ДЗ Потенциал Облизанов Александр, 8381

(вариант 16)

В плоскости задано поле $F = (P(x,y), Q(x,y))$

$$P(x,y) = 8x^3 + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3;\quad Q(x,y) = \frac{8x^3}{3} + 5x^2y + 27xy^2 + 4y^3$$

Поле потенциально, если работа по замкнутому пути равна 0, то есть $\forall D \subset F$

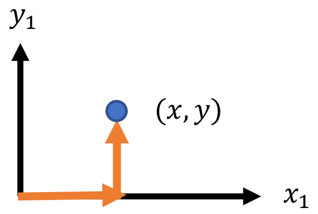
$$\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 8x^2 + 10xy + 27y^2;\ \frac{\partial P}{\partial y} = Ax^2 + 2Bxy + 3Cy^2$$

$$A = 8; B = 5; C = 9$$

Восстановим потенциал. Примем $U(0,0) = 0$.



$$U(x,y) = U(0,0) + \int_0^x P(x_1,0)dx_1 + \int_0^y Q(x,y_1)dy_1$$

$$U(x,y) = 2x^4 + y^4 + 9xy^3 + \frac{5y^2x^2}{2} + \frac{8yx^3}{3}$$

Проверим равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 8x^3 + 8x^2y + 5xy^2 + 9y^3 = P$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{8x^3}{3} + 5x^2y + 27xy^2 + 4y^3 = Q$$

Таким образом можно заменить P и Q в дифференциальных уравнениях:

$$Pdx + Qdy = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0$$

Можно заметить, что $\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$ есть дифференциал dU. Следовательно,

$$dU = 0 \to U(x,y) = 2x^4 + y^4 + 9xy^3 + \frac{5y^2x^2}{2} + \frac{8yx^3}{3} = const$$

является решением дифференциального уравнения.

Уравнение $U(x,y) = U(1,1)$ определяет неявную функцию $y = f(x)$, которая решает задачу Коши с начальным условием $1 = f(1)$.

$$U(x,y) - U(1,1) = 2x^4 + y^4 + 9xy^3 + \frac{5y^2x^2}{2} + \frac{8yx^3}{3} - \frac{103}{6} = \tilde{U}(x, f(x)) = 0$$

Производную $f'(x)$ можно найти как производную неявного отображения:

$$f'(1) = -\left.\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}\right|_{(1,1)} = -\frac{P(1,1)}{Q(1,1)} = -\frac{45}{58}$$

Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $x = 1$

$$y - 1 = -\frac{45}{58}(x - 1)$$

$$y = -\frac{45}{58}x + \frac{103}{58}$$

Определим приближенное значение y_1 в точке $x_1 = 1 + \frac{1}{10}$, считая значения функции приближенным к значениям касательной.

$$y_1 = -\frac{45}{58}\left(1 + \frac{1}{10}\right) + \frac{103}{58}$$

$$y_1 = \frac{107}{116}$$

Найдем производную в точке $\left(\frac{11}{10}, \frac{107}{116}\right)$

$$f'\left(\frac{11}{10}\right) = -\left.\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}\right|_{\left(\frac{11}{10}, \frac{107}{116}\right)} = -\frac{P\left(\frac{11}{10}, \frac{107}{116}\right)}{Q\left(\frac{11}{10}, \frac{107}{116}\right)} = -\frac{31.32}{37.539} = -0.8343$$

Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $x = \frac{11}{10}$

$$y - \frac{107}{116} = -0.8343(x - \frac{11}{10})$$

$$y = -0.8343x + 1.84014$$

Определим приближенное значение y_2 в точке $x_2 = 1 + \frac{2}{10}$, считая значения функции приближенным к значениям касательной.

$$y_2 = -0.8343\left(1 + \frac{2}{10}\right) + 1.84014$$

$$y_2 = 0.83898$$

Найдем производную в точке $\left(\frac{12}{10}, 0.83898\right)$

$$f'\left(\frac{12}{10}\right) = -\left.\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}\right|_{\left(\frac{12}{10}, 0.83898\right)} = -\frac{P\left(\frac{12}{10}, 0.83898\right)}{Q\left(\frac{12}{10}, 0.83898\right)} = -\frac{33.027}{35.8168} = -0.9221$$

Уравнение касательной к $f(x)$ в точке $x = \frac{12}{10}$

$$y - 0.83989 = -0.9221(x - \frac{12}{10})$$

$$y = -0.9221x + 1.94641$$

Определим приближенное значение y_3 в точке $x_3 = 1 + \frac{3}{10}$, считая значения функции приближенным к значениям касательной.

$$y_3 = -0.9221\left(1 + \frac{3}{10}\right) + 1.94641 = 0.74768$$

График получившейся ломаной показан на рисунке красным цветом. График функции $f(x)$ показан черной линией: