Числовые ряды

Определение. Числовым рядом называется сумма бесконечного числа слагаемых $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$.

Числовой ряд называют <u>сходящимся</u>, если сходится последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} S_n}$

Примеры

1) $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. Если $q \neq 1$, то $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, если $q = 1$,то $S_n = n$,
если $q = -1$,то $S_{2n} = 1$, $S_{2n-1} = 0$– предела частичных сумм нет – ряд расходится.
Следовательно, ряд сходится при $|q| < 1$ ($S = \frac{1}{1-q}$)и расходится при $|q| \geq 1$.

2)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$

Замечание. Вычислить частичные суммы удается очень редко. Поэтому важно уметь оценивать сходимость ряда. Эта задача требует определенной техники и навыков. Достаточно, посмотреть на примеры $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – первый расходится, а второй сходится, хотя внешне они очень “похожи”.

<u>Теорема (необходимое условие сходимости ряда)</u>

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Доказательство. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \lim\limits_{n\to\infty} (S_{n+1} - S) + (S - S_n) = 0$.

Замечание. Ряд $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n}$ показывает, что стремление к нулю общего члена ряда недостаточно для сходимости.

Предложение. (сходимость остатков)

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Признаки сходимости положительных рядов

Здесь будут рассмотрены ряды, у которых $a_n \geq 0$

Очевидно, что у таких рядов последовательность частичных сумм возрастает. Следовательно, достаточно проверять ограниченность S_n.

<u>Теорема (признак сравнения)</u>

1) Если $b_n \geq a_n \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ так же сходится.
2) Если $a_n \geq b_n \geq 0$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ так же расходится.

<u>Следствие (мултипликативный вариант признака сравнения)</u>

Если $a_n \geq b_n \geq 0$ и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = q$ причем $0 < q < \infty$, то ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Примеры

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Достаточно доказать, что сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Положим $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Тогда $b_n \geq a_n$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+4}{n^2+1}$

Положим $a_n = \ln\frac{n^2+4}{n^2+1}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+1} = 3$, $(\ln\frac{n^2+4}{n^2+1} = \ln(1+\frac{3}{n^2+1}) \approx \frac{3}{n^2+1})$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+4}{n^2+1}$ сходится.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sin^2\frac{1}{2n}\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – ряд сходится.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

Докажем, что ряд расходится. Достаточно показать, что частичные суммы не ограничены.

$S_{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}-1}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

Заметим, что $\frac{1}{2^{k-1}-1}+\ldots+\frac{1}{2^k} > \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$

Следовательно, $S_{2^n} > \frac{n}{2}$.

5) $\sum = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right)$

Из фомулы Лагранжа легко получить, что $a_n \le \frac{1}{n^2}$ - ряд сходится.

Интересно отметить связь этого примера с предыдущим

$\sum_{n=1}^{N}a_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln(N+1) + C_N$, что дает асимптотику $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \approx \ln(N+1)$.

Покажем, что ряды тесно связаны с несобственными интегралами.

<u>Теорема (интегральный признак сходимости)</u>

Пусть $a_n \ge a_{n+1} \ge 0,\ f(n) = a_n$ и f убывает на $[1,\infty)$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство.

Функция f убывает, значит на промежутке $[n, n+1]$

$a_n = f(n) \ge f(x) \ge f(n+1) = a_{n+1}$.

Определим ступенчатую функции g и $h(x)$ равенствами

$g(x) = a_{n+1}$ на $[n, n+1]$, $h(x) = a_n$ на $[n, n+1]$

Заметим, что $h(x) \ge f(x) \ge g(x)$ и

если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то сходится $\int_1^{\infty}g(x)dx = \sum_{n=2}^{\infty}a_n$, $\int_1^{\infty}h(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$,

если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится, то $\int_1^{\infty}g(x)dx$ и $\int_1^{\infty}h(x)dx$ расходятся.

