МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по практической работе №9
по дисциплине «Вычислительная математика»
Тема: Самостоятельная разработка программы на одном из языков программирования

Студент гр. 8383	____________________	Ларин А.
Преподаватель	____________________	Сучков А.И.

Санкт-Петербург
2019

Цель работы.

Исследование различных методов интерполяции для неравноотстсвоящих узлов с последующей реализацией на одном из языков программирования.

Основные теоретические положения.

Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y. Однако на практике часто неизвестна связь между x и y, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. В других случаях при известной зависимости $y = f(x)$ ее использование в практических задачах затруднительно (например, она содержит сложные, трудно вычисляемые выражения). Наиболее распространенным и важным для практического использования случаем, когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$, в которой дискретному множеству значений аргумента $\{x_i\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ ($i = \overline{0, n}$). Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x. Таким образом, приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра у при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна. Этой цели служит задача о приближении (аппроксимации) функций: данную функцию $f(x)$ требуется аппроксимировать (приближенно заменить) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение (в некотором смысле) $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция при этом называется аппроксимирующей. Для практики важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x_j.$$

Этот случай, т.е. приближение многочленами, является одной из задач классического численного анализа.

Рассмотрим аппроксимацию этого рода и методы ее реализации в вычислительных процедурах на ЭВМ. Коэффициенты a_j в процедурах подбираются так, чтобы достичь наименьшего отклонения многочлена от данной функции. Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется точечной. Одним из основных типов точечной аппроксимации является интерполирование, которое заключается в следующем: для данной функции строится многочлен $\varphi(x)$, принимающий в заданных точках x_i те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т.е. $\varphi(x_i) = y_i$, $i = \overline{0, n}$. При данной постановке задачи предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых: $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Точки называются узлами интерполяции, а многочлен $\varphi(x)$ – интерполяционным многочленом. Близость интерполяционного многочлена к заданной функции состоит, таким образом, в том, что их значения совпадают на заданной системе точек (узлов). Максимальная степень интерполяционного многочлена $m = n$. В этом случае говорят о глобальной интерполяции, так как один многочлен $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x_j$ используется для интерполяции функции $f(x)$ на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента x. Коэффициенты a_j многочлена $\varphi(x)$ находят из системы уравнений $\varphi(x_i) = y_i$. Можно показать, что при $xi \neq xk$ $(i \neq k)$ эта система имеет единственное решение.

Возможны два случая задания функции y=f(x):

- точки x_i располагаются на оси абсцисс неравномерно на различных расстояниях одна от другой – случай неравноотстоящих узлов;
- точки x_i располагаются на оси абсцисс равномерно с фиксированным шагом – случай равноотстоящих узлов.

В каждом из указанных случаев для интерполирования функций применяются различные интерполяционные формулы.

Интерполяционные формулы для неравноотстоящих узлов.

Пусть известны значения некоторой функции в $n+1$ различных точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые обозначим следующим образом: $f_i = f(x_i), i = \overline{0, n}$. Указанные значения могут быть получены путем экспериментальных измерений или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. В задаче интерполяции функции $f(x)$, как было сказано ранее, решается проблема приближенного восстановления значения функции в произвольной точке x. Для этого строится алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени n, который в точках x_i принимает заданные значения, т.е.

$$L_n(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}.$$

Следует заметить, что если точка x расположена вне минимального отрезка, содержащего все узлы интерполяции x_i $(i = \overline{0, n})$, то замену функции $f(x)$ на $L_n(x)$ также называют экстраполяцией. В общем случае доказано, что существует единственный интерполяционный многочлен n-й степени, удовлетворяющий условиям выше:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ell_i(x),$$

где

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{xi - xk}.$$

Данный интерполяционный многочлен, называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции $\ell_i(x)$ – лагранжевыми коэффициентами или базисными полиномами. Для оценки погрешности интерполяции (в частности, и экстраполяции) в текущей точке $x \in [a, b]$ ($[a, b]$ – отрезок, содержащий все узлы интерполяции x_i и точку x) можно использовать соотношение

$$|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|,$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{\eta \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(\eta) \right|$ – наибольшее абсолютное значение $(n+1)$-ой производной интерполируемой функции в некоторой точке $\eta \in [a, b]$.

Оценить максимальную погрешность интерполяции на всем отрезке $[a, b]$ можно с помощью соотношения

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$$

Использование оценок погрешностей предполагает ограниченность $(n+1)$-ой производной интерполируемой функции на отрезке $[a, b]$, т.е. $M_{n+1} < \infty$. На практике вместо общей формы записи часто используются другие формы записи интерполяционного многочлена, более удобные для применения в конкретных ситуациях.

Интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции имеет вид:

$$N_n(x) = f_0 + (x - x_0)f(x_0; x_1) + \cdots + \left(\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)\right)f(x_0; x_1; \dots; x_n),$$

где $f(x_0; x_1; \dots; x_k)$ – разделённая разность k-го порядка.

Вычисление разделённых разностей производится по соотношениям:

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = f(x_1; x_2; \dots; x_n) - \frac{f(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

При использовании интерполяционного многочлена Ньютона изменение степени n требует только добавить или отбросить соответствующее число стандартных слагаемых, что удобно на практике. В то же время, непосредственное использование интерполяционного многочлена Лагранжа требует строить его заново при изменении n. В том случае, если требуется найти лишь численное значение интерполяционного многочлена $L_n(x)$, а не его представление, может быть использована итерационно-интерполяционная схема Эйткена.

Пусть $Y_{ijk\dots}$ – интерполяционный многочлен, определяемый парами (x_i, f_i), $(x_j\ , f_j), (x_k, f_k), \dots$ так, что $Y_{012}\dots n = L_n(x)$. Интерполяционные многочлены возрастающих степеней получают последовательно следующим образом:

$$Y_{01} = \frac{1}{x_1 - x_0} det \begin{pmatrix} x - x_0 & f_0 \\ x - x_1 & f_1 \end{pmatrix}$$

$$Y_{12} = \frac{1}{x_2 - x_1} det \begin{pmatrix} x - x1 & f1 \\ x - x2 & f2 \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Y_{012} = \frac{1}{x_2 - x_0} det \begin{pmatrix} x - x_0 & Y_{01} \\ x - x_2 & Y_{12} \end{pmatrix}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Y_{0123} = \frac{1}{x_3 - x_0} det \begin{pmatrix} x - x_0 & Y_{012} \\ x - x_3 & Y_{123} \end{pmatrix}$$

Этот процесс можно закончить, когда у значений двух интерполяционных многочленов последовательных степеней совпадает требуемое количество знаков.

Постановка задачи.

В ходе работы студенты должны самостоятельно разработать программу на одном из языков программирования, обеспечивающую решение одного из вариантов, полученного от преподавателя. Используя интерполяционную схему Эйткена и/или интерполяционную формулу Ньютона, необходимо вычислить значение в точке x функции, заданной таблицей. Порядок выполнения работы следующий:

1. Составить подпрограмму-функцию для вычисления значения в заданной точке по формуле Ньютона `INEWTON` и/или схеме Эйткина `AITKEN`.
2. Составить головную программу, содержащую обращение к соответствующим подпрограммам и осуществляющую печать результатов (в том числе и промежуточных вычислений) как на экран, так и в файл. Входные данные также считываются из файла.

3. Провести вычисления по программе. Построить график полученной функции (множество точек, соединённых последовательно), отметить искомую точку.

Выполнение работы.

Интерполируем значения неизвестной функции $f(x)$ по набору значний представленных в таб. 1.

Таблица 1 – Данный набор точек неизвестной функции $f(x)$

Номер i	Значение x_i	Значение y_i
0	0.2376	-3.7117
1	0.7368	-0.7525
2	1.1448	0.2297
3	1.9872	0.0128
4	2.5392	-0.3824
5	2.7648	-0.3175
6	3.0616	0.1348
7	3.2088	0.5575
8	3.2784	0.8109
9	3.6904	3.1398
10	3.9368	5.3285

Требуется интерполировать значение функции в точке $x^* = 2.2248$

Визуализируем данные значения на графике. График представлен на рис. 1.

Была написана программа для интерполяции функции многочленом Ньютона для неравноотстоящих узлов. Она принимает на вход следующие значения: `n` – количество известных точек, `x` – интерполируемая точка, `xx,yy` – список известных точек, их абсциссы и ординаты соответственно. Программа выводит слагаемые многочлена и интерполированное значение функции в точке в стандартный поток вывода. Код программы представлен в приложении А.

