Введение в асимптотическую комбинаторику диаграмм и таблиц Юнга

Дужин Василий Сергеевич

vduzhin@gmail.com
http://bit.ly/38zatKO

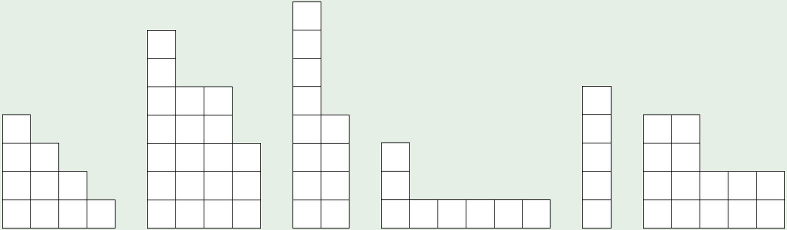
20.02.2020

Диаграммы Юнга

Определение

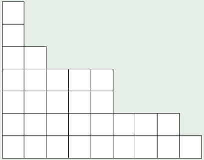
Диаграмма Юнга – конечный набор клеток, выровненных по левому краю, в котором длины столбцов образуют невозрастающую последовательность.

Примеры диаграмм Юнга

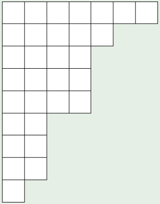


Графические представления

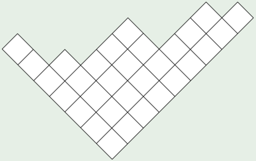
Возможные графические представления диаграмм Юнга



Французская нотация



Английская нотация



Русская нотация (Нотация Вершика-Керова)

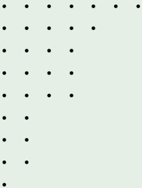
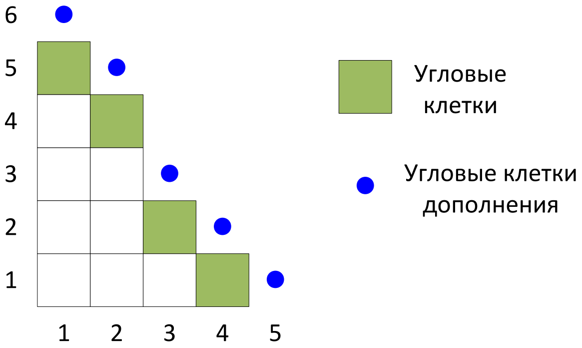


Диаграмма Ферре

Угловые клетки диаграммы

Определения

Угловая клетка – клетка, которая может быть удалена из диаграммы без нарушения ее структуры.
Угловая клетка дополнения – позиция, в которую может быть добавлена новая клетка без нарушения структуры диаграммы.



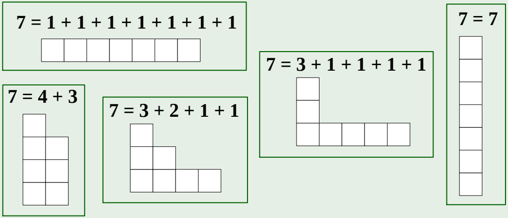
Диаграммы Юнга и разбиения натуральных чисел

Определение

Разбиение натурального числа n – набор натуральных чисел, сумма которых равна n.

Каждой диаграмме Юнга из n клеток может быть поставлено в соответствие разбиение числа n.

Примеры диаграмм Юнга размера $\mathbf{n} = 7$



Вычисление числа разбиений

Производящая функция для числа разбиений $p(n)$, т.е. числа диаграмм Юнга размера n (Формула Эйлера):

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Вычисление числа разбиений

Производящая функция для числа разбиений $p(n)$, т.е. числа диаграмм Юнга размера n (Формула Эйлера):

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

Вычисление числа разбиений $p(5)$

Сомножители раскладываются в ряды Маклорена $(f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f"(0)}{2!}x^2 + ...)$:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + ...$

$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + ...$

$\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + ...$

$\frac{1}{1-x^4} = 1 + x^4 + x^8 + ...$

$\frac{1}{1-x^5} = 1 + x^5 + x^{10} + ...$

Вычисляется коэффициент при x^5 произведения

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \cdot (1 + x^2 + x^4) \cdot (1 + x^3) \cdot (1 + x^4) \cdot (1 + x^5)$

Вычисление числа разбиений

Рекуррентная формула для вычисления числа разбиений:

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right)$$

$p(0) = 1, p(1) = 1, p(k) = 0 \ \forall k < 0.$

Рекуррентная формула для вычисления числа разбиений:

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right)\right)$$

$p(0) = 1, p(1) = 1, p(k) = 0 \ \forall k < 0.$

Вычисление числа разбиений $p(5)$

$p(5) = (-1)^{1+1} \left(p\left(5 - \frac{3-1}{2}\right) + p\left(5 - \frac{3+1}{2}\right)\right) +$
$(-1)^{2+1} \left(p\left(5 - \frac{2(6-1)}{2}\right) + p\left(5 - \frac{2(6+1)}{2}\right)\right) =$
$p(4) + p(3) - (p(0) + p(-2)) = p(4) + p(3) - p(0)$

Формула Харди-Рамануджана:

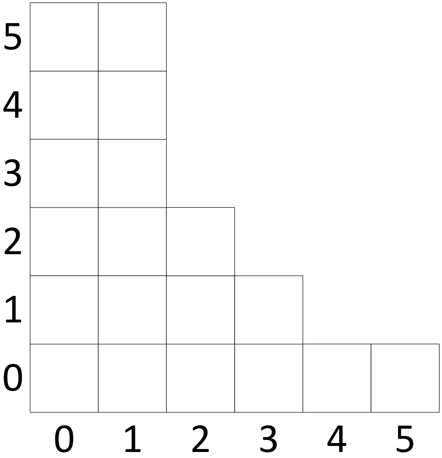
$$p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}}{4n\sqrt{3}}, n \to \infty$$

Некоторые значения $p(n)$[1]:

n	$p(n)$
1	1
10	42
50	204226
100	190569292
500	2300165032574323995027
1000	24061467864032622473692149727991
2000	4720819175619413888601432406799959512200344166

[1]https://oeis.org/A000041/b000041.txt

Диаграммы Юнга и полиномы



Диаграммы Юнга и полиномы

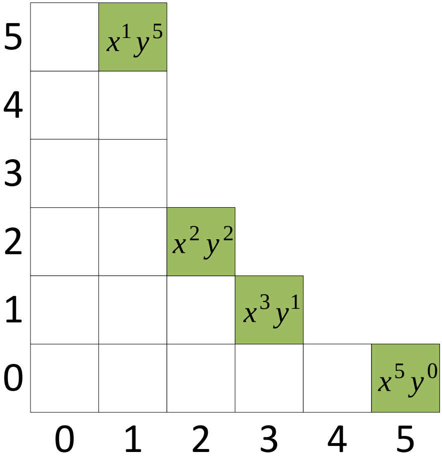


Диаграмма Юнга соответствует множеству полиномов, носители которых не превосходят мономов, записанных в угловых клетках.

