Функциональный анализ

Лектор Широков Николай Алекеевич

Кафедра Алгоритмической математики

ВВЕДЕНИЕ

Основной способ развития математики – обобщение. Немецкому математику Леопольду Кронекеру принадлежат слова: «Бог создал натуральные числа, а всё прочее — дело рук человеческих». Функциональный анализ – типичный пример такого способа развития. В начале XX века стало заметно, что накопившиеся математические знания, формально относящиеся к разным ее областям, часто имеют между собой много общего. Была создана необходимая база и сформировалось понимание того, что нужно рассматривать функции, действующие на множестве функций так же, как ранее рассматривались функции, заданные на множестве чисел. Идея не была абсолютно новой, уже давно математики работали с функциями нескольких переменных, т. е. с функциями, заданными на векторах. Особое место здесь занимали простые, но важные объекты – линейные функции. Работа с ними, сильно отличающаяся от работы с функциями общего вида, и сформировала аппарат линейной алгебры. Этот раздел математики выделялся своей «законченностью» (возможностью за конечное число шагов получить ответ на поставленный вопрос), и естественно он оказался очень востребованным в формировании математических моделей самых разнообразных процессов. Возникало желание (у математиков) и необходимость (у тех, кто использовал этот аппарат) «перейти к пределу» – допустить к рассмотрению векторы с бесконечным числом компонент, а затем заменить их на функции. Существует множество ситуаций, где такие переходы естественны и необходимы.

Самым простым и убедительным примером подобного обобщения является скалярное произведение – удобный технический аппарат, отвечающий за геометрию конечномерного пространства:

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n),\ \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n),\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}.$$

Если необходимо вычислить энергию периодического сигнал $f(x)$ по его разложению в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, достаточно вычислить скалярное произведение бесконечного вектора $\vec{c} = (c_n)$ на себя

$$(\vec{c}, \vec{c}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n \overline{c_n} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Равенство Парсеваля утверждает, что ту же энергию можно вычислить и другим способом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Это наблюдение дает основание для определения скалярного произведения на множестве 2π-периодических функций

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

В итоге оформилась новая математическая дисциплина – функциональный анализ. Объектами ее исследований стали нормированные линейные пространства и действующие на них линейные операторы. Желание работать с бесконечномерными объектами не позволяет содержательно рассматривать нелинейные операторы, но большое количество важных задач, которые удалось решить с использованием функционального анализа, более чем оправдывают его существование.

ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение 1.1. Множество X называется *линейным пространством* над полем K, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x, y множества X ставится в соответствие третий элемент этого множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый символом $x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу x множества X и любому элементу λ поля K ставится в соответствие элемент u этого множества, называемый произведением элемента x на элемент (число) λ и обозначаемый символом λx.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

1) $x + y = y + x$ (*коммутативность*);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);

3) существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ (для любого x);

4) для каждого элемента x существует противоположный элемент $x' \in X$ такой, что $x + x' = 0$;

5) $1 \cdot x = x$, где 1 – единица поля K;

6) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x, \;\; \lambda, \mu \in K$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \;\; \lambda, \mu \in K$;

8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \;\; \lambda \in K$.

Структура линейного пространства однако слишком бедна – в ней нельзя совершать предельные переходы, поэтому здесь всегда будут рассматриваться линейные пространства, снабженные нормой.

Определение 1.2. Нормой в линейном пространстве X называется любая функция, отображающая пространство X в множество вещественных неотрицательных чисел $x \to ||x||$ такая, что

1) для любого $x \in X$ и для любого $k \in K$ выполнено равенство $||kx|| = |k| \cdot ||x||$;
2) для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$;

3) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||x|| \geqslant 0$, причем равенство $||x|| = 0$ возможно только для $x = 0$.

Норма позволяет измерять расстояние $||x - y||$ между парой элементов линейного пространства $x, y \in X$. Следовательно, можно говорить о пределах последовательностей $x_n \in X : x_n \to x_0$, если $||x_n - x_0|| \to 0$.

Пример 1.1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, конечно, образует линейное пространство над $\mathbb{Q}$. Оно является полем, и в качестве коэффициентов можно взять сами элементы того же пространства. Но надо понимать, что говорить о сходимости по норме можно только, когда известен элемент $x_0 \in X$. По этой причине последовательность рациональных чисел, сходящуюся, скажем, к числу $\sqrt{2}$, нельзя назвать сходящейся в смысле нашего определения, так как предельный элемент не является элементом исходного пространства.