Аппроксимированная при помощи данной программы функция представлена на графике на рис. 2. Слагаемые многочлены и значение функции в точке $x^* = 2.2248$ представлен в таб. 2. Значение функции в точке $x^* = 2.2248$ рассчитано: $f_N(x^*) = -0.21331084$

Таблица 2 – Значения слагаемых многочлена Ньютона

s_1	1.178E+01
s_2	-1.147E+01
s_3	3.193E+00
s_4	2.282E-05
s_5	1.844E-05
s_6	2.365E-05
s_7	3.343E-05
s_8	3.498E-05
s_9	1.565E-05
s_{10}	-9.280E-06

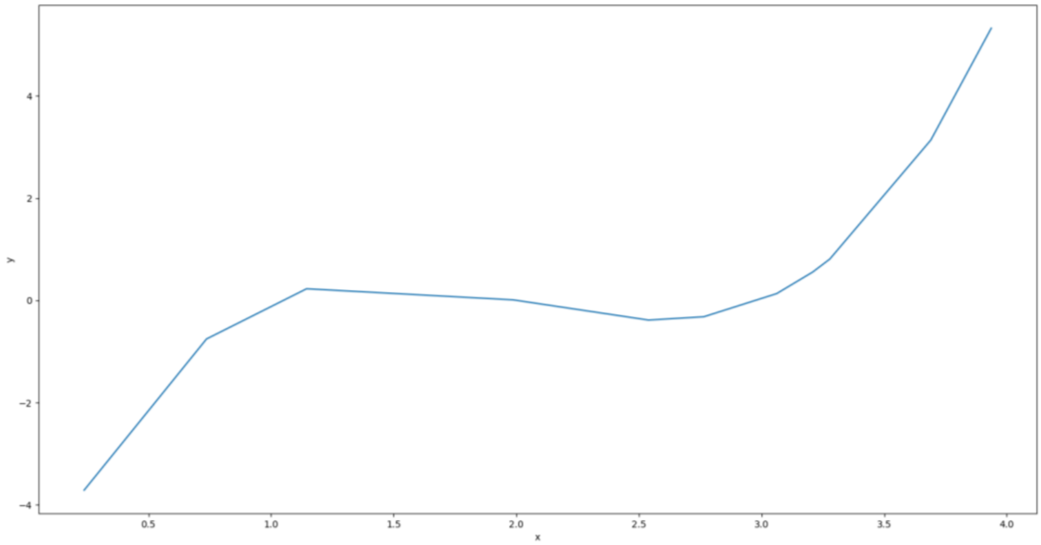

Рисунок 1 – Исходный набор точек функции

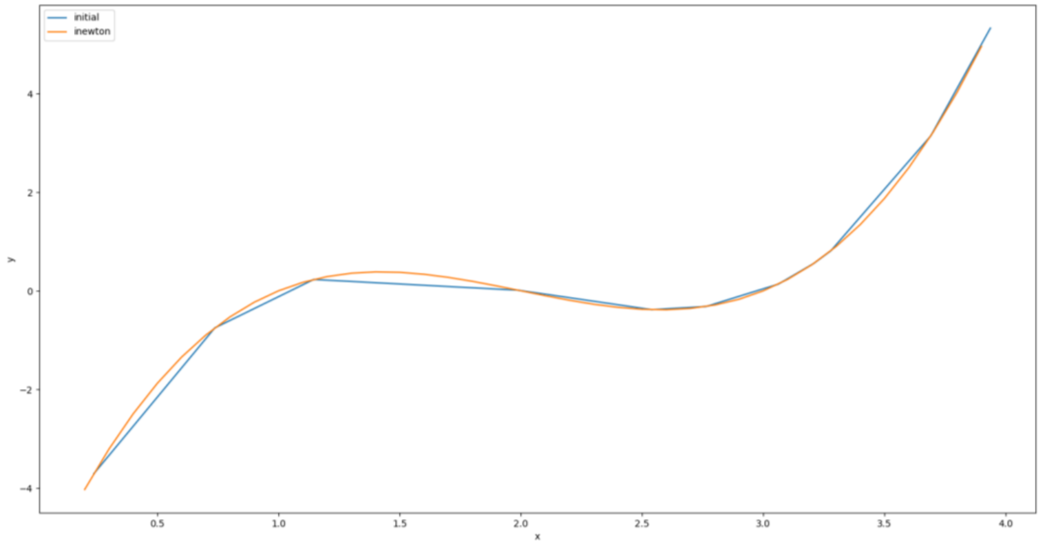

Рисунок 2 – Аппроксимированные по методу Ньютона значения на промежутке

Была написана программа для интерполяции функции по схеме Эйткена. Она принимает на вход следующие значения: `x` – интерполируемая точка, `xx,yy` – список известных точек, их абсциссы и ординаты соответственно, `a,b` –границы промежутка на данной итерации . Программа выводит интерполированное значение функции в точке в стандартный поток вывода. Код программы представлен в приложении А.

Аппроксимированная при помощи данной программы функция представлена на графике на рис. 3. Значение функции в точке $x^* = 2.2248$ рассчитано: $f_A(x^*) = -0.21331721$

Разница между найденными значениями $f_N(x^*) - f_A(x^*) =$ 0,00000637065148667 т.е. совпали 5 знаков.

