Преобразование Шютценберже

Дужин Василий Сергеевич

vduzhin@gmail.com
http://bit.ly/38zatKO

05.03.2020

Преобразование Шютценберже

$$T_n$$

16				
10				
7	17			
6	13	20		
5	11	14		
3	4	9	18	19
1	2	8	12	15

Таблица Юнга размера n

$$S(T_n) = T_{n-1}$$

$$\Rightarrow$$

$$T_{n-1}$$

15				
9				
6	16			
5	12			
4	10	19		
2	8	13	17	18
1	3	7	11	14

Таблица Юнга размера $n-1$

$$S : T_{\lambda_n} \to T_{\lambda_{n-1}}$$

Преобразование Шютценберже

1. Из таблицы удаляется первая клетка;
2. На освободившееся место перемещается одна из двух соседних клеток (с меньшим значением), расположенных сверху или справа от удалённой;
3. По такому же принципу заполняется осободившееся после перемещения клетки место;
4. Перемещения заканчиваются при достижении угловой клетки диаграммы (когда нет клеток сверху и справа);
5. Все значения в таблице уменьшаются на 1 (приведение к стандартному виду).

Определение

Нерв таблицы Юнга (*путь Шютценберже*) – множество клеток, перемещаемых в таблице при применении преобразования Шютценберже.

Преобразование Шютценберже: пример

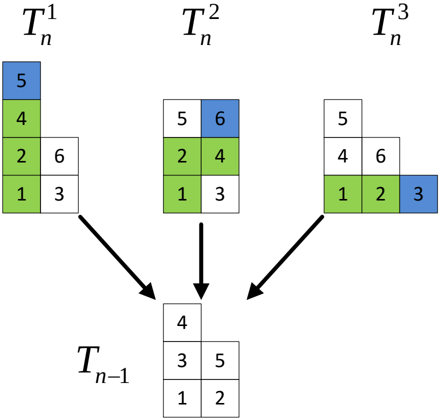
Schutzenberger.pdf

Обратимость преобразования Шютценберже

Можно ли по таблице T_{n-1} восстановить исходную таблицу T_n?

Обратимость преобразования Шютценберже

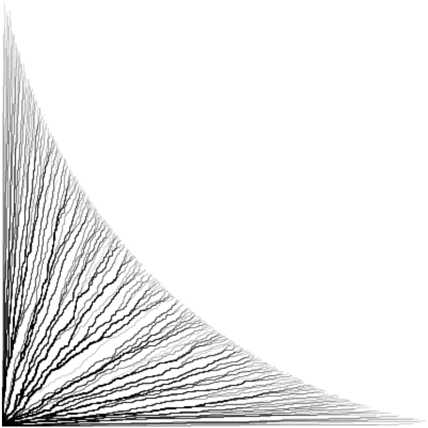
Можно ли по таблице T_{n-1} восстановить исходную таблицу T_n?
Нет, т.к. T_{n-1} может иметь различные таблицы-прообразы:



$T_n^1 \implies T_{n-1}, T_n^2 \implies T_{n-1}, T_n^3 \implies T_{n-1}$, но
$T_{n-1} \not\Longrightarrow T_n^1, T_{n-1} \not\Longrightarrow T_n^2, T_{n-1} \not\Longrightarrow T_n^3$.

Пути Шютценберже (нервы)

Ниже приведены нервы всех возможных прообразов $T \in S^{-1}(T_0)$ таблицы T_0 размера 10^6. Толщина линии пропорциональна количеству нервов.



Инволюции

Определение

Инволюция – преобразование, обратное самому себе.
Функция $f(x)$ называется инволюцией, если

$$f(f(x)) = x$$

для любого x из области определения функции f.

Примеры инволюций

- $f(x) = -x$;
- $f(x) = \overline{x}$;
- Комплексное сопряжение
- Транспонирование матрицы
- Вычисление обратной матрицы
- Вычисление обратной перестановки

Инволюция Шютценберже

Определение

Инволюция Шютценберже (двойственность Шютценберже) – процедура, в ходе которой к таблице Юнга из n клеток n раз применяется преобразование Шютценберже, при этом на каждом шаге сохраняются координаты удаляемых клеток. По полученной последовательности координат строится новая таблица Юнга.