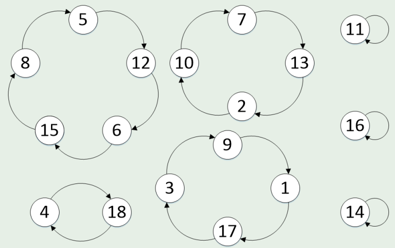
Диаграммы Юнга и перестановки целых чисел

Определение

Перестановка - упорядоченный набор чисел от 1 до n, в котором числу i ставится в соответствие i-й элемент из набора.

Циклы перестановки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
17	**10**	**9**	**18**	**12**	**15**	**13**	**5**	**1**	**7**	**11**	**6**	**2**	**14**	**8**	**16**	**3**	**4**



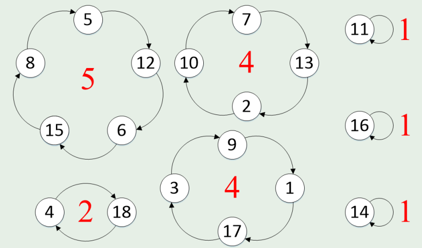
Диаграммы Юнга и перестановки целых чисел

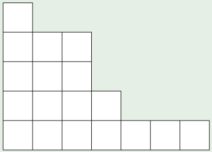
Определение

Перестановка - упорядоченный набор чисел от 1 до n, в котором числу i ставится в соответствие i-й элемент из набора.

Циклы перестановки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
17	**10**	**9**	**18**	**12**	**15**	**13**	**5**	**1**	**7**	**11**	**6**	**2**	**14**	**8**	**16**	**3**	**4**





5, 4, 4, 2, 1, 1, 1

(Длины циклов перестановки)

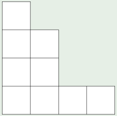
Таблицы Юнга

Определение

Таблица Юнга – диаграмма Юнга, заполненная числами от 1 до n таким образом, что числа возрастают по строкам и по столбцам.

Примеры таблиц Юнга

Некоторые таблицы для диаграммы



7			
4	8		
2	5		
1	3	6	9

7			
3	9		
2	8		
1	4	5	6

9			
7	8		
5	6		
1	2	3	4

8			
6	7		
2	4		
1	3	5	9

5			
4	9		
3	8		
1	2	6	7

8			
3	6		
2	5		
1	4	7	9

7			
6	9		
5	8		
1	2	3	4

4			
3	7		
2	6		
1	5	8	9

6			
5	9		
3	7		
1	2	4	8

Полустандартные таблицы Юнга

Определение

Полустандартная таблица Юнга – таблица Юнга, значения в которой не убывают по строкам и возрастают по столбцам.

Примеры таблиц Юнга

28									
26									
16	18	25							
12	15	20							
7	8	9	22	30					
2	4	6	14	19	24	29			
1	3	5	10	11	13	17	21	23	27

Стандартная таблица

19									
18									
16	17	17							
13	13	13							
11	12	12	12	12					
3	3	3	6	7	9	14			
1	2	2	4	5	5	5	8	10	15

Полустандартная таблица

Градуированные графы

Определение

Градуированный граф – бесконечный ориентированный граф, обладающий градуировкой:

1. Все вершины представлены в виде объединения множеств, называющихся множеством уровней, где уровни $L \geq 1, L \in \mathbb{N}$;
2. Из каждой вершины на уровне L выходит одно или более ребер, соединяющих ее с вершинами на уровне $L + 1$.

Градуированные графы

Определение

Градуированный граф – бесконечный ориентированный граф, обладающий градуировкой:

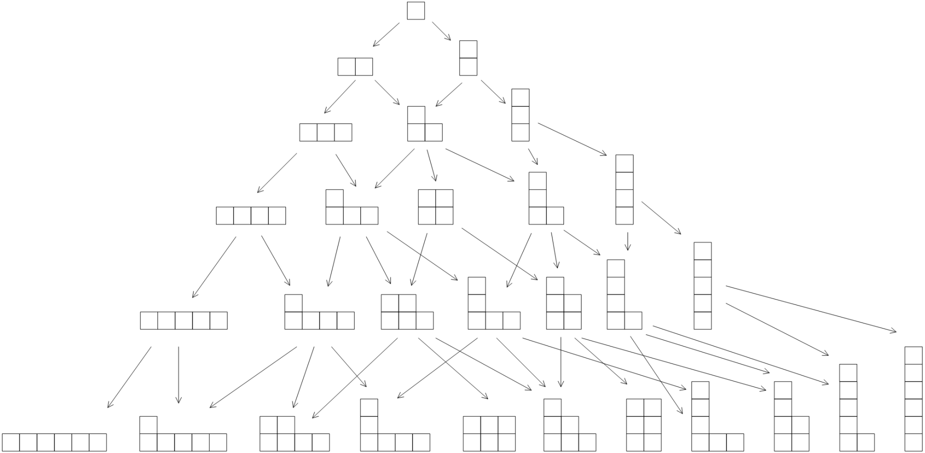
1. Все вершины представлены в виде объединения множеств, называющихся множеством уровней, где уровни $L \geq 1, L \in \mathbb{N}$;
2. Из каждой вершины на уровне L выходит одно или более ребер, соединяющих ее с вершинами на уровне $L + 1$.

