Модель линейной регрессии

Малов Сергей Васильевич

Санкт-Петербургский электротехнический университет

21/28 ноября 2020 г.

План

Модель линейной регрессии

Вероятностная интерпретация

- Наблюдение (Y, z)
  - Y – наблюдаемая величина (исследуемая характеристика)
  - $\boldsymbol{z}$ – ковариата (набор сопутствующих факторов)
- Регрессия величины Y по z:
$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}).$$
- Регрессионная модель:
$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{z}) = f_\theta(\boldsymbol{z}),$$
  f_θ – функция, выбираемая исследователем.
- Линейная регрессионная модель
$$\mathbb{E}(Y|\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})'\boldsymbol{\beta}$$
  - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$ – вектор регрессоров $1 \times m$, определяемый значением ковариаты
  - $\boldsymbol{\beta}$ – $1 \times m$ вектор параметров регрессии

План

Модель линейной регрессии

Оценивание

- Статистические данные $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{z})$
  - $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ – $(n \times 1)$ вектор-столбец наблюдений
  - $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n)$ – соответствующие ковариаты
- Линейная регрессионная модель

$$\mathbb{E}_\theta(Y|\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})'\boldsymbol{\beta}$$

  - $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z})$ – вектор регрессоров $(m \times 1)$, определяемый значением ковариаты
  - $\boldsymbol{\beta}$ – $(m \times 1)$ вектор параметров регрессии
- Статистическая модель:

$$\mathbb{E}_\theta(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{z}) = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbb{V}\mathbf{ar}(\boldsymbol{Y}) = \sigma^2\mathbf{I}$$

  - $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)'$ – $(n \times 1)$ вектор-столбец наблюдений
  - $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n)$ – соответствующие ковариаты
  - $\mathbf{X} = (\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}_1), \ldots, \boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}_n))'$ – матрица регрессоров

Метод наименьших квадратов (МНК)

- Альтернативная форма записи модели линейной регрессии:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}, \qquad \mathbb{E}_\theta \boldsymbol{e} = 0, \qquad \mathbb{V}\mathbf{ar}_\theta \boldsymbol{e} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

- Метод наименьших квадратов

$$SS(\boldsymbol{\beta}) = \|\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}\|^2 = (\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}) \to \min_{\boldsymbol{\beta}}$$

- В явном виде

$$SS(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \Big(Y_i - \sum_{j=1}^m x_{ji}\beta_j\Big)^2$$

- Дифференцируем, получаем нормальные уравнения

$$\frac{\partial SS(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_s} = -2\sum_{i=1}^n x_{si}\Big(Y_i - \sum_{j=1}^m x_{ji}\beta_j\Big) = 0, \ s = 1, \ldots, m$$

Модель линейной регрессии. Оценивание.

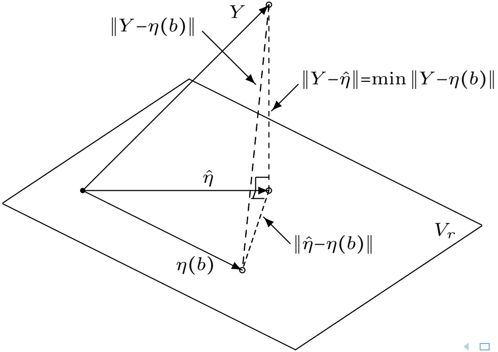
- Нормальные уравнения:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}\,\boldsymbol{Y}$$

- Решение системы нормальных уравнений в регулярном случае:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}\mathbf{X}')^{-1}\mathbf{X}\,\boldsymbol{Y}$$

- Графическая интерпретация:



Каноническая форма записи модели

Используем линейное представление

- $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_r$–ортонормированный базис (ОНБ) пространства V_r
  - построение ОНБ по методу Грама—Шмидта
- $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ – ОНБ пространства V_n
- Выбираем $\boldsymbol{Z} = \mathbf{P}\boldsymbol{Y}$, где $\mathbf{P} = (\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n)'$
- Очевидно, что $\mathbb{E}(\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} \in V_r$
- Тогда $\mathbb{E}(\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{Y}) = 0$ для любого $i > r$ – каноническая форма.
- Если $\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{A}_i Z_i$, то $\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{Pr}_{V_r}\boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^r \boldsymbol{A}_i Z_i \Rightarrow$ $\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=r+1}^n \boldsymbol{A}_i Z_i$ и $\|\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 = \|\sum_{i=r+1}^n \boldsymbol{A}_i Z_i\|^2 = \sum_{i=r+1}^n Z_i^2$
  - $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_n$ – ОНБ
- В силу ортогональности $\mathbf{P}$: $\mathbb{D}(Z_i) = \sigma^2$ и $\mathbb{V}\mathbf{ar}(Z) = \sigma^2\mathbf{I}$.