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится или расходится одновременно с обоими интегралами $\int_1^{\infty}g(x)dx$ и $\int_1^{\infty}h(x)dx$.

Остается заметить, что из сходимости $\int_1^{\infty}h(x)dx$ следует сходимость $\int_1^{\infty}f(x)dx$, а из расходимости $\int_1^{\infty}g(x)dx$ следует расходимость $\int_1^{\infty}f(x)dx$, и в обратную сторону, сходимость $\int_1^{\infty}f(x)dx$ влечет сходимость $\int_1^{\infty}g(x)dx$, а расходимость $\int_1^{\infty}f(x)dx$ влечет расходимость $\int_1^{\infty}h(x)dx$.

Примеры

1)<u>основной</u>

ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

$f(x) = \frac{1}{x^p}$, при $p \ne 1$ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p}|_1^A$, если $p < 1$, то интеграл сходится, если $p > 1$, то интеграл расходится. В случае $p = 1$ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty}\ln x|_1^A$ и интеграл расходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$ сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

$f(x) = \frac{1}{x\ln^p x}$, при $p \ne 1$ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln^p x} = \lim\limits_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}\ln^{1-p}x|_1^A$, при $p = 1$ $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim\limits_{A\to\infty}\ln\ln x|_1^A$.

Условия сходимости ряда те же, что в первом примере.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P^a(n)}{Q^b(n)}$,

$P(x) = p_m x^m + \ldots + p_1 x + p_0,\ \ p_m \ne 0, \quad Q(x) = Q_k x^k + \ldots + q_1 x + q_0,\ \ q_k \ne 0$,

$a, b \in \mathcal{R}$, сходится тогда и только тогда, когда $kb - ma > 1$.

Воспользуемся признаком сравнения. Положим $a_n = \frac{P^a(n)}{Q^b(n)}$, $b_n = \frac{(p_m n^m)^a}{(q_k n^k)^b}$.

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$ и $\sum_1^{\infty}b_n$ точностью до множителя $\frac{p_m^a}{q_k^b}$ совпадает с рядом примера (1) при $p = kb - ma$.

Замечание. Для сходящегося ряда, удовлетворяющего условиям интегрального признака, $\sum_{n=1}^{N} a_n$ и $\int_1^N f(x)dx$ могут отличаться очень сильно, но "остатки" $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ и $\int_N^{\infty} f(x)dx$ являются эквивалентными бесконечно малыми. Для расходящихся рядов бывает важно установить асимптотику стремления к бесконечности – $\sum_{n=1}^{N} a_n$ и $\int_1^N f(x)dx$ являются эквивалентными бесконечно большими.

Примеры

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad \int_k^m f(x-1)dx \geq \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{n^p} \geq \int_k^m f(x)dx$

При $p > 1$ можно оценить отклонение частичной суммы S_N от полной суммы ряда

$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \leq \int_{N+1}^{\infty} f(x-1)dx = \frac{1}{(p-1)N^{p-1}}$

При $p \geq 1$ можно оценить асимптотику роста частичных сумм. Например, для $p = 1$

$\int_2^N \frac{dx}{x-1} \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_2^N \frac{dx}{x} \to \ln(N-1) \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \geq \ln N - \ln 2.$

Признаки сходимости для рядов похожих на геометрические прогрессии

Признак Даламбера

Пусть $a_n > 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, тогда при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство.

Если $q < 1$, то из условий признака следует, что для достаточно больших n $a_n < c\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ ($\frac{1+q}{2} < 1$), следовательно ряд сходится по признаку сравнения.

Если $q > 1$, то из условий признака следует, что для достаточно больших n $a_n > c\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$ ($\frac{1+q}{2} > 1$), следовательно ряд расходится по признаку сравнения.

Признак Коши

Пусть $a_n \geq 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{1/n} = q$, то при $q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Доказательство аналогично предыдущему.