Определение

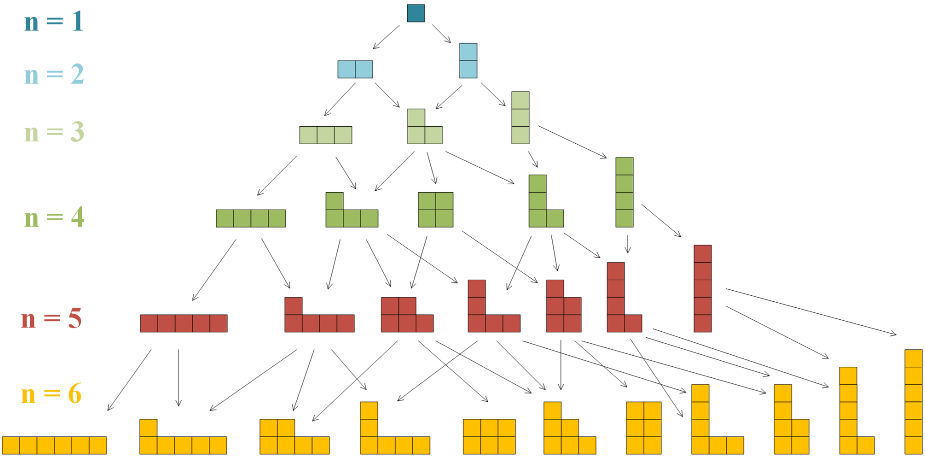
Граф Юнга – бесконечный ориентированный градуированный граф, в вершинах которого находятся диаграммы Юнга, а рёбра соединяют диаграммы, отличающиеся на одну клетку.

Уровень 1 графа Юнга состоит из единственной вершины без входящих рёбер, которая называется *корнем графа*.

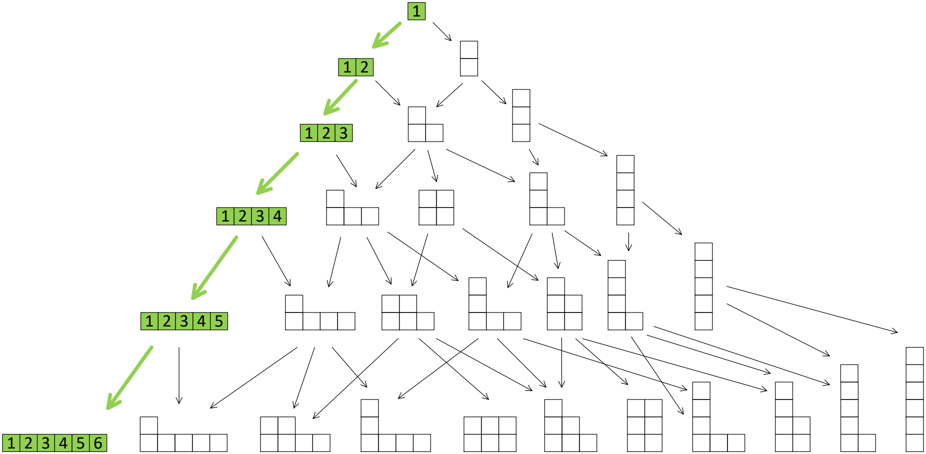
Граф Юнга (первые 5 уровней)



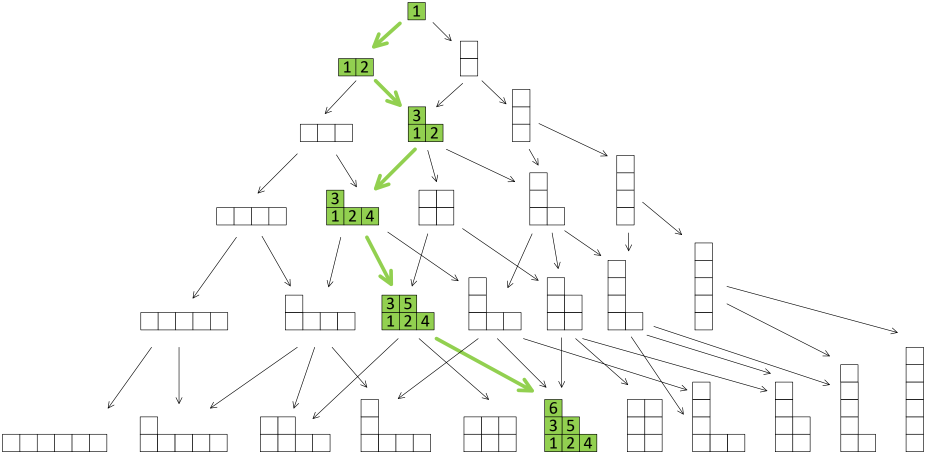
Граф Юнга (первые 5 уровней)



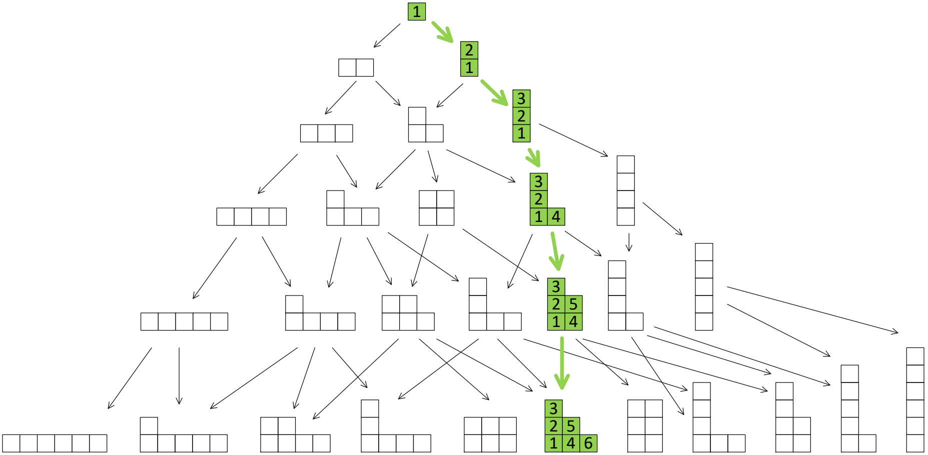
Соответствие между таблицами Юнга и путями на графе Юнга



Соответствие между таблицами Юнга и путями на графе Юнга



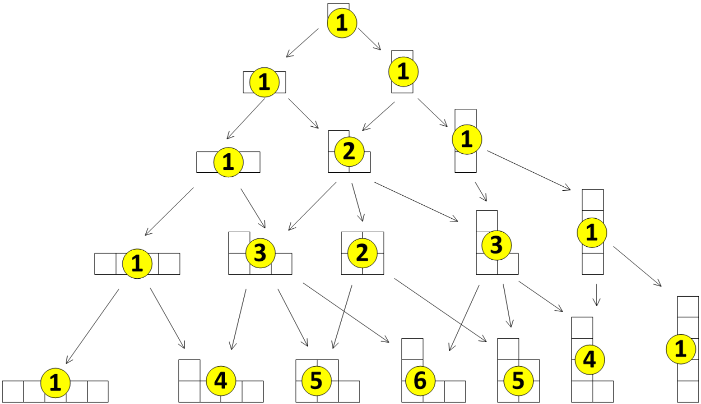
Соответствие между таблицами Юнга и путями на графе Юнга



Размерность диаграммы

Определение

Размерность диаграммы λ - количество таблиц Юнга формы λ (количество путей из корня графа Юнга в λ).



