Линейные пространства со скалярным произведением

Определение. Линейное пространство L это множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа. При этом "обычные"свойства должны сохраняться.

Примеры. 1) многочлены, 2)непрерывные функции, 3) интегрируемые функции.

Определение. Скалярное произведение в линейном пространстве L
Для любых $x, y \in L$ определено комплексное число (x, y) так, что
1)$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$,
2)для любого комплексного числа k $(kx, y) = k(x, y)$,
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
4) для любого $x \in L$ $(x, x) \geq 0$, причем, если $(x, x) = 0$, то $x = 0$

Определение. 1) Нормой элемента называют $\|x\| = \sqrt[2]{(x, x)}$.
2) элементы называют ортогональными, если $(x, y) = 0$.

Для любых элементов $x, y \in L$ линейного пространства со скалярным произведением выполнены:
Неравенство Коши-Буняковского
$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y), \quad ((x, y) \leq \|x\|\|y\|)$.

Неравенство треугольника
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Примеры. 1) R^n: $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k, y_k$.
2) C^n: $(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k, \overline{y_k}$.
3) вещественные функции суммируемые с квадратом
$L^2[a, b] = \{f : \int_a^b f^2(x)dx < \infty\}, \quad (f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$.
4) комплексные функции суммируемые с квадратом
$L^2[a, b] = \{f : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}, \quad (f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$.

Определение. $\{e_n\}_n$ – ортогональный нормированный базис в L,если
1) $\{e_n\}_n$ линейно независимы,
2) $\{e_n\}_n$ попарно ортогональны,
3) $\|e_n\| = 1$,
4) любой $x \in L$ допускает представление $x = \sum_n x_n e_n$,
числа x_n называют коэффициентами разложения элемента x по базису $\{e_n\}_n$

Замечание. 1) Сходимость ряда означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число K такое, что для любых $N,\ M > K$ $\|\sum_{n=N}^M x_n e_n\| < \varepsilon$. Свойства базиса $\{e_n\}_n$ позволяют показать,что $\|\sum_{n=N}^M x_n e_n\|^2 = \sum_{n=N}^M x_n^2$.
2) Алгоритм Грама-Шмидта ортогонализации произвольной системы элементов гарантирует существование ортогонального нормированного базиса в любом линейном пространстве со скалярным произведением.

Свойства ортогонального разложения
1) метод вычисления коэффициентов $x_n = (x, e_n)$,
2) равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum_n x_n^2$
3) экстремальное свойство ортогональных разложений $\|x - \sum_{n=1}^N x_n e_n\| \leq \|x - \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n\|$ для любых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Ряды Фурье. Гармонический анализ

Можно привести сколько угодно примеров пространств со скалярным произведением и ортогональными базисами. Важный класс таких примеров доставляют самосопяженные линейные операторы (это линейные операторы $A : L \to L$, для которых справедливо равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$). Известно, что собственные элементы ($Ae_n = \lambda_n e_n$) таких операторов попарно ортогональны. Следовательно, если $x = \sum_n x_n e_n$, то $Ax = \sum_n \lambda_n x_n e_n$. Ряды Фурье – один из таких примеров. Они возникают при рассмотрении оператора $Af = f^{(2)}$ в пространстве $L^2[a, b]$. Технически удобно рассматривать $a = -\pi$, $b = \pi$. Легко проверить, что в этом случае собственными числами являются все целые отрицательные числа и функции $\sin kx$, $\cos kx$ соответствующие собственные функции. Ортогональность этих функций означает, что $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = 0$ (в последних двух интегралах числа k и m должны быть различны). Эти соотношения легко проверяются вычислением интегралов. Что бы выполнялось условие нормировки, надо подправить скалярное произведение $(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$. Что бы получить базис, надо добавить к этим функциям единицу (теорема Вейрштраса). Свойства ортогональности сохраниться, а что бы добиться условие нормировки, надо заменить единицу на $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом система функций $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin kx$, $\cos kx$, $\quad k \in N$ образует ортогональный нормированный базис в $L^2[-\pi, \pi]$.

Задача. Проверьте, что все элементы базиса попарно ортогональны.