Модель линейной регрессии. Оценивание.

Оценивание параметра дисперсии σ^2

- Оценка параметра σ^2: $s^2 = SS_e/(n-r)$
  - $SS_e = SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \|\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 = (\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}})$
  - r – ранг матрицы $\mathbf{X}$
  - в регулярном случае $r = m$ – число параметров $\boldsymbol{\beta}$.
- Используем каноническое представление
  - С учетом соотношений $\mathbb{E}(Z_i) = 0$ при $i > r$ получаем, что

    $\mathbb{E}\|\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}\|^2 = \mathbb{E}(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbb{D}\left(\sum_{i=r+1}^{n} Z_i^2\right) = (n-r)\sigma^2$
- s^2 – несмещенная оценка дисперсии

ДНО функции параметра

Оценивание линейных функций параметра $\boldsymbol{\beta}$

- Линейная функция параметра

$$\psi(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$$

$\mathbf{C}$ – $(m \times q)$-матрица (q – длина функции параметра)

Определение

Будем говорить, что функция параметра $\psi(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$ допускает несмещенное оценивание (ДНО), если существует линейная несмещенная оценка $L(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{B}\boldsymbol{Y}$, такая, что $\mathbb{E}_\beta(L(\boldsymbol{Y})) = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$ для любого значения параметра $\boldsymbol{\beta}$.

- Если матрица $\mathbf{XX}'$ неособенная, то любые линейные функции параметра допускают несмещенное оценивание $\hat{\psi} = C'\widehat{\boldsymbol{\beta}}$
- Несмещенная оценка ДНО функции параметра:

$$\hat{\psi} = C'\widehat{\boldsymbol{\beta}} = A\boldsymbol{Y}.$$

ДНО функции параметра

В общем случае

Теорема (О ДНО функциях параметра)

Для того чтобы функция параметра $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$ *допускала несмещенное оценивание необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{C}' = \mathbf{A}\mathbf{X}'$ *при некотором выборе* $(n \times r)$*-матрицы* $\mathbf{A}$*.*

Доказательство. Функция параметра $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{C}^T\boldsymbol{\beta}$ допускает несмещенное оценивание тогда и только тогда, когда существует линейная несмещенная оценка (ЛНО) $L(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{B}\boldsymbol{Y}$:

$$\mathbb{E}_\beta L(\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}_\beta \mathbf{B}\boldsymbol{Y} = \mathbf{B}\,\mathbb{E}_\beta\,\boldsymbol{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta} \text{ при любом } \boldsymbol{\beta},$$

а это равносильно соотношению $\mathbf{C}' = \mathbf{B}\mathbf{X}'$ $(\mathbf{A} = \mathbf{B})$. ∎

- Функция параметра $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$ допускает несмещенное оценивание $\Leftrightarrow$ $\mathbf{C}'(\mathbf{I} - \mathbf{H}) = 0$, где $\mathbf{H} = \mathbf{S}^{-}\mathbf{S}$, $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}'$.
- Несмещенная оценка ДНО функции параметра:

$$\hat{\psi} = C'\widehat{\boldsymbol{\beta}} = A\boldsymbol{Y}.$$

ДНО функции параметра

Утверждение

Пусть $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_k)^T = \mathbf{C}^T\boldsymbol{\beta}$ — *ДНО-функция параметра,* $V_r = \mathcal{L}(\mathbf{X})$*. Тогда существует единственная линейная несмещенная оценка* $\boldsymbol{\psi}$ *вида* $\mathbf{A}\,\boldsymbol{Y}$*, такая, что* $\mathcal{L}(\mathbf{A}) \subset V_r$*,* $\mathbf{A} = (\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_k)^T$*. Если* $\mathbf{A}^*\,\boldsymbol{Y}$*,* $\mathbf{A}^* = (\boldsymbol{A}_1^*, \ldots, \boldsymbol{A}_k^*)^T$ — *другая линейная несмещенная оценка* $\boldsymbol{\psi}$*, то* $\boldsymbol{A}_i = \mathrm{Pr}_{V_r}\,\boldsymbol{A}_i^*$ *для всех* $i = 1, \ldots, k$*.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\psi}$ — ДНО-функция параметра. Тогда существует $\boldsymbol{A}_i^* \in V_n$: $\mathbb{E}(\boldsymbol{A^*}'_i\boldsymbol{Y}) = \psi_i$, $i = 1, \ldots, k$. Пусть $\boldsymbol{A}_i^* = \boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{B}_i$, $\boldsymbol{A}_i \in V_r$, $\boldsymbol{B}_i \perp V_r$. Ортогональность влечет соотношение $\mathbb{E}(\boldsymbol{B}_i^T\,\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{B}_i'\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}) = 0$. Получаем, что $\psi_i = \mathbb{E}(\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{Y}) + \mathbb{E}(\boldsymbol{B}_i'\boldsymbol{Y}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{Y})$. Следовательно, $\boldsymbol{A}_i'\boldsymbol{Y}$ — линейная несмещенная оценка ψ_i, $\boldsymbol{A}_i \in V_r$.

Пусть $\boldsymbol{A}_i^{*T}\,\boldsymbol{Y}$ — произвольная линейная несмещенная оценка ψ_i. Тогда существует линейная несмещенная оценка $\boldsymbol{A}_i$: $(\boldsymbol{A}_i^* - \boldsymbol{A}_i) \perp V_r$. Предположим, что $\boldsymbol{A}_i^* \in V_r$. Тогда $\boldsymbol{A}_i^* - \boldsymbol{A}_i \in V_r$ влечет $\boldsymbol{A}_i^* - \boldsymbol{A}_i = 0$. ∎

ДНО функции параметра

Теорема (Гаусса–Маркова)

В модели линейной регрессии любая ДНО-функция параметра $\psi = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{C} = (c_1, \dots, c_m)'$, имеет НРМД-оценку $\hat{\psi}$. Эта оценка единственна в классе линейных несмещенных оценок и равна $\hat{\psi} = \sum_{j=1}^m c_j \hat{\beta}_j$, где $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ – произвольное решение системы нормальных уравнений (НУ).

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}^{*\prime} Y$ – произвольная линейная несмещенная оценка функции ψ. Тогда

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{A}^{*\prime}\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}'\mathbb{V}\mathbf{ar}(\boldsymbol{Y})\boldsymbol{A}^{*\prime} = \sigma^2 \boldsymbol{A}^{*\prime}\boldsymbol{A}^* = \sigma^2 \|\boldsymbol{A}^*\|^2.$$

Было доказано, что существует несмещенная оценка $L(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{A} \in V_r$ и $\boldsymbol{A} = = \mathrm{Pr}_{V_r}(\boldsymbol{A}^*)$. Тогда $\|\boldsymbol{A}^*\|^2 = \|\boldsymbol{A}\|^2 + \|\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A}\|^2$. Таким образом,

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{A}^{*\prime}\boldsymbol{Y}) = \mathbb{D}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}) + \mathbb{D}\big((\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A})'\boldsymbol{Y}\big) \geq \mathbb{D}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}).$$

Итак, $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y}$ – единственная НРМД-оценка.

Пусть $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ — произвольное решение системы НУ. Тогда $\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathrm{Pr}_{V_r}\boldsymbol{Y}$. Следовательно, $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 0$ и в силу несмещенности $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}'\mathbf{X}'\boldsymbol{\beta}$ при любом $\boldsymbol{\beta}$ (т. е. $\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{A}'\mathbf{X}'$) получаем, что $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}'\mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{C}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$. ∎

План

Свойства несмещенных оценок

Для построения доверительных интервалов и проверки гипотез требуются дополнительные предположения.

- Классические предположения

$$\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{X}^T\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}).$$

  - Каждая из величин $Y_1, \dots Y_n$ имеет нормальное распределение
  - Дисперсии $Y_1, \dots Y_n$ совпадают и равны σ^2
  - Величины $Y_1, \dots Y_n$ независисмы

- Эквивалентные предположения об ошибках

$$\boldsymbol{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}),$$

Свойства несмещенных оценок

Теорема (Доверителього оценивания)

В сделанных предположениях оценка $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ имеет $\mathcal{N}(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\Gamma}_{\hat{\boldsymbol{\psi}}})$-распределение и не зависит от $\mathcal{S}_\Omega/\sigma^2$, имеющей χ^2_{n-r}-распределение.