Вычисление размерности диаграммы

Формула крюков для вычисления размерности диаграммы λ_n:

$$\dim(\lambda_n) = \frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda_n} h(i,j)}.$$

где n – размер диаграммы (количество клеток), $h(i,j)$ – длина крюка с вершиной в точке (i,j).

Определение

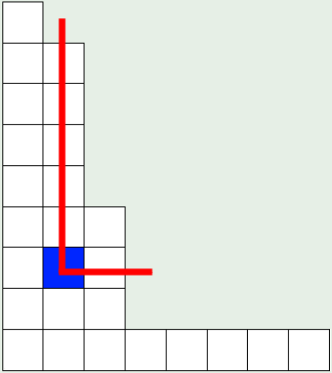
Крюк клетки – сама клетка, а также клетки, расположенные в том же столбце выше и в той же строке правее.

Определение

Длина крюка – количество клеток, из которых состоит крюк.

Длина крюка

Вычисление длин крюков



Длина крюка с вершиной в (2,3)

1							
3	1						
4	2						
5	3						
6	4						
8	6	1					
9	7	2					
10	8	3					
16	14	9	5	4	3	2	1

Длины крюков

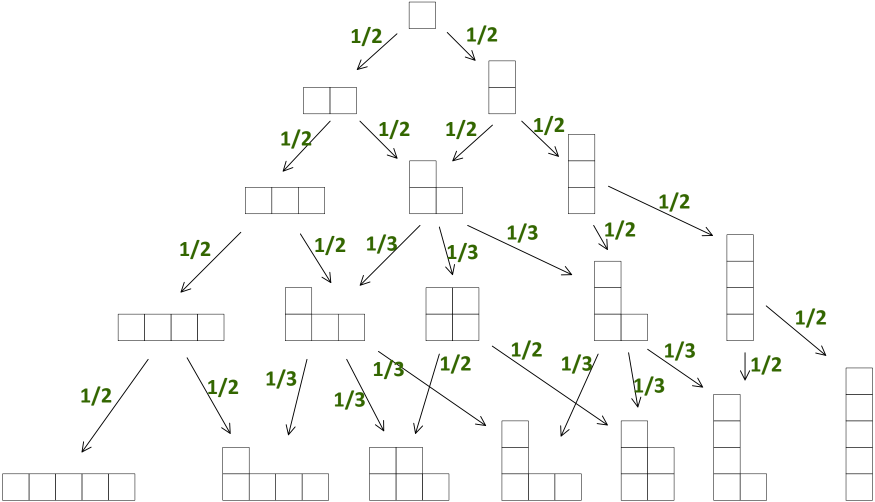
Марковские процессы на градуированных графах

На графе Юнга может быть построен **марковский процесс**, если каждому ребру поставить в соответствие определенную **переходную вероятность**.

Примеры марковских процессов на графе Юнга

- Процесс Ричардсона: одинаковые переходные вероятности.
- Процесс Планшереля: одинаковые вероятности путей между любой парой диаграмм (Центральный процесс).
- Равномерный процесс: одинаковая вероятность пути в любую диаграмму на одном уровне.

Процесс Ричардсона



Мера Планшереля

Определение

Мера Планшереля – **центральная** вероятностная мера на таблицах Юнга, т.е. пути между любой парой диаграмм имеют одинаковые вероятности.

Вероятность одного пути в диаграмму λ размера n:

$$P_{path}(\lambda_n) = \frac{\dim(\lambda_n)}{n!}$$

Вероятность диаграммы λ размера n:

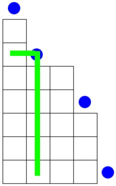
$$P_{diag}(\lambda_n) = \frac{\dim^2(\lambda_n)}{n!}$$

Вероятность перехода из λ в λ' в процессе Планшереля:

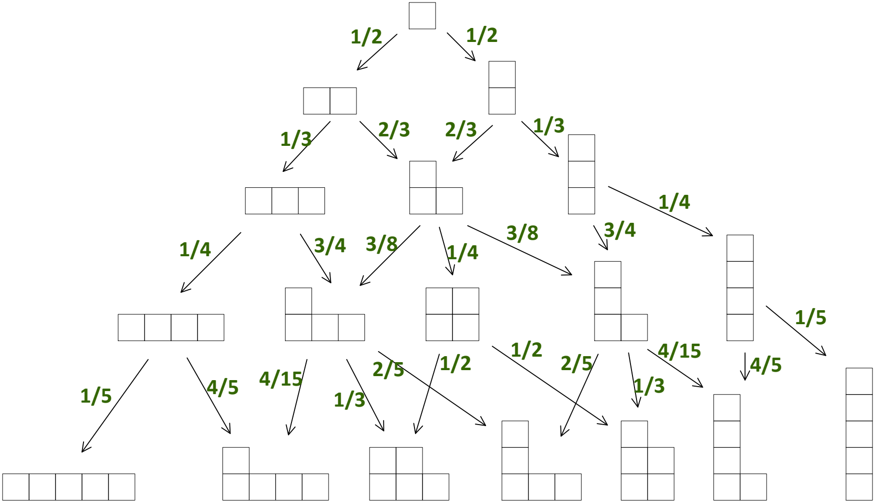
$$p(\lambda \nearrow \lambda') = p(\lambda, x, y) = \prod_{i=0}^{x-1} \frac{h(\lambda, i, y)}{h(\lambda, i, y) + 1} \prod_{j=0}^{y-1} \frac{h(\lambda, x, j)}{h(\lambda, x, j) + 1},$$

где $h(\lambda, x, y)$ – длина крюка клетки (x, y) в диаграмме Юнга λ.

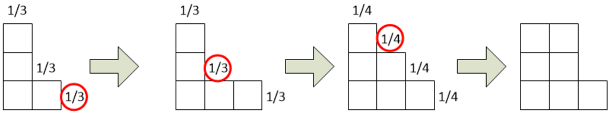
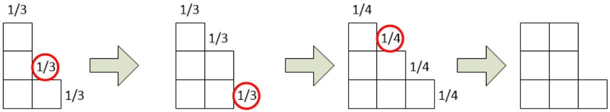
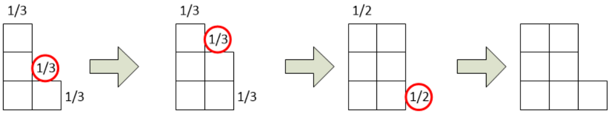
Для вычисления переходной вероятности необходимо вычислить длины всех крюков, лежащих на обратном крюке (зеленая линия):



Процесс Планшереля

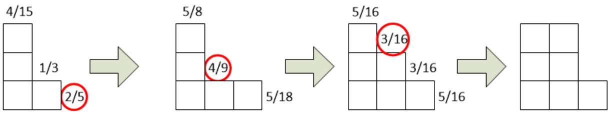
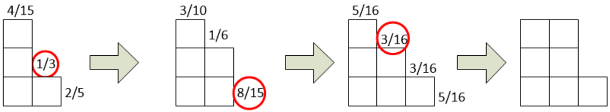
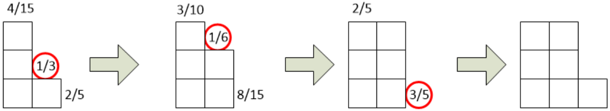


Пример: Процесс Ричардсона

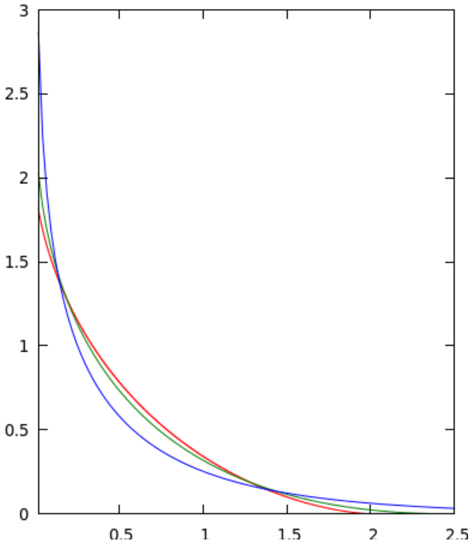
Путь	Вероятность пути
	$p_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$
	$p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$
	$p_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

$p_1 = p_2 \neq p_3 \Rightarrow$ **ПРОЦЕСС НЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ!**

Пример: Процесс Планшереля

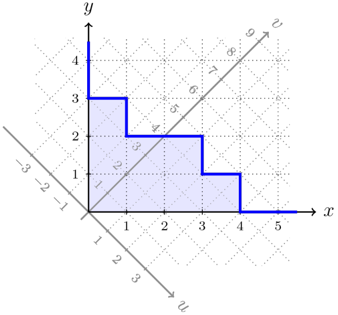
<table>
<tr><th>Путь</th><th>Вероятность пути</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p_1 = \frac{2}{5} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{30}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p_2 = \frac{1}{3} \times \frac{8}{15} \times \frac{3}{16} = \frac{1}{30}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$$p_3 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{30}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$p_1 = p_2 = p_3 \Rightarrow$ Для этой пары диаграмм выполнено свойство центральности</td></tr>
</table>

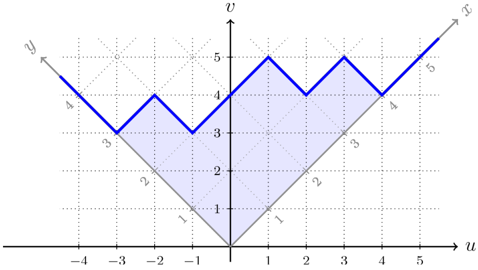
Предельные формы диаграмм Юнга



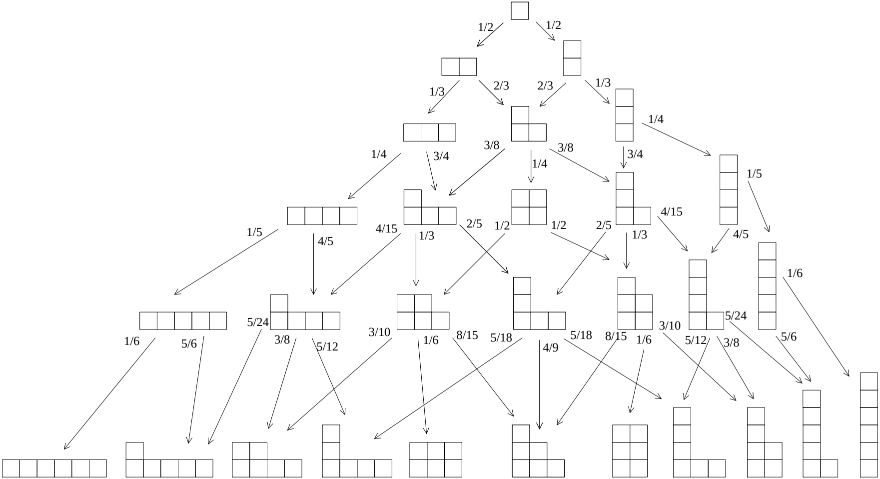
Примеры

- Процесс Ричардсона
  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt[4]{6}$
- Равномерная статистика
  $e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}x} + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{6}}y} = 1$
- Процесс Планшереля
  $\frac{2}{\pi}\left(u \arcsin u + \sqrt{1-u^2}\right)$

Французская нотация	Русская нотация (Координаты Вершика-Керова)