Модифицированные признаки Даламбера и Коши

Область применимости обоих признаков можно значительно расширить, заменив пределы на верхние пределы (доказательств потребует небольших технически правок). Напомним, что верхний предел $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k>n} a_k$ существует у любой последовательности.

Однако, это не делает признак универсальным. Случай $q = 1$ всегда остается неопределенным. Простые примеры показывают, что в этом случае ряд может сходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$), но может и расходится ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Примеры

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{b^n}$ $(b > 1)$ оба признака дают $q = 1/b$ – ряд сходится.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a+b^n}{n^b+a^n}$ $a, b > 1$ $q = \frac{b}{a}$ – при $b < a$ ряд сходится, при $b > a$ ряд расходится, при $b = a$ ряд расходится (общий член не стремится к нулю).

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} b^n$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} b^{n+1}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b \cdot n^n}{(n+1)^n}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{b}{e}.$

ряд сходится при $b < e$, расходится при $b > e$, случай $b = e$ остается неопределенным.

4) $b + bc + b^2c + \ldots + b^n c^{n-1} + b^n c^n + \ldots$

$a_{2n-1} = b^n c^{n-1}, \quad a_{2n} = b^n c^n, \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = b, \quad \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = c$

предела нет и "чистый" признак Даламбера не работает. Модифицированный признак дает $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \max(b, c)$. Следовательно, ряд сходится, если $\max(b, c) < 1$, и расходится, если $\max(b, c) > 1$.

Оказывается, признак Коши дает в этом случае более точную информацию

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n-1})^{1/(2n-1)} = (bc)^{1/2},\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_{2n})^{1/(2n)} = (bc)^{1/2}$
ряд сходится при $(bc)^{1/2} < 1$ и расходится при $(bc)^{1/2} > 1$, $((bc)^{1/2} \le \max(b,c))$. Заметим, что случай $bc = 1$ очень простой – общий член ряда не стремится к нулю.

Знакопеременные ряды

Поведение такого ряда может быть очень сложным.
Чтобы выделить сложные ситуации потребуется новая терминология.
Определение
Ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его членов.
Замечания
1) Для исследования ряда на абсолютную сходимость можно использовать признаки сходимости положительных рядов.
2) Если сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то сходится и $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$
3) Если сходится $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, то для любой перестановки натуральных чисел $(\phi : N \to N)$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}a_{\phi(n)}$
Определение
Ряд называется условно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, но ряд из модулей расходится.
Теперь можно пояснить, в чем состоит сложность.
Теорема Римана
Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится условно, то для любого конечного или бесконечного числа A найдется перестановка $\phi : N \to N$ такая, что $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\phi(n)} = A$.
Среди таких "плохих" рядов есть очень простые.
Определение
Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\ \ a_n > 0$ называется знакочередующимся.
Признак Лейбница
Если $a_n \ge a_{n+1}$, $a_n \to 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.
Замечание
Модуль остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена.
Примеры
1)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ – сходится условно.
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ – сходится абсолютно.

Степенные ряды

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ – степенной ряд с центром в точке x_0.
Определение
Радиусом сходимости степенного ряда называется число R такое, что при $|x-x_0| < R$ ряд абсолютно сходится, а при $|x-x_0| > R$ – ряд расходится.
Из модифицированного признака Коши легко следует:

Формула для радиуса сходимости $\quad R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|a_n|^{1/n}}$

Верхний предел существует всегда, следовательно, радиус сходимости существует для любого ряда. Но при этом он может оказаться равным нулю.
Примеры
1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n}$ – $R = a$,
2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ – $R = \infty$,
3) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n n!$ – $R = 0$.
Поведение ряда на границе сходимости может быть каким угодно

4) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ – $R=1$, в обоих граничных точках ряд расходится (общий член ряда не стремится к нулю).
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $R=1$, при $|x|=1$ ряд абсолютно сходится.
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $R = 1$, при $x = 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится, при $x = -1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ – сходится по признаку Лейбница.

Исчерпывающую информацию о числовых рядах можно найти в книге
Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2, глава 9.