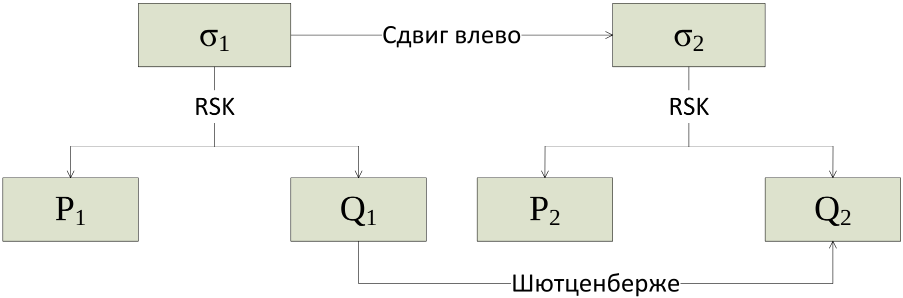
Данная процедура является инволюцией, поскольку применение ее к полученной таблице преобразует ее в исходную таблицу.

Инволюция Шютценберже: пример

sch_involution.pdf

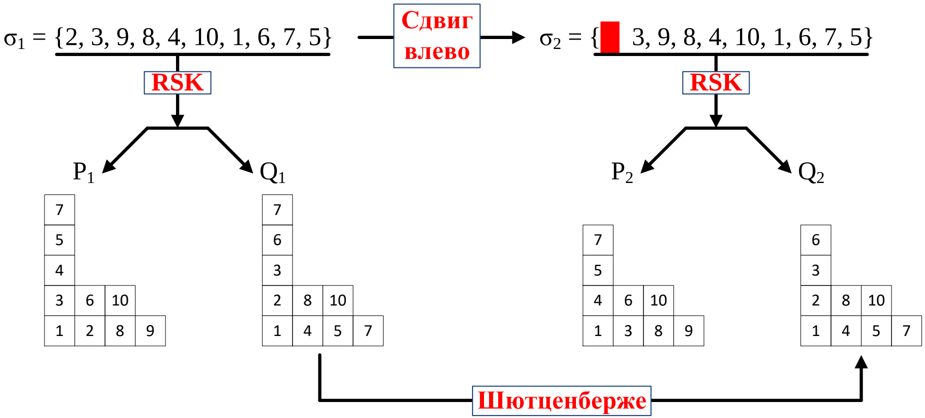
Связь между преобразованиями RSK и Шютценберже

Пусть дана бесконечная последовательность вещественных чисел σ_1. Последовательность σ_2 получается из σ_1 сдвигом влево (забыванием первого элемента).



В таком случае таблица Q_2 является результатом преобразования Шютценберже таблицы Q_1.

Связь между преобразованиями: пример



Преобразование Шютценберже с сохранением формы

Удалённая клетка снова добавляется к преобразованной таблице.

T_n

15					
14					
11					
9	17				
8	13	18			
3	6	7	12	19	20
1	2	4	5	10	16

Таблица Юнга размера n

$$S_{sp}(T_n) = T'_n$$

$$\Rightarrow$$

T'_n

14					
13					
10					
8	16				
7	12	17			
2	5	6	11	18	20
1	3	4	9	15	19

Таблица Юнга размера n

$$S_{sp} : T_{\lambda_n} \to T_{\lambda_n}$$

Преобразование Шютценберже с сохранением формы: пример

Schutzenberger.pdf

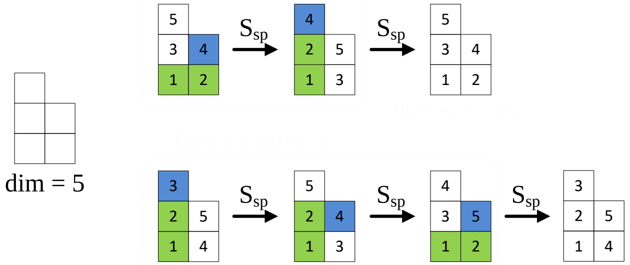
Обратное преобразование Шютценберже (с сохранением формы)