Доказательство. Нормальность оценки $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ следует непосредственно из свойств нормального распределения. Покажем, что $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ и s^2 — независимы и $s^2 \sim \chi^2_{n-r}$. Выберем канонические переменные $\boldsymbol{Z} = \mathbf{P}\boldsymbol{Y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{m}, \sigma^2\mathbf{I})$. Поскольку $\hat{\boldsymbol{\psi}} \in V_r$, то $\hat{\boldsymbol{\psi}} = f(Z_1, \ldots, Z_r)$, $r = \mathbf{rk}(\mathbf{X})$. Кроме того, уже было получено, что $\mathcal{S}_\Omega = \sum_{i=r+1}^n Z_i^2$. Следовательно, $\mathcal{S}_\Omega/\sigma^2 \in \chi^2_{n-r}$ и не зависит от $\hat{\boldsymbol{\psi}}$. ∎

Свойства несмещенных оценок

- Распределение МНК оценки ДНО функции параметра $\psi = C'\boldsymbol{\beta}$ $(\det(\mathbf{XX'}) > 0)$
$$\hat{\psi} \sim \mathcal{N}(\psi, \Gamma_\psi)$$
  - $\Gamma_\psi = \sigma^2 \mathbf{C}'(\mathbf{XX}')^{-1}\mathbf{C}$ – матрица ковариации
  - $\widehat{\Gamma}_\psi = s^2 \mathbf{C}'(\mathbf{XX}')^{-1}\mathbf{C} = s^2\mathbf{B}$ – оценка матрицы ковариации
- Распределение несмещенной оценка параметра σ^2:
$$s^2 = SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}})/(n-r) \sim \chi^2_{n-r}$$
  - χ^2_{n-r} – χ^2-распределение с $n-r$ степенями свободы
- Величины $\hat{\psi}$ и s^2 независимы

Доверительное оценивание

Доверительный эллипсоид ДНО-функции параметра $\boldsymbol{\psi}$

- Ключевое свойство нормального распределения

$$\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \det(\boldsymbol{\Sigma}) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\xi} \sim \chi^2_q$$

- Таким образом,

$$\sigma^{-2}(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi})^T \mathbf{B}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}) \sim \chi^2_q$$

  - $\mathbf{B} = \boldsymbol{\Gamma}_{\hat{\psi}}/\sigma^2$ – не зависит от параметра.
- Ввиду независимости $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ и $SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$:

$$\frac{(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi})^T \mathbf{B}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi})}{qs^2} \sim F_{q,n-r},$$

  - $F_{q,n-r}$ — распределение Фишера–Снедекора.
- Доверительный эллипсоид уровня доверия $1 - \alpha$ функции параметра $\boldsymbol{\psi}$:

Доверительные интервалы

Рассмотрим частный случай $q = 1$

- ДНО функция параметра $\psi = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{\beta} = c_1\beta_1 + \ldots + c_m\beta_m$.
- МНК оценка $\hat{\psi} = \boldsymbol{C}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} = c_1\hat{\beta}_1 + \ldots + c_m\hat{\beta}_m$.
- Дисперсия оценки:

$$b_\psi = \boldsymbol{C}'(\mathbf{XX}')^{-1}\boldsymbol{C} = \sum_{ij} c_i c_j r_{ij}$$

  - r_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{XX}'$.
- Распределение:

$$\hat{\psi} \sim \mathcal{N}(\psi, \sigma^2 b).$$

- Распределение:

$$(\hat{\psi} - \psi)/(s\sqrt{b}) \sim S_{n-m}$$

  - S_{n-m} – распределение Стьюдента с $n - r$ степенями свободы.
- Доверительный интервал

$$\psi = \hat{\psi} \pm x_\alpha s\sqrt{b}$$

Совместные доверительные интервалы

Метод множественного оценивания *Шеффе*

- $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \ldots, \psi_q)$ набор ДНО-функций параметра
- $L_q = \{\psi : \psi = \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_q\psi_q; \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{R}\}$ — q-мерное пространство ДНО-функций параметра

Утверждение

Пусть L_q *— q-мерное пространство ДНО-функций параметра* $\boldsymbol{\beta}$, $\theta = (\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$. *Тогда,*

$$\mathbb{P}_\theta(\hat{\psi} - x_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \le \psi \le \hat{\psi} + x_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{\psi}},\ \forall\, \psi \in L_q) = 1 - \alpha,$$

где $x_\alpha = (q t_\alpha)^{1/2}$ *и* t_α *—* $1-\alpha$*-квантиль распределения Фишера–Снедекора.*

- Использование q степеней свободы позволяет получить совместные доверительные интервалы для q функций параметра.

