Норма линейного оператора

$$A : X \to Y \quad ||A|| = \sup(||Ax||_Y : \ ||x||_X = 1)$$

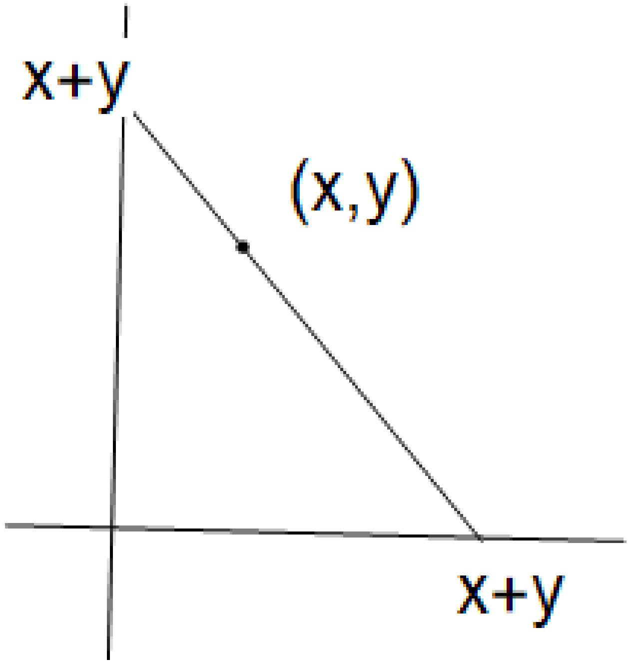
Вычислить норму оператора обычно трудно, поэтому приходится ограничиваться оценкой нормы.
Для получения таких оценок можно воспользоваться переходом к другой норме (легче поддающуюся вычислению) при условии, что нормы эквивалентны

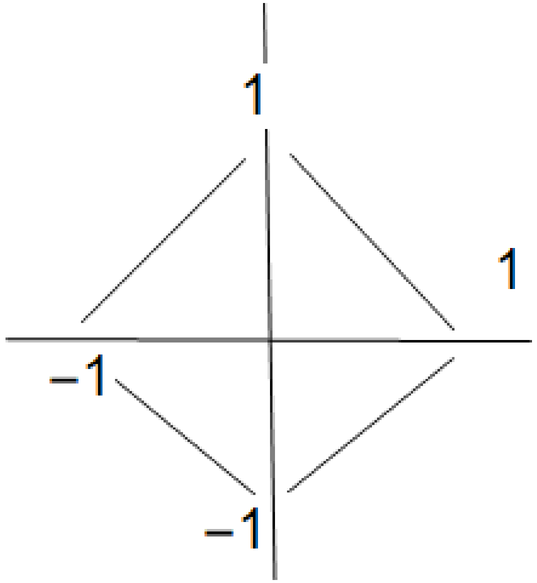
$$c_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq c_2||x||_1$$

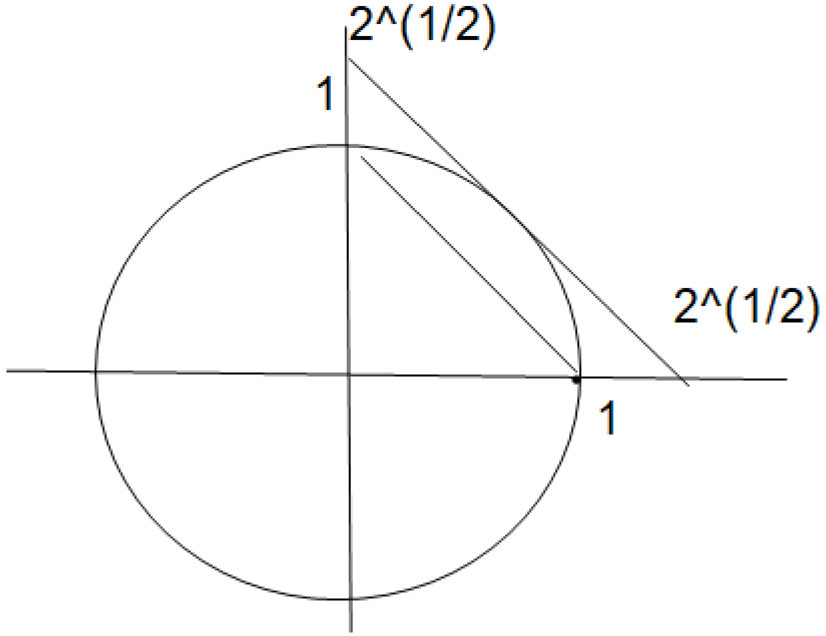
$$c_1 \leq \min(||x||_2 : ||x||_1 = 1), \quad c_2 \geq \max(||x||_2 : ||x||_1 = 1)$$

Примеры на плоскости – сферы и эквивалентность норм

$$1) l_2^1 \ ||(x,y)||_1 = |x| + |y|$$



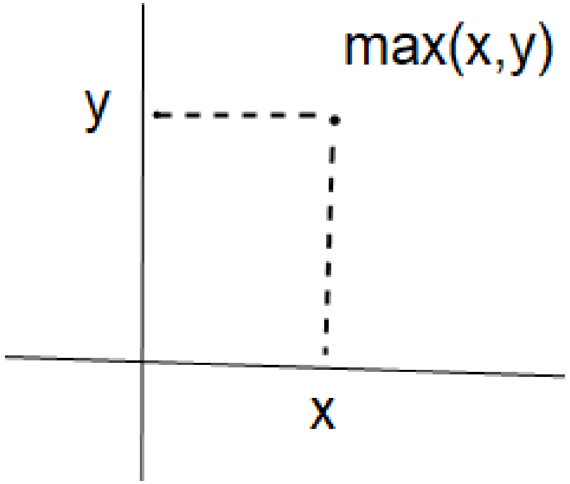


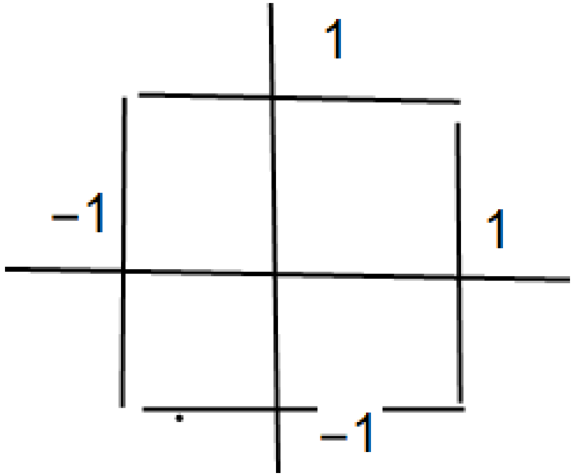


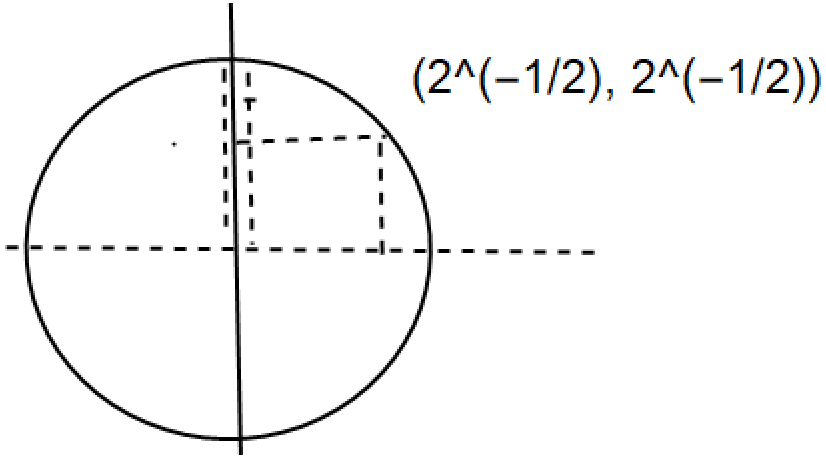
$$||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{2}||x||_2$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq ||x||_1$$

