Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет „ЛЭТИ“

С. Н. ПОЗДНЯКОВ С. В. РЫБИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2004

Министерство образования и науки РФ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет „ЛЭТИ“

С. Н. ПОЗДНЯКОВ С. В. РЫБИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА
И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“
2004

УДК 510.6
ББК В12
П47
Поздняков С. Н., Рыбин С. В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, 2004. 64 с.

Рассматриваются основные идеи, понятия и методы математической логики, интерес к которым вырос благодаря новым приложениям, появившимся за последнее время в связи с развитием информационных технологий.

Может использоваться как для студентов дневной формы обучения, так и для вечерних и заочных факультетов технических вузов.

Рецензенты: кафедра математического анализа СПбГУ; доц. М. В. Дмитриева (СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN 5-7629-0579-9

Математическая логика, как и теория алгоритмов, появились задолго до возникновения компьютеров. Их возникновение было связано с внутренними проблемами математики, с изучением границ применимости ее теорий и методов.

В настоящее время обе эти (взаимосвязанные между собой) теории получили прикладное развитие в так называемой компьютерной математике (computer science). Вот несколько направлений их использования в прикладных областях:

– экспертные системы используют формально-логические выводы для имитации деятельности экспертов в различных областях;

– при проектировании микросхем используется теория булевых функций;

– тестирование программ основано на логическом анализе их структуры;

– доказательство корректности программ базируется на теории логического вывода;

– алгоритмические языки связывают два важных понятия логики: понятие языка и понятие алгоритма;

– автоматизация доказательства теорем основана на методе резолюций, изучаемом в курсе логики.

В данном учебном пособии изложены основные идеи, понятия и методы математической логики, лежащие в основе как перечисленных, так и других ее применений.

1. Бинарные отношения и графы

1.1. Введение. Постановка задачи

Бинарные отношения уже встречались в школьном курсе математики. Примерами таких отношений являются отношения неравенства, равенства, подобия, параллельности, делимости и пр. Бинарное отношение каждым двум объектам сопоставляет логическое значение “да”, если объекты находятся в этом отношении, и “нет” в ином случае. Другими словами, множество пар объектов разбивается на два подмножества, пары первого подмножества находятся в данном отношении, а второго – не находятся. Это свойство можно положить в основу определения бинарного отношения.

Определение 1.1. *Пусть задано множество M. Рассмотрим декартово произведение этого множества на себя $M \times M$. Подмножество R множества $M \times M$ называется бинарным отношением R на множестве M. Если пара $(x; y)$ принадлежит множеству R, говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y, и записывают xRy.*

Пример 1.1. *Введем отношение сравнимости R: x сравнимо с y по модулю m тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки от деления на m. То есть $x \equiv y \pmod m$.*

Рассмотрим введенное отношение R для случая $m = 3$ на множестве $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, тогда

$$M \times M = \begin{bmatrix} (1;1); & (1;2); & (1;3); & (1;4); & (1;5); & (1;6); \\ (2;1); & (2;2); & (2;3); & (2;4); & (2;5); & (2;6); \\ (3;1); & (3;2); & (3;3); & (3;4); & (3;5); & (3;6); \\ (4;1); & (4;2); & (4;3); & (4;4); & (4;5); & (4;6); \\ (5;1); & (5;2); & (5;3); & (5;4); & (5;5); & (5;6); \\ (6;1); & (6;2); & (6;3); & (6;4); & (6;5); & (6;6) \end{bmatrix}.$$

Отношение R определяется множеством таких пар:

$$R = \begin{bmatrix} (1;1); & & & (1;4); & & \\ & (2;2); & & & (2;5); & \\ & & (3;3); & & & (3;6); \\ (4;1); & & & (4;4); & & \\ & (5;2); & & & (5;5); & \\ & & (6;3); & & & (6;6) \end{bmatrix}.$$

Пример 1.2. *Рассмотрим в качестве $M = \mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, или, иными словами, множество точек вещественной прямой. Тогда $M \times M = \mathbf{R}^2$ – множество точек координатной плоскости. Отношение неравенства $<$ определяется множеством пар $R = \{(x; y) | x < y\}$.*

Упражнение 1.1.

1. На множестве вещественных чисел задано отношение: xRy тогда и только тогда, когда одно из чисел вдвое больше другого. Изобразить на плоскости множество точек, определяющее это отношение.

2. На множестве $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ задано отношение делимости: xRy тогда и только тогда, когда x делится на y. Сколько пар содержит это отношение? Перечислите эти пары.

3. Введем на множестве $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *отношение взаимной простоты, т. е.* xRy *тогда и только тогда, когда* x *и* y *взаимно просты:* $D(x; y) = 1$. *Сколько пар содержит это отношение? Перечислите эти пары.*

1.2. Свойства бинарных отношений

Определение 1.2. *Бинарное отношение* R *на множестве* M *называется рефлексивным, если каждый элемент этого множества находится в отношении с самим собой:* $xRx\ \forall x \in M$.

Пример 1.3.

1. Отношение сравнимости рефлексивно (при любом натуральном m *и на любом множестве целых чисел).*

2. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел не рефлексивно.

3. Отношение делимости рефлексивно (на любом множестве целых чисел, не содержащем нуля).

Определение 1.3. *Бинарное отношение* R *на множестве* M *называется антирефлексивным, если ни один элемент этого множества не находится в отношении с самим собой:* $\forall x \in M$ *неверно, что* xRx.

Пример 1.4.

1. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел антирефлексивно.

2. Отношение взаимной простоты антирефлексивно на любом множестве целых чисел, не содержащем 1 *и* -1, *рефлексивно на множествах* $\{1\}, \{-1\}, \{-1; 1\}$ *и не является ни рефлексивным, ни антирефлексивным в ином случае.*

Определение 1.4. *Бинарное отношение* R *на множестве* M *называется симметричным, если вместе с каждой парой* $(x; y)$ *в отношение входит и симметричная пара* $(y; x)$: $\forall x, y \in M\ xRy \Rightarrow yRx$.

Пример 1.5.

1. Отношение сравнимости симметрично при любом натуральном m *и на любом множестве целых чисел.*

2. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел не симметрично.

3. Отношение делимости симметрично только на множестве попарно взаимно простых целых чисел, не содержащем единицу. Например, на множестве простых чисел.

4. Отношение взаимной простоты симметрично на любом множестве целых чисел.

Определение 1.5. *Бинарное отношение R на множестве M называется асимметричным, если ни одна пара не входит в отношение вместе с симметричной ей: $\forall x, y \in M$, если xRy, то неверно, что yRx.*

Пример 1.6.

1. Отношение строгого неравенства на множестве вещественных чисел асимметрично.

2. Отношение делимости не является асимметричным ни на каком множестве целых чисел, не содержащем нуля.

Определение 1.6. *Бинарное отношение R на множестве M называется антисимметричным, если никакая пара, состоящая из разных элементов, не входит в отношение вместе с симметричной ей: $\forall x, y \in M$, если xRy и yRx то $x = y$.*

Пример 1.7.

1. Отношение нестрогого неравенства на множестве вещественных чисел антисимметрично.

2. Отношение делимости является антисимметричным на любом множестве целых чисел, не содержащем нуля.

Упражнение 1.2.

1. Верно ли, что асимметричное отношение всегда антирефлексивно? Докажите.

2. Верно ли, что симметричное отношение всегда рефлексивно? Докажите.

3. Верно ли, что асимметричное отношение всегда антисимметрично? Докажите.

4. Верно ли, что отношение асимметрично тогда и только тогда, когда оно антирефлексивно и антисимметрично? Докажите.

Определение 1.7. *Бинарное отношение R на множестве M называется транзитивным, если вместе с парами $(x; y)$ и $(y; z)$ в отношение входит и пара (x, z), т. е. $\forall x, y, x \in M$, если xRy и yRz, то xRz.*

Замечание 1.1. *Свойство транзитивности хорошо иллюстрируется отношением достижимости: если пункт y достижим из пункта x, а из пункт z – из пункта y, то пункт z достижим из пункта x.*

Пример 1.8.

1. Отношение сравнимости транзитивно при любом натуральном m и на любом множестве целых чисел.

2. Отношение строгого (нестрогого) неравенства транзитивно на любом подмножестве вещественных чисел.

3. Отношение делимости транзитивно на множестве целых чисел, не содержащем нуля.

4. Отношение взаимной простоты не является транзитивным на любом множестве целых чисел. Например, 2 взаимно просто с 3, 3 взаимно просто с 4, но 2 и 4 не взаимно просты.

Упражнение 1.3. *Верно ли, что транзитивное и симметричное отношение всегда рефлексивно? Докажите.*

1.3. Способы задания отношений

Кроме явного перечисления пар, определяющих бинарное отношение, возможны следующие способы задания отношений.

- **Задание процедурой проверки.**

Пример 1.9.

1. Отношение взаимной простоты проверяется процедурой нахождения наибольшего общего делителя: если $D(x; y) = 1$, то $(x; y)$ входит в отношение взаимной простоты.

2. Отношение делимости проверяется процедурой деления с остатком: если $x \equiv 0 \pmod{y}$, то $(x; y)$ входит в отношение делимости.

3. Той же процедурой проверяется отношение равенства остатков при делении на m: если $(x-y) \equiv 0 \pmod{m}$, то $(x; y)$ входит в отношение.

Для отношений на конечных множествах (которые являются основными для дискретной математики) используются также следующие способы задания и описания отношений.

- **Задание матрицей смежностей.** Определим матрицу A размера $|M| \times |M|$, где $|M|$ – количество элементов множества M. Пронумеруем элементы множества M. Тогда $a_{ij} = 1$, если элемент с номером i находится в отношении с элементом с номером j (iRj) и $a_{ij} = 0$ иначе.

Пример 1.10. *Матрица смежностей для отношения делимости на множестве* $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *выглядит так:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Задание графом.** Элементы множества изображаются точками плоскости и образуют множество вершин графа. Отношение изображаются дугами (ребрами) графа: если $(x; y)$ входит в отношение, то из вершины x проводится ориентированная дуга в y.

Пример 1.11. *Граф для отношения сравнимости по модулю три на множестве* $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ *выглядит, как показано на рис. 1.1 Заметим, что он состоит из трех компонент связности:* $\{1;\ 4;\ 7\}$, $\{3; 6\}$ *и* $\{2; 5; 8\}$.

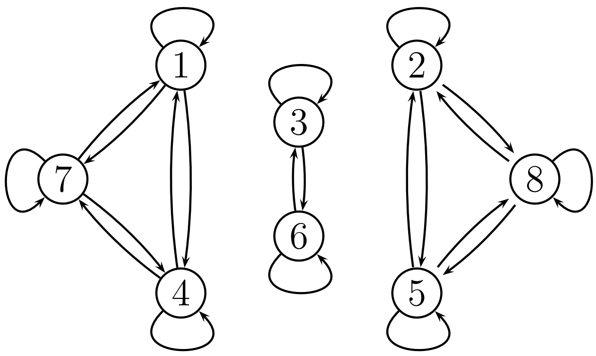


Рис. 1.1

• **Задание списком смежностей.** Для каждого элемента множества перечисляются элементы, находящиеся с ним в данном отношении.

Пример 1.12. *Список смежностей для отношения взаимной простоты на множестве* $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ *выглядит так:*

$$\begin{array}{lll} 1 \to 2; 3; 4; 5; 6 & 2 \to 1; 3; 5 & 3 \to 1; 2; 4; 5 \\ 4 \to 1; 3; 5 & 5 \to 1; 2; 3; 4; 6 & 6 \to 1; 5 \end{array}$$

Дадим интерпретацию свойств бинарных отношений на описывающих их графах и матрицах.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Диагональ матрицы смежностей рефлексивного отношения состоит из единиц.

2. У симметричного отношения матрица смежностей симметрична.

3. Граф рефлексивного отношения имеет петли в каждой вершине.

4. Граф симметричного отношения вместе с дугой, соединяющей x с y, содержит дугу, соединяющую y с x.

5. Граф транзитивного отношения обладает следующим свойством: если из вершины x, двигаясь вдоль дуг, можно попасть в вершину y, то в графе должна быть дуга, непосредственно соединяющая x с y.

Замечание 1.2. *Для симметричных и рефлексивных отношений петли обычно не изображаются, а пары ориентированных дуг, соединяющих данные вершины, заменяются одной – неориентированной – дугой.*

Например, граф из примера 1.11 будет выглядеть так, как показано на рис. 1.2.

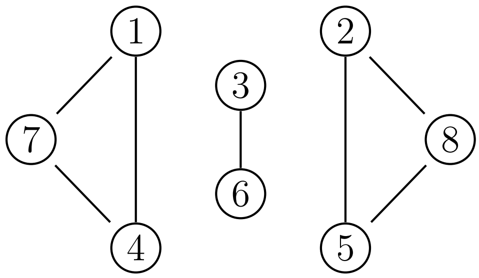


Рис. 1.2

Упражнение 1.4.

1. Опишите свойства матрицы смежностей: а)антирефлексивного отношения; б) асимметричного отношения; в) антисимметричного отношения; г) транзитивного отношения.

2. Опишите свойства графа: а) антирефлексивного отношения; б) асимметричного отношения; в) антисимметричного отношения.

1.4. Отношение эквивалентности

Определение 1.8. *Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, называется отношением эквивалентности.*

Пример 1.13. *Отношение сравнимости (по любому модулю) является отношением эквивалентности.*

Сопоставим каждому элементу множества M все элементы, находящиеся с ним в данном отношении эквивалентности: $M_x = \{y \in M \mid xRy\}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. *Множества M_x и M_y либо не пересекаются, либо совпадают.*

Доказательство. Все элементы одного класса эквивалентны между собой, т. е. если $x, y \in M_z$, то xRy. Действительно, пусть $x, y \in M_z$, следовательно xRz и yRz. По симметричности отношения R имеем zRy. Тогда, в силу транзитивности, из xRz и zRy получаем xRy.

Пусть классы M_x и M_y имеют общий элемент z, тогда для любых элементов $x' \in M_x$ и $y' \in M_y$ по доказанному выше $x'Rz$ и zRy', откуда $x'Ry'$. Таким образом, если классы пересекаются, то они совпадают. $\square$[1]

Определение 1.9. *Множества M_x называются классами эквивалентности множества M по отношению R.*

Следствие 1.1. *Отношение эквивалентности можно интерпретировать как отношение достижимости на неориентированном графе. Тогда классам эквивалентности будут соответствовать компоненты связности графа. Это подграфы, на которые распадается граф: любые вершины из разных компонент связности не достижимы друг из друга, а вершины одной компоненты связности достижимы.*

Пример 1.14. *Рассмотрим отношение сравнимости целых чисел по модулю m. Классами эквивалентности этого отношения будут классы вычетов по модулю m.*

Как построить разбиение конечного множества M на классы эквивалентности для отношения R? Эту задачу решает следующий алгоритм.

• **Метод раскраски.** Пронумеруем элементы множества $M : m[i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$ и “раскрасим” элементы в разные цвета. Можно считать, что цвета заданы их номерами. Тогда в начале работы алгоритма цвет элемента совпадает с его номером $color[i] = i$.

Далее будем перебирать элементы $m[i]$ множества от первого до последнего, сравнивая их с предыдущими: если элемент $m[i]$ будет находиться в отношении R с одним из предыдущих $m[j]$, то все элементы, имеющие тот же цвет, что и $m[j]$ надо “перекрасить” в цвет $m[i]$.

После окончания работы алгоритма элементы каждой компоненты связности будут раскрашены в свой цвет.

1.5. Отношение порядка

Определение 1.10. *Бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, называется отношением порядка.*

Замечание 1.3. *Иногда определение порядка уточняют так: отношение порядка, определенное выше, называют отношением нестрогого порядка, а асимметричное транзитивное отношение называют отношением строгого порядка.*

[1]Здесь и далее знаком $\square$ отмечен конец доказательства.

Пример 1.15.

1. Отношение нестрогого неравенства является отношением (нестрогого) порядка, а отношение строгого неравенства является отношением строгого порядка.

2. Отношение делимости на любом множестве целых чисел, не содержащем нуля, является отношением (нестрогого) порядка.

Определение 1.11. *Отношение порядка может обладать или не обладать следующим свойством: $\forall x, y \in M$ либо xRy, либо yRx.*

Если отношение порядка обладает этим свойством, оно называется отношением линейного порядка, если не обладает – отношением частичного порядка.

Пример 1.16.

1. Отношение нестрогого неравенства является отношением линейного порядка, так как для любых двух вещественных чисел одно будет не меньше другого.

2. Отношение делимости на множестве целых чисел M может являться (в зависимости от множества) отношением частичного порядка или отношением линейного порядка. Например, если $M = \{1; 2; 3; 4\}$, то это отношение будет отношением частичного порядка, так как ни 3 не делится на 4, ни 4 на 3. Если же $M = \{1; 2; 4; 8\}$, то отношение будет отношением линейного порядка.

Рассмотрим следующую задачу. Любая иерархическая система определяет отношение подчинения, которое является отношением порядка, но, как правило, только частичного.

Например, из рис.1.3 видно, что для элементов B и C, C и D, B и F и т. д. нельзя определить, кто из них "главнее". Это не всегда удобно (например, отношение подчинения желательно определить для любых двух военнослужащих). Решение этой задачи сводится к построению отношения линейного порядка, согласованного с заданным отношением частичного порядка.