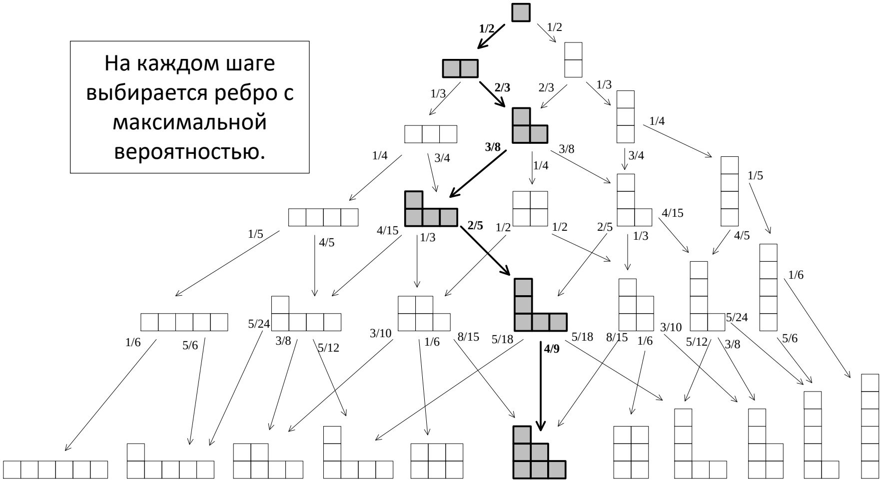


Жадные последовательности



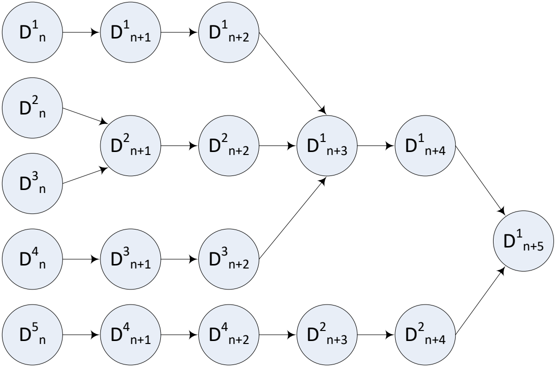
Жадные последовательности

На каждом шаге выбирается ребро с максимальной вероятностью.

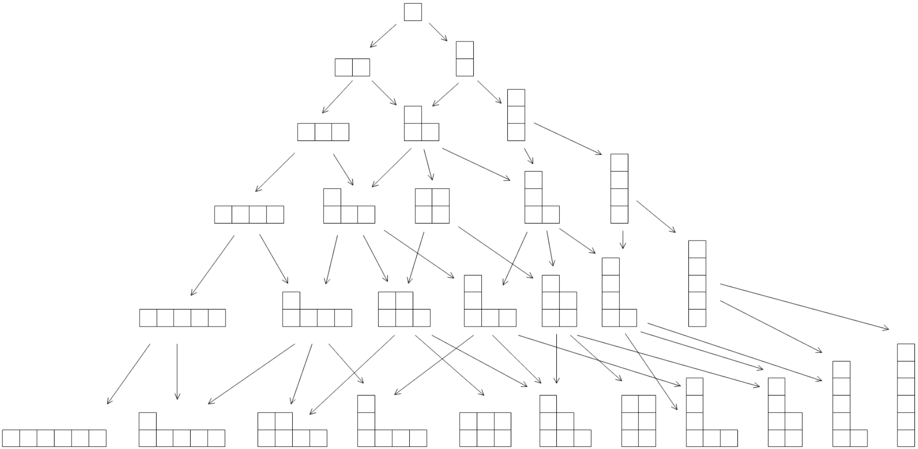


Гипотеза о слиянии жадных последовательностей

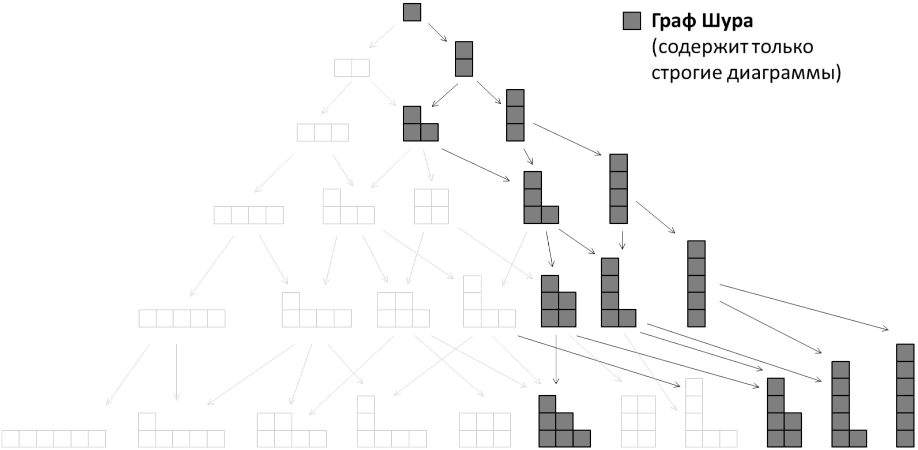
Жадные последовательности, построенные от произвольной пары диаграмм Юнга, сливаются в одну последовательность через конечное число шагов (экспериментальный факт).



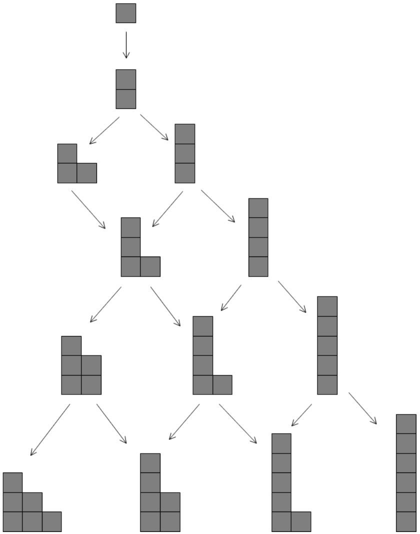
Двумерный граф Юнга (первые 6 уровней)



Двумерный граф Юнга (первые 6 уровней)