Ряды Фурье исторически первый пример ортогонального разложения. Он возник в конце 18 века в работах, посвященных колебаниям струны, и не имел под собой никаких обоснований, кроме интуитивной уверенности, что в таком виде можно решить задачу. В начале 19 века Фурье нашел простой метод вычисления коэффициентов, и за рядами закрепилось его имя. Терминология: скалярное произведение, самосопряженный оператор – появилась только в 20 веке и позволила значительно расширить понятие ряда Фурье.

Параллельное название гармонический анализ пришло из возникли, где периодические колебания принято называть гармоническими. Поскольку функции синус и косинус являются периодическими, то функцию, представленную рядом Фурье можно продолжить на всю прямую, как периодическую (с периодом $b - a$). Случай произвольных a и b сводится к случаю $a = -\pi$, $b = \pi$ простой заменой переменных.

Стандартная запись ряда Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Знак $\sim$ означает, что ряд не обязательно сходится к значению функции в точке. Из свойств ортогональных нормированных базисов следует только равенство

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - (\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \sin kx))^2 dx = 0.$$

но это не гарантирует равенства в каждой точке. Например, функция f

$$f(0) = 1, \quad f(x)0, x \neq 0$$

имеет норму равную 0, хотя не равна 0 в каждой точке.

Задача. Проверьте правильность записи первого слагаемого ряда Фурье. Указание: коэффициент a_0 вычисляется по "неправильной" формуле.

Перепишем свойства ортогональных разложений применительно к рядам Фурье:
1) метод вычисления коэффициентов

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

2) равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

3) экстремальное свойство ортогональных разложений

$$\min\{\int_{-\pi}^{\pi}(f^2(x) - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{N}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx))\,dx : \alpha_k, \beta_k\} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}(f^2(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{N}(a_k\cos kx + b_k\sin kx))\,dx$$

Техника вычисления и другие формы записи рядов Фурье

1) Если f четная, то $b_n = 0$.
2) Если f нечетная, то $a_n = 0$.
3) Если f π-периодическая, то $a_{2n+1} = b_{2n+1} = 0$. $(f(x) = f(x+\pi), \sin(2n+1)x = -\sin((2n+1)(x+\pi)))$
4) разложение функции f, заданной на промежутке $[0,\pi]$ по sin
подразумевается нечетное продолжение функции на промежуток $[-\pi, 0]$ и далее стандартное разложение

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

аналогично определяется разложение по cos.
5) другая форма записи – амплитуда, частота , фазовый сдвиг – $a_k\cos kx + b_k\sin kx = A_k\cos(kx - \phi_k)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(kx - \phi_k)$$

6) комплексная форма записи: $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$,$\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$,

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = (f, e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx$$

Система экспонент $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ образует ортогональный нормированный базис, если исправить скалярное произведение $(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.
спектр функции $sp(f)=\{k: c_k\neq 0\}$.
7) функции f с произвольным периодом T на промежутке $[a,a+T]$
скалярное произведение $(f,g)=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\overline{g(x)}dx$
ортогональный нормированный базис $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\frac{2\pi x}{T},\sin\frac{2\pi x}{T},\dots,\cos\frac{2\pi kx}{T},\sin\frac{2\pi kx}{T},\dots\}$,

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{2\pi kx}{T}+b_k\sin\frac{2\pi kx}{T})$$

здесь $a_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{2\pi kx}{T}dx$, $b_k=\frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{2\pi kx}{T}dx$.

Оценка коэффициентов Фурье гладких функций

1) Необходимым условием сходимости разложения по ортогональному нормированному базису является стремление коэффициентов к нулю. Это следует из равенства Парсеваля.

С повышением гладкости функции скорость стремления к нулю увеличивается. Что бы увидеть это, достаточно заметить связь между коэффициентами Фурье функции и ее производной.

2) Если f,$f^{(r)}\in L^2(-\pi,\pi)$, то для коэффициентов Фурье функции f выполняются соотношения $a_n=o(\frac{1}{n})$,$b_n=o(\frac{1}{n})$,$c_n=o(\frac{1}{n})$. Достаточно доказать утверждение для $r=1$. Коэффициенты Фурье функции f c_n легко связать с коэффициентами Фурье для производной, что и даст нужное соотношение.

Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке

Пример функции $f(x)=x$, $-\pi<x\leq\pi$ показывает,что частичные суммы $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$ не всегда сходятся к значению функции в точке: $f(\pi)=\pi$, $S_N(\pi)=0$. Для выяснения вопроса о точечной сходимости удобно воспользоваться интегральным представлением частичной суммы.

Формула Дирихле

$$S_N(x)=\tfrac{a_0}{2}+\textstyle\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$
$$=\tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(x-t))dt=\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{\sin((N+1/2)(x-t))}{2\sin((x-t)/2)}-\frac{1}{2}\right)dt$$

Здесь второе равенство получается, если заменить коэффициенты на их выражения через интеграл, поменять порядок интегрирования и суммирования и затем провести тождественные преобразования. Третье равенство основано на соотношении $\cos\alpha=Re(e^{i\alpha})$, после этого сумма вычисляется, как геометрическая прогрессия.

Функция, возникшая под интегралом играет очень важную роль и имеет свое название.

функция Дирихле $D_N(x)=\frac{\sin((N+1/2)x)}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}$

В дальнейшем будет необходимо использовать модифицированные варианты формулы $S_N(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)D_N(t)dt$

$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-t)+f(x+t))D_n(t)dt$

Свойства функции Дирихле

1) периодическая, четная.
2) нормированная $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1$
3) значение в нуле $D_N(0) = N$ (большое)
4) сосредоточена в нуле $\forall\ \varepsilon, \delta > 0\ \exists\ N\ \ \int_{\delta}^{\pi} D_N(t)dt < \varepsilon$.

Эта функция похожа на δ-функцию

Нам потребуется следующее важное свойство интегралов
Теорема о быстро осцилирующей функции
Если $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$, то $\lim\limits_{A\to 0}\int_a^b f(x)\cos Axdx = 0$
При больших A волны косинуса превратятся в узкие пики, площади подграфиков в области двух соседних пиков взаимно уничтожаться.

Теперь можно сформулировать еще одно свойство функции Дирихле

Принцип локализации
Если $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2dx < \infty$, то $\forall\ \varepsilon, \delta > 0\ \exists\ N\ \ \left|S_N(x) - \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)D_N(t)dt\right| < \varepsilon$
Вне окрестности нуля функция $|f(x-t)/\sin t/2|$ интегрируема, сомножитель $\sin((N+1/2)x)$ обеспечивает быструю осциляцию. Следовательно интегралы "по крыльям" дают малый вклад.

Следствие модификация формулы Дирихле

$S_N(x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\frac{\sin Nt}{t}dt + o(1),\ \ \delta \to 0/$

Эта формула позволяет легко доказать следующий достаточное условие сходимости ряда Фурье в точке.

Признак Дини

Пусть $f(t) = f(t+2\pi),\ \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt < \infty$. Если в точке x выполнено неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x-t)-f(x+t)|}{|t|}dt < \infty,\ \text{то}\ \lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x).$$

Модификация формулы Дирихле сводит все к теореме о быстро осцилирующей функции. Условие признака гарантирует, что множитель "вне осциляции" суммируем.

Признак Дирихле

Если функция f непрерывна на $[-\pi.\pi]$, кроме конечного числа точек разрыва первого рода, и имеет на этом промежутке конечное число точек экстремума, то

$$\text{в точках непрерывности } \lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x),$$

$$\text{а в точках разрывов } \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \tfrac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)).$$

Доказательство проходит как и для признака Дини. "Не достающее " условие из признака Дини компенсируется тем, что из условий признака следует ограниченность функций и ее локальная монотонность.

При использовании аппроксимаций функций частичными суммами рядов Фурье необходимо учитывать особенности поведения частичных сумм в окрестности точки разрыва первого рода (явление Гибса). Если величина скачка в точке разрыва равна Δ, то любая частичная сумма перед тем как пройти точку разрыва отклонится от графика функции на величину $\Delta/10$.

Интеграл Фурье. Гармонический анализ

Интегралом Фурье называют обобщение ряда Фурье на случай не периодической функции. Возможность такого обобщения гарантирует принцип локализации.