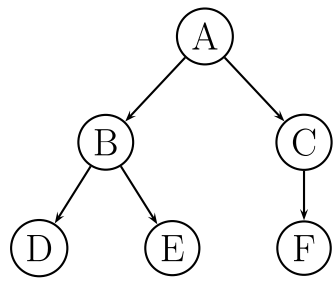


Рис. 1.3

Определение 1.12. *Отношение L называется согласованным с отношением R, если любые элементы множества, находящиеся в отношении R, будут находиться и в отношении L.*

Определение 1.13. *Элемент x множества M называется минимальным по отношению R, если не существует элемента "меньше его", т. е. не существует $y \in M$ такого, что yRx.*

Теорема 1.3. *Любое отношение порядка (в том числе, частичного), заданное на конечном множестве M, имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Докажем от противного: пусть для каждого элемента M существует меньший его. Тогда получается цепочка (строится справа налево): $\ldots vRz\ zRy\ yRx$. Эта цепочка не может состоять из бесконечного количества различных элементов ввиду конечности множества M. Не умаляя общности, будем считать, что в ней встретится элемент x, такой, что цепочка имеет вид $\ldots\ xRw\ \ldots\ vRz\ zRy\ yRx$. Применим свойство транзитивности к этой цепочке от первого до предпоследнего звена: получим xRy. Сравним этот результат с последним звеном: для отношения нестрогого порядка отсюда (по антисимметричности) получим $x = y$, что противоречит условию, для строгого порядка эти отношения (по асимметричности) не могут существовать одновременно, что также приводит к противоречию. Теорема доказана. □

1.6. Алгоритм топологической сортировки

Алгоритм топологической сортировки по заданному отношению частичного порядка строит согласованное с ним отношение линейного порядка.

В качестве отношения линейного порядка будем рассматривать отношение неравенства на множестве номеров элементов множества M (n – количество элементов M). Нумерация элементов описывается алгоритмом:

ОТ $i = 1$ ДО n ПОВТОРИТЬ:

  Найти минимальный элемент множества и присвоить ему номер i.
  Удалить этот элемент из множества.

Обоснуем корректность работы алгоритма.

1. Отношение L, определенное как отношение неравенства на номерах элементов, является отношением порядка, что следует из рассмотренных ранее примеров.

2. Отношение L согласовано с отношением R. Действительно, выбранный на i-м шаге элемент является минимальным на множестве всех элементов M, за исключением уже выбранных, поэтому он не может быть "больше" (не существует $y \in M$ такого, что yRx) ни одного из них. По вновь введенному отношению этот элемент будет "больше" всех выбранных и "меньше" всех не выбранных, что подтверждает согласованность.

3. Наконец, алгоритм обязательно (за n шагов) закончит свою работу.

Пример 1.17. *Для иерархической системы, рис. 1.3, можно построить несколько согласованных линейных отношений порядка.*

На первом шаге минимальных элементов три – D, E, F.

Выберем один из них, например D, и присвоим ему номер 1. После выбрасывания этого элемента из графа отношения (и всех дуг, входящих в него), минимальными будут два элемента – E и F. Выберем один из них, например F, и присвоим ему следующий номер – 2 (рис.1.4).

Далее минимальных элементов будет снова два – E и C и т. д.

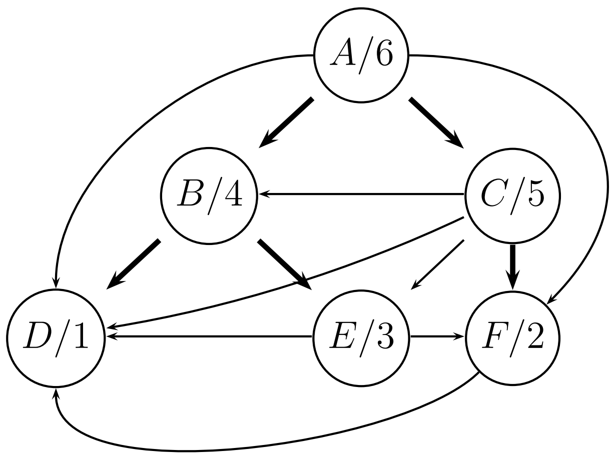


Рис. 1.4

Упражнение 1.5.

1. Дайте определение максимального элемента.

2. Сформулируйте алгоритм топологической сортировки на основе выбора максимального элемента.

3. Примените построенный алгоритм к только что разобранному примеру.

4. Сколько в этом примере можно построить различных отношений линейного порядка, согласованных с заданным отношением частичного порядка?

1.7. Транзитивное замыкание бинарного отношения. Алгоритм Уоршелла

Рассмотрим постановку задачи. Пусть на конечном множестве M задано бинарное отношение R, не являющееся, вообще говоря, транзитивным. Как построить согласованное с ним транзитивное бинарное отношение?

Замечание 1.4.

1. Эта задача имеет содержательную интерпретацию на графе: надо дополнить граф следующими дугами. Если из вершины x можно достичь вершины y, надо построить дугу $(x; y)$.

2. На матрице смежности задачу можно сформулировать так: по матрице смежности построить матрицу достижимости.

В теореме 1.4 будет получен алгоритм построения матрицы достижимости (транзитивного замыкания) с помощью возведения матрицы смежностей в степень.

Заменим обычные арифметические операции, участвующие в определении умножения матриц, следующими: операцию сложения двух чисел заменим операцией выбора наибольшего значения (а операцию умножения сохраним прежней). Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1.4. *Пусть A – матрица смежностей рефлексивного отношения R, заданного на конечном множестве M, а n – число элементов M. Тогда A^{n-1} – матрица достижимости.*

Доказательство. Рассмотрим умножение матрицы смежностей A на себя. Элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце результирующей матрицы, по определению умножения матриц (со сделанными уточнениями) покажет, можно ли достичь из i-й вершины j-ю, используя не более одной промежуточной вершины. Соответственно, элементы $(n-1)$-й степени матрицы A, покажут попарные достижимости вершин с использованием не более $(n-2)$ промежуточных вершин. Но на графе из n вершин любой путь без циклов будет иметь максимум n вершин, а значит не более $(n-2)$ промежуточных. Теорема доказана. $\square$

Пример 1.18. *Рассмотрим граф рефлексивного отношения на множестве из трех элементов. Пусть A – матрица смежностей этого отношения, n=3.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ \textit{тогда, после работы алгоритма} } A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис.1.5 представлены, соответственно, исходный граф и граф транзитивного замыкания:

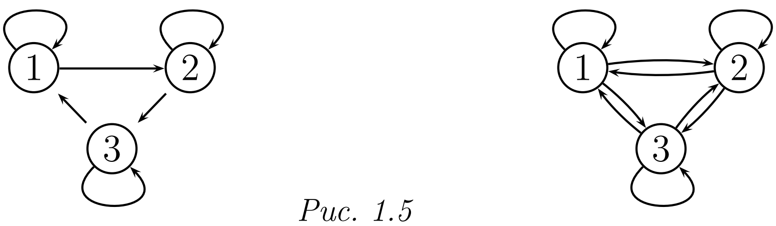


Рис. 1.5

Замечание 1.5. *Граф, соответствующий транзитивному замыканию, является полным трехвершинным графом – все его вершины соединены дугами.*

Упражнение 1.6. *Примените алгоритм умножения матриц к антирефлексивному отношению. Какой смысл будет иметь матрица A^{n-1}?*

Оценим трудоемкость предложенного алгоритма. При вычислении одного элемента матрицы, полученной умножением матриц размера $n \times n$ на себя требуется n умножений и $(n-1)$ сложение. Для вычисления всех элементов потребуется порядка n^3 действий, а для возведения матрицы в $(n-2)$ степень – порядка n^4 действий.

Возникает вопрос, нет ли алгоритма с меньшим порядком трудоемкости. Таким алгоритмом является *алгоритм Уоршелла*, трудоемкость которого имеет порядок n^3.

• **Алгоритм Уоршелла.** Идея алгоритма Уоршелла состоит в расширении множества промежуточных вершин по следующему правилу: на каждом шаге в рассмотрение добавляется одна новая вершина, после чего достижимости вершин пересчитываются "через нее". Если w – промежуточная вершина, то достижимость вершины v из вершины u через w пересчитывается по правилу

$$D[u;v] := \max\{D[u;v], D[u;w] * D[w;v]\},$$

т. е. не меняется, если v достижима из u, и меняется (с 0 на 1), если достижимости до введения промежуточной вершины w не было, а w достижима из u и v достижима из w.

Таким образом, после k шагов будут соединены те вершины, которые достижимы по путям, проходящим только через первые k вершин (кроме первой и последней).

Замечание 1.6. *Так как элементы матрицы смежностей по существу логические значения (0 и 1), правило модификации матрицы D естественнее записать в логических операциях*

$$D[u;v] := D[u;v] \text{ ИЛИ } (D[u;w] \text{ И } D[w;v]).$$

Таким образом, алгоритм Уоршелла можно записать так:

ДЛЯ ВСЕХ $w \in M$
    ДЛЯ ВСЕХ $u \in M$
        ДЛЯ ВСЕХ $v \in M$
            $D[u;v] := D[u;v]$ ИЛИ $(D[u;w]$ И $D[w;v])$.

Легко видеть, что трудоемкость полученного алгоритма n^3.

Замечание 1.7.

1. Построение алгоритма осуществлялось на основе теоретических построений, которые, фактически, составляют доказательство *корректности построенного алгоритма. Заметим, что после выполнения k-го шага внешнего цикла значения $D[u; v]$ показывают достижимость вершины v из вершины u, используя первые k вершин в качестве промежуточных.*

2. Оба алгоритма построения транзитивного отношения, согласованного с данным, строят одно и то же отношение. Оно называется транзитивным замыканием исходного отношения, так как является минимальным (остальные согласованные с исходным транзитивные отношения его содержат) среди всех таких расширений исходного отношения.

1.8. Индивидуальное задание по теме "Бинарные отношения"

• **Бинарные отношения.** Отношение задано на нижеуказанном множестве целых чисел. Генерация варианта:

N	Множество M	N	Множество M
1	53 43 54 42 44 60 50 20	11	31 38 44 10 25 09 07 20
2	60 25 01 71 68 50 20 24	12	35 40 37 38 15 18 28 11
3	71 75 80 60 65 42 27 62	13	64 48 71 40 49 73 63 37
4	28 45 30 35 20 21 22 07	14	41 39 30 50 45 40 34 37
5	89 10 95 04 11 97 40 02	15	50 76 77 41 45 39 05 44
6	21 10 03 80 30 15 07 09	16	90 95 91 94 70 80 89 10
7	88 90 92 60 72 59 50 61	17	21 13 22 10 18 40 20 08
8	40 52 47 50 32 35 37 28	18	32 14 02 60 45 17 04 11
9	31 20 80 19 28 92 29 06	19	42 60 73 25 39 17 01 28
10	51 40 01 64 52 50 30 35	20	51 60 55 58 40 47 50 35

Для каждого из следующих отношений необходимо:

1) проверить, является ли отношение рефлексивным, антирефлексивным, симметричным, асимметричным, антисимметричным, транзитивным;

2) построить матрицы и графы этих отношений;

3) определить, являются ли эти отношения отношениями эквивалентности, частичного порядка, линейного порядка;

4) для отношений эквивалентности построить классы эквивалентности;

5) для отношений частичного порядка применить алгоритм топологической сортировки и получить отношения линейного порядка;

6) построить транзитивные замыкания всех отношений:

а) $xRy \Leftrightarrow x$ и y имеют одинаковые остатки при делении на 3;

б) $xQy \Leftrightarrow$ в наборе имеется элемент, больший x, но меньший y;

в) $xTy \Leftrightarrow$ в наборе имеется элемент z, такой что $(x-z)(y-z) < 0$;

г) $xGy \Leftrightarrow$ каждая из цифр числа x больше цифры числа y, стоящей в соответствующем разряде;

д) $xSy \Leftrightarrow |x-y| < 5$.

• **Алгоритм Уоршелла.** Для генерации варианта удалите из изображенного на рис.1.6 графа указанные ребра.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a	**g**	**p**	**l**	**h**	**e**	**p**	**b**	**p**	**b**	**e**	**h**	**c**	**k**	**c**	**a**	**b**	**d**	**h**
b	**f**	**n**	**m**	**k**	**f**	**m**	**g**	**l**	**e**	**f**	**k**	**e**	**n**	**f**	**g**	**e**	**e**	**k**
g	**c**	**d**	**a**	**c**	**l**	**h**	**n**	**c**	**h**	**n**	**m**	**g**	**b**	**k**	**p**	**k**	**f**	**n**
h	**k**	**c**	**f**	**p**	**p**	**b**	**m**	**a**	**m**	**p**	**l**	**l**	**d**	**b**	**l**	**n**	**g**	**p**

1. Постройте матрицу смежности графа.

2. Постройте матрицу достижимости, иллюстрируя промежуточные шаги алгоритма Уоршелла.

3. Какие из выброшенных ребер будут присутствовать в транзитивном замыкании?

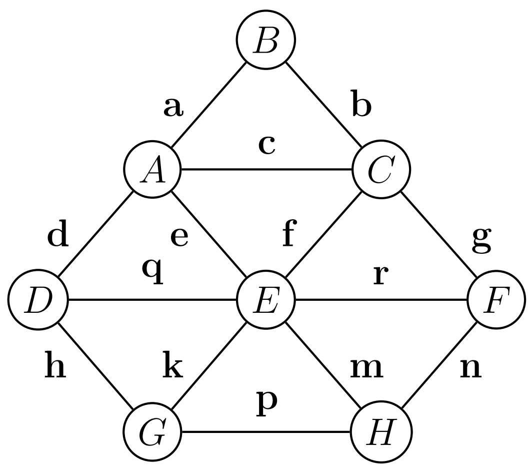


Рис. 1.6

2. Логика высказываний

Логика предикатов в качестве составной и наиболее простой части содержит логику высказываний.

2.1. Высказывания и операции над ними

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно. Рассмотрим следующие предложения:

A. Число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

B. Неверно, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным.

C. Число $\sqrt{2}+1$ является иррациональным.

D. Если число $\sqrt{2}$ является иррациональным, то число $\sqrt{2}+1$ также является иррациональным.

E. Который час?

Предложения A – D являются высказываниями, предложение E – нет. Высказывания A, C и D истинны, высказывание B – ложно. Более точно, *значение истинности* высказываний A, C и D *есть истина*, а *значение истинности* высказывания B *есть ложь*. В дальнейшем истину будем обозначать цифрой 1, а ложь – цифрой 0.

Проанализируем высказывания A – D с точки зрения их "внутреннего строения". Высказывания A и C можно назвать простыми, высказывания B и D – составными, полученными из простых высказываний A и C. Этот простой пример показывает, что в языке (в данном случае, в русском языке) существуют способы построения одних высказываний из других. Эти способы будем называть *операциями.* В естественных языках (в том числе и в русском языке) существует много таких операций. В качестве основных выделим пять операций.

Определение 2.1. *Пусть X и Y – некоторые высказывания. Тогда высказывания:*

1) "X и Y" называется конъюнкцией высказываний X и Y;

2) "X или Y" называется дизъюнкцией высказываний X и Y;

3) "не X" называется отрицанием высказывания X;

4) "если X, то Y" называется импликацией высказываний X и Y;

5) "X тогда и только тогда, когда Y" называется эквиваленцией высказываний X и Y.

Высказывание B из приведенного примера является отрицанием высказывания A, а высказывание D – импликацией высказываний A и C.

Введем следующие обозначения для операции: $\wedge$ – конъюнкция, $\vee$ – дизъюнкция, $\neg$ – отрицание, $\rightarrow$ – импликация, $\leftrightarrow$ – эквиваленция. Так, $B = \neg A$, $D = A \rightarrow C$. Символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ называются *связками.*

Зависимость значения истинности новых высказываний определяется *таблицей истинности связок* (табл. 2.1).

Таблица 2.1

X	Y	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$\neg X$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1

Более точно, табл. 2.1 содержит пять таблиц истинности, по одной для каждой из связок. Эти пять таблиц для удобства объединены в одну.

Прокомментируем таблицы истинности дизъюнкции и импликации. В русском языке союз “или” имеет два значения: *разделительное* – или то, или другое, но не оба; *соединительное* – или то, или другое, или оба. Как видно из табл. 2.1, союз “или” будем понимать в соединительном смысле. Перейдем к импликации. Если дана импликация $X \rightarrow Y$, то высказывание X называется *посылкой* импликации, а высказывание Y – *заключением.* Если посылка X импликации ложна, то вся импликация $X \rightarrow Y$ истинна (см. третью и четвертую строки табл. 2.1). Это свойство импликации часто формулируют в виде следующего принципа: “Из ложного утверждения(имеется в виду X) следует все что угодно (имеется в виду Y)”. В силу этого высказывание “если $2 \cdot 2 = 5$, то π – иррациональное число” является истинным, поскольку оно представляет собой импликацию, посылка которой ложна. Подчеркнем, что при этом не надо искать доказательство или опровержение того, что π – иррациональное число. Аналогично, первая и третья строки табл. 2.1 показывают, что если заключение Y импликации истинно, то вся импликация $X \rightarrow Y$ также истинна. Это свойство импликации тоже формулируют в виде принципа: “Истинное утверждение (имеется в виду Y) следует из чего угодно (имеется в виду X)”. Из этого принципа сразу следует истинность высказывания “если π – иррациональное число, то $2 \cdot 2 = 4$”, поскольку оно представляет собой импликацию с истинным заключением.

2.2. Формулы логики высказываний, интерпретация

В 2.1 высказывания были введены как повествовательные предложения естественного языка, т. е. как лингвистические объекты. Для изучения этих объектов математическими средствами используется понятие формулы логики высказываний. Дадим соответствующие определения.

