МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по домашней работе №1

по дисциплине «Функциональный анализ»

Тема: Норма оператора

Студент гр. 8383	__________________	Ларин А.
Преподаватель	__________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург

2021

Задание

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДЗ 1

7) определение нормы оператора линейном нормированном пространстве ...

8)норма l_3^2...
норма оператора $A: l_3^2 \to l_3^2$, (!!)$A = A^*$,
$A = I - B$, $||B||_2 < 1/2$ (сформировать самостоятельно)
$||B||_2 = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_1|)$ (из лекций), $\lambda_k \neq 0$

9)норма l_3^1..., норма l_3^∞..., $||B||_1$, $||B||_\infty$ (формулы!! из лекций)

10)* итерационное решение уравнения $Ax = b$
решить для $b = (1, 1, 1)$
проверить сходимость итераций для $x_0 = (0, 0, 0)$

11)* $||B||_W$ оценка сверху
схема получения оценки из эквивалентности $c_1||x||_2 \leq ||x||_W \leq c_2||x||_2$

$$||Ax||_W \leq c_2||Ax||_2 \leq c_2||A||_2||x||_2 \leq (c_2||A||_2)\,\frac{1}{c_1}||x||_W$$

$$||A||_W \leq \frac{c_2}{c_1}||A||_2$$

Выполнение

Норма линейного оператора

Оператор A: X → Y, действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y, Называется линейным, если:
$A(k_1 x_1 + k_2 x_2) = k_1 A x_1 + k_2 A x_2$, для всех $k_1, k_2 \in C, x_1, x_2 \in X$
Норма оператора $A: l_3^2 \to l_3^2$
$||A|| = sup(||Ax||_Y : ||x||_X = 1)$
Сопряженным к линейному оператору A называется оператор
$A^* : (Ax, y) = (x, A^* y) \forall x, y \in H$.
Евклидова норма самосопряженного оператора $A = A^*$ с собственными числами λ_k определяется как $||A|| = max(\lambda_k)$

Выберем $A = I - B, ||B||_2 < \frac{1}{2}, ||B||_2 = max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|), \lambda_k \neq 0$.

Построим B по формуле $B = VDV^T$, где V - матрица поворота, D - диагональная матрица.

$$V=\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$B=VDV^T=\begin{pmatrix} \frac{91}{300} & -\frac{1}{25} & 0 \\ \frac{-1}{25} & \frac{7}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Собственные числа $B:\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$, след. $\|B\|_2=¿\frac{1}{2}$. Найдем A:

$$A=I-B=\begin{pmatrix} \frac{209}{300} & -\frac{1}{25} & 0 \\ \frac{-1}{25} & \frac{18}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

Собственные числа $A:\left(\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right)$

$l_3^1:\|A\|=max\left(\sum_{k=1}^{3}|a_{m,k}|\right)=\frac{4}{5}$

$l_3^\infty:\|A\|=max\left(\sum_{k=1}^{3}|a_{m,k}|\right)=\frac{4}{5}$ (он равен l_3^1 т. к. матрица симметрична)

$l_3^2:\|A\|=max\left(|\lambda|:Ax=\lambda x\right)=\frac{4}{5}$

Решение уравнения путем итеративных приблежений

$Ax=b, b=(1,1,1), x_0=(0,0,0)$

$x_{n+1}=b+Bx_n$

[0, 0, 0]
[1., 1., 1.]
[1.26333333, 1.24, 1.2]
[1.33361111, 1.29666667, 1.24]
[1.35266204, 1.30972222, 1.248]
[1.3579186 , 1.31261574, 1.2496]
[1.35939734, 1.31321566, 1.24992]
[1.3598219 , 1.31332449, 1.249984]
[1.35994633, 1.31333798, 1.2499968]
[1.35998353, 1.31333678, 1.24999936]
[1.35999487, 1.31333496, 1.24999987]
[1.35999838, 1.31333399, 1.24999997]
[1.35999948, 1.31333358, 1.24999999]
[1.35999983, 1.31333342, 1.25]
[1.35999995, 1.31333337, 1.25]
[1.35999998, 1.31333334, 1.25]
[1.35999999, 1.31333334, 1.25]
[1.36, 1.31333333, 1.25]