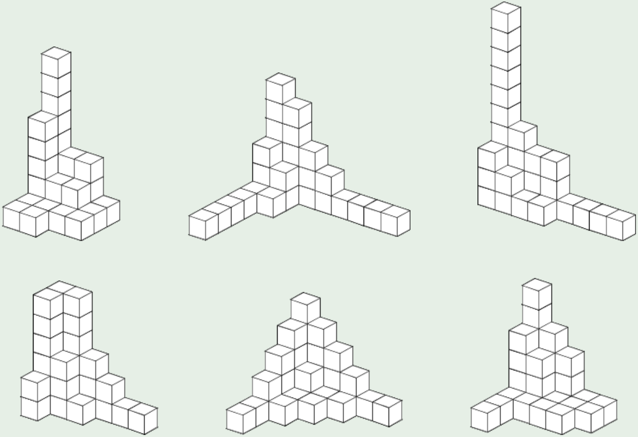


Двумерный граф Шура (первые 6 уровней)

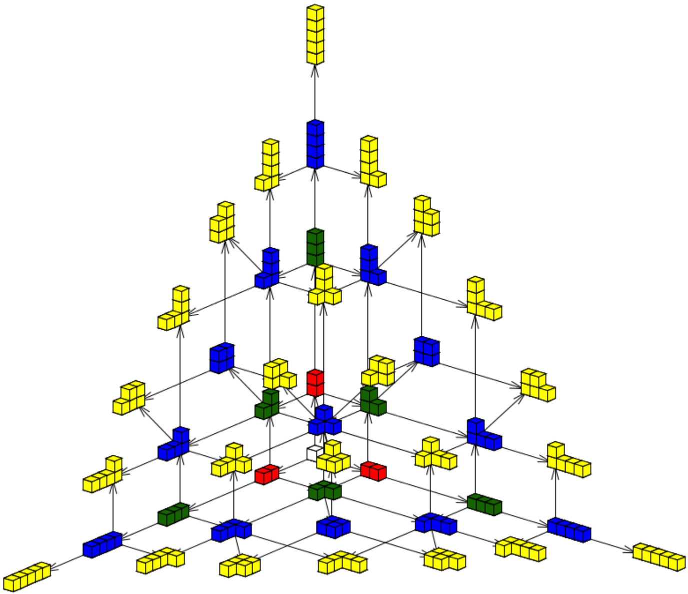


Трехмерные диаграммы Юнга

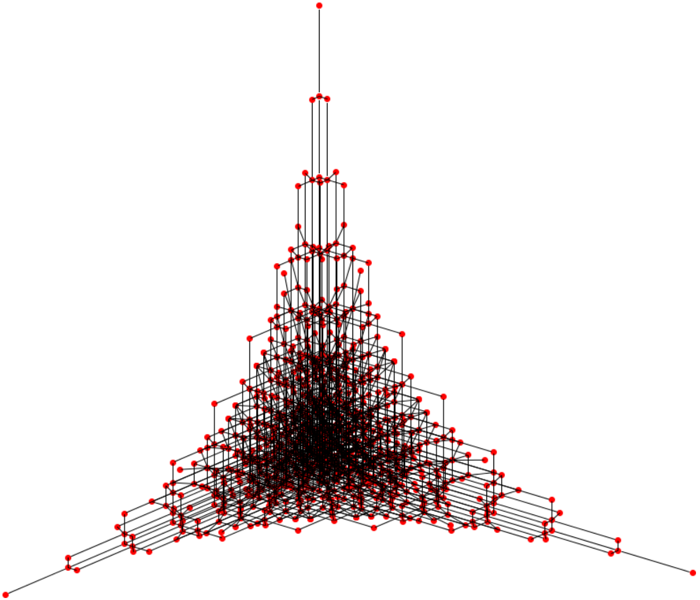
Примеры трёхмерных диаграмм



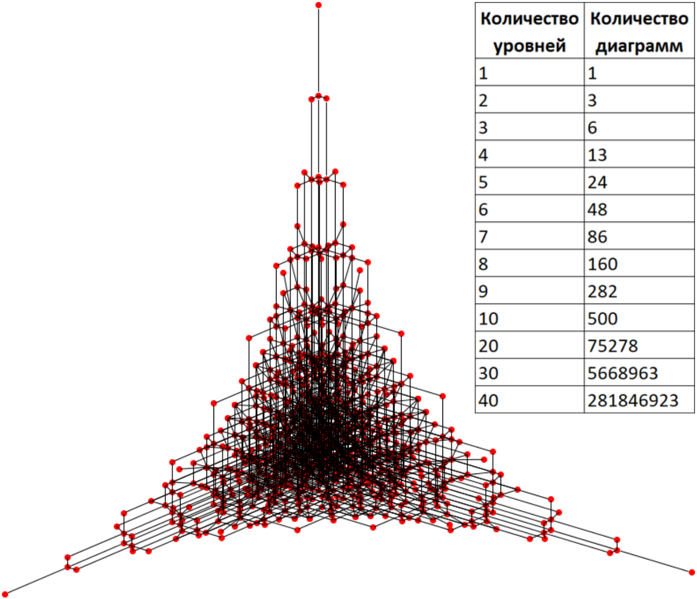
Трехмерный граф Юнга (первые 5 уровней)



Трехмерный граф Юнга (первые 10 уровней)



Трехмерный граф Юнга (первые 10 уровней)



Количество уровней	Количество диаграмм
1	1
2	3
3	6
4	13
5	24
6	48
7	86
8	160
9	282
10	500
20	75278
30	5668963
40	281846923

Определение

Число Каталана выражается формулой[2]

$$C(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

Начало последовательности выглядит так:
1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ...

Числа Каталана могут быть определены большим количеством различных способов. Они появляются во всевозможных перечислительных задачах.

[2] https://habr.com/ru/post/165295/

Числа Каталана и скобочные последовательности

Определение

Правильная скобочная последовательность – набор открывающихся и закрывающихся скобок, в которых каждой открывающейся скобке соответствует закрывающаяся.

Число возможных последовательностей с фиксированным числом пар скобок выражается числом Каталана.

Правильные скобочные последовательности (4 пары скобок, 14 комбинаций)

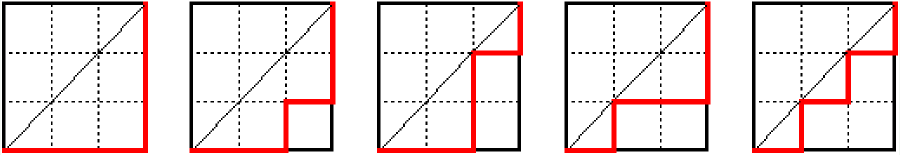
(((()))), ((()())), ((())()), ((()))(), (()(())), (()()()), (()())(), (())(()), (())()(), ()((())), ()(()()), ()(())(), ()()(()), ()()()()

Определение

Монотонный путь в квадратной решетке – маршрут из левого нижнего угла квадрата в правый верхний, который проходит по линиям сетки вверх или вправо и не заходит выше диагонали.