Определение 2.2. *Атомарными формулами логики высказываний называются буквы* U, V, W, X, Y, Z *с индексами и без них, а также символы истины* 1 *и лжи* 0.

Определение 2.3. *Формулами логики высказываний называются*

1) атомарные формулы;

2) выражения вида $(F)\wedge(G)$, $(F)\vee(G)$, $\neg(F)$, $(F)\to(G)$, $(F)\leftrightarrow(G)$, *где* F *и* G *– формулы логики высказываний.*

На первый взгляд может показаться, что определение содержит "порочный круг"; понятие *формулы логики высказываний* определяет само себя. На самом деле, это определение относится к так называемым индуктивным определениям. Такие определения вводят сначала базовые объекты (в нашем случае – атомарные формулы) и способы порождения новых объектов из уже полученных (в нашем случае – применение операций), введенных в первом параграфе. Приведем пример.

Пример 2.1. *Буквы* X, Y, Z *– атомарные формулы. В силу первого пункта определения 2.3 эти буквы являются формулами логики высказываний, а в силу второго формулами являются выражения*

$$(X)\wedge(Y), \quad ((X)\wedge(Y))\to(Z).$$

Если следовать строго определению, в формуле надо писать много скобок. Это неудобно для восприятия формулы. Чтобы уменьшить количество скобок условимся, во-первых, атомарные формулы в скобки не заключать, во-вторых, ввести приоритет (силу связывания) для связок.

Будем считать, что $\neg$ имеет наивысший приоритет, затем в порядке уменьшения приоритета следуют связки $\wedge, \vee, \to$ и самый маленький приоритет имеет связка $\leftrightarrow$.

Пример 2.2. *Используя эти соглашения, формулу* $((X)\wedge(Y))\to(Z)$ *можно записать в виде* $X\wedge Y\to Z$, *а формулу* $((X)\wedge(Y))\vee(Z)$ *как* $X\wedge Y\vee Z$.

В дальнейшем нам понадобится понятие подформулы. Попросту говоря, подформула формулы F – это "слитная" часть, которая сама является формулой. На строгом уровне понятие вводится следующим образом.

Определение 2.4. *Подформулой атомарной формулы является она сама. Подформулами формулы* $\neg F$ *являются формула* $\neg F$ *и все подформулы* F. *Подформулами формул* $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$ *являются они сами и все подформулы формул* F *и* G.

Пример 2.3. *Формула* $F = X \wedge Y \to X \vee Z$ *имеет шесть подформул:* $X, Y, Z, X \wedge Y, X \vee Z, X \wedge Y \to X \vee Z$.

Необходимо соотнести понятие высказывания и формулы. На самом простом уровне формула – это *форма* для получения высказываний. Пусть, например, дана формула $F = X \wedge Y \to Z$. Поставим вместо X, Y и Z, соответственно, высказывания $A_1 =$ “четырехугольник ABCD является параллелограммом”, $A_2 =$ “в четырехугольнике ABCD смежные стороны равны”, $A_3 =$ “в четырехугольнике ABCD диагонали перпендикулярны”, получим высказывание $A_4 =$ “если четырехугольник ABCD является параллелограммом и его смежные стороны равны, то диагонали перпендикулярны” (использованы естественные сокращения). Это высказывание получилось “по форме” F. Если вместо X, Y и Z подставить другие высказывания, то получим новое высказывание, имеющее ту же “форму”.

На строгом уровне вышеизложенное оформляется в виде понятия интерпретации.

Обозначим через A – множество атомарных, а через F – множество всех формул логики высказываний. Зафиксируем некоторую совокупность высказываний P, удовлетворяющих следующим условиям: если совокупность P содержит два высказывания, то она содержит их конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию, эквиваленцию и отрицание (каждого из высказываний).

Определение 2.5. *Интерпретацией в широком смысле будем называть функцию* $\varphi : A \to P$ *такую, что* $\varphi(1)$ *– истинное высказывание, а* $\varphi(0)$ *– ложное.*

Такая функция, определенная на множестве атомарных формул, естественным образом распространяется на множество всех формул. Ранее был приведен пример интерпретации в широком смысле. В этом примере совокупность P содержала высказывания $A_1 - A_4$, а интерпретация φ на атомарных формулах X, Y, Z действовала так: $\varphi(X) = A_1$, $\varphi(Y) = A_2$, $\varphi(Z) = A_3$. Естественно, расширение φ на множестве всех формул будем обозначать той же буквой. Тогда $\varphi(F) = A_4$.

В дальнейшем, на самом деле от высказываний $\varphi(F)$, в основном, будут нужны только их истинные значения 1 и 0. Введем поэтому более узкое понятие интерпретации.

Определение 2.6. *Интерпретацией в узком смысле (или просто интерпретацией) называется функция $\varphi : A \to \{0,1\}$ такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.*

Используя таблицы истинности связок, интерпретацию можно расширить на множество всех формул. Приведем пример.

Пример 2.4. *Пусть $\varphi(X) = 1, \varphi(Y) = 0, \varphi(Z) = 1$, $F = X \vee Y \to Z$, $G = X \wedge Y \leftrightarrow Y \wedge Z$. Тогда $\varphi(F) = 1$, $\varphi(G) = 0$.*

2.3. Равносильность и законы логики высказываний

Нетрудно привести примеры формул, которые "выражают одно и то же". Таковы, например, формулы $X \vee Y$ и $Y \vee X$. Подобные формулы будем называть *равносильными*. Прежде, чем дать соответствующее определение, условимся о следующем обозначении.

Если формула F построена из атомарных формул $X_1, \ldots, X_n$, то F будем обозначать через $F(X_1, \ldots, X_n)$. Более того, будем пользоваться последним обозначением, даже если некоторые из атомарных формул отсутствуют в записи формулы F (но всякая атомарная формула, входящая в F, содержится среди $X_1, \ldots, X_n$).

Определение 2.7. *Формулы F и G называются равносильными, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = \varphi(G)$.*

Пример 2.5. *Убедимся в том, что формулы логики высказываний $F = X \to Y$ и $G = \neg X \vee Y$ равносильны. Ясно, что если интерпретации φ и ψ совпадают на X и Y, то $\varphi(F) = \psi(F)$ и $\varphi(G) = \psi(G)$. Следовательно, для проверки равенства $\varphi(F) = \varphi(G)$ из определения равносильности надо рассмотреть лишь интерпретации, которые различаются на X и Y (а таких интерпретаций четыре) и вычислить соответствующие значения $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$.*

X	Y	$F = X \to Y$	$\neg X$	$G = \neg X \vee Y$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Другими словами, надо составить таблицу истинности формул F и G. В таблице истинности для удобства вычисления значения интерпретаций на G введен промежуточный столбец $\neg X$. Из таблицы видно, что столбцы формул F и G совпадают. Это означает, что формулы F и G равносильны.

Близким к понятию равносильности является понятие тождественной истинности.

Определение 2.8. *Формула F называется тождественно истинной, если для любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 1$.*

Пример 2.6. *Формула $F = X \wedge Y \to X$ является тождественно истинной. Для проверки равенства $\varphi(F) = 1$ не надо рассматривать все интерпретации, а лишь четыре, которые различаются на атомарных формулах X и Y. Для таких интерпретаций надо вычислить значение формулы F, т. е. составить таблицу истинности формулы F.*

Таблица для удобства вычисления значения $\varphi(F)$ содержит промежуточный столбец $X \wedge Y$. Видно, что столбец формулы F состоит из одних единиц. Это означает, что формула F тождественно истинна.

X	Y	$X \wedge Y$	$X \wedge Y \to X$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Теорема 2.1. *Формулы F и G равносильны тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тождественно истинной.*

Доказательство. Предположим, что формулы F и G равносильны и рассмотрим интерпретацию φ. Ясно, что $\varphi(F \leftrightarrow G) = \varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G)$. Поскольку значения истинности $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ совпадают, то по таблице истинности эквиваленции имеем равенства $\varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G) = 1$. Это означает, что формула $F \leftrightarrow G$ тождественно истинна.

Предположим теперь, что формула $F \leftrightarrow G$ тождественно истинна и рассмотрим интерпретацию φ. Тогда $1 = \varphi(F \leftrightarrow G) = \varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G)$. Но из таблицы истинности эквиваленции следует, что если $\varphi(F) \leftrightarrow \varphi(G) = 1$, то $\varphi(F) = \varphi(G)$. Теорема доказана. □

В логике высказываний довольно часто приходится преобразовывать формулы, сохраняя их равносильность. Для таких преобразований используются так называемые *законы логики высказываний.* Приведем список этих законов.

Пусть F, G и H – некоторые формулы логики высказываний. Тогда следующие формулы равносильны:

1) $F \wedge 1$ и F; 2) $F \vee 1$ и 1; 3) $F \wedge 0$ и 0; 4) $F \vee 0$ и F;
5) $F \wedge F$ и F; 6) $F \vee F$ и F; 7) $F \wedge G$ и $G \wedge F$; 8) $F \vee G$ и $G \vee F$;

9) $F \wedge (G \wedge H)$ и $(F \wedge G) \wedge H$; 10) $F \vee (G \vee H)$ и $(F \vee G) \vee H$;
11) $F \wedge (G \vee H)$ и $(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$;
12) $F \vee (G \wedge H)$ и $(F \vee G) \wedge (F \vee H)$;
13) $F \wedge (F \vee G)$ и F; 14) $F \vee (F \wedge G)$ и F;
15) $F \wedge \neg F$ и 0; 16) $F \vee \neg F$ и 1;
17) $\neg(F \wedge G)$ и $\neg F \vee \neg G$; 18) $\neg(F \vee G)$ и $\neg F \wedge \neg G$;
19) $\neg\neg F$ и F; 20) $F \to G$ и $\neg F \vee G$;
21) $F \leftrightarrow G$ и $(F \to G) \wedge (G \to F)$;

Эти равносильности (законы логики высказываний) легко доказываются с помощью таблиц истинности. Отметим, что в примере на определение равносильности нами фактически доказан закон 20.

Прокомментируем список законов. Законы 5 и 6 называются *идемпотентностью*, 7 и 8 – *коммутативностью*, 9 и 10 – *ассоциативностью*, соответственно, конъюнкции и дизъюнкции. Ассоциативность конъюнкции означает, что в конъюнкции трех формул скобки можно ставить как угодно, а следовательно, вообще не ставить. Из этого утверждения следует, что в конъюнкции четырех, пяти и т. д.(любого конечного числа) формул скобки можно ставить как угодно и поэтому вообще не ставить. Аналогичное замечание можно сделать и для дизъюнкции.

Законы 11 и 12 называются *дистрибутивностями.* Более точно, закон 11 – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, а закон 12 – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции. Для применения этих законов в преобразованиях формул удобно иметь в виду следующий аналог. Заменим в законе 11 формулы F, G и H, соответственно, буквами a, b и c, знак $\wedge$ заменим умножением $*$, а знак $\vee$ – сложением $+$. Мы получим известное числовое тождество

$$a * (b + c) = a * b + a * c.$$

Данное тождество есть дистрибутивность умножения чисел относительно сложения. В школе применение этого равенства слева направо называется раскрытием скобок, а справа налево вынесением общего множителя. Отличие операций над высказываниями $\wedge$ и $\vee$ от числовых операций $*$ и $+$ состоит в том, что для высказываний выполняются обе дистрибутивности, а для чисел только одна. Сложение не дистрибутивно относительно умножения.

Закон 15 называется *законом противоречия,* закон 16 – *законом исключенного третьего,* закон 19 – *снятием двойного отрицания.* Законы

13 и 14 называются *законами поглощения*, а законы 17 и 18 – *законами де Моргана* в честь известного французского математика и логика XIX века.

Имея законы логики высказываний, получаем еще один способ доказательства равносильности двух формул. Этот способ состоит в переходе от одной формулы к другой с помощью законов. В его основе лежит следующее легко доказываемое утверждение: если в некоторой формуле F заменить подформулу G равносильной ей формулой G', то получим формулу F', равносильную исходной формуле F. Проиллюстрируем второй способ на примере.

Пример 2.7. *Доказать равносильность формул*

$$F = [X \wedge (Z \rightarrow Y)] \vee [(X \rightarrow Z) \wedge Y] \text{ и } G = (X \vee Y) \wedge (Y \vee \neg Z).$$

В силу закона 20, формулы $Z \rightarrow Y$ *и* $X \rightarrow Z$ *равносильны, соответственно, формулам* $\neg Z \vee Y$ *и* $\neg X \vee Z$*, поэтому формула* F *равносильна формуле*

$$F_1 = [X \wedge (\neg Z \vee Y)] \vee [(\neg X \vee Z) \wedge Y].$$

Дважды применив дистрибутивность (закон 11) и пользуясь ассоциативностью связок $\wedge$ *и* $\vee$*, получим, что формула* F_1 *равносильна формуле*

$$F_2 = (X \vee \neg X \vee Z) \wedge (\neg Z \vee Y \vee \neg X \vee Z) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee Y \vee Y).$$

В силу коммутативности дизъюнкции, законов 16 и 2, формулы $X \vee \neg X \vee Z$ *и* $\neg Z \vee Y \vee \neg X \vee Z$ *равносильны* 1. *Применив теперь законы 1 и 6 и коммутативность дизъюнкции, получим, что формула* F_2 *равносильна* G.

Задача 2.1. *Будут ли следующие формулы тождественно истинны:*

a) $X \wedge Y \rightarrow X$;	*b)* $X \vee Y \rightarrow X$;
c) $X \wedge Y \rightarrow X \vee Y$;	*d)* $X \vee Y \rightarrow X \wedge Y$;
e) $(X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \rightarrow X)$;	*f)* $(X \rightarrow \neg X) \rightarrow X$;
g) $(\neg X \rightarrow X) \rightarrow X$;	*h)* $(X \rightarrow Y) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$;
i) $\neg(X \leftrightarrow Y) \rightarrow (\neg X \leftrightarrow \neg Y)$.	

Ответ: тождественно истинны формулы a, c, g и h. Остальные формулы тождественно истинными не являются.

Задача 2.2. *Существует ли формула* F *такая, что формула* G *будет тождественно истинна:*

a) $G = X \wedge Y \rightarrow \neg F \wedge Z$;

b) $G = (F \wedge Y \rightarrow \neg Z) \rightarrow (Z \rightarrow \neg Y)$;

c) $G = (F \wedge Y \to \neg Z) \to ((Z \to \neg Y) \to F)$.

Решение: В случаях a и b ответ положительный, в качестве формулы F можно, соответственно, взять $X \wedge Y$ и Y. В случае c ответ отрицательный. Действительно, если интерпретация φ такова, что $\varphi(Y) = 1$, $\varphi(Z) = 0$, то $\varphi(G) = 0$ независимо от $\varphi(F)$.

Задача 2.3. *Будут ли следующие формулы равносильны:*

a) $X \to Y$ и $\neg Y \to \neg X$; b) $\neg X \to Y$ и $\neg Y \to X$;

c) $X \to (Y \to Z)$ и $(X \to Y) \to Z$; d) $X \to (Y \to Z)$ и $X \wedge Y \to Z$;

e) $\neg(X \to Y)$ и $\neg X \to \neg Y$; f) $X \leftrightarrow Y$ и $\neg X \leftrightarrow \neg Y$.

Ответ: в случаях b,d и f формулы равносильны, в остальных нет.

Задача 2.4. *Доказать равносильность формул:*

a) $\neg[(X \vee Y) \wedge (X \wedge \neg Z)]$ и $X \to Z$;

b) $(X \wedge \neg Y) \vee \neg(X \wedge Y)$ и $\neg(X \wedge Y)$;

c) $\neg[(X \vee \neg Y) \wedge Y] \wedge \neg(\neg X \wedge Y)$ и $\neg Y$;

d) $\neg[(X \wedge Y) \vee \neg Z]$ и $\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$;

e) $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$ и $X \vee Y$;

f) $(\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$ и $(\neg X \vee Y) \wedge Z$.

Решение: Приведем решение задачи для случая d. Обозначим формулу $\neg[(X \wedge Y) \vee \neg Z]$ буквой F, а формулу $\neg(Z \to X) \vee \neg(Z \to Y)$ буквой G. Для доказательства равносильности надо из одной формулы с помощью законов логики высказываний получить другую. Применим к формуле F последовательно законы 18 и 17, получим формулу

$$F_1 = (\neg X \vee \neg Y) \wedge Z.$$

Далее, используя дистрибутивность (закон 11), получим формулу

$$F_2 = (\neg X \wedge Z) \vee (\neg Y \wedge Z).$$

Осталось отметить, что формула $\neg X \wedge Z$ равносильна $\neg(Z \to X)$ (законы 18–20), а формула $\neg Y \wedge Z$ равносильна $\neg(Z \to Y)$. Следовательно, F равносильна G.

2.4. Логическое следствие

Одна из основных целей изучения логики состоит в получении формального аппарата для доказательства того, является ли данное утверждение следствием других.

Введем необходимые понятия.

Определение 2.9. *Формула G называется логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$, если для любой интерпретации φ из того, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$ следует, что $\varphi(G) = 1$.*

Приведем противоположный пример.

Пример 2.8. *Докажем, что формула $G = Y \to X$ не является логическим следствием формул $F_1 = X \vee Y$, $F_2 = X \to Y$, $F_3 = Y$. Для этого построим совместную таблицу истинности формул F_1, F_2, F_3 и G.*

Таблица 2.2

X	Y	$F_1 = X \vee Y$	$F_2 = X \to Y$	$F_3 = Y$	$G = Y \to X$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1

Из табл. 2.2 видно, что если взять интерпретацию φ, для которой $\varphi(X) = 0$, $\varphi(Y) = 1$, (т. е. взять третью строку таблицы), то $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$, но $\varphi(G) = 0$. Следовательно, формула G не является логическим следствием формул F_1, F_2, F_3.

