Центр тяжести пирамиды

Пирамида V в R^3 задана своими вершинами
$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$.
Плотность массы задана функцией $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.
Масса пирамиды $M = \int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$

Пояснения к формулам для определения центра тяжести

Центр тяжести c пары точек с координатами a , b и массами m_a , m_b определяется условием равенства моментов $m_a(c-a) = m_b(b-c)$ или $m_a(c-a) + m_b(c-b) = 0$
Аналогично для системы точек на прямой (a_k, m_k), $k = 1, \dots, n$

$$\sum_1^n m_k(c - a_k) = 0, \ c = \frac{\sum_1^n m_k a_k}{\sum_1^n m_k}$$

Рассматривая это выражение как интегральную сумму, можно найти центр тяжести отрезка $[a, b]$ с плотностью массы $f(x)$

$$c = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

чтобы найти центр тяжести пространственного тела можно спроектировать его вместе с массой (!) на координатные оси и найти центы тяжести возникших отрезков – это и будут координаты центра тяжести тела, то есть

$$x*_1 = \frac{\int_V x_1 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}$$

$$x*_2 = \frac{\int_V x_2 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}$$

$$x*_3 = \frac{\int_V x_3 f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}{\int_V f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3}$$

Техника вычисления интегралов

Прямой переход от кратного интеграла к повторному возможен, но значительно проще сделать замену переменных, позволяющую перевести интегрирование в стандартный симплекс

$$S = \{(y_1, y_2, y_3) : y_1, y_2, y_3 > 0, y_1 + y_2 + y_3 = 1\}$$

Чтобы описать отображение S в V, рассмотрим вспомогательный объект – сдвиг пирамиды такой, что A переходит в $(0, 0, 0)$ – это пирамида W с вершинам

$$((0, 0, 0), \ (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \ (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3), \ (d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3))$$

Проверьте, что отображение

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

переводит S в W.
После этого надо провести сдвиг, отображающий W в V

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + a_1 \\ z_2 + a_2 \\ z_3 + a_3 \end{pmatrix}$$

Опишем сквозное отображение S в V

$$x_1 = \phi_1(y_1, y_2, y_3),\ x_2 = \phi_2(y_1, y_2, y_3),\ x_3 = \phi_3(y_1, y_2, y_3)$$

Покажите, что якобиан этого отображения равен модулю определителя матрицы

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 & d_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 & d_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 & c_3 - a_3 & d_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Остается провести провести замену и перейти от двойного интеграла к повторному в интеграле типа

$$\int_S \phi_1(y_1, y_2, y_3) f(\phi_1(y_1, y_2, y_3), \phi_2(y_1, y_2, y_3), \phi_3(y_1, y_2, y_3)) J(y_1, y_2, y_3) dy_1 dy_2 dy_3$$

Проверьте корректность вашего расчета: центр тяжести должен лежать внутри пирамиды.