$$||(x,y)||_\infty = \max(|x|,\ |y|)$$

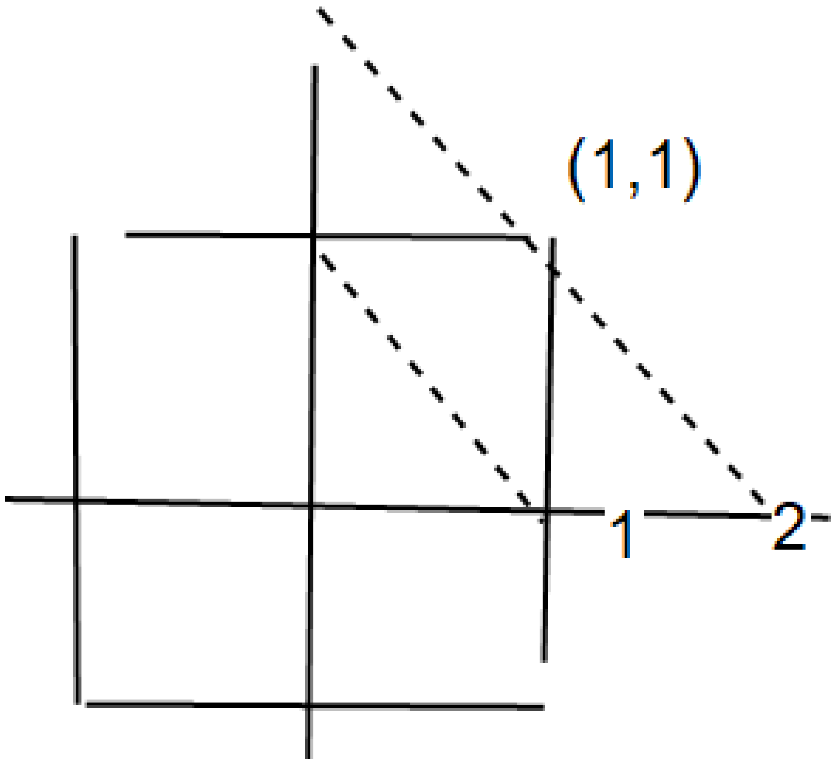






$$\frac{1}{\sqrt{2}}||x||_2 \le ||x||_\infty \le ||x||_2$$

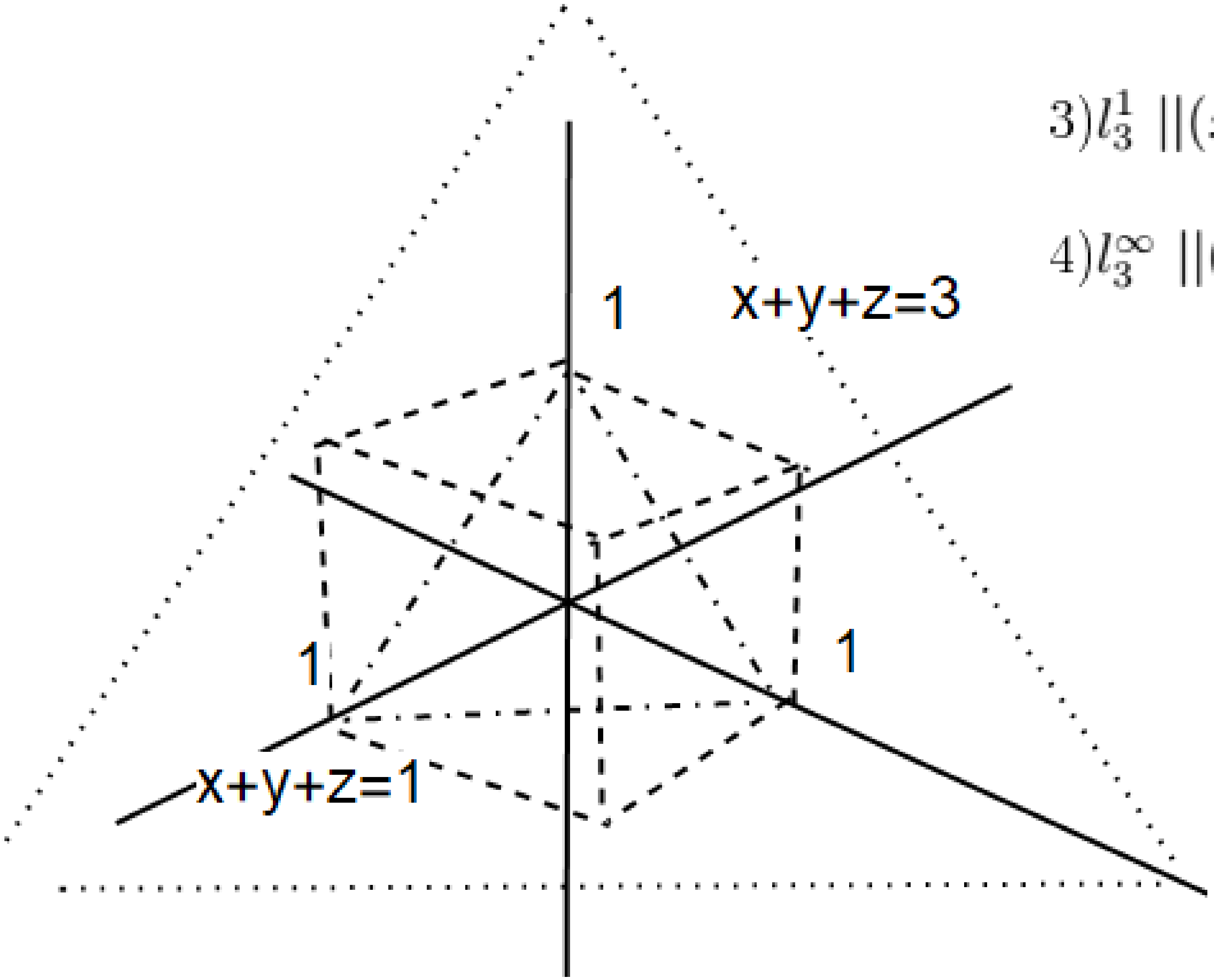
$$||x||_\infty \le ||x||_2 \le \sqrt{2}||x||_\infty$$



$$||x||_\infty \le ||x||_1 \le 2||x||_\infty$$

$$\frac{1}{2}||x||_1 \le ||x||_\infty \le 2||x||_1$$

cp-1 $||x||_W \approx ||x||_p, \; p = 1, 2, \infty$



$3) l_3^1 \ ||(x,y,z)||_1 = |x| + |y| + |z|$

$4) l_3^\infty \ ||(x,y,z)||_\infty = \max(|x|,\ |y|,\ |z|)$

$$||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{3}||x||_2$$

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq 3||x||_\infty$$

дз-1 $\ ||x||_W \approx ||x||_p, \ p = 1 \vee 2 \vee \infty$

$$A : R^n \to R^n,\ A = (a_{m,k})_{m,k=1}^n$$

$$l_n^1 : \quad ||A|| = \max(\textstyle\sum_{m=1}^n |a_{m,k}| : k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$l_n^\infty : \quad ||A|| = \max(\textstyle\sum_{k=1}^n |a_{m,k}| : m = 1, 2, \ldots, n)$$

$$l_n^2 : \quad A = A^*, \quad ||A|| = \max(|\lambda| : Ax = \lambda x)$$

$$n = 3 : \quad ||Ax||_2 \leq ||Ax||_1 \leq ||A||_1 ||x||_1 \leq (\sqrt{3}||A||_1)||x||_2$$

ДЗ-1 $A : R^3 \to R^3$, произвольная матрица $A = (a_{m,k})_{m,k=1}^3$

$$c_{p,1}||x||_p \leq ||x||_W \leq c_{p,1}||x||_p, \; p = 1, \infty$$

$$||A||_W \leq ??$$

$A = I - B$, выбрать матрицу так, что !! $||B||_W = q \leq 1$

$$Ax = b : \quad x = b + Bx, \quad x_{n+1} = b + Bx_n, \; x_n \to x_*$$