Описание дз 2 –мера и интеграл

Мера на отрезке $[a, b]$ порожденная *возрастающей* функцией $F(x)$

Схема построения меры та же, что для меры Лебега

мера открытх интервалов $m_F((c, d)) = F(d-0) - F(c+0)$

если $F(x)$ непрерывна, то концы интервала не влияют на меру

$m_F([c, d]) = m_F((c, d)) = F(d) - F(c)$ –как у меры Лебега

но если у функции есть разрыв

$F(d-0) = p_1 < F(d) = p_2 < F(d+0) = p_3$

то определение надо уточнять

рассмотрим несколько ситуаций, исходя из того, что мера Лебега является непрерывной

$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset \dots, \ E = \bigcup_1^\infty E_n \ (OR \ \bigcap_1^\infty E_n) \ \to \ m_F(E_n) \to m_F(E)$

1) $E = (c, d], \ E_n = (c, d - 1/n), \ E = \bigcup_1^\infty E_n, \ m_F(E_n) = F(d - 1/n) - F(c + 0) \to F(d - 0) - F(c + 0) = p_1 - F(c + 0)$

2) $E = (c, d], \ E_n = (c, d + 1/n), \ E = \bigcap_1^\infty E_n, \ m_F(E_n) = F(d + 1/n) - F(c + 0) \to F(d + 0) - F(c + 0) = p_3 - F(c + 0)$

заметим, что значение функции в точке разрыва не играет роли

для определенности будем считать, что

$F(d-0) = F(d) \leq F(d+0)$

а от условия непрерывности придется отказаться

$m_F((c,d)) = F(d-0) - F(c+0) = F(d) - F(c+0)$

$m_F((c,d]) = F(d+0) - F(c+0) = F(d+0) - F(c+0)$

это модификация определения, существенная только в точках разрыва

Условия задания

f – кусочно-линейные неубывающая непрерывная функции, заданная значениями на концах интервалов

g – кусочно-постоянная неубывающая функция, заданные значениями на концах интервалов постоянства

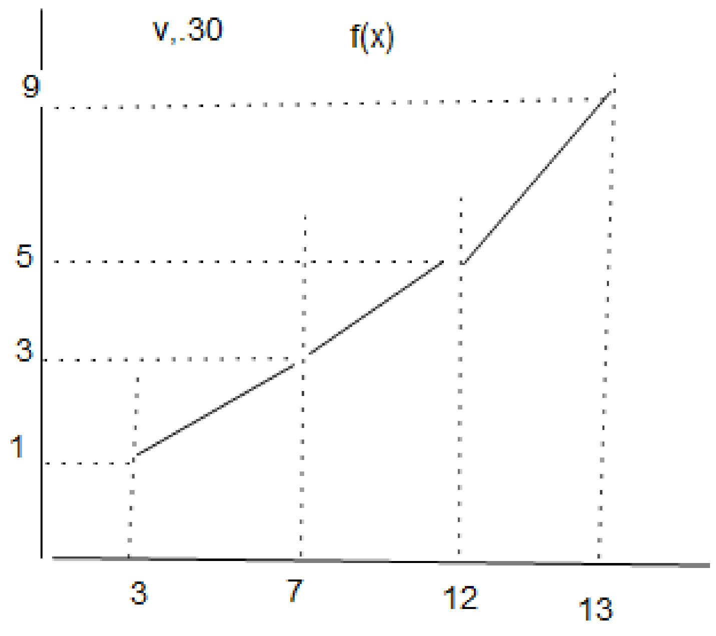
в точках разрыва

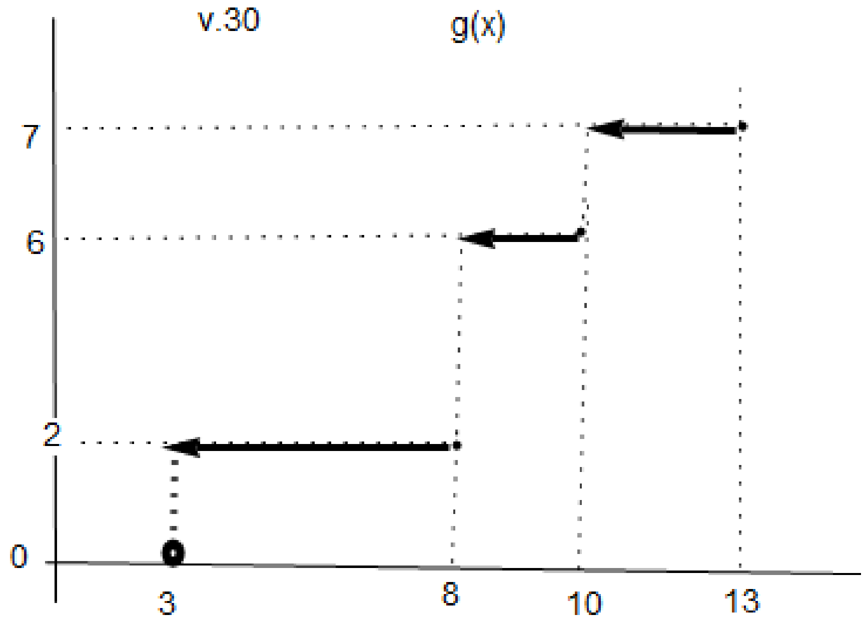
$$g(d-0) = g(d) < g(d+0)$$

например:

$$f(3) = 1,\ f(7) = 3,\ f(12) = 4,\ f(13) = 9$$

$$g(3) = 0,\ g(8) = 2,\ g(10) = 6,\ g(13) = 7$$





Вопросы задания

1) обозначим через m – меру Лебега, и
через δ_a – дельта меру – единичную нагрузку в точке a

$$\delta_a(E) = 1, a \in E, \quad \delta_a(E) = 0, a \notin E$$

подберите коэффициенты β_i так,
чтобы для любого измеримого множества A
$m_g(A) = \sum_i \beta_i \delta_{a_i}(A)$

Подсказка. $\int f(x) d\delta_a = f(a)$

2) $\int f(x)dm_g =?$

Подсказка. $\int f(x)d\delta_a = f(a)$

3) проведите аналогичное описание меры m_f $\; m_f(A) = \sum_i \alpha_i m(A \cap B_i)$

Подсказка. $x \in [7,12] \to f(x) = k\ x + b \to$
$\forall (c,d) \subset [7,12]\ m_f((c,d)) = f(d) - f(c) = k\ (d-c) = k\ m_{\mathbf{L}}((c,d))$
$\forall E\ E = (E \cap [3,7)) \cup (E \cap [7,12)) \cup (E \cap [12,13))$

4) $\int g(x) dm_f =?$

Подсказка. $\forall (c,d) \subset [7,12]$ если $g|_{(c,d)} = const$
$\int_{(c,d)} g(x) dm_f = \int_{(c,d)} \; const \; dm_f = const \; (f(d) - f(c))$
$x \in [7,12] \to f(x) = k \; x + b \to f(d) - f(c) = k \; (d - c) = k \; m_{\mathbf{L}}((c,d))$

5) подберите постоянные c_1, c_2 так, что

$\forall E : c_1 m(E) \leq m_f(E) \leq c_2 m(E), \; (??m_g)$

6) опишите все множества A такие, что $m_g(A) = 0$

7) вычислите норму функции f в пространстве $L^\infty([a,b], m_g)$

Подсказка. $||f||_\infty = \sup_E(\sup_x(|f(x|;\ x \in E) : m_g(E) = 0) = \ldots$ см.(6)
8) вычислите квадрат нормы функции g в пространстве $L^2([a,b], m_f s)$ см.(4)