H_0 при альтернативе H_A, который имеет вид

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad T(X) > c; \\ p, & \text{если} \quad T(X) = c; \\ 0, & \text{если} \quad T(X) < c, \end{cases}$$

где константы c и $p \in [0, 1)$ выбираются из уравнения

$$\sup_{\theta \le \theta_*} \mathbb{E}_\theta \phi(X) = \mathbb{E}_{\theta_*} \phi(X) = P_{\theta_*}(T(X) > c) + p P_{\theta_*}(T(X) = c) = \alpha.$$

- Построенный в теореме критерий – единственный наиболее мощный T– измеримый с точностью до множеств нулевой вероятности

Наиболее мощный критерий

- В доказательстве изучается поведение $b_\phi(\theta) = \mathbb{E}_\theta \phi(X)$
  - $b_\phi(\theta)$, $\theta \in \Theta_0$ – вероятность ошибки I рода
  - $b_\phi(\theta)$, $\theta \in \Theta_A$ – мощность критерия
- При доказательстве используются лемма Неймана–Пирсона и несмещенность соответствующего наиболее мощного критерия при любом уровне значимости, любой основной гипотезе и любой альтернативе

Доказательство. По лемме Неймана – Пирсона, критерий ϕ является наиболее мощным уровня значимости $b_\phi(\theta_0)$ для проверки гипотезы $H_0^* : \theta = \theta_0$ при альтернативе $H_A^* : \theta = \theta_1$ для любых $\theta_0, \theta_1 \in \Theta : \theta_0 < \theta_1$. Тогда, в силу несмещенности наиболее мощного критерия, $b_\phi(\theta_0) \le b_\phi(\theta_1)$. Следовательно, $\sup_{\theta \le \theta_*} b_\phi(\theta) = b_\phi(\theta_*)$. Остается отметить, что, согласно лемме Неймана – Пирсона, для любого значения $\theta_+ > \theta_*$ рассматриваемый критерий остается наиболее мощным уровня значимости α для проверки гипотезы $H_0^+ : \theta = \theta_*$ при каждой альтернативе $H_A^+ : \theta = \theta_+$, $\theta_+ > \theta_*$. Следовательно, ϕ – равномерно наиболее мощный критерий уровня значимости α для проверки H_0 при альтернативе H_A ∎

Экспоненциальные семейства

Пусть $\mathcal{P}$ – однопараметрическое экспоненциальное семейство с плотностями
$$p_\theta(x) = h(x)\exp(a(\theta)\delta(x) + r(\theta)).$$

- Отношение правдоподобия равно
$$LR(x,\theta,\theta_*) = \exp\big((a(\theta) - a(\theta_*))\delta(x) + (r(\theta) - r(\theta_*)\big)$$
- Отношение правдоподобия монотонно зависит от $\delta(X)$
  - возрастает, если $a(\theta) - a(\theta_*) > 0$
  - убывает, если $a(\theta) - a(\theta_*) < 0$
- Более того, существует равномерно наиболее мощный критерий уровня значимости α для проверки
  - интервальной основной гипотезы $H_0 : \theta \in [\theta_1, \theta_2]$
  - при альтернативе $H_1 : \theta \notin [\theta_1, \theta_2]$
$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } c_1 < \delta(X) < c_2, \\ p_i, & \text{если } \delta(X) = c_i, \\ 0, & \text{если } \delta(X) \notin [c_1, c_2], \end{cases}$$
  - константы c_i, p_i, $i = 1, 2$, выбираются из уравнений
$$\mathbb{E}_{\theta_1}\phi(X) = \mathbb{E}_{\theta_2}\phi(X) = \alpha.$$

Односторонняя гипотеза

Задача

Для целей некоторого химического производства желательно, чтобы вода содержала не более одной бактерии на единицу объема $v = 1$. Для проверки чистоты воды отбирается n проб объема v. Каждая из этих проб добавляется в пробирку с питательной средой. Если проба была загрязнена (т. е. содержала хоть одну бактерию), то раствор в соответствующей пробирке потемнеет. Требуется построить оптимальный критерий контроля качества воды.

Решение. (i). Модель эксперимента. Считаем, что бактерии случайным образом распределены по исходному объему жидкости.