Понятие логического следствия тесно связано с понятием выполнимости.

Определение 2.10. *Множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_l\}$ называется выполнимым, если существует интерпретация φ такая, что*

$$\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \ldots = \varphi(F_l) = 1.$$

Проверить выполнимость множества формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_l\}$ можно построением совместной таблицы истинности этих формул. Если найдется хотя бы одна строка, в которой в столбцах формул $F_1, F_2, \ldots, F_l$ стоят единицы, то это множество формул выполнимо. Если такой строки нет, то множество формул невыполнимо. Так, множество формул $\{F_1, F_2, F_3, G\}$ из предыдущего примера выполнимо, поскольку в табл. 2.2 в первой строке в столбцах этих формул стоят единицы.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_k$ тогда и только тогда, когда множество формул*

$$L = \{F_1, F_2, \ldots, F_k, \neg G\}$$

невыполнимо.

Доказательство. Пусть формула G является следствием множества формул $F_1, \ldots, F_k$. Предположим, от противного, что множество L выполнимо. Это означает, что существует интерпретация ψ такая, что

$$\psi(F_1) = \ldots = \psi(F_k) = \psi(\neg G) = 1.$$

Но если $\psi(F_1) = \ldots = \psi(F_k) = 1$, то $\psi(G) = 1$, поскольку G – логическое следствие формул $F_1, \ldots, F_k$. Полученное противоречие $\psi(\neg G) = 1$ и $\psi(G) = 1$ доказывает, что множество формул $\{F_1, \ldots, F_k, \neg G\}$ невыполнимо.

Пусть теперь множество формул L невыполнимо. Рассмотрим интерпретацию φ такую, что $\varphi(F_1) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$. Поскольку L невыполнимо, то $\varphi(\neg G) = 0$. Если $\varphi(\neg G) = 0$, то $\varphi(G) = 1$. Следовательно, из равенств

$$\varphi(F_1) = \ldots = \varphi(F_k) = 1$$

следует равенство $\varphi(G) = 1$. Это означает, что G – логическое следствие множества формул $F_1, \ldots, F_k$. $\square$

Задача 2.5. *Доказать, что формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$:*

a) $F_1 = X \to Y \vee Z, F_2 = Z \to W, F_3 = \neg W, G = X \to Y$;

b) $F_1 = X \vee Y \vee \neg Z, F_2 = X \to X_1, F_3 = Y \to Y_1, F_4 = Z, G = X_1 \vee Y_1$;

c) $F_1 = X \to Y \wedge Z, F_2 = Y \to Z_1 \vee Z_2, F_3 = Z \to Z_1, F_4 = \neg Z_1, G = X \to Z_2$;

d) $F_1 = Z \to Z_1, F_2 = Z_1 \to Y, F_3 = X \to Y \vee Z, G = X \to Y$.

Решение. *Приведем решение задачи для случая a. Отметим вначале, что логичность следствия можно доказать, построив совместную таблицу истинности формул F_1, F_2, F_3 и G, и убедиться в том, что как только все формулы F_1, F_2, F_3 принимают значение 1, то формула G принимает то же значение 1. Однако таблица будет довольно громоздкой: у нее будет 16 строк. Применим другой способ решения задачи. Предположим противное: пусть существует интерпретация φ такая, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = 1$ и $\varphi(G) = 0$. Тогда $\varphi(X) = 1$ и $\varphi(Y) = 0$,* *поскольку* $\varphi(G) = 0$, *и* $\varphi(W) = 0$, *поскольку* $\varphi(F_3) = 1$. *Далее из равенств* $\varphi(F_2) = \varphi(Z \to W) = 1$ *и* $\varphi(W) = 0$ *следует, что* $\varphi(Z) = 0$. *Но тогда* $\varphi(F_1) = \varphi(X \to Y \vee Z) = 0$, *что противоречит условию* $\varphi(F_1) = 1$. *Противоречие указывает, что* G *есть логическое следствие* F_1, F_2, *и* F_3.

Задача 2.6. *Доказать, что формула* G *не является логическим следствием формул* $F_1, F_2, \ldots, F_n$:

a) $F_1 = X \vee \neg Y \vee Z, F_2 = Y \to W, F_3 = Z \to X, G = X \to W$;

b) $F_1 = X \to Y, F_2 = Y \to Z, F_3 = Z \to Z_1 \vee Z_2, G = X \to Z_1$;

c) $F_1 = X \vee Y \vee Z, F_2 = X \to X_1, F_3 = Y \to X_1 \vee Y_1, F_4 = \neg Y_1$, $G = Z \to X_1$.

<u>Решение.</u> Для решения задачи необходимо найти интерпретацию, при которой формулы $F_1, \ldots, F_n$ *истинны, а* G *ложна. Такими интерпретациями являются*

a) $\varphi(X) = \varphi(Z) = 1, \varphi(Y) = \varphi(W) = 0$;

b) $\varphi(X) = \varphi(Y) = \varphi(Z) = \varphi(Z_2) = 1, \varphi(Z_1) = 0$;

c) $\varphi(X) = \varphi(X_1) = \varphi(Y) = \varphi(Y_1) = 0, \varphi(Z) = 1$.

Задача 2.7. *Будет ли логичным следующее рассуждение:*

a) если Джонс не встречал этой ночью Смита, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство произошло после полуночи. Если убийство произошло после полуночи, то Смит был убийцей или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло до полуночи. Следовательно, Смит не был убийцей;

b) в бюджете возникнет дефицит, если не повысят пошлины. Если в бюджете возникнет дефицит, то расходы на социальные нужды сократятся. Следовательно, если повысят пошлины, то расходы на социальные нужды не сократятся;

c) намеченная атака удастся, если захватить противника врасплох или его позиции плохо защищены. Захватить противника врасплох можно только, если он беспечен. Он не будет беспечен, если его позиции плохо защищены. Следовательно, намеченная атака не удастся;

d) если губернатор не имеет соответствующего авторитета или не желает принимать на себя ответственность, то порядок не будет восстановлен и волнения не прекратятся до тех пор, пока участникам волнений это не надоест, и власти не начнут примирительные *действия. Следовательно, если губернатор не желает взять на себя ответственность и участникам волнений это не надоест, то волнения не прекратятся.*

Решение. *Приведем решение задачи a. Рассмотрим высказывания: $X =$"Джонс не встречал Смита", $Y =$"Смит был убийцей", $Z =$"Джонс лжет", $U =$"убийство произошло после полуночи". Тогда рассуждения можно представить последовательностью формул: $F_1 = X \to Y \vee Z$, $F_2 = \neg Y \to X \wedge U$, $F_3 = U \to Y \vee Z$, $F_4 = \neg U$, $G = \neg Y$. Существует интерпретация φ такая, что $\varphi(F_1) = \varphi(F_2) = \varphi(F_3) = \varphi(F_4) = 1, \varphi(G) = 0$, например, $\varphi(X) = \varphi(U) = 0, \varphi(Y) = \varphi(Z) = 1$. Это означает, что G не является логическим следствием формул $F_1, \ldots, F_4$ и что рассуждение нелогично.*

Рассуждения из задач b – d также нелогичны.

2.5. Нормальные формы в логике высказываний

Среди множества формул, равносильных данной, выделяют формулы, имеющие ту или иную нормальные формы.

Дадим необходимые определения.

Определение 2.11. *Литералом называется атомарная формула (кроме 1 и 0) или ее отрицание. Элементарной конъюнкцией называется литерал или конъюнкция литералов.*

Определение 2.12. *Формула G имеет дизъюнктивную нормальную форму (сокращенно: ДНФ), если она является дизъюнкцией элементарных конъюнкций.*

Пример 2.9. *Формулы $X, \neg Y, X \wedge \neg Y, (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Z)$ имеют дизъюнктивную нормальную форму, а формулы $\neg(X \wedge Y), X \vee Y \vee 1, X \to Y$ не имеют.*

Теорема 2.3. *Для любой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая дизъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. Теорема легко следует из рассмотрения следующего алгоритма, который по данной формуле F выдает (одну из формул) G, удовлетворяющих условию теоремы. □

Замечание 2.1. *Прежде, чем привести алгоритм, условимся не различать формулы, которые получаются одна из другой применением коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции, т. е. законов 7–10.*

• **Алгоритм приведения к ДНФ.**

1. Используя законы 21 и 20, исключить из исходной формулы эквиваленцию и импликацию.

2. С помощью законов 17–19 занести отрицание к атомарным формулам.

3. Если формула содержит подформулу вида $H_1 \wedge (H_2 \vee H_3)$, то заменить ее на равносильную формулу $(H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3)$.

Пример 2.10. *Применение алгоритма проиллюстрируем на примере формулы* $F = \neg(X \leftrightarrow Y) \wedge X$.

Выполним первый шаг. Для этого, используя закон 21, заменим формулу $X \leftrightarrow Y$ *равносильной ей формулой* $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$. *Затем в полученной формуле с помощью закона 20 исключим связку* $\to$. *Получим формулу*

$$F_1 = \neg[(\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee X)] \wedge X.$$

Перейдем ко второму шагу. Применение закона 17 приведет к формуле

$$F_2 = [\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(\neg Y \vee X)] \wedge X.$$

Затем, дважды воспользовавшись законом 18 и сняв двойное отрицание (закон 19), получим формулу

$$F_3 = [(X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X)] \wedge X.$$

Второй шаг выполнен.

Выполнение третьего шага заключается в применении дистрибутивности к формуле F_3. *При этом получаем формулу*

$$F_4 = (X \wedge \neg Y \wedge X) \vee (Y \wedge \neg X \wedge X).$$

Алгоритм на этом завершен. Формула F_4 *имеет дизъюнктивную нормальную форму. Но эту формулу можно упростить. Действительно, формула* $Y \wedge \neg X \wedge X$ *в силу законов 15 и 3 равносильна* 0, *а формула* $X \wedge \neg Y \wedge X$ *равносильна* $X \wedge \neg Y$ *(закон 5). Следовательно, формула* F_4 *равносильна формуле*

$$F_5 = X \wedge \neg Y.$$

Формула F_5, *как и* F_4, *имеет дизъюнктивную нормальную форму и равносильна исходной формуле* F.

Рассмотренный пример показывает, что может существовать несколько равносильных формул имеющих разное представление в дизъюнктивной нормальной форме. Иногда это обстоятельство является неудобным. Чтобы его исключить, вводится более узкое понятие, нежели ДНФ.

Определение 2.13. *Формула G имеет совершенную дизъюнктивную нормальную форму (сокращенно: СДНФ) относительно атомарных формул $X_1, \ldots, X_n$, если выполнены следующие условия:*

1) $F = F(X_1, \ldots, X_n)$, т. е. в записи формулы участвуют только $X_1, \ldots, X_n$;

2) F имеет дизъюнктивную нормальную форму, т. е.

$$F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k,$$

где $C_1, \ldots, C_k$ – элементарные конъюнкции;

3) каждая элементарная конъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

4) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Пример 2.11. *Формулы X, $\neg X \wedge Y$, $(\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y)$ имеют совершенную дизъюнктивную нормальную форму относительно содержащихся в них атомарных формул.*

Формулы $\neg(X \wedge Y)$, $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$, $(X \wedge Y \wedge X) \wedge (\neg X \wedge \neg Y)$, $(X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge X)$ не имеют совершенной дизъюнктивной нормальной формы (относительно содержащихся в них атомарных формул). Для первой формулы не выполняется второе условие, для второй и третьей – третье условие, для четвертой формулы не выполняется последнее условие из определения СДНФ.

Теорема 2.4. *Для любой выполнимой формулы F существует равносильная ей формула G, имеющая совершенную дизъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. Как и теорема 2.3, данная теорема легко следует из соответствующего алгоритма, который по формуле F выдает формулу G, удовлетворяющую условию теоремы. □

• **Алгоритм приведения к СДНФ.**

1. Используя законы 21 и 20, исключить из исходной формулы эквиваленцию и импликацию.

2. С помощью законов 17–19 занести отрицание к атомарным формулам.

3. Если формула содержит подформулу вида $H_1 \wedge (H_2 \vee H_3)$, то заменить ее на равносильную формулу $(H_1 \wedge H_2) \vee (H_1 \wedge H_3)$.

4. Если элементарная конъюнкция C не содержит ни атомарной формулы X_i, ни ее отрицания для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то заменить C на две элементарные конъюнкции

$$C \wedge (X_i \vee \neg X_i) = (C \wedge X_i) \vee (C \wedge \neg X_i).$$

5. Если элементарная конъюнкция C содержит два вхождения одного литерала, то одно из них вычеркнуть. Если же C содержит X_i и $\neg X_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$, то вычеркнуть всю элементарную конъюнкцию.

6. Если формула содержит одинаковые элементарные конъюнкции, то вычеркнуть одну из них.

Замечание 2.2. *Первые три шага алгоритма – те же, что и в алгоритме приведения к ДНФ.*

Напомним, что “одинаковость” понимается с точностью до коммутативности и ассоциативности конъюнкции и дизъюнкции.

Пример 2.12. *В качестве примера рассмотрим ту же формулу $F = \neg(X \leftrightarrow Y) \wedge X$, что и в примере 2.10 на предыдущий алгоритм. Выполнение шагов 1–3 приводит к формуле F_4. Эта формула имеет дизъюнктивную (но не совершенную) нормальную форму, поскольку для нее не выполняется третье условие. Если для F_4 выполнить шаг 4, то в первой элементарной конъюнкции будет зачеркнуто одно из вхождений литерала X, а вторая элементарная конъюнкция будет вычеркнута вся. В результате, получим формулу F_5. Она имеет СДНФ относительно X и Y.*

Пример 2.13. *Рассмотрим формулы из примера 2.11. Пусть, например, $G = (X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Z)$. Эта формула имеет ДНФ, поэтому выполнение алгоритма приведения к СДНФ начинается с шага 4. При выполнении этого шага элементарная конъюнкция $X \wedge Y$ будет заменена на $(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z)$, а $X \wedge \neg Z$ – на $(X \wedge \neg Z \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Z \wedge \neg Y)$. В результате, получим формулу*

$$G_1 = (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Z \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Z \wedge \neg Y).$$

Условия шага 5 для формулы G_1 ложны, поэтому этот шаг для формулы G_1 не выполняется. Формула G_1 содержит одинаковые элементарные конъюнкции – вторую и третью. При выполнении шестого шага будет зачеркнута одна из них и получится формула

$$G_2 = (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

Это и есть формула, равносильная G и имеющая СДНФ относительно входящих в G атомарных формул.

Ответим на естественно возникающий вопрос о том, зачем в формулировке теоремы 2.4 требуется выполнимость формулы F? Нетрудно доказать, что если формула F невыполнима, т.е. при любой интерпретации φ выполняется равенство $\varphi(F) = 0$, то после приведения F к ДНФ каждая элементарная конъюнкция будет содержать хотя бы одну пару противоположных литералов X и $\neg X$. Но в таком случае на шаге 5 все элементарные конъюнкции будут вычеркнуты. Имеется еще один способ приведения к СДНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Изложим этот способ на примере формулы

$$F = X_1 \wedge (X_2 \to X_3). \tag{2.1}$$

Составим таблицу истинности формулы F.

X_1	X_2	X_3	$F = X_1 \wedge (X_2 \to X_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Выделим строки, в которых в столбце F стоит 1. (Хотя бы одна такая строка должна быть, так как формула F выполнима.) Это будут первая, третья и четвертая строки. Каждой из выделенных строк поставим в соответствие элементарную конъюнкцию $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$, где $X_i^{\alpha_i} = X_i^1 = X_i$, если в столбце X_i этой строки стоит 1, и $X_i^{\alpha_i} = X_i^0 = \neg X_i$, если в столбце X_i этой строки стоит 0, где $i = 1, 2, 3$. Так, первой строке будет поставлена в соответствие элементарная конъюнкция $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$, третьей – $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3$, а четвертой – $X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3$. Формула

$$G = (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3)$$

имеет СДНФ относительно X_1, X_2, X_3. В то же время G имеет ту же таблицу истинности, что и F. Это означает, что G равносильна F. Следовательно, G – искомая формула.

Из других нормальных форм рассмотрим конъюнктивную нормальную форму. Она получается из ДНФ заменой $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$. Дадим точные определения.

Определение 2.14. *Элементарной дизъюнкцией (или дизъюнктом) называется литерал или дизъюнкция литералов.*

Определение 2.15. *Формула G имеет конъюнктивную нормальную форму (сокращенно: КНФ), если она является конъюнкцией элементарных дизъюнкций.*

Пример 2.14. *Формулы* $X, \neg Y, X \vee \neg Y, X \wedge \neg Y, (X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z)$ *имеют конъюнктивную нормальную форму, а формулы* $X \to Y, \neg(X \vee Y), (X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge \neg Z)$ *не имеют.*

Для конъюнктивных нормальных форм справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.3.

Теорема 2.5. *Для любой формулы F существует формула G, равносильная F и имеющая конъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. Доказательство теоремы легко следует из анализа алгоритма приведения к КНФ, который, в свою очередь, получается из алгоритма приведения к ДНФ, если шаг 3 заменить на следующее действие: если формула содержит подформулу вида $H_1 \vee (H_2 \wedge H_3)$, то заменить ее на равносильную ей формулу $(H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3)$. □

Как и для случая ДНФ введем более узкое понятие, нежели КНФ.