Для преобразования Шютценберже с сохранением формы определено обратное преобразование. Для восстановления исходной таблицы необходимо выполнить действия преобразования в обратном порядке:

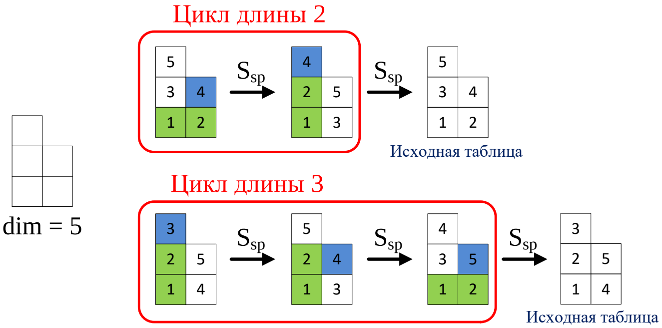
1. Удалить клетку с наибольшим числом, на ее место передвинуть соседнюю снизу или слева клетку с наибольшим значением.
2. Перемещать клетки по этому принципу, пока не будет перемещена клетка (0,0).
3. Увеличить значения в клетках на единицу.
4. Записать "1"в (0,0).

Длины циклов для S_{sp}

Поскольку преобразование Шютценберже с сохранением формы биективно, множество таблиц Юнга **разбивается на циклы**.

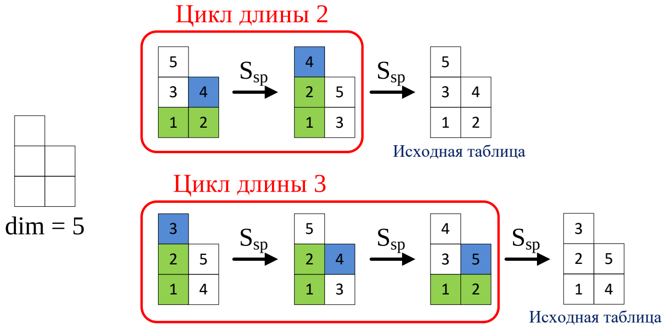


Поскольку преобразование Шютценберже с сохранением формы биективно, множество таблиц Юнга **разбивается на циклы**.



Длины циклов для S_{sp}

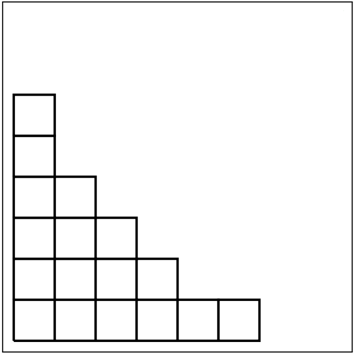
Поскольку преобразование Шютценберже с сохранением формы биективно, множество таблиц Юнга **разбивается на циклы**.

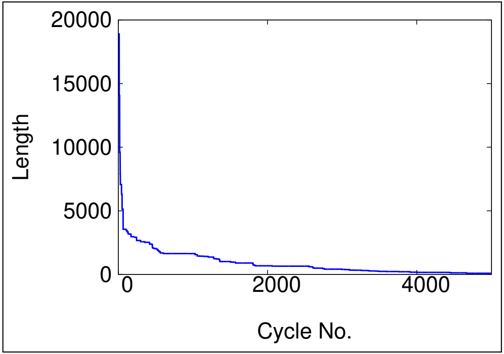


Проблема: S_{sp} не генерирует все возможные таблицы Юнга, а значит не может быть использовано в качестве генератора произвольной таблицы Юнга заданной формы.

Длины циклов для S_{sp}

Ниже приведены распределения длин циклов для таблиц Юнга различных форм.

