лекция 13

Мы завершаем обсуждение спектральной теоремы, точнее самого простого, в техническом отношении ее варианта. Интерес к таким конструкциям существовал всегда, поскольку любая математическая модель сводится к восстановлению сигала на входе преобразователя по сигналу, наблюдаемому на выходе. Такую задачу можно решать если преобразователь осуществляет взаимно однозначное соответствие сигналов на входе и выходе. Впервые такой подход возник в линейной алгебре. Оказалось, что матричная записи систем линейных уравнений, естественно приводит к понятию обратной матрицы.

Появление в аппарате алгебры собственных чисел, позволило вычислять функции от матриц, последующему правилу:
если $A = S\Lambda S^{-1}$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

то

$$f(\Lambda) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

и

$$f(A) = Sf(\Lambda)S^{-1}$$

единственным ограничением является, то что функция должна быть определена на всех числах λ_k, то есть на спектре.

Пример

если функция $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f(A) = A^{-1}$ существует тогда и только тогда когда $Det(A) \neq 0$, то есть ноль не является собственным числом матрицы.
Проверьте равенство $Af(A) = I$.

Теорема сформулированная на прошлой лекции прямо переносит это рассуждение на бесконечномерную ситуации, но этот требует жесткого ограничения на оператор – компактность оператор. Теорему можно распространить на самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, но это требует построения соответствующей оператору меры(по типу меры Лебега) в гильбертовом пространстве, где действует оператор.

Напомним соответствующее определение и саму теорему.

Определение

Оператор A, отображающий одно банахово пространство в другое, называется *компактным*, если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ такую, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} Ay_k$.

Теорема о спектральном разложении

Если A – компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве H, то он имеет не более чем счетное множество собственных векторов $\{\lambda_n\}$,

собственные подпространства оператора $H_n = \{x : Ax = \lambda_n x\}$ конечномерны, ортогональны между собой и

справедлива формула спектрального разложения

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

где P_n – ортогональный проектор на H_n.

В прошлой лекции был сделан первый шаг доказательства.

Предложение 1

Собственные числа самосопряженного оператора вещественны,

а собственные элементы, относящиеся к разным собственным числам ортогональны.

Отметим, что это утверждение использует только самоспряженность оператора. Размерность пространства никак не проявляется и компактность не нужна. Но это утверждение справедливо в предположении, что оператор имеет собственные числа. В конечномерной ситуации это следует из основной теоремы алгебры (собственное число – корень характеристического многочлена). Но ели пространство бесконечномерно, то гарантией существования собственных чисел является компактность оператора. Этот факт является основой доказательства спектральной теоремы, чтобы его доказать, надо подготовить еще несколько утверждений о самосопряженных операторах.

Предложение 2

Произведение самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда они коммутируют.

Доказательство

Утверждение следует из тождества $(AB)^* = B^*A^*$, которое легко вывести из определения сопряженного оператора. Из самосопряженности операторов A и B следует $(AB)^* = B^*A^* = BA$, а из самосопряженности оператора AB следует $(AB)^* = AB$. Эти два равенства доказывают требуемое.

Предложение 3

Если оператор A самосопряжен, то скалярное произведение (Ax, x) вещественно для любого x.

Доказательство

Если A самосопряжен, то $(Ax,x)=(x,Ax)$, а по свойствам скалярного произведения $(Ax,x)=(\bar{Ax},x)$, то есть скалярное произведение вещественно.

Предложение 4

Если оператор A самосопряжен, то

$$||A|| = \sup\{|(Ax,x)| : ||x|| \le 1\}.$$

Доказательство

Обозначим $Q = \sup\{|(Ax,x)| : ||x|| \le 1\}$. Поскольку для $||x|| \le 1$

$$|(Ax,x)| \le ||Ax|| \cdot ||x|| \le ||A|| \cdot ||x|| \le ||A||,$$

то $Q \le ||A||$. Для завершения доказательства достаточно установить обратное неравенство. Это можно сделать используя тождества, которые легко проверяются непосредственно

$$(A(x+y), x+y) = (Ax,x) + 2\ Re(Ax,y) + (Ay,y),$$
$$(A(x-y), x-y) = (Ax,x) - 2\ Re(Ax,y) + (Ay,y).$$

Из этих тождеств и равенства параллелограмма следует оценка

$$|\ Re(Ax,y)| = \frac{1}{4}|(A(x+y),x+y) - (A(x-y),x-y)| \le$$

$$\le \frac{Q}{4}\left[||x+y||^2 + ||x-y||^2\right] = \frac{Q}{2}\left[||x||^2 + ||y||^2\right].$$

Фиксируем элемент x такой, что $||x|| \le 1$ и $Ax \ne 0$, и положим $y = \frac{Ax}{||Ax||}$, тогда $||y|| = 1$. Получаем

$$||Ax|| = (Ax,y) = \frac{1}{||Ax||}(Ax,Ax) = Re\left(Ax, \frac{Ax}{||Ax||}\right) \le$$

$$\le \frac{Q}{2}\left[||x||^2 + ||y||^2\right] \le Q\,.$$

Неравенство тем более верно, если $Ax = 0$. Следовательно, $||A|| \le Q$. Вместе с обратным неравенством это дает доказательство предложения.

Этой информации достаточно, чтобы доказать существование собственного числа у нашего оператора.

Теорема о существовании собственного числа

Если A – компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то он имеет собственное число λ такое, что $||A|| = |\lambda|$.

Доказательство

Обозначим $m = \inf\{(Ax, x) : ||x|| = 1\}$, $M = = \sup\{(Ax, x) : ||x|| = 1\}$. Тогда по предложению 9.4 $||A|| = \max\{|m|, M\}$. Обозначим $\lambda = \max\{|m|, M\}$ и покажем, что это собственное число оператора. Для определенности будем считать, что $\lambda = M$. Из определения супремума следует существование последовательности $\{x_n\}$ такой, что $||x_n|| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = \lambda$. Из определения компактности оператора следует, что найдется подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ такая, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ay_k = z_0$. Тогда $||Ay_k - \lambda y_k||^2 = ||Ay_k||^2 - 2\lambda(Ay_k, y_k) + \lambda^2 \le \le ||A||^2 - 2\lambda^2 + o(1) + \lambda^2 = o(1)$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda y_k = z_0$. Положим $x_0 = \lambda^{-1} z_0$ и получим $Ax_0 = \lambda x_0$.

Еще одно важное свойство компактных операторов.

Предложение 4

Если A компактный оператор и $H_1 = \{x : Ax = = \lambda x\}$ – его собственное подпространство, то размерность H_1 конечна.
Доказательство

Предположим, это неверно. Тогда в H_1 можно построить ортогональный нормированный базис $\{e_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Из компактности оператора следует, что у последовательности $\{Ae_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{Ae_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Но из того, что $e_{n_k} \in H_1$, следует $Ae_{n_k} = \lambda e_{n_k}$, то есть последовательность ортогональных векторов $\{e_{n_k}\}$ сходится, однако в силу ортогональности $||e_{n_k} - e_{n_m}||^2 = 2$. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно.

Доказательство спектральной теоремы еще далеко до завершения, но осталась чисто техническая часть доказательства. Прямо реализующая следующее соображение:

Имея собственное число и соответствующее конечномерное подпространство, надо перейти к его ортогональному дополнению, и доказать, что сужение оператора на ортогональное дополнение удовлетворяет условиям теоремы.
За счетное число шагов будет исчерпано все пространство и поучится разбиение всего пространства в сумму ортогональных подпространств, на каждом из которых оператор действует как умножение на собственное число.