Определение 2.16. *Формула G имеет совершенную конъюнктивную нормальную форму (сокращенно: СКНФ) относительно атомарных формул $X_1, \ldots, X_n$, если выполнены следующие условия:*

1) $F = F(X_1, \ldots, X_n)$, т. е. в записи формулы участвуют только $X_1, \ldots, X_n$;

2) F имеет конъюнктивную нормальную форму, т. е.

$$F = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_k,$$

где $C_1, \ldots, C_k$ – элементарные дизъюнкции;

3) каждая элементарная дизъюнкция содержит один и только один из литералов X_i или $\neg X_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

4) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Пример 2.15. *Формулы X, $\neg X \vee Y$, $(\neg X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y)$ имеют СКНФ относительно содержащихся в них атомарных формул.*

Формулы $\neg(X \vee Y)$, $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$, $(X \vee Y \vee X) \wedge (\neg X \vee \neg Y)$, $(X \vee Y) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X)$ не имеют СКНФ (относительно содержащихся в них атомарных формул). Для первой формулы не выполняется второе условие, для второй и третьей – третье условие, для четвертой формулы не выполняется последнее условие из определения СКНФ.

Теорема 2.6. *Для любой не тождественно истинной формулы F существует равносильная ей формула G, имеющая совершенную конъюнктивную нормальную форму.*

Доказательство. Как и теорема 2.4, эта теорема легко следует из соответствующего алгоритма, который по формуле F выдает формулу G, удовлетворяющую условию теоремы. $\square$

- **Алгоритм приведения к СКНФ.**

1. Используя законы 21 и 20, исключить из исходной формулы эквиваленцию и импликацию.

2. С помощью законов 17–19 занести отрицание к атомарным формулам.

3. Если формула содержит подформулу вида $H_1 \vee (H_2 \wedge H_3)$, то заменить ее на равносильную формулу $(H_1 \vee H_2) \wedge (H_1 \vee H_3)$.

4. Если элементарная дизъюнкция C не содержит ни атомарной формулы X_i, ни ее отрицания для некоторого $i = 1, \dots, n$, то заменить C на две элементарные дизъюнкции

$$C \vee (X_i \wedge \neg X_i) = (C \vee X_i) \wedge (C \vee \neg X_i).$$

5. Если элементарная дизъюнкция C содержит два вхождения одного литерала, то одно из них вычеркнуть. Если же C содержит X_i и $\neg X_i$ для некоторого $i = 1, \dots, n$, то вычеркнуть всю элементарную дизъюнкцию.

6. Если формула содержит одинаковые элементарные дизъюнкции, то вычеркнуть одну из них.

Замечание 2.3. *Первые три шага алгоритма – те же, что и в алгоритме приведения к КНФ.*

Замечание 2.4. *Для дальнейшего упрощения записи формул введем следующие соглашения.*

1. Будем опускать символ конъюнкции $\wedge$, т. е. вместо $X \wedge Y$ писать просто XY.

2. Вместо символа отрицания $\neg X$ будем писать $\overline{X}$, например, $X\,\overline{Y}\,Z \vee X\,\overline{Z}$ вместо $(X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Z)$.

Пример 2.16. *В качестве примера работы алгоритма рассмотрим формулу $F = \overline{(X \vee Z)}(X \to Y)$. Выполнение шагов 1–3 приводит к формуле $\overline{X}\,\overline{Z}(\overline{X} \vee Y)$. Эта формула имеет КНФ, но не имеет СКНФ. Теперь будем строить СКНФ:*

$$\begin{aligned}
\overline{X}\,\overline{Z}(\overline{X} \vee Y) &= (\overline{X} \vee Y\overline{Y} \vee Z\overline{Z})(X\overline{X} \vee Y\overline{Y} \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee Z\overline{Z}) \\
&= (\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge \\
&\quad \wedge (X \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge
\end{aligned}$$

$$\wedge (\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) = (\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge$$
$$\wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})(X \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}).$$

Имеется еще один способ приведения к СКНФ, основанный на построении таблицы истинности исходной формулы. Изложим этот способ на примере формулы (2.1). Выделим строки, в которых в столбце F стоит 0. (Хотя бы одна такая строка должна быть, так как формула F не является тождественно истинной.) Это будут вторая, пятая, шестая, седьмая и восьмая строки. Каждой из выделенных строк поставим в соответствие элементарную дизъюнкцию $\neg X_1^{\alpha_1} \vee \neg X_2^{\alpha_2} \vee \neg X_3^{\alpha_3} = X_1^{\neg\alpha_1} \vee X_2^{\neg\alpha_2} \vee X_3^{\neg\alpha_3}$. Так, второй строке будет поставлена в соответствие элементарная дизъюнкция $\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3$, пятой – $X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3$ и т. д.

Замечание 2.5. *Из рассмотренных алгоритмов приведения формулы к СДНФ и к СКНФ следует, что эти формы можно рассматривать, как сокращенную (сжатую) запись таблицы истинности. В СДНФ хранится информация о единицах, а в СКНФ – о нулях исходной формулы.*

Действительно, каждая элементарная конъюнкция $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3}$ истинна только на интерпретации $\varphi(X_1) = \alpha_1$, $\varphi(X_2) = \alpha_2$, $\varphi(X_3) = \alpha_3$, а каждая элементарная дизъюнкция $\neg X_1^{\alpha_1} \vee \neg X_2^{\alpha_2} \vee \neg X_3^{\alpha_3}$ ложна также только на одной интерпретации $\varphi(X_1) = \alpha_1$, $\varphi(X_2) = \alpha_2$, $\varphi(X_3) = \alpha_3$.

Задача 2.8. *Привести следующие формулы к СДНФ, предварительно приведя их равносильными преобразованиями к ДНФ:*

a) $X(YZ \to XY)$; *b)* $X(X \to Y)$;
c) $(X \to Y) \to (Y \to X)$; *d)* $(X \vee \overline{Z}) \to YZ$.

<u>*Решение.*</u> *Приведем решение задачи для случая a). Имеем:*

$$X(YZ \to XY) = X(\overline{YZ} \vee XY) = X(\overline{Y} \vee \overline{Z} \vee XY) = X\overline{Y} \vee X\overline{Z} \vee XY.$$

Приведем полученную ДНФ к СДНФ. Имеем:

$$\begin{aligned} X\overline{Y} \vee X\overline{Z} \vee XY &= X\overline{Y}(Z \vee \overline{Z}) \vee X\overline{Z}(Y \vee \overline{Y}) \vee XY(Z \vee \overline{Z}) \\ &= X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee XY\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee XYZ \vee XY\overline{Z} \\ &= X\overline{Y}Z \vee X\overline{Y}\,\overline{Z} \vee XY\overline{Z} \vee XYZ. \end{aligned}$$

Ответ: b) XY; *c)* $X\overline{Y} \vee XY \vee \overline{X}\,\overline{Y}$; *d)* $\overline{X}YZ \vee XYZ \vee \overline{X}\,\overline{Y}Z$.

Задача 2.9. *Привести следующие формулы к СКНФ, предварительно приведя их равносильными преобразованиями к КНФ:*

a) $X(YZ \to XY)$; *b)* $(XY \to YZ) \to ((X \to Y) \to (Z \to Y))$;
c) $(\overline{X} \to Z) \to \overline{(\overline{Y} \to \overline{X})}$; *d)* $(\overline{X} \to \overline{Y}) \to (YZ \to XZ)$.

<u>Решение.</u> Приведем решение задачи для случая a. Используя результаты решения примера 2.8, запишем:

$$X(YZ \to XY) = X\overline{Y} \vee X\overline{Z} \vee XY = X(\overline{Y} \vee \overline{Z} \vee Y) = X.$$

Приведем полученную КНФ к СКНФ. Имеем:

$$\begin{aligned} X &= X \vee (Y\overline{Y}) = (X \vee Y)(X \vee \overline{Y}) = ((X \vee Y) \vee Z\overline{Z})((X \vee \overline{Y}) \vee Z\overline{Z}) = \\ &= (X \vee Y \vee Z)(X \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee Z)(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}). \end{aligned}$$

Ответ: b) $X \vee Y \vee \overline{Z}$; *c)* $(X \vee Y \vee \overline{Z})(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$; *d) формула не может быть приведена к СКНФ.*

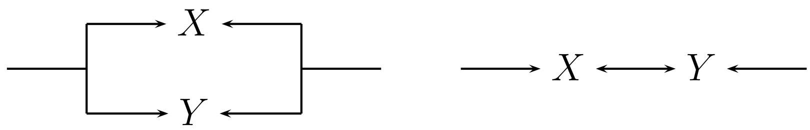
2.6. Контактные схемы

В этом разделе, рассмотрим применение логики высказываний к анализу так называемых контактных схем.

Определение 2.17. *Контактом будем называть устройство, которое в процессе работы может быть в двух состояниях: контакт может быть замкнут или разомкнут. Контакт* X *на чертеже будем изображать следующим образом:*

$$\longrightarrow X \longleftarrow$$

Контакты можно соединять между собой различными способами:



а *Рис. 2.1* б

Первое соединение контактов (рис. 2.1,*а*) называется *параллельным*, второе (рис. 2.1,*б*) – *последовательным*. Контакты, соединенные между собой, будем называть контактной схемой. Будем предполагать наличие у схемы двух выделенных точек входа и выхода. Схему назовем замкнутой, если существует последовательность замкнутых контактов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ такая, что X_i соединен с X_{i+1}, X_1 соединен с входом, X_n – с выходом. Схему, не являющуюся замкнутой, назовем разомкнутой. Каждому контакту поставим в соответствие высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда контакт замкнут. Высказывание и контакт будем обозначать одной буквой. Пусть схема S построена из контактов $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с помощью параллельного и последовательного соединений. Тогда по схеме S можно построить формулу логики высказываний F_S так, что параллельному соединению соответствует дизъюнкция, последовательному – конъюнкция. Например, следующей схеме S (рис. 2.2) соответствует формула

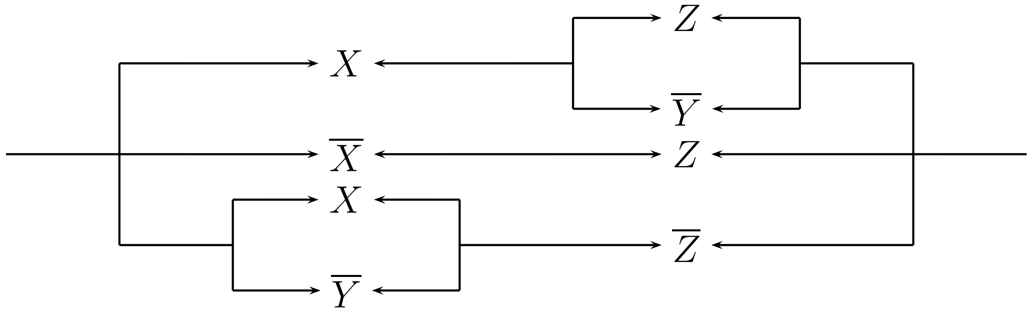


Рис. 2.2

$$F_S = X(Z \vee \overline{Y}) \vee \overline{X}Z \vee (X \vee \overline{Y})\overline{Z}.$$

Через $\overline{V}$ обозначается контакт, который замкнут тогда и только тогда, когда V разомкнут. Формула F_S “представляет схему” в следующем смысле: схема S замкнута в том и только в том случае, если F_S принимает значение И. Контактным схемам соответствуют формулы, в построении которых участвуют лишь связки $\wedge, \vee, \neg$, причем отрицание применяется только к атомарным формулам. Нетрудно понять, что по всякой такой формуле F можно восстановить схему, которую формула F “представляет”.

Пусть схемам S и T соответствуют формулы F_S и F_T в описанном ранее смысле. Тогда, если схемы S и T эквивалентны (т. е. замкнуты и разомкнуты одновременно), то F_S и F_T равносильны, и обратно. Этот факт используется для решения задачи минимизации контактных схем, которая состоит в том, чтобы по данной схеме S найти схему T, эквивалентную S и содержащую меньше контактов. Один из путей решения этой задачи состоит в переходе к формуле F_S и в отыскании формулы G, равносильной F_S и содержащей меньше вхождений атомарных формул (разумеется, G построена только с помощью $\wedge$, $\vee$ и $\neg$, причем $\neg$ применяется лишь к атомарным формулам).

Так, например, формула F_S равносильна формуле $X \vee \overline{X}Z \vee \overline{Y}\,\overline{Z}$. Следовательно, схема, приведенная на рис. 2.2 эквивалентна схеме, которая имеет на три контакта меньше (рис. 2.3).

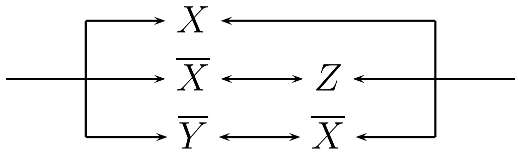


Рис. 2.3

2.7. Метод минимизирующих карт

Определение 2.18. *Дизъюнктивная нормальная форма называется минимальной, если она содержит наименьшее общее число вхождений атомарных формул по сравнению со всеми равносильными ей дизъюнктивными нормальными формами.*

Следовательно, минимальную ДНФ данной формулы можно найти, перебрав конечное число равносильных ей ДНФ и выбрав среди них ту, которая содержит минимальное число вхождений атомарных формул. Однако при большом числе атомарных формул такой перебор практически невыполним. Существуют эффективные способы нахождения минимальной ДНФ. Рассмотрим один из них – *метод минимизирующих карт.* Хотя он и не является самым эффективным, зато прост для изложения и не требует введения дополнительных понятий.

Пусть формула задана таблицей истинности или СДНФ. Составим следующую карту (табл. 2.3).

Таблица 2.3

X_1	X_2	$\cdots$	X_n	X_1X_2	X_1X_3	$\cdots$	$X_{n-1}X_n$	$\cdots$	$X_1\ldots X_{n-1}X_n$
X_1	X_2	$\cdots$	$\overline{X}_n$	X_1X_2	X_1X_3	$\cdots$	$X_{n-1}\overline{X}_n$	$\cdots$	$X_1\ldots X_{n-1}\overline{X}_n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\overline{X}_1$	X_2	$\cdots$	X_n	$\overline{X}_1X_2$	X_1X_3	$\cdots$	$X_{n-1}X_n$	$\cdots$	$\overline{X}_1\ldots X_{n-1}X_n$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\cdots$	$\overline{X}_n$	$\overline{X}_1\overline{X}_2$	$\overline{X}_1\overline{X}_3$	$\cdots$	$\overline{X}_{n-1}\overline{X}_n$	$\cdots$	$\overline{X}_1\ldots\overline{X}_{n-1}\overline{X}_n$

Теорема 2.7. *Если элементарная конъюнкция $X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n}$, принадлежащая j-й строке табл. 2.3, не входит в СДНФ, выражающую формулу $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то любая конъюнкция j-й строки не входит ни в какую ДНФ, выражающую исходную формулу F.*

Доказательство. Действительно, если конъюнкция $X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n}$ не входит в СДНФ, выражающую формулу $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, то согласно второму алгоритму построения СДНФ $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 0$. Если бы какая-то конъюнкция j-й строки вошла в некоторую ДНФ, выражающую формулу F, то $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 1$. $\square$

Согласно теореме 2.7 опишем способ построения минимальной ДНФ.

1. Отметим в табл. 2.3 строки, в которых соответствующая им конъюнкция $X_1^{\alpha_1}X_2^{\alpha_2}\cdots X_n^{\alpha_n}$ не принадлежит СДНФ. Вычеркнем все конъюнкции в этих строках.

2. Конъюнкции, вычеркнутые в указанных в п. 1 строках, вычеркнем также во всех остальных строках таблицы.

3. В каждой строке выберем из оставшихся конъюнкций лишь те, которые имеют наименьшее число вхождений атомарных формул, а остальные вычеркнем.

4. В каждой строке выберем по одной оставшейся конъюнкции и составим из них ДНФ.

5. Из всех ДНФ, полученных на предыдущем шаге, выберем минимальную.

Замечание 2.6. *Заметим, что на последнем шаге алгоритма предусматривается перебор различных ДНФ, для нахождения минимальной из них. Однако при этом вариантов перебора, как правило значительно меньше, чем в случае, когда перебираются все равносильные ДНФ.*

Пример 2.17. *Пусть*

$$F(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2\overline{X}_3 \vee X_1\overline{X}_2X_3 \vee X_1\overline{X}_2\overline{X}_3 \vee \overline{X}_1\overline{X}_2X_3.$$

Составим соответствующую таблицу.