Чтобы облегчить операции с предельными переходами, вводится понятие фундаментальной последовательности.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall\, n, k > N \quad \|x_n - x_k\| < \varepsilon.$$

Определение нормы допускает множество реализаций в одном и том же линейном пространстве, что на первый взгляд представляется излишним, однако решение задачи может быть значительно упрощено за счет введения подходящей нормы. Точнее говоря, трудности решения задачи могут быть переведены в трудности работы с определением. Главным достоинством такого подхода является то, что решение становится более прозрачным, благодаря хорошему структурированию.

Рассмотрим примеры нормированных пространств над полем $\mathbb{R}$, часто используемых в решении разнообразных задач. На этих примерах хорошо видна схема обобщения понятий, типичная для функционального анализа.

Пример $l_n^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = |x_1| + \ldots + |x_n|\}$

Пример $l_n^2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\}$

Пример $l^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \sup\{|x_k|, k = 1, \ldots, n, \ldots\} < \infty\}$

Необходимо проверить что введенные в примерах функции являются нормами – удовлетворяют свойствам, перечисленным в определении. Первое и третье свойства очевидны. Проверка неравенства треугольника в первом и третьем примерах переводится на координаты и сводится к числовым неравенствам

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|, \quad \max\{|a|,|b|\} \leqslant |a|+|b|.$$

Неравенство треугольника в l^2 легко вывести из неотрицательности нормы (свойство 3):

$$0 \leqslant ||x-\lambda y||^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_k-\lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Из неотрицательности квадратного трехчлена следует, что его дискриминант меньше либо равен 0. Это дает оценку (неравенство Коши–Буняковского)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

$$\|x+y\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 = (\|x\|+\|y\|)^2.$$

Переход к бесконечной размерности вносит в работу с таким объектами большие трудности. Например, приходится заменять максимум на супремум, так как бесконечная последовательность может не достигать максимума (например, $x_n = (n-1)/n$), в то время как точная верхняя граница sup существует у любой ограниченной последовательности. Этот факт – простое следствие аксиомы вложенных промежутков. Напомним определение:

$$A = \sup\{x_n\}, \text{ если } \forall\, n \;\; x_n \leqslant A \text{ и } \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n : A - x_n < \varepsilon.$$

Еще одно отличие заключается в том, что эти пространства существенно различаются по составу элементов: если $x = (1, \dots, 1, \dots)$, то $x \in l^\infty$, но $x \notin l^1$, $x \notin l^2$; если $x = (1, 1/2, \dots, 1/n, \dots)$, то $x \in l^2$, но $x \notin l^1$.

Как было отмечено ранее, появление нескольких норм в одном линейном пространстве оправдывается тем, что норма может быть приспособлена к решению конкретной задачи. Оказывается, что все возможные нормы можно описать в геометрических терминах – они соответствуют выпуклым множествам, для которых 0 является внутренней точкой.

Определение 1.4. Пусть W – выпуклое множество и 0 является его внутренней точкой. *Нормой Минковского*, порожденной множеством W, называется

$$||x|| = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}.$$

$!x \in W$

$\longrightarrow$

$-x \in W$

Определение 1.5. *Выпуклым телом* называется выпуклое множество W, в котором существует такая точка w, что для любого $x \in X$ найдется число $\varepsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\varepsilon(x); \varepsilon(x))$.

Теорема 1.1 (Минковского). Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой, то выражение $||x|| = \inf\left\{\lambda : \dfrac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}$ задает норму в пространстве X. $x \in W \Rightarrow -x \in W$

Доказательство. Будет доказано только первое утверждение, так как второе легко выводится из свойств нормы.

Проверим, что $||x||$ удовлетворяет всем свойствам нормы. Однородность ($||kx|| = |k| \cdot ||x||$) и неотрицательность очевидны. Из ограниченности W следует, что норма равна нулю только для нулевого элемента.

Остается проверить неравенство треугольника $||x_1+x_2|| \leqslant ||x_1||+||x_2||$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем числа r_1, r_2 так, что $||x_k|| \leqslant r_k \leqslant ||x_k|| + \varepsilon$. Заметим, что $\dfrac{x_k}{r_k} \in W$ и положим $r = r_1 + r_2$. В силу выпуклости множество W содержит отрезок $\frac{t}{r}\cdot\frac{x_1}{r_1}+\frac{1-t}{r}\cdot\frac{x_2}{r_2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Полагая $t=r_1$, получим $\frac{x_1+x_2}{r}\in W$. Следовательно, $||x_1+x_2||\leqslant r=r_1+r_2\leqslant ||x_1||+||x_2||+$ $+2\varepsilon$ и в силу произвольности выбора ε получаем $||x_1+x_2||\leqslant ||x_1||+||x_2||$. ■

Пример $l^p=\{x=(x_1,\dots,x_n,\dots):||x||=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}<\infty\}$, $1\leqslant p<\infty$, $x_n\in\mathbb{R}$.