Пусть f функция на вещественной прямой и $\int_R |f(x)|dx < \infty$. Положим $f_*(x) = f(x),\ |x| < \pi,\ f(x+2\pi) = f(x)$. Тогда

$$S_N(x, f_*) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_N(t)dt$$

по принципу локализации

$$S_N(x, f_*) = \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x-t)\frac{\sin Nt}{t}dt + o(1)$$

применим принципу локализации “в другую сторону”

$$S_N(x, f_*) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin Nt}{t}dt + o(1)$$

Можно показать, что заменив целые частоты N на вещественные $\omega \in R\omega > 0$, мы сможем для хороших точек доказать аналог признака Дирихле

$$f(x) = \lim_{\omega\to\infty} S_\omega(x),\ \text{где } S_\omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\frac{\sin \omega t}{t}dt$$

Аналог частичных сумм получен, но аналога коэффициентов пока нет. Простые преобразования позволяют их обнаружить. Заметим, что $\frac{\sin \omega t}{t} = \int_0^\omega \cos \alpha t\ d\alpha$. Подставим это выражение в интеграл и переставим порядок интегрирования

$$S_\omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\cos \alpha t\ dt\ d\alpha$$

сделаем замену так, что бы под интегралом оказалось выражение $f(t)\cos\alpha(x-t)$ и проведем тождественные преобразования

$$S_\omega(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t\ dt\right) d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^\omega \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha t\ dt\right) d\alpha.$$

$$a(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos \alpha t\ dt\ \ \text{косинус-преобразование Фурье,}$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin \alpha t\ dt\ \ \text{синус-преобразование Фурье.}$$

В хороших точках

$$f(x) = \int_0^\infty (a(\alpha)\cos\alpha x + b(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha.$$

$$\text{спектр функции } sp(f) = \{\alpha : |a(\alpha)| + |b(\alpha)| \neq 0\}.$$

Комплексная форма записи преобразования Фурье

$$\text{интеграл Фурье } \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx.$$

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2}(a(\omega) - ib(\omega)), \quad sp(f) = \{\omega : \widehat{f}(\omega) \neq 0\}.$$

Равенство Планшереля (аналог равенства Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega.$$

Примеры

1) импульс $f(x) = 1,\ |x| \leq a,\ f(x) = 0,\ |x| > a \rightarrow\ \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \omega a}{\omega}$
Замечание. Длительность импульса $2a$, ширина спектра (множество, на котором "сосредоточена" большая часть $\widehat{f}$) $\frac{2\pi}{a}$ – расстояние между ближайшими к нулю корнями $\widehat{f}$(см. график).Произведение длительности импульса не ширину спектра равно 4π – оказывается это универсальное верно для всех функций. Оно называется принцип неопределенности.
2) "собственная функция" преобразования Фурье.

$$f(x) = e^{-x^2/2}\ \rightarrow\ \widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2/2}$$

Применение преобразования Фурье(Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. Том 2 М.1988.)

1) модель линейного преобразователя сигналов $A : f \rightarrow h$. Известно, что если такой преобразователь инвариантен по времени ($h(t) = Af(t) \ \rightarrow\ h(t + t_0) = Af(t + t_0)$) и является причинным ($f(t) = 0,\ t < 0\ \rightarrow\ h(t) = 0,\ t < 0$), то его импульсная функция $g(t)$ (отклик на узкий импульс с площадью 1) позволяет полностью описать поведение преобразователя – отклик равен свертке входного сигнала с импульсной функцией

$$h = f * g,\ \text{определение свертки } f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1)g(t - t_1)\, dt_1.$$

Вычислять свертку трудно, и здесь очень полезно использовать следующее свойство свертки

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

2) теорема отсчетов: реализация идеи о том, что если $\widehat{f}(\omega)$ мала вне $|\omega| < A$, то $f(t)$ мало меняется на отрезках длины меньше $\frac{\pi}{A}$ и сигнал можно восстановить по системе отсчетов $\{f(nT); n \in Z\}$.

Теорема отсчетов
(Коши 1840, Найквист 1925, Котельников 1930, Габор 1946, Шенон 1948)

Если $\widehat{f}(\omega) = 0,\ |\omega| > A,\ T < \frac{\pi}{A},$ то

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{T}{\pi}\frac{\sin(\frac{\pi}{T}(t - Tn))}{t - Tn}.$$