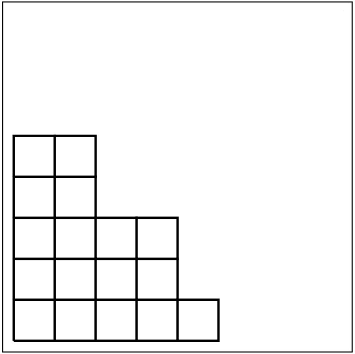


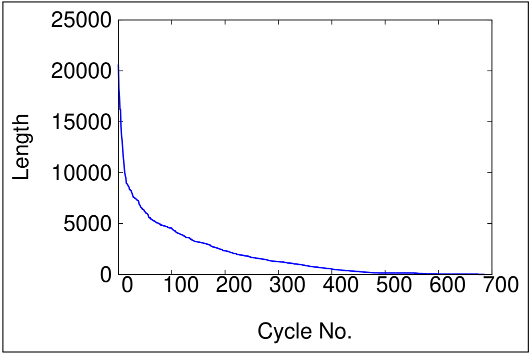


dim=4873050, 6362 cycles

Длины циклов для S_{sp}

Ниже приведены распределения длин циклов для таблиц Юнга различных форм.

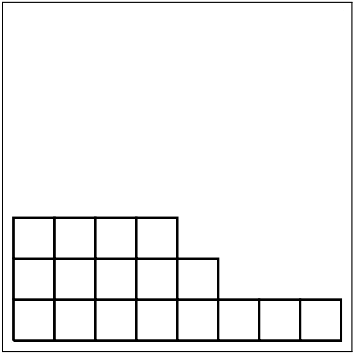


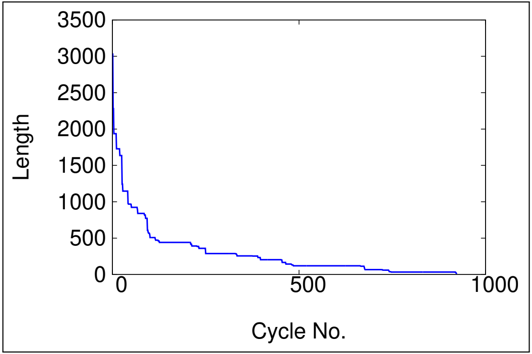


dim=1361360, 688 cycles

Длины циклов для S_{sp}

Ниже приведены распределения длин циклов для таблиц Юнга различных форм.





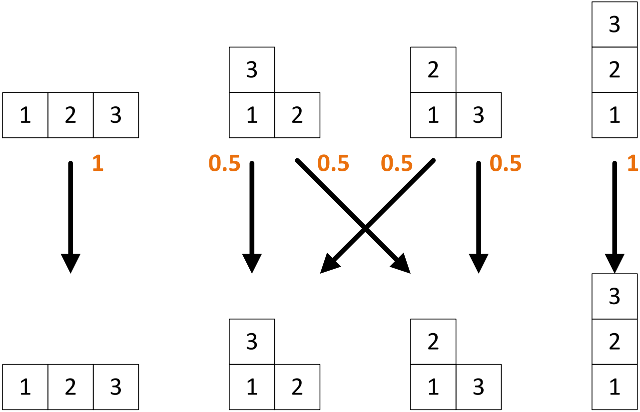
dim=272272, 924 cycles

Рандомизированное преобразование Шютценберже

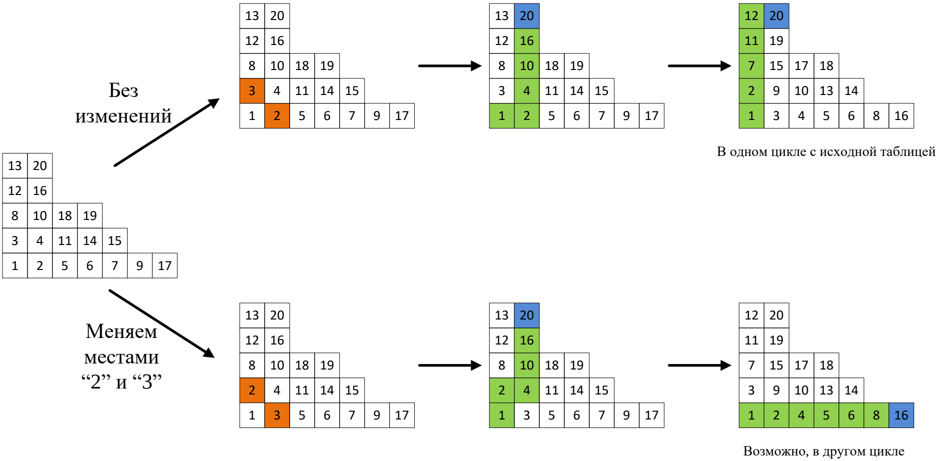
Проблема: как с помощью преобразования Шютценберже создать генератор случайных таблиц Юнга заданной формы?
Возможное решение: рандомизация начального пути перед применением преобразования с сохранением формы.