X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	$\times$
X_1	X_2	$\overline{X}_3$	X_1X_2	$X_1\overline{X}_3$	$X_2\overline{X}_3$	$X_1X_2\overline{X}_3$	
X_1	$\overline{X}_2$	X_3	$X_1\overline{X}_2$	X_1X_3	$\overline{X}_2X_3$	$X_1\overline{X}_2X_3$	
X_1	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$	$X_1\overline{X}_2$	$X_1\overline{X}_3$	$\overline{X}_2\overline{X}_3$	$X_1\overline{X}_2\overline{X}_3$	
$\overline{X}_1$	X_2	X_3	$\overline{X}_1X_2$	$\overline{X}_1X_3$	X_2X_3	$\overline{X}_1X_2X_3$	$\times$
$\overline{X}_1$	X_2	$\overline{X}_3$	$\overline{X}_1X_2$	$\overline{X}_1\overline{X}_3$	$X_2\overline{X}_3$	$\overline{X}_1X_2\overline{X}_3$	$\times$
$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	X_3	$\overline{X}_1\overline{X}_2$	$\overline{X}_1X_3$	$\overline{X}_2X_3$	$\overline{X}_1\overline{X}_2X_3$	
$\overline{X}_1$	$\overline{X}_2$	$\overline{X}_3$	$\overline{X}_1\overline{X}_2$	$\overline{X}_1\overline{X}_3$	$\overline{X}_2\overline{X}_3$	$\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$	$\times$

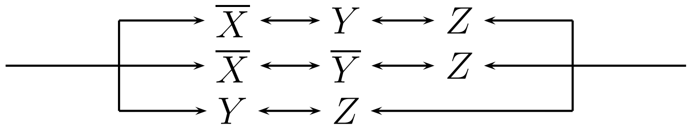
Отметим знаком „$\times$“вычеркнутые строки таблицы. После применения шагов 1–3 таблица примет следующий вид:

				$X_1\overline{X}_3$		
			$X_1\overline{X}_2$		$\overline{X}_2X_3$	
			$X_1\overline{X}_2$	$X_1\overline{X}_3$		
					$\overline{X}_2X_3$	

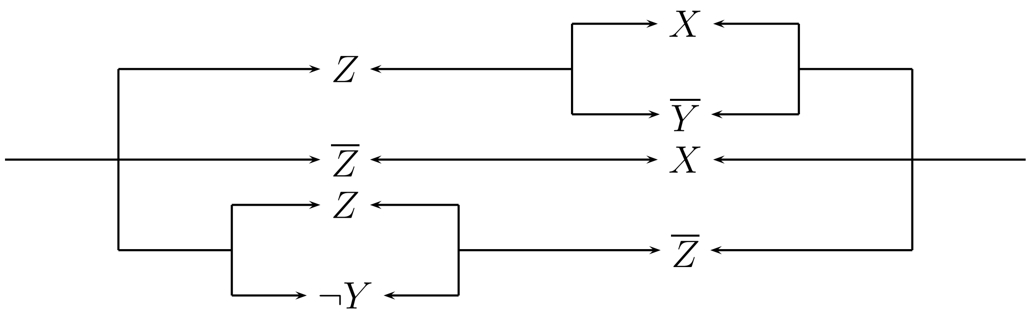
После применения шагов 4–5 получим минимальную ДНФ, равносильную исходной формуле F: $X_1\overline{X}_3 \vee \overline{X}_2X_3$.

Задача 2.10. *Для следующих схем построить эквивалентные им более простые цепи:*

a)



b)



<u>Решение.</u> Приведем решение задачи для случая a. Схеме S_a соответствует формула

$$F_{S_a} = \overline{X} Y Z \vee \overline{X}\,\overline{Y} Z \vee Y Z.$$

После приведения к СДНФ получим следующую равносильную F_{S_a} формулу:

$$F_1 = \overline{X} Y Z \vee \overline{X}\,\overline{Y} Z \vee X Y Z.$$

Будем искать решение методом минимизирующих карт. Составим соответствующую таблицу.

X	Y	Z	XY	XZ	YZ	XYZ	
X	Y	$\overline{Z}$	XY	$X\overline{Z}$	$Y\overline{Z}$	$XY\overline{Z}$	$\times$
X	$\overline{Y}$	Z	$X\overline{Y}$	XZ	$\overline{Y}Z$	$X\overline{Y}Z$	$\times$
X	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$X\overline{Y}$	$X\overline{Z}$	$\overline{Y}\,\overline{Z}$	$X\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\times$
$\overline{X}$	Y	Z	$\overline{X}Y$	$\overline{X}Z$	YZ	$\overline{X}YZ$	
$\overline{X}$	Y	$\overline{Z}$	$\overline{X}Y$	$\overline{X}\,\overline{Z}$	$Y\overline{Z}$	$\overline{X}Y\overline{Z}$	$\times$
$\overline{X}$	$\overline{Y}$	Z	$\overline{X}\,\overline{Y}$	$\overline{X}Z$	$\overline{Y}Z$	$\overline{X}\,\overline{Y}Z$	
$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{Z}$	$\overline{X}\,\overline{Y}$	$\overline{X}\,\overline{Z}$	$\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$	$\times$

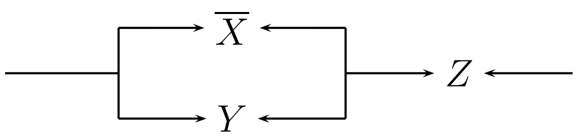
Отметим знаком „$\times$“вычеркнутые строки таблицы. После работы шагов 1–3 алгоритма таблица примет следующий вид:

					YZ	

Окончание таблицы

				$\overline{X}Z$	YZ	
				$\overline{X}Z$		

После работы шагов 4 и 5 алгоритма получим минимальную ДНФ, равносильную исходной формуле F_{S_a} : $\overline{X}Z \vee YZ = Z(\overline{X} \vee Y)$. Эквивалентная простая цепь представлена на рисунке справа.



Задача 2.11. *Пусть каждый из трех членов комитета голосует „за“, нажимая кнопку. Построить по возможности более простую цепь, которая была бы замкнута тогда и только тогда, когда не менее двух членов комитета голосуют „за“.*

<u>Решение.</u> Рассмотрим формулу $F(X_1, X_2, X_3)$, таблица истинности которой строится по следующему принципу: $\varphi(F) = 1$, если из трех атомарных формул X_1, X_2, X_3 истинны не менее двух. По таблице истинности выпишем формулу в совершенной дизъюнктивной нормальной форме. Затем упростим ее и по упрощенной формуле составим схему так, как это сделано в решении предыдущей задачи.

Задача 2.12. *Требуется, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных выключателей таким образом, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он был выключен, и выключению, если он был включен. Построить по возможности более простую цепь, удовлетворяющую этому требованию.*

<u>Решение.</u> Рассмотрим формулу $F(X_1, X_2, X_3)$, имеющую следующую таблицу истинности. Атомарные формулы X_1, X_2 и X_3 обозначают выключатели. Заметим, что в таблице истинности значения атомарных формул X_1, X_2 и X_3 в каждой следующей строке отличаются от предыдущей только одной из атомарных формул, а значение формулы F меняется на противоположное. Это отражает требование о том, чтобы при нажатии на любой из выключателей свет выключался, если он был включен, и включался, если он был выключен.

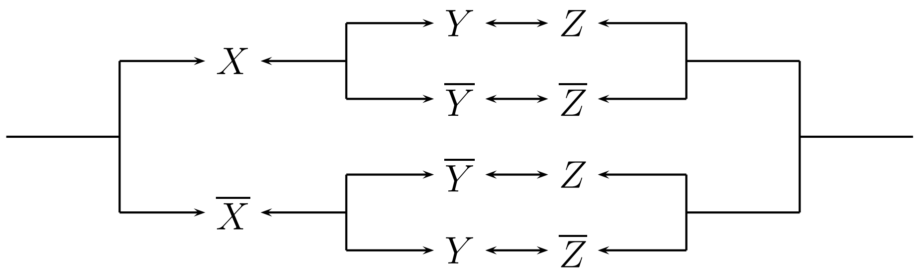


Рис. 2.4

X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
0	0	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	0	0

По таблице истинности выпишем формулу F:

$$F = XYZ \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee \overline{X}\,\overline{Y}\,Z \vee \overline{X}\,Y\,\overline{Z}.$$

Преобразуем формулу F к равносильной формуле G, более удобной для реализации схемы:

$$G = X(YZ \vee \overline{Y}\,\overline{Z}) \vee \overline{X}(\overline{Y}Z \vee Y\overline{Z}).$$

По формуле G построим искомую схему (рис. 2.4).

3. Булевы функции

В данном разделе будут рассматриваться всюду определенные функции, заданные на множестве $B = \{0,1\}$. Такие функции называются *булевыми.*

3.1. Замкнутость и полнота

Будем исходить из некоторого множества F функциональных символов. Каждому символу приписано натуральное число – *местность* или *арность* символа. Можно считать, что F представляет собой объединение $F_1 \cup F_2 \cup \ldots F_n \cup \ldots$, где F_n – множество символов n-местных функций. Кроме F, имеется множество переменных V, элементы которого будем обозначать буквами u, v, w, x, y, z с индексами и без них. Каждому n-местному функциональному символу поставлено в соответствие (всюду определенное) отображение $B^n \to B$. (При этом разным символам может соответствовать одно и то же отображение.) Это отображение будем обозначать той же буквой, что и символ.

Введем основное понятие.

Определение 3.1. *Булевыми функциями называются выражения одного из следующих видов:*

1) $f(v_1, \dots v_n)$, где $f \in F_n, v_1, \dots, v_n$ – переменные,

2) $f(t_1, \dots t_n)$, где $f \in F_n, t_1, \dots, t_n$ – булевы функции.

Замечание 3.1. *Для обозначения двухместных функций наряду с префиксной записью $f(v_1, v_2)$ будем применять и инфиксную $v_1 f v_2$, особенно, если речь идет об известных функциях, например, $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$.*

x	$\theta(x)$	$\iota(x)$	$\varepsilon(x)$	$\nu(x)$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Условимся также об обозначении некоторых часто встречающихся функций. Функции $\theta(x)$ и $\iota(x)$ будем называть константами (иногда для простоты будем писать 0 и 1), $\varepsilon(x)$ – *тождественной функцией.* Функцию $\nu(x)$ будем называть *отрицанием* и обозначать как и ранее $\neg(x)$ или просто $\overline{x}$.

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \leftrightarrow y$	$x + y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Для функций $x \vee y, x \to y, x \leftrightarrow y$ сохраним названия, идущие из логики высказываний: *дизъюнкция, импликация* и *эквиваленция.* Функции $x \cdot y$ и $x + y$, – естественно, *умножение* и *сложение*; умножение можно было бы назвать *конъюнкцией*, сложение иногда называют *сложением по модулю 2* и обозначают $x \oplus y$. Функция $x \mid y$ – *штрих Шеффера*, $x \downarrow y$ – *стрелка Пирса* (или *стрелка Лукасевича*).

Замечание 3.2. *Заключим следующие соглашения:*

1. В обозначениях функций будем допускать фиктивные переменные. Так, например, функцию $x_1 \oplus x_2$ можно обозначить как $f(x_1, x_2, x_3)$.

2. В функции умножения (конъюнкции) $x \cdot y$ будем опускать знак умножения , если его присутствие будет очевидно из контекста.

Замечание 3.3. *Любую булеву функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ можно задать таблицей значений.*

Легко показать, что число различных строк длины n из нулей и единиц равно 2^n. Таким образом, число строк в таблице для булевой функции от n переменных $f(x_1, \dots, x_n)$ равно 2^n.

x_1	$\cdots$	x_n	$f(x_1,\ldots,x_n)$
0	0	0	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	1	1	1

Условимся в дальнейшем упорядочивать строки таблицы в лексикографическом порядке, т. е. для любой строки $(c_1,\ldots,c_n)$ *определим ее номер*

$$N(c) = c_n + c_{n-1}2 + \cdots + c_k 2^{n-k} + \cdots + c_1 2^{n-1}. \tag{3.1}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Число различных булевых функций от* n *переменных равно* 2^{2^n}.

Доказательство. Зафиксируем число аргументов n. Очевидно, что число различных булевых функций от n переменных равно числу различных таблиц. При лексикографическом упорядочении строк число различных таблиц равно числу способов заполнения последнего столбца (значений функции). Число способов заполнения этого столбца равно 2^h, где h – высота столбца, но $h = 2^n$. Таким образом, число различных булевых функций от n переменных равно 2^{2^n}. □

С табличным заданием функции непосредственно связан такой ее параметр, как *вес*.

Определение 3.2. *Множество двоичных наборов* $\{a_1,\ldots,a_n\}$*, на которых булева функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *принимает значение* 1*, называется областью истинности функции* f.

Мощность области истинности функции f *называется весом функции* f *и обозначается* $||f||$.

Очевидно, что $0 \leqslant ||f|| \leqslant 2^n$*, причем равенства достигаются лишь для функций-констант* 0 *и* 1.

Для булевых функций используются и другие способы задания. Рассмотрим *геометрический способ*.

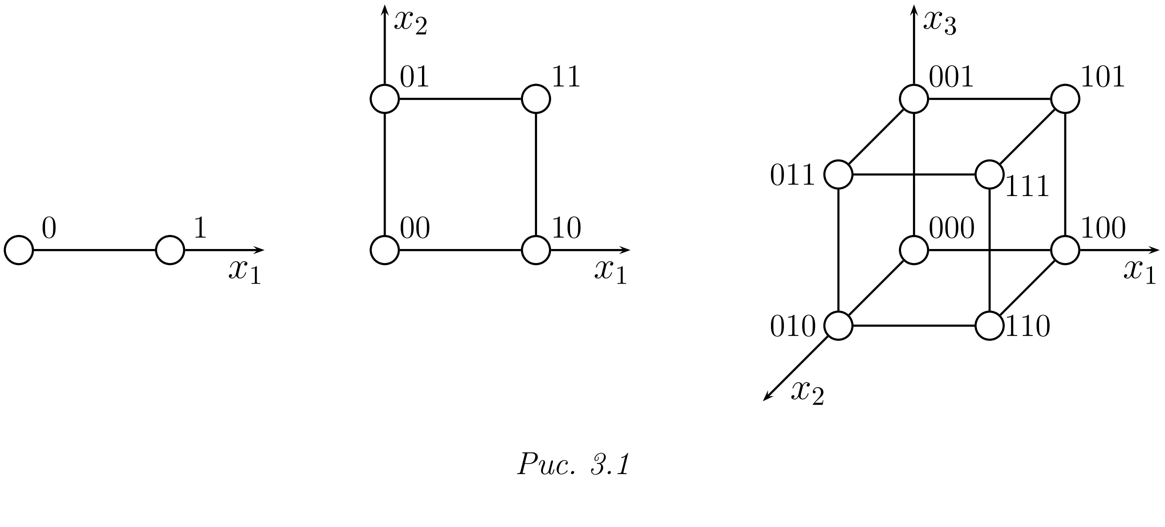


Рис. 3.1

Под геометрическим способом задания булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ понимается выделение тех вершин n-мерного двоичного куба, на наборах координат которых функция принимает единичное значение. На рис. 3.1 приведены двоичные кубы размерностей $n = 1, 2, 3$.

Часто по геометрическому заданию функции строят *граф связности* вершин n-мерного куба, соответствующий данной функции. Для этого сначала отмечают те ребра, у которых оба конца выделены, т. е. соответствующие вершины лежат в области истинности. Затем все остальные ребра и вершины, не лежащие в области истинности, отбрасывают (рис. 3.2).

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

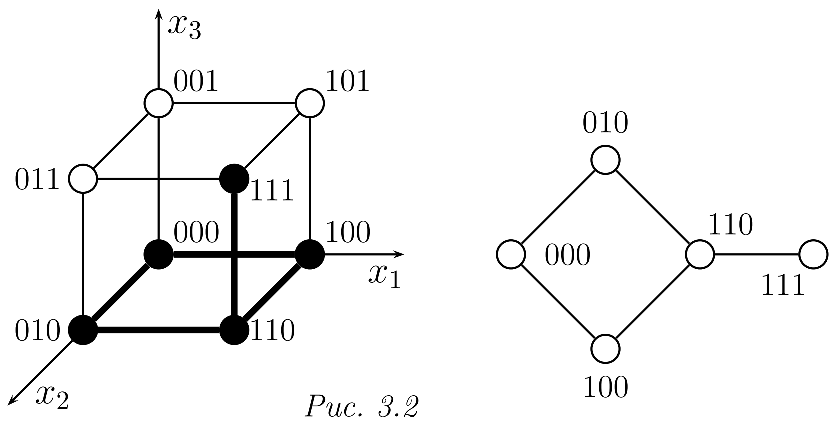


Рис. 3.2

Определение 3.3. *Класс булевых функций K называется замкнутым относительно переименования аргументов, если из того, что n-местная функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит K, а $y_1, \ldots, y_n$ – другие переменные (среди которых могут быть и совпавшие), то функция $f(y_1, \ldots, y_n)$ также принадлежит K.*

Например, если K содержит функцию $x \oplus y$ и замкнут относительно переименования аргументов, то K содержит также и функцию $\theta(x)$.

Определение 3.4. *Класс булевых функций K называется замкнутым относительно суперпозиции, если из предположения, что функции $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат K, следует, что функция $f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$ также принадлежит K.*

Например, если K содержит функции $x \vee y$ и $\overline{x}$ и замкнут относительно суперпозиции (и переименования аргументов), то K содержит и функцию xy, поскольку

$$xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}.$$

Определение 3.5. *Класс булевых функций K называется замкнутым, если K:*

1) содержит тождественную функцию;

2) замкнут относительно переименования аргументов;

3) замкнут относительно суперпозиции.