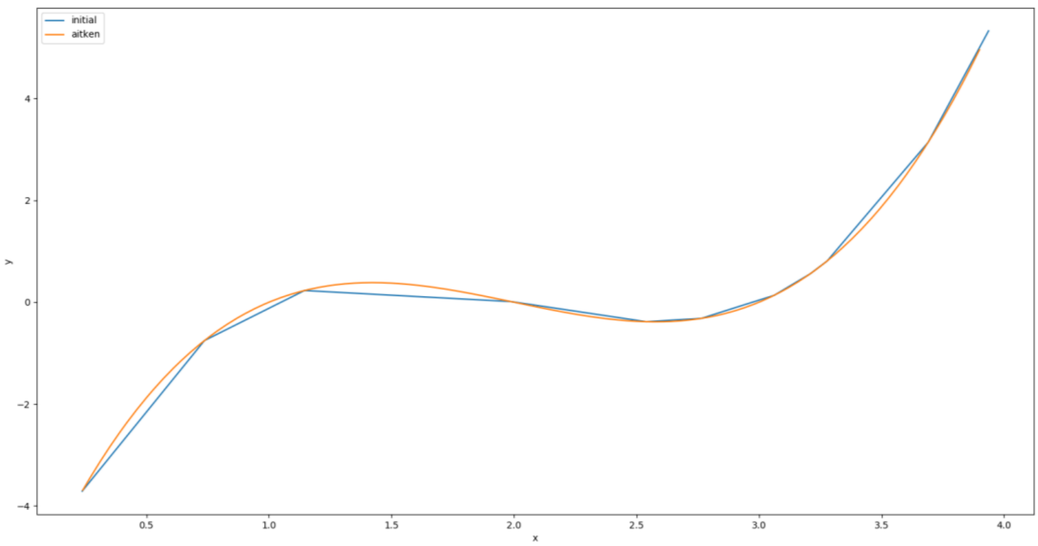

Рисунок 3 – Аппроксимированные по методу Эйткена значения на промежутке

Выводы.

Проанализировав результаты аппроксимации графиков по формуле Ньютона можно прийти к выводу, что данный метод удобен в использовании так как дает аппроксимационный многочлен, по которому в дальнейшем можно строить функцию на промежутке, а также позволяем добавлять или уменьшать количество слагаемых при получении новой информации о точках графика.

Метод Эйткена менее удобен в использовании так как при изменении набора точек либо потребности посчитать значение в новой точке требует проводить расчеты заново. Однако по получившимся интерполированным значениям функции в данной точке видим, что при расчете обеими методами для данной получаем значения совпадающие до 5-ти знаков после запятой, то есть дают достаточно хороший результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
x0 = 2.2248


def divdif(a,b,xx,yy):
    if(b-a==1):
        return (yy[b]-yy[a])/(xx[b]-xx[a])
    return   (divdif(a+1,b,xx,yy)-divdif(a,b-1,xx,yy))/(xx[b]-
xx[a])

def inewton(n,x,xx,yy):
    s=yy[0] #f
    for i in range(1,n+1):
        mul=1
        for j in range(i):
            mul*=(x-xx[j])
        mul*=divdif(0,i,xx,yy)
        print("s_"+str(i)+"=\t"+str(mul))
        s+=mul
    return s

def aitken(x,xx,yy,a,b):
    f1 = yy[a] if b - a == 1 else aitken(x, xx, yy, a, b - 1)
    f2 = yy[b] if b - a == 1 else aitken(x, xx, yy, a+1, b)
    return (1/(xx[b]-xx[a])) * ((x-xx[a])*f2 - (x-xx[b])*f1)



def linSpace(a,b,s):
    x=[]
    #x.append(a)
    e=1/s
    e0=0
    while e0<=1:
        _x=round(a+(b-a)*e0,int(abs(math.log10(e))))
        #_x=a+(b-a)*e0
        x.append(_x)
        e0 += e
    return x
```

```
n = input()
for i in range(n):
    x[i]=input()
for i in range(n):
    y[i]=input()



xy = [[x[j],y[j]] for j in i]
xy.sort(key=lambda x:x[0])

x=[j[0] for j in xy]
y=[j[1] for j in xy]





xx=linSpace(x[0],x[len(x)-1],100)

#yy = [inewton(n,i,x,y) for i in xx]

plt.plot(x,y)
#plt.plot(xx,yy)
print("f(x^*)=\t"+str(inewton(n,x0,x,y)))
yy = [aitken(i,x,y,0,n) for i in xx]
print(aitken(x0,x,y,0,n-2))
#plt.rcParams['lines.linewidth'] = 2  # Синтакс 2
plt.plot(xx,yy)
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend(['initial','aitken'])
plt.show()
```