$S_{rand}:$

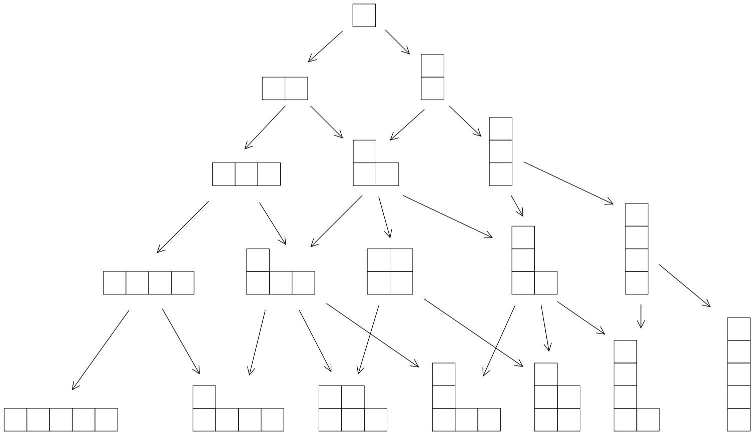
Вероятности:



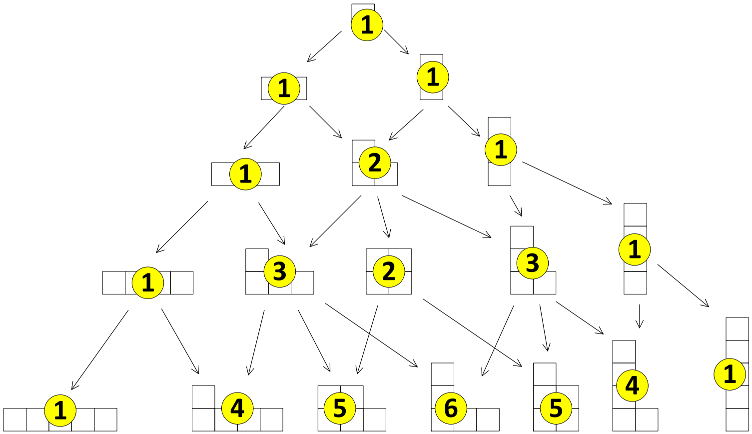
S_{rand}: пример применения



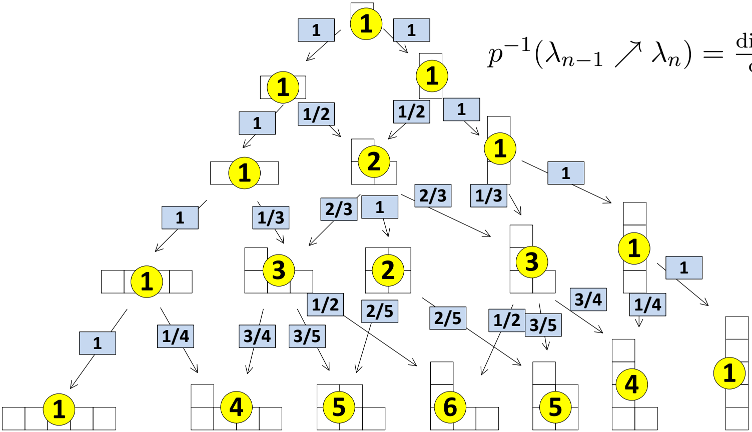
Копереходные вероятности



Копереходные вероятности

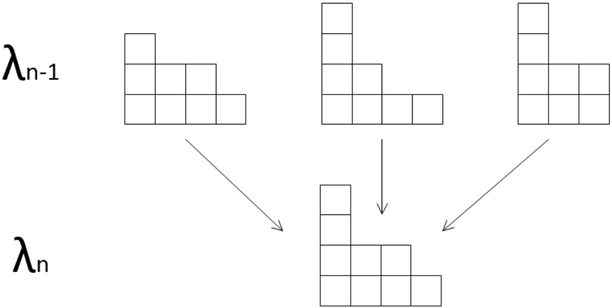


Копереходная вероятность – вероятность того, что переход в диаграмму λ_n был осуществлен из диаграммы λ_{n-1}.



$$p^{-1}(\lambda_{n-1} \nearrow \lambda_n) = \frac{\dim(\lambda_{n-1})}{\dim(\lambda_n)}$$

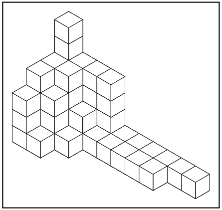
Вычисление размерностей диаграмм



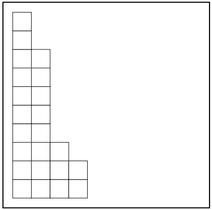
Размерность диаграммы λ_n вычисляется следующим образом:

1. Генерируются случайные **равномерно распределенные** пути, приходящие в диаграмму λ_n (таблицы формы λ_n).
2. Доля путей, приходящих из определенного предшественника λ_{n-1}, стремится к копереходной вероятности соответствующего ребра.
3. Размерность λ_n вычисляется **рекуррентно** из размерности предыдущей диаграммы: $\dim(\lambda_n) = \dim(\lambda_{n-1}) \cdot p^{-1}(\lambda_{n-1} \nearrow \lambda_n)$