- Концентрацией ν будем называть среднее число бактерий на единицу объема.

Положим, что $m = \nu V$ бактерий случайным образом распределены в объеме V. Тогда вероятность того, что в отобранной пробе объема $v = 1$ будет в точности k бактерий, вычисляется по формуле Бернулли

$$P(\mu_m = k) = C_m^k p^k (1 - p)^{m-k} \approx \lambda^k e^{-\lambda} / k!$$

- $p = v/V \Rightarrow \lambda = mp = \nu V(v/V) = \nu v = \nu$
- приближенное равенство получено по теореме Пуассона
- при $v << V$ можно считать, что отбор проб происходит независимо

Односторонняя гипотеза

Решение (продолжение). (ii). Посатановка задачи. Считаем, что исходный набор наблюдений представляет собой выборку из распределения Бернулли

- успех – проба чистая
- вероятность успеха $p = e^{-\lambda}$.

Ставим задачу проверки

- основной гипотезы $H_0 : p \geq e^{-1}$ $(\nu \leq 1)$
- при альтернативе $H_1 : p < e^{-1}$ $(\nu > 1)$

(iii). Построение критерия. Функция правдоподобия:

$$L(x;\, p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1 - p)^{(1 - x_i)} = p^{\sum_{k=1}^{n} x_k} (1 - p)^{(n - \sum_{k=1}^{n} x_k)}.$$

Тогда статистика отношения правдоподобия представляется в виде

$$LR(X; p, p_*) = \Big(p(1 - p_*)/(p_*(1 - p))\Big)^{\sum_{k=1}^{n} X_k} \Big((1 - p)/(1 - p_*)\Big)^{n}.$$

- монотонно убывает по $\sum_{k=1}^{n} X_k$ при $p < p_*$

Односторонняя гипотеза

Решение (продолжение). Равномерно наиболее мощный критерий:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{k=1}^n X_k < x_\alpha; \\ q_\alpha, & \text{если } \sum_{k=1}^n X_k = x_\alpha; \\ 0, & \text{если } \sum_{k=1}^n X_k > x_\alpha, \end{cases}$$

Далее отметим, что $\sum_{k=1}^n X_k$ имеет $\mathrm{Bi}(n, p)$ распределение, поэтому

$$\mathbb{E}_{\theta_*}\phi(x) = \sum_{i<x_\alpha} C_n^i \theta_*^i (1-\theta_*)^{n-i} + qC_n^{x_\alpha}\theta_*^{x_\alpha}(1-\theta_*)^{n-x_\alpha}$$

- константа $x_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ находится из соотношения
$$\sum_{i=0}^{x_\alpha - 1} C_n^i \theta_*^i (1-\theta_*)^{n-i} \le \alpha < \sum_{i=0}^{x_\alpha} C_n^i \theta_*^i (1-\theta_*)^{n-i},$$
- константа $q_\alpha \in [0, 1)$ находится из соотношения
$$q_\alpha = (\alpha - \sum_{i=0}^{x_\alpha - 1} C_n^i \theta_*^i (1-\theta_*)^{n-i})/(C_n^{x_\alpha}\theta_*^{x_\alpha}(1-\theta_*)^{n-x_\alpha})).$$

Наиболее мощный критерий построен. ■

- Нерандомизованный асимптотический критерий можно получить с использованием интегральной теоремы Муавра–Лапласа (ЦПТ)
$$x_\alpha = n\theta^* + \Phi^{-1}(\alpha)\sqrt{n\theta_*(1-\theta_*)}; \quad q_\alpha = 0.$$

План

1. Мощность критерия
2. Критерии отношения правдоподобия
3. Проверка односторонней гипотезы
4. Параметрический критерий отношения правдоподобия

