Струна с закрепленными концами $u(x,t)$, $\ 0 \le x \le L$, $\ t \ge 0$, $\ u(0,t) = u(L,t) = 0$.

начальная форма $u(x,0) = k(x)$, начальные скорости $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$
движение описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}$$

решение можно найти в форме $u(x,t) = v(x)T(t)$
$\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = T(t)v'(x)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = T(t)v''(x)$
$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = v(x)T'(t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 t} = v(x)T''(t)$

уравнение можно переписать в виде

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{v''}{v}$$

поскольку левая часть уравнения зависит только от t, а правая зависит только от x (переменные разделились), то обе функции должны быть постоянны. Из дальнейшего анализа будет видно, что постоянная должна быть отрицательной, таким образом получаем два уравнения

$v''(x) + c^2 v(x) = 0$, $\ T''(t) + a^2 c^2 T(t) = 0$
Общее решение этих уравнений можно записать в виде
$v(x) = A\cos(cx) + B\sin(cx)$, $\ T(t) = A\cos(act) + B\sin(act)$

Если бы не было ограничение на постоянную, то могло бы возникнуть уравнение
$v''(x) - c^2 v(x) = 0$
но его решения $v(x) = Ae^{cx} + Be^{-cx}$ не могут удовлетворять условию закрепленности концов струны.
Период колебаний cos и sin должен целиком укладываться в длину струны, поэтому
$c = \frac{\pi n}{L}$

Общее решение второго уравнения теперь можно записать в форме
$T(t) = A\cos(a\dfrac{\pi n}{L}t) + B\sin(a\dfrac{\pi n}{L}t)$

Таким образом получено бесконечно много решений исходного уравнения
$u_n(x,t) = (A_n\cos(a\dfrac{\pi n}{L}t) + B_n\sin(a\dfrac{\pi n}{L}t))\sin(\dfrac{\pi n}{L}x)$
Все эти решения удовлетворяют условию закрепленности струны на концах, но скорее всего не удовлетворяют начальным условиям – фора и скорости струны в начальный момент.
Отметим, что решения однородного уравнения образуют линейное пространство, поэтому любая их линейная комбинация то же является решением
$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(a\dfrac{\pi n}{L}t) + B_n\sin(a\dfrac{\pi n}{L}t))\sin(\dfrac{\pi n}{L}x)$

Остается выбрать коэффициенты так, чтобы удовлетворить начальным условиям. В начальный момент струна имеет форму

$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\dfrac{\pi n}{L} x)$
Тогда по условию
$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\dfrac{\pi n}{L} x)$
то есть A_n – коэффициенты разложения в ряд Фурье по sin функции $k(x)$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L k(x) \sin(\frac{\pi n}{L} x) dx, \ n = 1, 2, \ldots$$

Чтобы удовлетворить условия на начальные скорости
$\dfrac{\partial u}{\partial n}(x,0) = 0$
Надо вычислить частную производную

$\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{\pi n}{L}(-A_n \sin(a\frac{\pi n}{L} t) + B_n \cos(a\frac{\pi n}{L} t)) \sin(\dfrac{\pi n}{L} x)$

Следовательно
$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\dfrac{\pi n}{L} x) = 0$
значит $B_n = 0, \ n = 1, 2, \ldots$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(a\frac{\pi n}{L} t) \sin(\frac{\pi n}{L} x)$$

Задание на тройку
вычислить коэффициенты $A_n = 1, 2, 3, 4, 5$ (точность 10^{-4})
запишите (приближенное) равенств Прасеваля
Дополнительное задание
Нарисовать (на компьютере)
1) график $k(x), \ \sum_{n=1}^{5} A_n \cos(a\dfrac{\pi n}{L} t) \sin(\dfrac{\pi n}{L} x)$
2) график колебаний средины струны $\sum_{n=1}^{5} A_n \cos(a\dfrac{\pi n}{L} t) \sin(\dfrac{\pi n}{L} L/2)$
3) форму струны в момент $t = 10, \ \sum_{n=1}^{5} A_n \cos(a\dfrac{\pi n}{L} 10) \sin(\dfrac{\pi n}{L} x)$