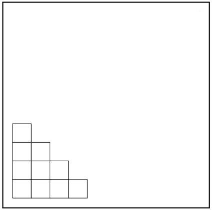
Трехмерные диаграммы Юнга



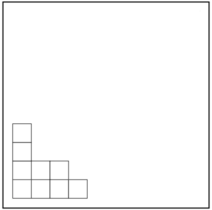
3D Young diagram



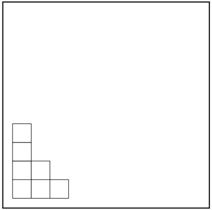
$z = 0$



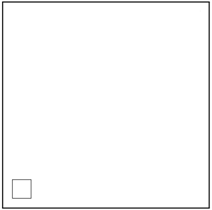
$z = 1$



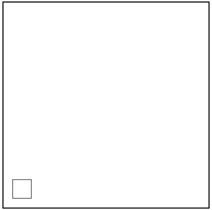
$z = 2$



$z = 3$

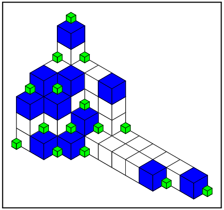


$z = 4$

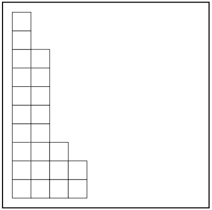


$z = 5$

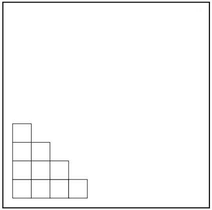
Трехмерные диаграммы Юнга



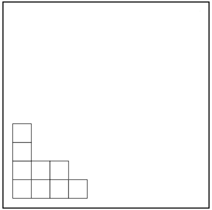
3D Young diagram



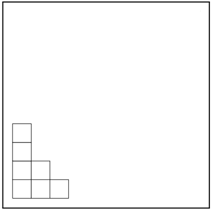
z = 0



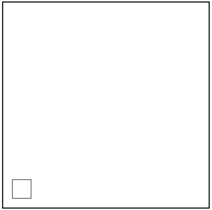
z = 1



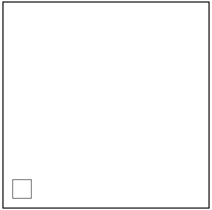
z = 2



z = 3

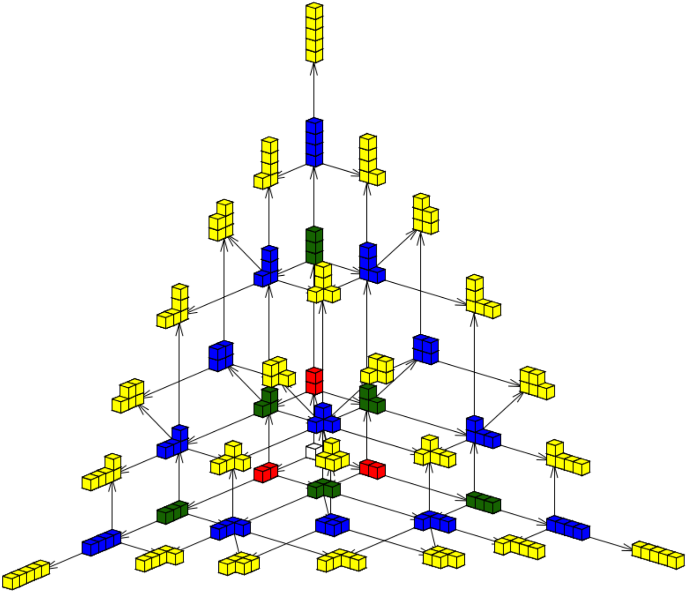


z = 4



z = 5

Трехмерный граф Юнга (первые 5 уровней)

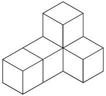


Трехмерные таблицы Юнга: пример

3Dtableaux.pdf

Размерности трехмерных диаграмм Юнга

Следующая трехмерная диаграмма Юнга имеет размерность 12:



Выпишем все 12 трехмерных таблиц Юнга, соответствующих данной диаграмме:

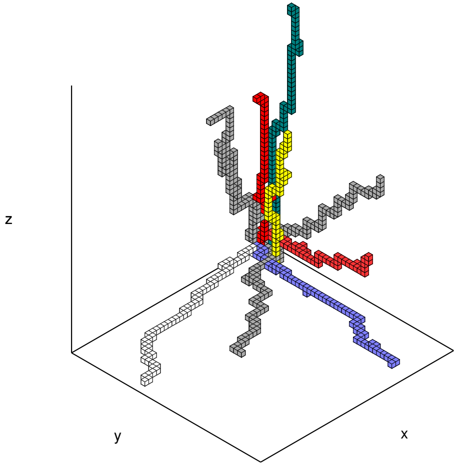