Определение 3.6. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется сохраняющей ноль, если $f(0, \ldots, 0) = 0$.*

Пример 3.1. *Функции xy, $x \vee y$, $x \oplus y$ сохраняют ноль, а функции $x \leftrightarrow y$, $x \,|\, y$, $x \downarrow y$ не сохраняют.*

Через T_0 обозначим класс всех функций, сохраняющих 0, т. е.

$$T_0 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \,|\, f(0, \ldots, 0) = 0\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Класс T_0 замкнут.*

Доказательство. Функция $\varepsilon(x)$ сохраняет 0, и поэтому $\varepsilon(x) \in T_0$. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняет 0 и $y_1, \ldots, y_n$ – новые переменные, то очевидно, что $f(y_1, \ldots, y_n)$ также сохраняет ноль. Это означает, что T_0 замкнут относительно переименования аргументов. Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$, $g_k(x_1, \ldots, x_n)$ сохраняют 0. Тогда

$$f(g_1(0, \ldots, 0), \ldots, g_k(0, \ldots, 0)) = f(0, \ldots, 0) = 0.$$

Это означает, что T_0 замкнут относительно суперпозиции. Таким образом доказано, что T_0 – замкнутый класс. □

Упражнение 3.1. *Обозначим через T_0^n множество всех булевых функций от n переменных, сохраняющих 0. Доказать, что*

$$|T_0^n| = 2^{2^n - 1}.$$

Определение 3.7. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется сохраняющей единицу, если $f(1, \ldots, 1) = 1$.*

Пример 3.2. *Функции $xy, x \vee y, x \to y$ сохраняют единицу, а функции $x \oplus y, x \,|\, y, x \downarrow y$ не сохраняют.*

Через T_1 обозначим класс всех функций, сохраняющих 1, т. е.

$$T_1 = \{f(x_1, \ldots, x_n) \,|\, f(1, \ldots, 1) = 1\}.$$

Класс T_1 является замкнутым. Доказательство аналогично приведенному в теореме 3.2.

Упражнение 3.2. *Обозначим через T_1^n множество всех булевых функций от n переменных, сохраняющих 1. Доказать, что*

$$|T_1^n| = 2^{2^n-1}.$$

Теорема 3.3. *Пересечение непустого семейства $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ замкнутых классов является замкнутым классом.*

Доказательство. Пусть $K = \bigcap_{i\in I} K_i$. Класс K содержит тождественную функцию, так как все классы K_i ее содержат.

Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежит K, а $y_1,\ldots,y_n$ – новый набор переменных, то для любого i функция $f(x_1,\ldots,x_n)\in K_i$, поскольку K – пересечение этих классов, и $f(y_1,\ldots,y_n)\in K_i$, поскольку K_i замкнут относительно переименования аргументов. Если функция $f(y_1,\ldots,y_n)$ принадлежит всем классам K_i, то эта функция принадлежит и их пересечению, т. е. K. Следовательно, класс K замкнут относительно переименования аргументов.

Пусть функции $f(x_1,\ldots,x_k)$, $g_1(x_1,\ldots,x_n)$,..., $g_k(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежат K. Тогда эти функции принадлежат всем классам K_i. Класс K_i замкнут относительно суперпозиции. Следовательно, для любого i класс K_i содержит функцию

$$f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)).$$

Отсюда следует, что эта функция принадлежит пересечению этих классов – классу K. Таким образом, класс K замкнут относительно суперпозиции. □

Определение 3.8. *Замыканием класса K называется пересечение всех замкнутых классов, содержащих K.*

Замыкание класса K будем обозначать через $[K]$. Из теоремы 3.3 следует, что $[K]$ – замкнутый класс.

Отметим ряд простых свойств замыкания.

Теорема 3.4. *Пусть K – класс булевых функций. Тогда*

1) $K \subseteq [K]$;

2) если $K \subseteq L$, то $[K] \subseteq [L]$;

3) класс K замкнут тогда и только тогда, когда $K = [K]$.

Доказательство. Докажем, для примера, пункт 1. Предположим, что $\{K_i \mid i\in J\}$ – семейство всех замкнутых классов, содержащих K. Так как K содержится в K_i для любого i, то K содержится и в их пересечении, т. е. в $[K]$. □

Упражнение 3.3. *Доказать пп. 2 и 3 теоремы 3.4.*

Упражнение 3.4. *Доказать, что замыкание класса K есть класс всех функций, которые получаются из K и тождественной функции с помощью суперпозиции и переименования аргументов.*

Пусть $K = \{0, 1, x \oplus y, xy\}$. Тогда класс $[K]$ содержит многочлены (от любого числа переменных). Эти многочлены называются *полиномами Жегалкина.* Поскольку произведение элементов множества B удовлетворяет тождеству $u^2 = u$, то полином Жегалкина можно записать в виде

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} \bigoplus a_{i_1,\dots,i_k} x_{i_1} \dots x_{i_k}, \qquad a_{i_1,\dots,i_k} \in B, \tag{3.2}$$

и суммирование ведется по всем подмножествам множества $\{1, \dots, n\}$.

Пример 3.3. *Рассмотрим булеву функцию от двух переменных $f(x_1, x_2) = 1 \cdot x_1x_2 \oplus 0 \cdot x_1 \oplus 1 \cdot x_2 \oplus 1$. Это полином Жегалкина от двух переменных x_1 и x_2, где $a_{12} = 1$, $a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$. Этот полином можно записать и так: $f(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_2 \oplus 1$.*

Обозначим через BF класс всех булевых функций.

Определение 3.9. *Класс булевых функций K называется полным, если $[K] = BF$.*

Другими словами, класс K полон, если любую булеву функцию можно получить из K и тождественной функции с помощью суперпозиции и переименования аргументов.

Пример 3.4. *Следующие классы функций являются полными*

a) $K_1 = \{xy, x \vee y, \overline{x}\}$; *b)* $K_2 = \{xy, \overline{x}\}$;
c) $K_3 = \{x \vee y, \overline{x}\}$; *d)* $K_4 = \{xy, x \oplus y, 1, 0\}$.

Покажем, что любая функция может быть получена из функций класса K_1 с помощью суперпозиции и переименования аргументов. Доказательство проведем на примере функции $f(x_1, x_2, x_3)$, заданной своей таблицей истинности (табл. 3.1).

Выделим те строки таблицы, где в последнем столбце стоит 1. Это – вторая, шестая и седьмая строки. Каждой строке поставим в соответствие произведение переменных или их отрицаний следующим образом: второй строке поставим в соответствие произведение $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3$, шестой – $x_1\,\overline{x}_2\,x_3$, седьмой – $x_1x_2\,\overline{x}_3$, т. е. если переменная x принимает *значение 1, то пишем x, если принимает значение 0, то пишем $\overline{x}$. Легко заметить, что функция*

$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\, \overline{x}_2\, x_3 \vee x_1\, \overline{x}_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \overline{x}_3$$

задается той же таблицей истинности. Это означает, что функция $f(x_1, x_2, x_3)$ равна $g(x_1, x_2, x_3)$. Но в записи функции $g(x_1, x_2, x_3)$ использованы только функции из класса K_1. Следовательно, $f(x_1, x_2, x_3)$ может быть получена из функций класса K_1 суперпозицией и переименованием аргументов, т. е. $f(x_1, x_2, x_3) \in [K]$. На основании этого заключаем, что любая булева функция принадлежит замыканию $[K_1]$. Следовательно, K_1 – полный класс.

Таблица 3.1

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Полнота классов K_2 и K_3 получается из полноты класса K_1 с помощью следующего утверждения. Если K – полный класс и любая функция класса K выражается (с помощью суперпозиции и переименования аргументов) через функции класса L, то L – полный класс.

Действительно, если любая булева функция выражается через функции класса K, то она будет выражаться и через функции класса L. Ранее отмечалось, что $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$. Это равенство доказывает полноту класса K_3. Далее справедливо равенство $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$, из которого следует полнота класса K_2. Полнота класса K_4 следует из полноты класса K_2 и равенства $\overline{x} = x \oplus 1$.

Замечание 3.4. *Легко заметить, что есть прямая аналогия между построением функции $g(x_1, x_2, x_3)$ и алгоритмом приведения формулы к СДНФ, изложенным в примере на с. 34.*

Замечание 3.5. *Полнота класса K_4 означает, в частности, что каждая булева функция может быть представлена полиномом Жегалкина. Например, $x_1 \to x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus 1$, $x_1 \vee x_2 = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$.*

Рассмотрим два способа представления булевой функции полиномом Жегалкина.

Первый способ основан на доказательстве полноты класса K_1 в прим. 3.4 и использованных при доказательстве полноты классов K_2 и K_4 равенствах:

$$\overline{x} = x \oplus 1,$$
$$x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y. \tag{3.3}$$

Замечание 3.6. *Если* $xy = 0$, *то* $x \vee y = x \oplus y$. *Кроме того, очевидно, что* $x \oplus x = 0$. *Последнее соображение позволяет „приводить подобные члены“.*

Пример 3.5. *Пусть функция* $f(x_1, x_2, x_3)$ *задана табл. 3.1. Тогда, как было установлено в прим. 3.4,*

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee x_1\,\overline{x}_2\,x_3 \vee x_1\,x_2\,\overline{x}_3.$$

Продолжим преобразования функции $g(x_1, x_2, x_3)$, *используя* (3.3). *С учетом замеч. 3.6 имеем:*

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3 \oplus x_1\,\overline{x}_2\,x_3 \oplus x_1\,x_2\,\overline{x}_3 \\ &= (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1(x_2 \oplus 1)x_3 \oplus x_1x_2(x_3 \oplus 1) \\ &= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3. \end{aligned}$$

Второй способ можно назвать *методом неопределенных коэффициентов*. Изложим этот способ на функции $f(x_1, x_2, x_3)$ из прим. 3.5.

Пример 3.6. *Рассмотрим функцию* $f(x_1, x_2, x_3)$, *заданную табл. 3.1. Тогда последовательно находим:*

1) $a_0 = f(0, 0, 0) = 0$;

2) $a_0 \oplus a_1 = f(1, 0, 0) = 0, a_1 = 0$;

3) $a_0 \oplus a_2 = f(0, 1, 0) = 0, a_2 = 0$;

4) $a_0 \oplus a_3 = f(0, 0, 1) = 1, a_3 = 1$;

5) $a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12} = f(1, 1, 0) = 1, a_{12} = 1$;

6) $a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13} = f(1, 0, 1) = 1, a_{13} = 0$;

7) $a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23} = f(0, 1, 1) = 0, a_{23} = 1$;

8) $a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123} = f(1, 1, 1) = 0, a_{123} = 1$.

Подставляя найденные коэффициенты в представление (3.2), *получаем*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3.$$

Замечание 3.7. *Пусть* $F(X_1, \ldots, X_n)$ *и* $G(X_1, \ldots, X_n)$ – *формулы логики высказываний. Заменим в формулах большие буквы* X_i *на маленькие* x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. *Получим булевы функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $g(x_1, \ldots, x_n)$. *Тогда формулы* $F(X_1, \ldots, X_n)$ *и* $G(X_1, \ldots, X_n)$ *равносильны в том и только в том случае, когда функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *равны. Это замечание позволит при доказательстве равенства функций ссылаться на законы логики высказываний.*

Упражнение 3.5. *Доказать, что*

1) $[K \cap L] \subseteq [K] \cap [L]$; *2)* $[K] \cup [L] \subseteq [K \cup L]$.

Упражнение 3.6. *Установить, содержит ли замыкание класса* $\{1, xy, x \vee y\}$ *функции* 0, $\overline{x}$.

3.2. Самодвойственные функции

Данный раздел и два последующих посвящены рассмотрению трех конкретных классов функций: самодвойственных, монотонных и линейных.

Определение 3.10. *Функция* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *называется двойственной к* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *если выполняется равенство*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}.$$

Например, xy *двойственна* $x \vee y$, *и наоборот. Это следует из равенств* $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$ *и* $x \vee y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$, *которые мы уже приводили. Функция* $x \to y$ *двойственна функции* $\overline{x}\,y$, *поскольку*

$$\overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{\overline{\overline{x}} \vee \overline{y}} = \overline{x \vee \overline{y}} = \overline{x}y.$$

Отметим, что первое равенство выполняется на основании закона 20, второе – 19 и третье – 18 и 19.

Двойственной к функции $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ *является функция*

$$\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n} = x_1 x_2 \ldots x_n = \min(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Задача 3.1. *Является ли функция* f *двойственной к функции* g:

a) $f = x \oplus y,\ g = x \leftrightarrow y$;	*b)* $f = x \to y,\ g = y \to x$;
c) $f = (x \oplus y)z,\ g = (x \oplus y)(z \oplus 1)$;	*d)* $f = x \to y,\ g = \overline{x}y$;
e) $f = xy \vee xz \vee yz,\ g = xy \oplus xz \oplus yz$;	*f)* $f = x \leftrightarrow y,\ g = \overline{x}y \vee x\overline{y}$.

Ответ: в случаях a, d – f ответ положительный, в остальных случаях – отрицательный.

Определение 3.11. *Функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *называется самодвойственной, если выполняется равенство*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}. \tag{3.4}$$

Другими словами, функция самодвойственна, если она совпадает со своей двойственной. Заметим, что равенство (3.4) *для определения самодвойственности равносильно равенству*

$$\overline{f(x_1, \ldots, x_n)} = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n). \tag{3.5}$$

Пример 3.7. *Самодвойственными функциями являются тождественная функция и $\overline{x}$, а xy самодвойственной не является, поскольку двойственна дизъюнкции $x \vee y$.*

Упражнение 3.7. *Найдите все самодвойственные функции от двух переменных.*

В качестве еще одного примера самодвойственной функции приведем функцию

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)} &= \overline{\overline{x}_1\,\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\,\overline{x}_3} = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \vee \overline{x_1 \vee x_3} \vee \overline{x_2 \vee x_3}} \\
&= (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3) = x_1x_1x_2 \vee x_1x_1x_3 \vee \\
&\vee x_1x_3x_2 \vee x_1x_3x_3 \vee x_2x_1x_2 \vee x_2x_1x_3 \vee x_2x_3x_2 \vee x_2x_3x_3 \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_1x_3 \vee x_3x_2 \vee x_2x_3 \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_3x_2 \vee x_2x_3 \\
&= x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3.
\end{aligned}$$

Из последних рассуждений видно, что определять самодвойственность булевой функции на основании определения иногда достаточно сложно. Эта задача легко решается с помощью следующей теоремы.

Теорема 3.5. *При лексикографическом упорядочивании строк таблицы истинности столбец значений самодвойственной функции антисимметричен относительно середины таблицы.*

Доказательство. Возьмем произвольную строку таблицы истинности самодвойственной булевой функции $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, где $c_i \in B$. Обозначим через $N(c)$ номер этой строки, определенный в (3.1). Тогда очевидно, что $0 \leqslant N(c) \leqslant 2^n - 1$. Рассмотрим соответствующую двойственную строку $(\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_n)$. Номер этой строки обозначим через $N(a')$. Нетрудно видеть, что $N(a') = 2^n - 1 - N(a)$. Последнее равенство и доказывает требуемое. □

Следствие 3.1. *Самодвойственная функция равна 1 на половине наборов таблицы истинности.*

Следствие 3.2. *Самодвойственную функцию определяет первая половина столбца значений таблицы истинности.*

Класс всех самодвойственных функций обозначим буквой S. Справедлива теорема.

Теорема 3.6. *S – замкнутый класс.*

Доказательство. Как уже отмечалось, S содержит $\varepsilon(x)$. Поскольку равенство (3.4) выполняется для всех значений переменных, то класс S – замкнут относительно переименования аргументов.

Пусть функции $f(x_1,\ldots,x_k)$, $g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)$ принадлежат S. Тогда, используя равенство (3.5), получаем, что

$$\begin{aligned}\overline{f(x_1,\ldots,x_k)} &= f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k),\\ \overline{g_1(x_1,\ldots,x_n)} &= g_1(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \overline{g_k(x_1,\ldots,x_n)} &= g_k(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n).\end{aligned}$$

Тогда, если $h(x_1,\ldots,x_n) = f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n))$, то

$$\begin{aligned}h(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n) &= f(g_1(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n),\ldots,g_k(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n))\\ &= f(\overline{g_1(x_1,\ldots,x_n)},\ldots,\overline{g_k(x_1,\ldots,x_n)})\\ &= \overline{f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n))}\\ &= \overline{h(x_1,\ldots,x_n)}.\end{aligned}$$

В силу равенства (3.5), $h(x_1,\ldots,x_n)$ – самодвойственная функция. Следовательно, класс S замкнут относительно суперпозиции. □

Упражнение 3.8. *Обозначим через S^n множество всех самодвойственных булевых функций от n переменных. Доказать, что*

$$|S^n| = 2^{2^{n-1}}.$$

Следующее утверждение называется *леммой о несамодвойственной функции.*

Лемма 3.1. *Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – несамодвойственная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1,\ldots,x_n),\overline{x}\}$ содержит константы* $0,1$.

Доказательство. Так как $f(x_1,\ldots,x_n)$ – несамодвойственная функция, то существуют $a_1,\ldots,a_n \in B$ такие, что

$$\overline{f(a_1,\ldots,a_n)} \neq f(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_n).$$

Множество B содержит только два элемента. Поэтому из этого неравенства следует равенство

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_n).$$

Для удобства обозначений (не умаляя общности рассуждений) предположим, что $a_1 = \ldots = a_k = 0$, $a_{k+1} = \ldots = a_n = 1$. Тогда последнее равенство можно записать так:

$$f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, \ldots, 1) = f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0),$$

Рассмотрим функцию $g(x) = f(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \overline{x}, \ldots, \overline{x})$. Заметим, что $g(x)$ принадлежит $[K]$. Имеем равенства

$$g(0) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \overline{0}, \ldots, \overline{0}) = f(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, 1, \ldots, 1) =$$
$$= f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots, 0) = f(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \overline{1}, \ldots, \overline{1}) = g(1).$$

Следовательно, $g(x)$ – одна из констант, принадлежащая $[K]$. Поскольку K содержит отрицание, то и другая константа принадлежит $[K]$. $\square$

Пример 3.8. *Является ли функция $f(x_1, x_2) = x_2(x_2 \to x_1)$ самодвойственной? Для получения ответа на вопрос согласно теореме 3.5 составим ее таблицу истинности. Можно видеть, что столбец значений таблицы истинности не является антисимметричным относительно середины: $f(x_1, x_2) \neq \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}$, например при $x_1 = 0, x_2 = 1$. Следовательно, функция $f(x_1, x_2)$ самодвойственной не является.*

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Задача 3.2. *Будут ли следующие функции самодвойственными:*

a) $(x \oplus y)(y \oplus z)$; *b)* $(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$.

