Блок 3: Формула полной вероятности, формула Байеса

Задача №1:
Имеется 5 монет, среди которых: две монеты с двумя «орлами», одна – с «решками», а оставшиеся 2 – обыкновенные. Из них случайно выбирается одна монета. Последовательно вычислите следующие вероятности.

1. Какова вероятность того, что при броске монеты выпадет «орел»?
2. В результате одного броска монеты выпал «орел». Какова вероятность того, что внизу монеты тоже «орел»?
3. Производится второй бросок монеты (необходимо учесть пункты 1 и 2). Какова вероятность того, что снова выпадет «орел»?
4. В результате второго броска монеты также выпал «орел». Какова вероятность того, что внизу монеты тоже «орел»?

Задача №2: В урне содержатся 10 белых шаров, 12 – черных. Двое, по-очереди, вытаскивают без возвращения, шары из урны. Победителем признается тот, кто первым вытащит белый шар. Найти вероятности победы 1-го и 2-го игрока.
Задача №3:В урне содержатся 10 белых шаров, 10 – черных. Последовательно (4 раза), вынимается шар из случайной урны и перекладывается в другую (вероятность выбора урны – 1/2). Найти вероятность того, что все переложенные шары оказались в 1-й урне.
Задача №4: При переливании крови необходимо учитывать группу крови донора и реципиента, а также резус-фактор. Запишем эту биологическую закономерность в виде таблицы:

D/R	1-	1+	2-	2+	3-	3+	4-	4+
1-	1	0	0	0	0	0	0	0
1+	1	1	0	0	0	0	0	0
2-	1	0	1	0	0	0	0	0
2+	1	1	1	1	0	0	0	0
3-	1	0	0	0	1	0	0	0
3+	1	1	0	0	1	1	0	0
4-	1	0	1	0	1	0	1	0
4+	1	1	1	1	1	1	1	1

Здесь: столбцы – группа донора, строки – реципиента, 1 – биологическая совместимость, 0 – нет.

Статистически известно, что распределение группы крови по населению РФ задано следующей таблицей:

1+	1-	2+	2-	3+	3-	4+	4-
28%	4.9%	30%	5.8%	20%	3.2%	7%	1.1%

Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь, от случайно взятого донора.
Задача №5: Страховая компания разделяет водителей на 3 класса (естественно, что по разному тарифу): A – аккуратный водитель, B – обыкновенный, C – группа риска. Среди клиентов компании: 15% водителей группы A, 65% – группы B, 10% – C. Статистически известно, что за год водитель из группы A попадает в аварию с вероятностью 0.01, из группы B – с вероятностью 0.05, из C – 0.10. Известно, что некоторый водитель ни разу за год не участвовал в ДТП, какова вероятность того, что он из соответствующей группы? (посчитать для каждой группы)