Еще одно важное семейство пространств возникает из предыдущего примера благодаря переходу от последовательностей к функциям.

Определение 1.6. $L^p(a,b)$ – это пространство функций f, для которых $|f(x)|^p$ интегрируема на интервале (a,b), т. е.

$$L^p(a,b)=\left\{f(x):||f||_p=\left(\int\limits_a^b|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<\infty\right\},\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Определение 1.7. $L^\infty(a,b) = \left\{ f(x) : ||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \right\}.$

Подтверждением естественности последнего определения является следующее равенство:

$$||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p.$$

Несмотря на внешние аналогии, определение нормы в пространствах $L^p(a,b)$ требует существенной доработки. Дело в том, что введенные «кандидаты» на норму в пространствах $L^p(a,b)$ не удовлетворяют третьему свойству нормы. Действительно, функция, определенная равенствами $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 1$, $f(x) = 0$, $x \neq \dfrac{a+b}{2}$, не является нулевой, однако, $||f||_p = 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $||f||_\infty = 1$. Это, в частности, «опровергает» утверждение задачи, предложенной ранее. Избежать этой неприятности в рамках существующих определений невозможно. Выход состоит в том, что надо изменить точку зрения на функции, Еще одна, правда, меньшая трудность связана с желанием сохранять справедливым неравенство треугольника. Для $p = 1$ и $p = \infty$ неравенство проверяется непосредственно, для $p = 2$ проходит та же схема доказательства через неравенство Коши–Буняковского. Для остальных p требуется новое доказательство. Здесь возникает еще одно подтверждение естественности определений $L^p(a,b)$ пространств. Аналогом неравенства Коши–Буняковского оказывается *неравенство Гельдера*. Точнее, неравенство Гельдера обобщает неравенство Коши–Буняковского, реализуя переход от $p = 2$ к $1 \leqslant p < \infty$. Это неравенство позволяет доказать неравенство треугольника в пространствах $L^p(a,b)$, но только этим значение неравенства Гельдера не ограничивается. Главное его значение – в выявлении связи между парами пространств с индексами, удовлетворяющими соотношению $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Значение этой связи настолько велико, что пару пространств $L^p(a,b)$ и $L^q(a,b)$ называют *двойственными* пространствами.

Предложение 1.1. Пусть p и q – вещественные числа, большие единицы и такие, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых чисел a и b справедливо неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = x^m - mx$, $x > 0$, $0 < m < 1$. Так как $\varphi'(x) = m(x^{m-1} - 1)$, то $\varphi(1) \geqslant \varphi(x)$ при всех положительных x. Последнее неравенство можно переписать в виде $x^m - 1 \leqslant m(x-1)$. Положим теперь $m = \frac{1}{p}$, $x = \frac{|a|^p}{|b|^q}$.

Тогда $|a| \cdot |b|^{-q/p} - 1 \leqslant \dfrac{|a|^p|b|^{-q} - 1}{p}$. Если домножить неравенство на $|b|^q$ и учесть, что $q - \dfrac{q}{p} = 1$, то получится требуемое неравенство. ■

Следствие 1 (дискретное неравенство Гельдера):

$$\sum_n |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_n |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Для нулевых последовательностей оценка очевидна. Далее считаем, что обе последовательности не нулевые. Положим $A^p = \sum\limits_n |x_n|^p$, $B^q = \sum\limits_n |y_n|^q$, $x_n' = \dfrac{x_n}{A}$, $y_n' = \dfrac{y_n}{B}$. Неравенство из предложения дает $\left|x_n' y_n'\right| \leqslant \dfrac{|x_n'|^p}{p} + \dfrac{|y_n'|^q}{q}$. Суммируя неравенства, получим $\sum\limits_n \left|x_n' y_n'\right| \leqslant \dfrac{1}{p} \sum\limits_n \left|x_n'\right|^p + \dfrac{1}{q} \sum\limits_n \left|y_n'\right|^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Следовательно, $\sum\limits_n |x_n y_n| \leqslant AB$. ■

Аналогично доказывается и следствие 2.

Следствие 2 (неравенство Гельдера для функций):

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

Здесь $f \in L^p(a, b)$ и $g \in L^q(a, b)$.

Еще один пример – пространство непрерывных функций на отрезке.

Определение 1.8. $C[a, b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке: $[a, b]$ с нормой $||f|| = \max\{|f(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Проверьте, что это равенство задает норму.