Лекция 2

Среди линейных нормированных пространств естественно выделяется подмножество пространств с геометрией, близкой к обычной евклидовой геометрии. Это пространства, где задано скалярное произведение, порождающее норму. Главная отличительная черта таких пространств состоит в том, что в них определено понятие ортогональности элементов (это сильно облегчает любые действия в нормированном пространстве). В общей ситуации скалярное произведение, как и норма, должно определяться аксиоматически.

Определение 1.9. Говорят, что в линейном пространстве X задано скалярное произведение, если для любых двух элементов пространства $x, y \in X$ определено комплексное число (x, y), которое называется их *скалярным произведением*, и при этом выполнены следующие условия:

1) $(kx, y) = k(x, y)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем равенство $(x, x) = 0$ влечет $x = 0$.

В любом пространстве со скалярным произведением выполнено неравенство Коши–Буняковского $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$. Доказательство такое же, как и приведенное ранее доказательство этого неравенства в пространстве l^2. Легко проверить, что скалярное произведение в пространстве l^2 можно задать соотношением $(x, y) = \sum\limits_n x_n \overline{y_n}$. Аналогичным образом можно задать скалярное произведение в $L^2(a, b)$:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Скалярное произведение всегда порождает норму по следующему правилу: $||x||^2 = (x, x)$. Все требования к норме вытекают из свойств скалярного произведения, кроме неравенства треугольника, но, как было показано при рассмотрении свойств пространства l^2, оно вытекает из неравенства Коши–Буняковского.

Пространства со скалярным произведением сохраняют еще одно важное свойство евклидовых пространств – равенство параллелограмма:

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x+y||^2 + ||x-y||^2.$$

Действительно, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$
$= (x,x) + 2(x,y) + (y,y) + (x,x) - 2(x,y) + (y,y) = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Несложно проверить, что в пространствах l^1, l^∞, $L^1(a,b)$, $L^\infty(a,b)$, $C[a,b]$ равенство параллелограмма не выполняется, что влечет за собой невозможность задания нормы в этих пространствах с помощью скалярного произведения.

Полные нормированные пространства

. Крайне неудобно работать с пространствами, у которых фундаментальная последовательность может не иметь предела в том же пространстве. Именно по этой причине необходим переход от рациональных чисел к вещественным. Рассмотрим другой пример. В пространстве $C[a, b]$ можно ввести норму, порожденную скалярным произведением из $L^2(a, b)$, при этом возникнут фундаментальные последовательности, не сходящиеся в исходной метрике, но из свойств интеграла Римана нетрудно получить, что пределами в метрике скалярного произведения окажутся функции из $L^2(a, b)$. Не всегда так легко описать пространство фундаментальных последовательностей, но можно показать, что оно всегда образует линейное нормированное пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Определение 2.1. Линейное нормированное пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Всякое линейное нормированное пространство можно *пополнить*. Эта технически сложная процедура состоит в объяснении того, что после пополнения снова получится линейное пространство. Схема доказательства таких утверждений отработана на обосновании перехода от рациональных чисел к вещественным и может без серьезных изменений применяться в других случаях.

Определение 2.2. Линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*, если оно полно, т. е. всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Отсутствие скалярного произведения в банаховых пространствах отчасти компенсируется следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть X – банахово пространство, Y – замкнутое линейное пространство, содержащееся в X и не совпадающее с ним. Тогда для любого положительного числа ε найдется элемент $x_* \in X$ такой, что $||x_*|| = 1$ и $\inf\{||x_* - y|| : y \in Y\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь элемент $x_1 \in X \setminus Y$. Обозначим через $d = \inf\{||x_1 - y|| : y \in Y\}$ – расстояние от точки до пространства Y, можно считать, что $d > 0$. Из определения инфимума следует существование элемента $y_1 \in Y$ такого, что $||x_1 - y_1|| \leqslant \dfrac{d}{1-\varepsilon}$. Положим $x_* = \dfrac{x_1 - y_1}{||x_1 - y_1||}$. Тогда $||x_*|| = 1$ и для всех $y \in Y$ получаем

$||x_* - y|| = \left\|\dfrac{x_1 - y_1 - y||x_1 - y_1||}{||x_1 - y_1||}\right\|$. Следовательно, $\inf\{||x_* - y|| : y \in Y\} =$

$= \dfrac{1}{||x_1 - y_1||}\inf\{||x_1 - y_1 - y||x_1 - y_1||||\} \geqslant \dfrac{d}{||x_1 - y_1||} \geqslant \dfrac{d}{d/(1-\varepsilon)} = 1 - \varepsilon$

(первое неравенство верно потому, что $y_1 + y||x_1 - y_1|| \in Y$ и $\inf\{||x_1 - y|| : y \in Y\} = d$). ■

Определение 2.3. Линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*, если оно является полным в метрике порожденной скалярным произведением.

В дальнейшем будем рассматривать только полные нормированные пространства.

Возвращаясь к описанию линейных нормированных пространств в целом, следует заметить, что после введения нормы и проверки ее свойств всегда остается вопрос о полноте пространства.

Множества с конечным числом элементов могут образовывать линейное пространство, например, поле вычетов по модулю простого числа, но аппарат функционального анализа ориентирован на бесконечные объекты. При этом невозможно ограничиться грубой градацией, в которой множество может быть либо конечным, либо бесконечным. Необходимость сравнения бесконечных множеств требует дополнительных определений.

Определение **.** Подмножество банахова пространства X называется *всюду плотным* в X, если для любого элемента x из X найдется последовательность элементов $\{a_n\}$ из A такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. В этом случае говорят, что множество X является *замыканием* множества A.

Пример Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в банаховом пространстве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пример Множество многочленов с рациональными коэффициентами

$$\mathcal{P} = \{p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n, p_k \in \mathbb{Q}\}$$

всюду плотно в банаховом пространстве непрерывных функций $C[a, b]$.

Пример Множество кусочно-постоянных функций с рациональными коэффициентами и рациональными концами интервалов постоянства

$$\mathcal{S} = \Big\{ f(x) = c_n,\ x \in [a_n, b_n);\ \bigcup_n [a_n, b_n) = \mathbb{R},$$

$$[a_n, b_n) \cap [a_k, b_k) = \varnothing \text{ при } n \neq k,\ a_n, b_n, c_n \in \mathbb{Q},\ n, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

всюду плотно в банаховом пространстве $L^p[a, b]$.

Пример Множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в банаховом пространстве $L^p[a, b]$.

Предложение 2.1. Счетное объединение счетных множеств счетно.

Нет шансов приблизить все элементы банахова пространства конечным числом элементов, но и приближения с помощью выделенного счетного подмножества могут оказаться полезными.

Определение 2.6. Банахово пространство, обладающее счетным всюду плотным подмножеством, называется *сепарабельным*.

Пример пространство l^∞ не содержит счетного всюду плотного множества.