Построение асимптотического критерия

Постановка задачи проверки статистических гипотез

- Параметрическое множество $\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$
  - обычно $\Theta = \mathbb{R}^k$
- Основная гипотеза $H_0 : \theta \in \Theta_0$, $\Theta_0 \subseteq \Theta$ и $\dim(\Theta_0) = d$, $d < k$
  - если $\Theta = \mathbb{R}^k$, то обычно Θ_0 – линейное подпространство размерности d пространства $\mathbb{R}^k$.
- Альтернатива может быть
  - $H_A : \theta \notin \Theta_0$ – проверка значимости
  - если $\Theta_A \subset \mathbb{R}^k$: $\mathrm{dist}(\Theta_0, \Theta_A) > \delta$ – фиксированная альтернатива
  - если $\Theta_A = \Theta_{A,n} \subset \mathbb{R}^k$: $\mathrm{dist}(\Theta_0, \Theta_{A,n}) = \delta_n$ – стягивающаяся альтернатива

Статистика отношения правдоподобия

$$\lambda_n = LR(X; \Theta_0, \Theta) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(X;\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(X;\theta)}.$$

Построение асимптотического критерия

Теорема (Уилкс)

Пусть $(\mathfrak{X}, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ – статистический эксперимент,

(i). $\Theta = \mathbb{R}^k$

(ii). выполнен ряд условий регулярности эксперимента

(iii). $H_0 : \theta \in \Theta_0$, $\Theta_0 = \mathbb{R}^d$ – линейное подпространство Θ

Тогда при каждом $\theta \in \Theta_0$

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(-2 \ln \lambda_n < t) = P(\chi^2_{k-d} < t) = K_{k-d}(t), \quad t \geq 0,$$

где K_{k-d} – функция распределения χ^2_{k-d}.

- Теорема остается верной в присутствии мешающего параметра
- Если $\mathrm{dist}(\Theta_0, \Theta \setminus \Theta_0) > 0$, то $G \to 0$ по вероятности P_θ, $\theta \in \Theta_0$ при $n \to \infty$
- Критерий отошения правдоподобия применим и для некоторых гипотез одностороннего типа
  - статстика $G(X) = -2 \ln \lambda_n$ имеет другое асимптотическое распределение при $\theta \in \Theta_0$, зависящее от формы границы Θ_0.

Построение асимптотического критерия

Типичная постановка задачи проверки значимости

- $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)' \in \mathbb{R}_k$ – d-мерный параметр
- основная гипотеза $H_0 : C\theta = 0$
  - C – некоторая матрица
  - в частности, можно приравнять к нулю какие-то компоненты параметра
- Статистика критерия

$$G(X) = -2\Big(\ln(\sup_{\{\theta: C\theta=0\}} L(X;\theta)) - \ln(\sup_{\theta\in\mathbb{R}^k} L(X;\theta))\Big)$$

- В условиях теоремы Уилкса получаем асимптотический критерий

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \; G(X) \le x_\alpha, \\ 1, & \text{если } \; G(X) > x_\alpha; \end{cases}$$

  - $x_\alpha : K_{k-d}(x_\alpha) = 1 - \alpha$.

Построение асимптотического критерия

Упражнение

Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из двухпараметрического нормального распределения $N(\theta, \sigma^2)$. Построить критерий отношения правдоподобия проверки значимости отклонений от основной гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$.

Решение. Функция правдоподобия:

$$L_n(X;\, \theta,\, \sigma^2) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2\Big).$$

Отметим, что

- $\sup_{\{\theta=\theta_0,\sigma^2>0\}} L_n(X;\, \theta,\, \sigma^2) = L_n(X;\, \theta_0, s_0^2),\ s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \theta_0)^2.$
- $\sup_{\{\theta\in\mathbb{R},\sigma^2>0\}} L_n(X;\, \theta,\, \sigma^2) = L_n(X;\, \overline{X},\, s^2)$

Тогда

$$G_n(X) = -2\ln\frac{(s\sqrt{2\pi})^n\exp(-n/2)}{(s_0\sqrt{2\pi})^n\exp(-n/2)} = n\ln(s_0^2/s^2).$$

Поскольку $s^2 = s_0^2 - (\theta_0 - \overline{X})^2$,

квадрат статистики Стьюдента

$$G_n(X) = n\ln\left(\frac{s^2 + (\overline{X} - \theta_0)^2}{s^2}\right) = n\ln\left(1 + \boxed{\frac{(\overline{X} - \theta_0)^2}{s^2}}\right) \Rightarrow_{H_0} \chi_1^2$$

Критерий отношения правдоподобия получаем на базе статистики G_n. ■