$\begin{matrix}5\\1&3&4\end{matrix}$	2	$\begin{matrix}5\\1&2&4\end{matrix}$	3	$\begin{matrix}5\\1&2&3\end{matrix}$	4	$\begin{matrix}4\\1&2&3\end{matrix}$	5
$\begin{matrix}4\\1&3&5\end{matrix}$	2	$\begin{matrix}4\\1&2&5\end{matrix}$	3	$\begin{matrix}3\\1&2&5\end{matrix}$	4	$\begin{matrix}3\\1&2&4\end{matrix}$	5
$\begin{matrix}3\\1&4&5\end{matrix}$	2	$\begin{matrix}2\\1&4&5\end{matrix}$	3	$\begin{matrix}2\\1&3&5\end{matrix}$	4	$\begin{matrix}2\\1&3&4\end{matrix}$	5
$z=0$	$z=1$	$z=0$	$z=1$	$z=0$	$z=1$	$z=0$	$z=1$

Преобразования на трехмерных таблицах

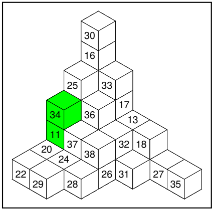
- Преобразование Шютценберже выполняется так же, как и в двумерном случае, но при построении нерва на каждом шаге выбирается одна из **трех** соседних клеток с наименьшим числом: $(x+1,y,z)$, $(x,y+1,z)$, $(x,y,z+1)$.
- Описанные выше **модификации** S_{sp} и S_{rand} также реализуемы на трехмерных таблицах.
- Инволюция Шютценберже обобщается на трехмерный случай.
- Не известен аналог преобразования RSK для трехмерных таблиц.
- Не известен способ быстро вычислять размерности трехмерных диаграмм Юнга (нет аналога формулы крюков).