Задача №6:В государственной думе 60% депутатов состоят в партии A. Оставшиеся – принадлежат, номинальной, парламентской оппозиции B. На голосование выдвигается законопроект от партии–большинства (очевидно, A). Статистически известно, что подобный проект будет принят представителем партии A с вероятностью 1, партии B – с вероятностью 2/3. Известно, что депутат проголосовал за, какова вероятность, что он был из оппозиции? Усложним формулировку. Известно, что депутаты группы A всегда голосуют одинаково, скажем, с вероятностью 2/3 за принятие законопроекта, вне зависимости от того, сколько раз данный закон был представлен для голосования (закон – не инициатива партии A, т.е. не обязательно голосовать за; один раз решили, и дальше мнения не меняют). Представители партии B меняют свое мнение, при каждом последующем голосовании, с вероятностью 1/2. Известно, что депутат на двух заседаниях проголосавл дважды за. Какова вероятность того, что он из соответствующей группы?
Задача №7: Имеются 2 ящика. В первом – 12 белых, 10 черных шаров, во втором – 10 белых, 12 черных шаров. Одновременно из первого и второго ящика вытаскивают по 3 случайных шара, перемеривают и возвращают по три обратно. Найти вероятность того, что в первом ящике столько же белых шаров, сколько и было до всех манипуляций.
Задача №8: Имеются 2 ящика. В первом – 10 белых, 10 черных шаров, во втором – 5 белых, 10 черных шаров. Из первого ящика вытаскивают 4 шара, затем бросают монету 4 раза, после чего перекладывают во второй столько шаров, сколько раз выпал орел. После этого из 2-го ящика вытащили 2 шара. Оба оказались белые. Найти вероятность того, что они лежали изначально во втором ящике.
Задача №9: Продавец берет у поставщика партию 1500 единиц товара. Считается, что вероятность того, что каждая единица товара бракованная независимо от других равна 0.005. Если продавец обнаруживает в партии более 3-х бракованных деталей, то вся партия возвращается поставщику. Определить вероятность того, что покупатель, приобретающий 100 единиц товара, получит не более одной бракованной.
Задача №10: Подбросили правильную игральную кость, а затем из колоды в 36 карт взяли столько карт, сколько выпало на кости. Все карты оказались бубнами. Какова вероятность того, что кость выпала единицей?
Задача №11:Правильную монету подбросили 6 раз и на каждое появление орла брали очередную карту из колоды в 52 карты. После окончания эксперимента среди выбранных карт оказалось ровно 2 туза. Какова вероятность того, что при бросании монеты появилось ровно 3 орла?
Задача №12:В одном из конвертов находятся карточки с номерами от 1 до 50, в другом – от 10 до 40 и в третьем – от 20 до 60. Случайно взяли один из конвертов и из него вытащили три карточки. Известно лишь, что все три полученных таким образом числа оказались в интервале от 21 до 30. Какой из конвертов вероятнее всего был выбран?
Задача №13:Магазин получает товар от трёх поставщиков: 55% товара поступает от первого поставщика, 10% от второго и 35% от третьего. Продукция, поступающая от первого поставщика, содержит 5% брака, поступающая от второго поставщика — 6% брака, а поступающая от третьего поставщика — 8% брака. Покупатель приобрел товар и обнаружил, что он бракован. Какова вероятность того, что он поступил в магазин от второго поставщика?
Задача №14: В урне лежат 8 цветных шаров (черные и белые, сколько каких – неизвестно). В урну добавили два белых шара. Затем вытащили 5 шаров, все оказались черные. Какова вероятность того, что в урне остались только белые шары?
Задача №15: Вы заблудились в заповеднике. Известно, что среди его обитатлей 70% туристы, 30% – местные. На вопрос о том, в какую сторону идти турист ответит правильно с вероятностью 0.9, местный – всегда соврет. Вопросы можно задавать по несколько раз одному и тому же человеку, каждый раз он будет отвечать независимо от того, что говорил ранее. Вы спрашиваете у человека, проходящего мимо, в каком направлении выход: на юг, или на север?

1. Он отвечает, что на юг. Какова вероятность, что это правильное направление?

2. Вы задаете ему еще раз тот же вопрос. Ответ – такой же. Какова вероятность, что это правильное направление?

3. В третий раз – все тоже самое.

4. А в четвертый он ответил – север. Какова вероятность, что юг – это правильное направление?

5. Предположим, что у вас есть примерное представление о том, куда надо идти. Скажем, вы уверенны, что шанс того, что юг – правильное направление, равен 60%. Каким образом на вашу уверенность повлияют ответы незнакомца (из предыдущих пунктов)?

Задача №16: Некоторым изолированным государством правит диктатор, который проводит весьма своеобразную демографическую политику. Во-первых, семьям на острове запрещено иметь больше двух детей. Во-вторых, он постановил, что каждая семья должна дать своей перворожденной дочери (одной и только одной, даже если близнецы) имя Мальвина (в честь его любимой женщины). Предполагается, что мальчики и девочки рождаются в семьях с вероятностью 1/2. Известно, что в некоторой семье есть девочка по имени Мальвина. Какова вероятность того, что в семье две девочки? Через некоторое время диктатор скончался. Его место занял его сын – "повеса". Он сотавил список из 10 имен, в который также включена Мальвина и постановил: называть первую дочь Мальвиной, а вторую – случайным именем из оставшихся (естественно, равновероятно). Какова теперь вероятность того, что в семье две девочки, если известно, что одна – Мальвина?

Задача №17: Незадолго до экзамена, студенты узнали, как связаны номера билетов и их содержимое. Они решили выучить по одному вопросу и заранее обговорили, кто какой билет будет брать. Но, когда подошла очередь тянуть билеты, первый студент взял не свой, а случайный. Все последующие студенты брали либо свой, если он есть, либо случайный, если его нет. Какова вероятность того, что последний студент возьмет свой билет, если билетов столько же, сколько и студентов?

Задача №18: Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% – государственные органы, 20% – другие банки, остальные – физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0.01, 0.05 и 0.2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Задача №19: Вероятность того, что недельный оборот торговца мороженым превысит 2000 руб., при солнечной погоде равна 80%, при переменной облачности – 50%, а при дождливой погоде — 10%. Найти вероятность того, что на следующей неделе оборот превысит 2000 руб., если вероятность солнечной погоды в данное время года составляет 20%, вероятность переменной облачности и вероятность дождливой погоды – по 40%.

Задача №20: Азартная игра устроена следующим образом: бросают монету, если выпал орел, то игрок выигрывает 1 д.е., если решка – проигрывает д.е. Игрок стартует со 100 д.е. и уходит домой, если разорится, или выйграет 1100 д.е. Какова вероятность того, что он разорится?