Интеграл Лебега

Определение. Пусть $E \subset R$, $E \neq \emptyset$.

Определим функцию χ_E, $\chi_E(x) = 1$, $x \in E$, $\chi_E(x) = 0$, $x \notin E$

Функцию χ_E, будем называть характеристической функцией множества Е.

Простой функцией будем называть выражение
$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x)$
где $c_j \in R$, а E_j- множества, не обязательно различные.

Заметим, что если $x \in E_j \cup E_k \cup E_m$ то $s(x) = c_j + c_k + c_m$.
Учитывая это равенство, простую функцию можно переписать в виде
$s(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k \chi_{F_k}(x)$,

где множества F_k попарно не пересекаются, а числа A_k различны.

Множества F_k получаются из множеств E_j пересечениями каких-то из $E_1, \dots, E_n$ и последующими объединениями получаемых множеств, что приводит к следующему утверждению.

Лемма.

Пусть множества $E_1, \dots, E_n$ измеримы. Тогда множества $F_1, \dots, F_m$ измеримы.

Теорема.

Простые функции измеримы.

Доказательство.

Воспользуемся записью простой функции $s(x)$ с помощью множеств $F_1, \dots, F_m$, не уменьшая общности, считаем, что $A_1 < A_2 < \dots < A_m$

Тогда $A_1, A_2, \dots, A_m$- это все значения, которые принимает функция $s(x)$.

Тогда при $a < A_1$, имеем $E_{<a} = \emptyset$,

при $A_1 < a \leq A_2$ имеем $E_{<a} = F_1$,
при $A_2 < a \leq A_3$ $E_{<a} = F_1 \cup F_2$,
$\dots$
при $A_{m-1} < a \leq A_m$ имеем $E_{<a} = F_1 \cup \dots \cup F_{m-1}$,

при $a > A_m$ $E_{<a} = F_1 \cup \dots \cup F_m$.

Поскольку по лемме все множества $F_1, \dots, F_m$ измеримы, то и любые их объединения измеримы, т.е. все множества $E_{<a}$ измеримы при $\forall a \in R$, , т.е. $s(x)$–измерима. Теорема доказана.

Определение интеграла Лебега от простой функции

Пусть $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_j}(x)$

где все множества E_j измеримы, $E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$

Считаем что если для какого то j_0 выполнено $mE_{j_0} = \infty$, то $c_{j_0} = 0$
Полагаем по определению

$\int_E s(x)dm = *\sum_{j=1}^{n} c_j mE_j$

где знак $*\sum$ означает суммирование по тем индексам j, для которых $mE_j < \infty$

Из определения (1) следует свойства интеграла от простых функций:

1)$s(x) = \chi_E \ \rightarrow \ \int_E s(x)dm = \int_E 1dm = mE$

2)$\int_E ks(x)dm = k\int_E s(x)dm$

3) $\int_E (s_1(x) + s_2(x))dm = \int_E s_1(x)dm + \int_E s_2(x)dm$

$s1, \ s_2$ - простые функции, определенные на множестве E.

Определение интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции

Пусть $E \subset R$, $E \neq \emptyset$- измеримое множество,
$f : E \rightarrow R \cup \ +\infty, \ f(x) \geq 0$ -функция, заданная на E, измеримая и неотрицательна.

Обозначим через $A(f)$ множество всех простых функций $s(x)$, заданных на E, измеримых, неотрицательных и удовлетворяющих условию

$s(x) \leq f(x), x \in E$

Множество $A(f)$ непусто, поскольку функция $s_0(x) \equiv 0$
удовлетворяет приведенным условиям, т.е. $s_0(x) \leq f(x)$ (по условию $f(x) \geq 0$).

Тогда положим
$\int_E f(x)dm = \sup_{s \in A(f)} \int_E s(x)dm$

Не исключена ситуация, когда $\int_E f(x)dm = +\infty$

Рассмотрим, например функцию $f(x)$:

$f(x) = 0, -1 \leq x < 0, \quad f(x) = +infty, 0 \leq xleq1$

положим
$s_n(x) = 0, -1 \leq x < 0, \quad s_n(x) = n, 0 \leq xleq1$

$\int_E s_n(x)dm = 0 \cdot 1 + n \cdot 1 = n$

$\sup_{s\in A(f)} \int_E s_n(x)dm = +infty \ \to \ \int_E f(x)dm = +infty$

Поскольку для $s(x) \geq 0$, если $x \in E$, имеем $\int_E s(x)dm \geq 0$,

то для $f(x) \geq 0, \ x \in E$ выполнено

$\int_E f(x)dm \geq 0$,

Если $\int_E f(x)dm\infty$, то говорят, что функция f суммируется на E, будем записывать это выражением $f \in \mathcal{L}(E)$

. *Определение интеграла Лебега от функции любого знака*
Пусть $f : E \to R \cup \ \pm\infty$ - измеримая функция,

определим функции $f^+, \ f^-$, как это сделано в лекции об измеримых функциях,

$f = f^+ - f^-, \ f^+(x) \leq 0, \ f^-(x) \leq 0$

Предположим, что $f^+ \in \mathcal{L}(E), \ f^- \in \mathcal{L}(E)$

Тогда говорят, что f суммируема на E, $f \in \mathcal{L}(E)$

$\int_E f(x)dm = \int_E f^+(x)dm - \int_E f^-(x)dm$

Утверждение.

$f \in \mathcal{L}(E) \ \leftrightarrow \ |f| \in \mathcal{L}(E)$

Доказательство.

Пусть $|f| \in \mathcal{L}(E)$ По определению функций $f^+, \ f^-$ имеем неравенства
$f^+(x) \leq |f|, \ f^-(x) \leq |f|$

поэтому $A(f^+) \subset A(|f|), \ A(f^-) \subset A(|f|)$

$\sup_{s\in A(f^+)} \int_E sdm \leq \sup_{s\in A(|f|)} \int_E sdm < \infty$

$\sup_{s\in A(f^-)} \int_E sdm \leq \sup_{s\in A(|f|)} \int_E sdm < \infty$

т.е. $f^+ \in \mathcal{L}(E), \ f^- \in \mathcal{L}(E)$

С другой стороны, если $E^+ = \{x \in E : f(x \geq 0\}, \ E^- = \{x \in E : f(x < 0\}$, то для
$\forall s \in A(|f|)$ имеем

$\chi_{E^+} s(x) \in A(f^+),\ \chi_{E^-} s(x) \in A(f^-)$

$\int_E s(x)dm = \int_{E^+} \chi_{E^+}(x)s(x)dm + \int_{E^-} \chi_{E^-}(x)s(x)dm$

Утверждение доказано.