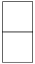
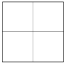
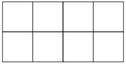
Число Каталана $C(i)$ соответствует количеству монотонных путей в квадрате iхi.

Монотонные пути в квадратной решетке 3х3 (5 шт.)



Числа Каталана и диаграммы Юнга

Размерность диаграммы Юнга (количество таблиц) высоты 2 и ширины i равна числу Каталана $C(i)$.

Диаграмма	Размерность
	1
	2
	5
	14
	42

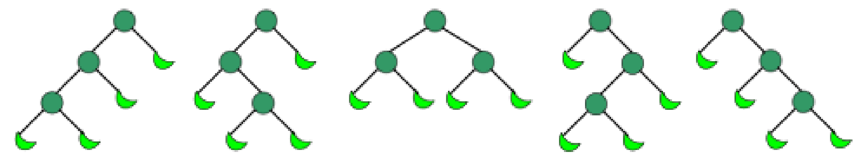
Числа Каталана и бинарные деревья

Определение

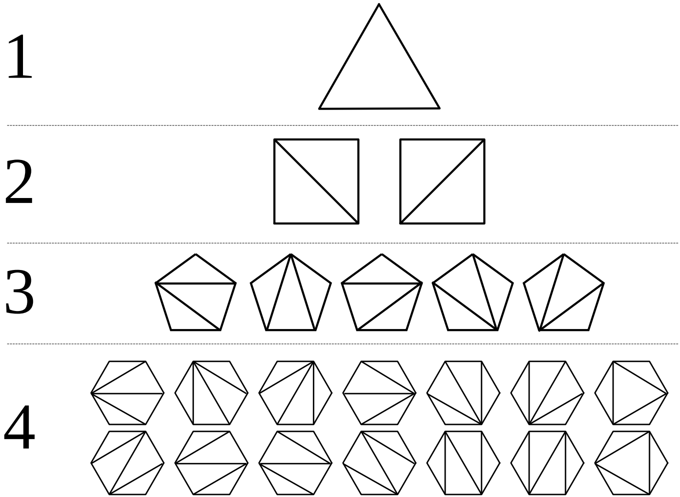
Двоичное дерево – дерево, из каждого узла которого (кроме листьев) выходит ровно две ветки.

Число возможных бинарных деревьев с $(i+1)$ листьями выражается числом Каталана $C(i)$.

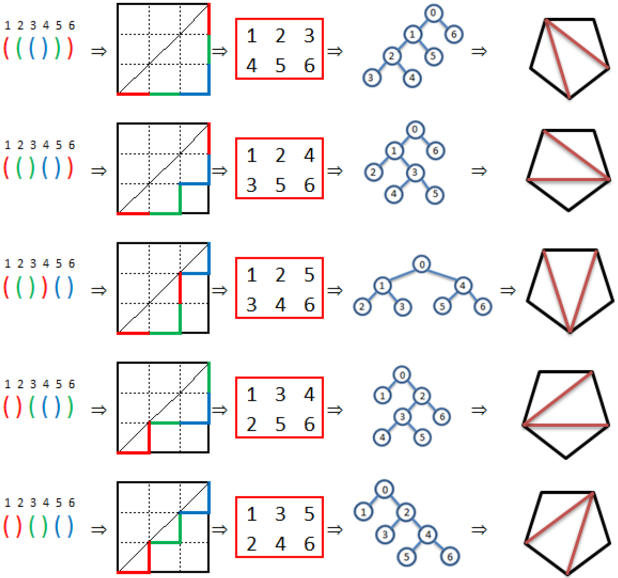
Бинарные деревья с четырьмя листьями (5 шт.)



Числа Каталана и триангуляции выпуклых многоугольников

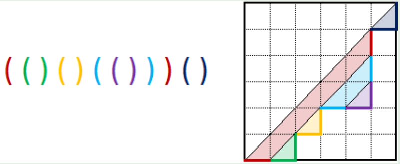


Третье число Каталана: соответствие между объектами



Пример: соответствие между скобочной последовательностью и путем в квадратной решетке.

Открывающиеся скобки соответствуют горизонтальным отрезкам, закрывающиеся – вертикальным:



Задания

Определить соответствия между следующими конструкциями:

- Скобочными последовательностями и таблицами Юнга;
- Скобочными последовательностями и бинарными деревьями;
- Бинарными деревьями и триангуляциями многоугольника.

Примеры некоторых приложений диаграмм Юнга

- Статистическая физика: **система взаимодействующих частиц TASEP**.
- Моделирование **процесса испарения кристалла** (марковский процесс на трехмерном графе Юнга).
- **Модель сети Интернет**: интенсивности потоков информации сортируются по возрастанию, представляются в виде столбцов диаграммы Юнга.

Некоторые открытые проблемы асимптотической комбинаторики

- Какие диаграммы Юнга (2D, 3D,...) обладают максимальными размерностями?
- Как быстро вычислить размерность трехмерной диаграммы Юнга?
- Как построить центральный марковский процесс на трехмерном графе Юнга (аналог процесса Планшереля)?

Литература

Учебники

- *Фултон, У.* Таблицы Юнга и их приложения к теории представлений и геометрии — М. : МЦНМО, 2006.
- *Смирнов, Е. Ю.* Диаграммы Юнга, плоские разбиения и знакочередующиеся матрицы — М. : МЦНМО, 2014.

Статьи

- *М. А. Берштейн, Г. А. Мерзон.* Диаграммы Юнга, пути на решётке и метод отражений // Матем. просв. — 2014. — № 18. — С. 112—141.
- *А. М. Вершик, Д. А. Павлов.* Численные эксперименты в задачах асимптотической теории представлений // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2009. — Т. 373. — С. 77—93.
- *В. С. Дужин, А. А. Чудновская.* Поиск диаграмм Юнга с большими размерностями // Компьютерные инструменты в образовании. — 2019. — № 4. — С. 33—43.