Ответ: a) нет, b) да.

Упражнение 3.9. *Докажите, что булева функция четности*

$$p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$$

является самодвойственной тогда и только тогда, когда n нечетно.

3.3. Монотонные функции

Введем отношение частичного нестрогого порядка ($\leqslant$) на множестве B^n – булевых векторов длины n.

Определение 3.12. *Будем считать, что* $(a_1, \dots, a_n) \leqslant (b_1, \dots, b_n)$, *если* $a_1 \leqslant b_1, \dots, a_n \leqslant b_n$, *где* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in B$.

Например, $(1, 0, 0, 1) \leqslant (1, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 0) \leqslant (1, 0, 1, 1)$. *В то же время неверно, что* $(1, 0, 0, 1) \leqslant (1, 0, 1, 0)$.

Определение 3.13. *Булева функция* $f(x_1, \dots, x_n)$ *называется монотонной, если для любых двух векторов* $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ *из условия* $a \leqslant b$ *следует, что* $f(a) \leqslant f(b)$.

Пример 3.9. *Монотонными функциями являются* 1, 0, xy, $x \vee y$. *Функции* $\overline{x}$, $x \to y$, $x \oplus y$ *немонотонны.*

Обратимся к графическому представлению упорядоченных множеств. Упорядоченное множество M, имеющее конечное число элементов удобно представлять с помощью ориентированного графа $H(M)$, который называют *диаграммой Хассе* и строят следующим образом. Вершины $H(M)$ однозначно соответствуют элементам M. При этом вершину, соответствующую элементу a, называют просто вершиной a. Если элемент b *непосредственно следует* за элементом a (и только в этом случае), вершину b соединяют ребром с вершиной a, при этом ребро ориентируется от b к a.

Определение 3.14. *Говорят, что элемент* b *непосредственно следует за элементом* a, *если* $a \leqslant b$, *и не существует элемента* $c \in M$ *такого, что* $a \leqslant c \leqslant b$.

Обычно в диаграммах Хассе большие элементы помещают над меньшими.

Теорема 3.7. *Диаграмма Хассе обладает следующими очевидными свойствами:*

1) соотношение $a \leqslant b$ *эквивалентно существованию ориетированного пути из вершины* b *в вершину* a *на диаграмме Хассе;*

2) если на диаграмме существует ребро e, *идущее из вершины* b *в вершину* a, *то никакого другого пути из* b *в* a *быть не может;*

3) диаграмма Хассе не имеет циклов.

Пример 3.10. *Докажем монотонность функции*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3.$$

Для решения этой задачи начертим диаграмму Хассе частично упорядоченного множества B^3 *(рис. 3.3).*

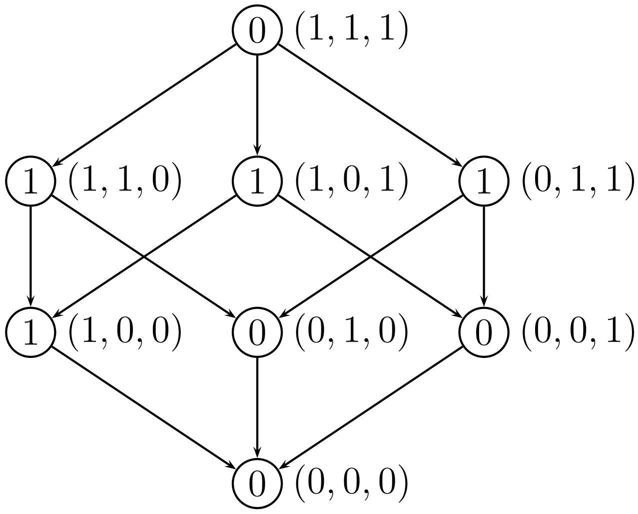


Рис. 3.3

В вершинах этой диаграммы проставим значения функции f, а справа от вершин – соответствующие векторы. Монотонность функции означает, что если в какой-то вершине диаграммы функция принимает значение 1, то и всюду выше она принимает то же значение. Исследуемая функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 x_3$ монотонной не является, так как в вершине $(1, 1, 0)$ она принимает значение 1, а в вершине $(1, 1, 1)$, которая выше первой, принимает значение 0.

Задача 3.3. *Будут ли следующие функции монотонны:*

a) $yx \oplus y$; *b)* $xy \oplus y \oplus x$; *c)* $x \leftrightarrow y$;

d) $x \to (y \to x)$; *e)* $x \to (x \to y)$; *f)* $xy \vee xz \vee yz$.

Ответ: монотонными являются функции $xy \oplus y \oplus x$, $x \to (y \to x)$, $xy \vee xz \vee yz$.

Упражнение 3.10. *Докажите монотонность функций:* $\max(x_1, \ldots, x_n)$ *и* $\min(x_1, \ldots, x_n)$ *(см. опред. 3.10).*

Класс всех монотонных функций обозначим буквой M.

Теорема 3.8. *M – замкнутый класс.*

Доказательство. Монотонность тождественной функции очевидна. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in M$ и $y_1, \ldots, y_n$ – новые переменные. Возьмем два набора значений переменных $y_1, \ldots, y_n$: $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ таких, что $a \leqslant b$. Но эти векторы будут наборами значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, и поэтому выполняется неравенство $f(a) \leqslant f(b)$. Это означает, что класс M замкнут относительно переименования аргументов.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$, $g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots$, $g_n(x_1, \ldots, x_n)$ – монотонные функции и $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ – два набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, таких что $a \leqslant b$. Рассмотрим суперпозицию

$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)).$$

Введем обозначения: $c_1 = g_1(a), \ldots, c_k = g_k(a), d_1 = g_1(b), \ldots, d_k = g_k(b)$. В силу монотонности функций $g_1, \ldots, g_k$ имеем, что $c_1 \leqslant d_1, \ldots, c_k \leqslant d_k$.

Тогда

$$\begin{aligned} h(a_1, \ldots, a_n) &= f(g_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, g_k(a_1, \ldots, a_n)) = f(c_1, \ldots, c_k) \\ &\leqslant f(d_1, \ldots, d_k) = f(g_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, g_k(b_1, \ldots, b_n)) \\ &= h(b_1, \ldots, b_n). \end{aligned}$$

(Знак неравенства поставлен в силу монотонности функции f). Таким образом, доказано, что класс M замкнут относительно суперпозиции. □

Упражнение 3.11. *Докажите, что функция, двойственная монотонной, сама монотонна.*

Упражнение 3.12. *Докажите, что монотонными являются те и только те функции, которые или являются константами, или допускают представление в КНФ или ДНФ, не содержащей отрицаний.*

Следующее утверждение называется *леммой о немонотонной функции.*

Лемма 3.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – немонотонная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1, \ldots, x_n), 0, 1\}$ содержит $\overline{x}$.*

Доказательство. Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n)$ немонотонна, то существуют наборы значений переменных $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ такие, что $a < b$, но $f(a) > f(b)$. Неравенство $f(a) > f(b)$ означает, что $f(a) = 1$ и $f(b) = 0$. Пусть наборы a и b отличаются k компонентами ($k \geqslant 1$). Тогда в a на этих местах стоят нули, а в b – единицы. Заменяя указанные компоненты по одной (по старшинству), получаем цепочку наборов:

$$a < \alpha^1 < \alpha^2 < \ldots < \alpha^{k-1} < b,$$

где соседне наборы отличаются только одной компонентой. Очевидно, что найдутся соседние наборы α^j, α^{j+1} такие, что $f(\alpha^j) = 1$, $f(\alpha^{j+1}) = 0$. Пусть они различаются i-й компонентой. Тогда $\alpha_i^j = 0$, $\alpha_i^{j+1} = 1$, а остальные компоненты одинаковы. Введем функцию

$$g(x) = f(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_{i-1}^j, x, \alpha_{i+1}^j, \alpha_{i+2}^j, \ldots, \alpha_n^j).$$

По условиям леммы $g(x) \in K$. Тогда

$$g(0) = g(\alpha_i^j) = f(\alpha^j) = 1, \; g(1) = g(\alpha_i^{j+1}) = f(\alpha^{j+1}) = 0,$$

т. е. $g(x) = \overline{x}$. □

Пример 3.11. *Построим функцию отрицания из немонотонной функции и констант. Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3)$ задана своей таблицей*

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	1	1

истинности. Очевидно, что функция $f(x_1, x_2, x_3)$ не является монотонной функцией. Действительно, монотонность нарушается на наборах $\{0, 0, 1\}$ и $\{1, 0, 1\}$. Эти наборы отличаются только первой компонентой. Тогда, согласно доказательству леммы определяем функцию $g(x) = f(x, 0, 1)$. Нетрудно убедиться в том, что $g(0) = 1$, а $g(1) = 0$, т. е. функция $g(x)$ является отрицанием.

3.4. Линейные функции

Определение 3.15. *Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейной, если она представима в виде линейного полинома Жегалкина, т. е. если существуют $a_0, a_1, \ldots, a_n \in B$ такие, что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n.$$

Пример 3.12. *Линейными функциями являются $0, 1, \overline{x}, x \oplus y$. Функции $xy, x \vee y, x \to y$ линейными не являются.*

Замечание 3.8. *Заметим, что любая булева функция от одной переменной линейна.*

Класс всех линейных функций обозначим буквой L. Класс L является замкнутым. Действительно, тождественная функция является линейной. Далее очевидно, что замена аргументов у линейной функции дает линейную функцию и суперпозиция линейных функций линейна.

Упражнение 3.13. *Обозначим через L^n множество всех линейных булевых функций от n переменных. Доказать, что*

$$|L^n| = 2^{n+1}.$$

Следующее утверждение называется *леммой о нелинейной функции.*

Лемма 3.3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – нелинейная функция. Тогда замыкание класса $K = \{f(x_1, \ldots, x_n), 0, 1, \overline{x}\}$ содержит произведение xy.*

Доказательство. Так как $f(x_1, \ldots, x_n)$ – нелинейная функция, то ее полином Жегалкина содержит хотя бы одно нелинейное слагаемое вида: $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}, k \geqslant 2$. Среди них выберем самое короткое. Для переменных, входящих в конъюнкцию, положим $x_{i_3} = \ldots = x_{i_k} = 1$, а те, которые в данное слагаемое не входят, положим равными нулю. Введем новые обозначения: $x = x_{i_1}$, $y = x_{i_2}$. Тогда функция f примет вид

$$f(x, y) = xy \oplus \alpha x \oplus \beta y \oplus \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in B.$$

Составим следующую таблицу

α	β	γ	$f(x, y)$	xy
0	0	0	xy	$xy = f(x, y)$
0	0	1	$xy \oplus 1 = \overline{xy}$	$xy = \overline{f(x, y)}$
0	1	0	$xy \oplus y = \overline{x}y$	$xy = f(\overline{x}, y)$
0	1	1	$xy \oplus y \oplus 1 = \overline{\overline{x}y}$	$xy = \overline{f(\overline{x}, y)}$
1	0	0	$xy \oplus x = x\overline{y}$	$xy = f(x, \overline{y})$
1	0	1	$xy \oplus x \oplus 1 = \overline{x\overline{y}}$	$xy = \overline{f(x, \overline{y})}$
1	1	0	$xy \oplus x \oplus y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$	$xy = \overline{f(\overline{x}, \overline{y})}$
1	1	1	$xy \oplus x \oplus y \oplus 1 = \overline{x}\,\overline{y}$	$xy = f(\overline{x}, \overline{y})$

Последний столбец таблицы содержит представление функции xy через отрицание, нелинейную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ и подстановку в нее констант 0 и 1. □

Пример 3.13. *Получим функцию xy с помощью констант, отрицания и нелинейной функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1$. Воспользуемся леммой 3.3 о нелинейной функции.*

Заметим, что требование выбора самого короткого нелинейного слагаемого является существенным. Возьмем, например, слагаемое $x_1x_2x_3$, тогда (полагая $x_3 = 1$) получим $f(x_1, x_2, 1) = x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1 = x_1$ и лемма неприменима.

Сделаем правильный выбор и рассмотрим слагаемое x_1x_2. Полагая $x_3 = 0$, получаем $f(x_1, x_2, 0) = x_1x_2 \oplus x_1$. Тогда $xy = f(x, \overline{y}, 0)$.

Задача 3.4. *Какие из линейных функций являются самодвойственными?*

Ответ: функции, у которых нечетное число коэффициентов a_i равно единице.

Задача 3.5. *Будут ли следующие функции линейными:*

a) $x \downarrow y$; *b)* $\overline{x \leftrightarrow \overline{y}}$; *c)* $(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z$; *d)* $x \to (y \to x)$.

Ответ: линейными являются все функции, кроме первой.

3.5. Критерий полноты

Данный раздел посвящен доказательству (и обсуждению) критерия полноты класса булевых функций, который называется теоремой Поста.

Определение 3.16. *Классы T_0, T_1, S, M и L называются основными замкнутыми классами функций.*

Теорема 3.9 (Поста). *Класс булевых функций K является полным тогда и только тогда, когда он не содержится ни в одном из основных замкнутых классов.*

Упражнение 3.14. *Докажите, что каждый полный класс содержит полный подкласс, состоящий из не более чем четырех функций.*

Пример 3.14. *Покажем, что в формулировке предыдущего упражнения нельзя слово "четырех" заменить на слово "трех". Рассмотрим класс $K = \{0, 1, xy, x \oplus y \oplus z\}$.*

Очевидно, что $0 \notin T_1$, $1 \notin T_0$. Функция xy не является ни самодвойственной, ни линейной. Нетрудно проверить, что $x \oplus y \oplus z$ – немонотонная функция. Следовательно, по теореме Поста K – полный класс. В то же время любой его собственный подкласс полным не является. Действительно, если удалить функцию 0, то оставшиеся функции будут сохранять 1, если удалить 1, то они будут сохранять 0. Класс функций K без функции xy состоит из линейных функций, а без последней функции – из монотонных.

Определение 3.17. *Замкнутый класс K называется предполным если K – неполный класс, но для любой функции $f \notin K$ класс $K \cup \{f\}$ является полным.*

Теорема 3.10. *Предполными являются классы T_0, T_1, S, M и L и только они.*

Определение 3.18. *Система функций C называется базисом замкнутого класса K, если замыкание C совпадает с K, но замыкание любой собственной подсистемы C уже не совпадает с K.*

Упражнение 3.15. *Доказать, что система $\{0, 1, xy, x \vee y\}$ образует базис в классе всех монотонных функций.*

Упражнение 3.16. *Сведением к известным полным классам доказать полноту классов функций:*

а) $\{x \to y, \overline{x}\}$; *б)* $\{x \to y, 0\}$; *в)* $\{x \downarrow y\}$;
г) $\{x \to y, x \oplus y\}$; *д)* $\{x \vee y, x \oplus y, 1\}$; *е)* $\{x \leftrightarrow y, 1, x \vee y\}$.

Упражнение 3.17. *Используя теорему Поста, доказать полноту классов функций:*

а) $\{x \vee y, \overline{x}\}$; *б)* $\{x \to y, \overline{x}\}$; *в)* $\{xy \oplus x, x \oplus y, 1\}$;
г) $\{x \oplus y, x \leftrightarrow yz\}$; *д)* $\{xy, x \oplus y, x \leftrightarrow xy\}$; *е)* $\{x \leftrightarrow y, 1, x \vee y\}$.

Упражнение 3.18. *Функцию назовем полной, если класс, единственным элементом которого является эта функция, будет полным. Доказать, что штрих Шеффера и стрелка Пирса – единственные полные функции среди всех двухместных функций.*

Задача 3.6. *Будут ли полными следующие классы функций:*

а) $\{xy, x \oplus y \oplus 1\}$; *б)* $\{0, 1, xy \vee z\}$;
в) $\{0, 1, x \leftrightarrow y\}$; *г)* $\{xy \oplus x, x \leftrightarrow y, 0\}$;
д) $\{x \vee y, xy \oplus xz\}$; *е)* $\{\overline{x}, xy \vee xz \vee yz\}$;
ж) $\{1, \overline{x}, x \oplus y \oplus \max(x, y, z)\}$; *з)* $\{x \oplus y, x \vee y \vee \overline{z}\}$.

Ответ: в случаях г, ж, и з классы будут полными, в остальных нет.

Список рекомендуемой литературы

Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М., Наука, 1972.

Клини С. Математическая логика. М., Наука, 1973.

Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука, 1975.

Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М., Наука, 1983.

Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986.

Кузнецов О. П., Адельсон-Вельский Г. М. Дискретная математика для инженера. М.: Энергоатомиздат, 1988.

Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. М.: Изд-во МАИ, 1992.

Лихтарников Л. М., Сукачева Т. Г. Математическая логика. СПб.: Лань, 1999.

Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. СПб.: Питер, 2002.

Оглавление

Поздняков Сергей Николаевич
Рыбин Сергей Витальевич
Математическая логика и теория алгоритмов.
Учебное пособие

Редактор И. Г. Скачек

Подписано в печать ......04. Формат $60 \times 84\,1/16$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4,0.
Тираж 400 экз. Заказ ...

Издательство СПбГЭТУ „ЛЭТИ“

197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5