Трехмерные пути Шютценберже (нервы)

Ниже приведены примеры нервов различных трехмерных таблиц из 50000 клеток:



Трехмерные нервы также можно изображать следующим образом:



3D Young tableau

35				
27				
15	31			
12	14	26	28	
8	10	23	24	29
1	3	7	20	22

z = 0

18		
13	32	38
9	21	37
2	4	11

z = 1

17	36	
5	19	34

z = 2

33	
6	25

z = 3

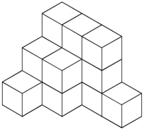
16

z = 4

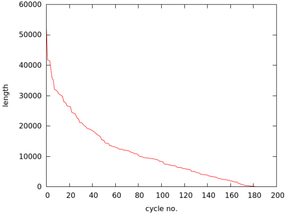
30

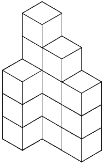
z = 5

Множество трехмерных таблиц также разбивается на циклы при применении преобразования Шютценберже с сохранением формы.

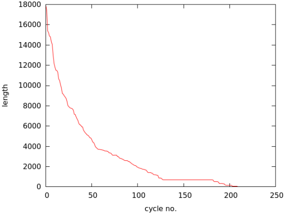


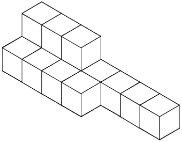
dim=2161967



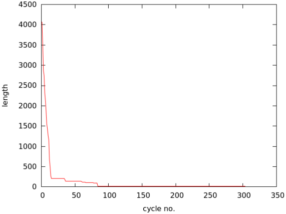


dim=696743



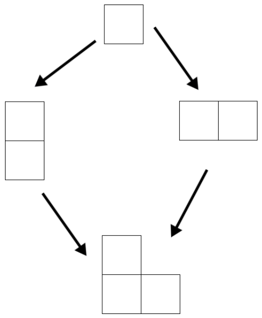


dim=43573



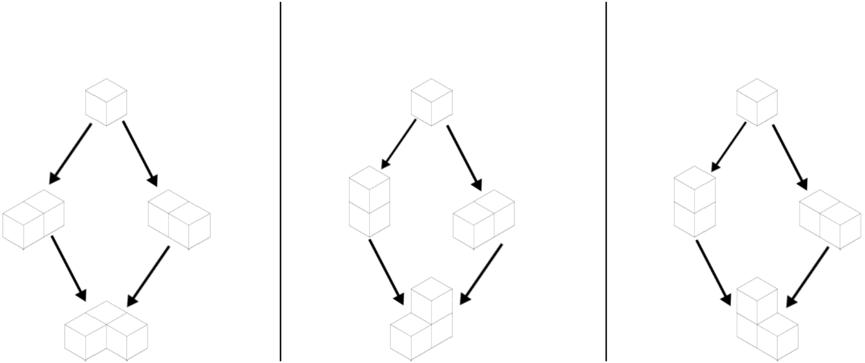
Рандомизированное преобразование Шютценберже (2D)

В двумерном случае S_{rand} является суперпозицией S_{sp} и случайного выбора пути на третий уровень в графе Юнга:



Рандомизированное преобразование Шютценберже (3D)

Аналогичная суперпозиция в трехмерном случае также задает рандомизированное преобразование Шютценберже. Случайным образом выбираются пути в одну из трех диаграмм размерности 2 из трех клеток.



Литература

- Stanley, Richard P. (1999), Enumerative Combinatorics
- D. Romik, P. Śniady. Jeu de taquin dynamics on infinite Young tableaux and second class particles // Annals of Probability: An Official Journal of the Institute of Mathematical Statistics. — 2015. — Vol. 43, no. 2. — P. 682—737.
- В. С. Дужин, Н. Н. Васильев Рандомизированное преобразование Шютценберже и вычисление копереходных вероятностей центрального процесса на трехмерном графе Юнга // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXXI, Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2019. — Т. 485. — С. 90—106.