Совместные доверительные интервалы

Метод множественного оценивания *Бонферрони*

- $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_q)$ набор ДНО-функций параметра
- Доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha/n$

$$\hat{\psi} - x_{\alpha/n}\hat{\sigma}_{\hat{\psi}} \le \psi \le \hat{\psi} + x_{\alpha/n}\hat{\sigma}_{\hat{\psi}}$$

- Неравенство Буля

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{q} A_i) \le \sum_{i=1}^{q} \mathbb{P}(A_i)$$

- Следовательно,

$$\mathbb{P}(\hat{\psi}_i - x_{\alpha/n}\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i} \le \psi \le \hat{\psi}_i + x_{\alpha/n}\hat{\sigma}_{\hat{\psi}_i}, i = 1, \dots, q) \ge 1 - \alpha.$$

- Использование уровня доверия $1 - \alpha/q$ для каждой из функций параметра позволяет получить совместные доверительные интервалы для q функций параметра уровня доверия $1 - \alpha$.

План

1. Классическая модель линейной регрессии
2. Точечное оценивание
3. Доверительное оценивание
4. Проверка гипотез

$\mathbb{F}$-критерий

Проверка гипотезы согласия

- ДНО функция параметра: $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{C}'\boldsymbol{\beta}$
- Основная гипотеза:

$$H_0 : \boldsymbol{\psi} = 0$$

- $\mathbb{F}$–статсистика:

$$\mathbb{F} = \frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}'\mathbf{B}^{-1}\hat{\boldsymbol{\psi}}}{qs^2}$$

- Альтернативный способ вычисления $\mathbb{F}$-статистики:

$$\mathbb{F} = \frac{\overline{SS}_H}{\overline{SS}_e} = \frac{\overline{SS}_H/q}{\overline{SS}_e/(n-r)}$$

  - $SS_H = SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_H) - SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$
  - $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_H$ – МНК-оценка параметра при выполнении основной гипотезы $\boldsymbol{\psi} = 0$
  - $SS_e = SS(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = s^2(n-r)$

$\mathbb{F}$-критерий

Проверка гипотезы согласия

- $\mathbb{F}$–статсистика при основной гипотезе имеет распределение Фишера–Снедекора $F_{q,n-r}$
- $\mathbb{F}$–статсистика при альтернативе $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$ имеет нецентральное распределение Фишера–Снедекора $F_{q,n-r}$ с параметром нецентральности $\nu_{\text{nc}} = \boldsymbol{\psi}_0' \Gamma_{\hat{\psi}}^{-1} \boldsymbol{\psi}_0$.
- Оценка параметра нецентральности $\hat{\nu}_{\text{nc}} = \boldsymbol{\psi}_0' \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\psi}_0 / s^2$
- Граница критической области $x_\alpha : F_{q,n-r}(x_\alpha) = 1 - \alpha$
- $\mathbb{P}$–значение: p-value $= 1 - F_{q,n-r}(\mathbb{F})$

Мощность $\mathbb{F}$-критерия

Вычисление мощности критерия

- $\mathbb{F}$–статсистика при альтернативе $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$ имеет нецентральное распределение Фишера–Снедекора $F_{q,n-r}$ с параметром нецентральности $\nu_{\text{nc}} = \boldsymbol{\psi}_0' \Gamma_{\hat{\psi}}^{-1} \boldsymbol{\psi}_0$.
- Оценка параметра нецентральности: $\hat{\nu}_{\text{nc}} = \boldsymbol{\psi}_0' \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\psi}_0 / s^2$
- Мощность критерия зависит от параметра нецентральности

$$\mathbf{pwr}(\nu_{\text{nc}}) = 1 - F_{\nu_{\text{nc}},q,n-r}(x_\alpha)$$

  - $F_{\nu_{\text{nc}},q,n-r}$ – функция нецентрального распределения Фишера–Снедекора

Построение необходимого плана

- Для различения нулевой гипотезы и фиксированной альтернативы $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}_0$ с вероятностью γ требуется план, обеспечивающий мощность не менее γ.

Построение необходимого плана

Требуется различить нулевую гипотезу и фиксированную альтернативу $\psi = \psi_0$