Непрерывность линейных функционалов

Любое измерение, проведенное в ходе эксперимента, является функционалом. Модель, реализуемая строится так, чтобы описывающие ее функционалы были линейными. Следующий важный момент, который надо учитывать при планировании эксперимента - непрерывность используемых в нем функционалов. Поскольку функционал это частный случай оператора, то его непрерывность равносильна ограниченности . Но специфика линейных функционалов позволяет дать совсем иной – геометрический критерий непрерывности.

Проверять непрерывность функционалов на языке $\epsilon - \delta$ трудно. Здесь удобно перейти на другой – топологический язык описаний. Топология – ветвь математики, имеющая дело с множествами, не имеющими ни линейной структуры, ни метрики, но наделенными системой окрестностей, заданных для каждой точки пространства. Это позволяет легко переносить на такие структуры стандартные определения. Например, открытым называется множество, содержащее вмести с каждой точкой некоторую его окрестность. Менее очевидно нужное нам определение непрерывности отображения одного топологического пространства в другое. Тем более удивительно, что выглядит оно значительно проще классического определения на языке ϵ–δ: прообраз любого открытого множества открыт. Не вдаваясь в тонкости терминологии, удобно перевести некоторые свойства отображений на топологический язык.

Предложение. Геометрическое условие непрерывности

1) Если f – непрерывный функционал, то его ядро замкнуто.

2) Если Y – однородная гиперплоскость, то любой функционал f с ядром $\ker f = Y$ непрерывен.

Доказательство

(1) Если последовательность точек $x_n \in \ker f$, $x_n \to x_0$, то из непрерывности f следует, что $0 = f(x_n) \to f(x_0)$, то есть $x_0 \in \ker f$.

(2) Пусть $\ker f$ – однородная гиперплоскость. Надо проверить, что прообраз любого открытого множества открыт. Произвольное открытое множество на прямой является объединением не пересекающихся открытых интервалов. Достаточно доказать утверждение для одного интервала. Интервал есть пересечение пары открытых полупрямых. Остается доказать, что множества $\{x : f(x) < a\}$ открыты для всех $a \in \mathbb{R}$. Поскольку функционал линеен, достаточно проверить это для $a = 0$.

Предположим, что это не так, тогда существует точка x_0, $f(x_0) < 0$, такая, что в любом шаре

$$V_n = \left\{v : ||v - x_0|| < \tfrac{1}{n}\right\}$$

найдется точка x_n, $f(x_n) \geq 0$. Из определения однородной гиперплоскости следует существование числа t_n такого, что $x_n = t_n x_0 + y_n$, $y_n \in \ker f$. Поскольку функционал линеен, то $f(x_n) = t_n f(x_0)$. Значит, $t_n \leq 0$. Если $t_n = 0$, то $f(x_n) = 0$.

В случае, когда $f(x_n) < 0$, отрезок
$x = tx_0 + \frac{1-t}{1-t_n} y_n,\ t \in [t_n, 1]$,
соединяющий точки x_0 и x_n, целиком лежит в шаре V_n и содержит точку $v_n = \frac{1}{1-t_n}\, y_n,\ f(v_n) = 0$. Таким образом можно получить последовательность точек из $\ker f$, сходящуюся к x_0, но $\ker f$ замкнуто, что и приводит к противоречию, так как по предположению $f(x_0) < 0$.

Следствие 1

Однородная гиперплоскость, являющаяся ядром функционала, определяет его с точностью до константы.

Следствие 2

Множество всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X образует банахово пространство с нормой

$||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| < 1\}$

Определение сопряженного пространства

Банахово пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X называется сопряженным пространством и обозначается X^*.

Всякий элемент $x \in X$ определяет линейный непрерывный функционал на X^* по очевидному правилу: для всех $f \in X^*$ полагаем $x(f) = f(x)$. Часто бывает, что других линейных непрерывных функционалов над пространством X^* нет. Такие пространства наиболее похожи на евклидовы.

Гильбертовы пространства занимают здесь особую позицию – они «самые простые».

Теорема Рисса-Фишера

Если H – гильбертово пространство, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение J пространства H в пространство, действующих на нем, линейных непрерывных функционалов (каждый функционал можно записать как скалярное произведение с подходящим элементом). Причем J^2 является тождественным отображением.

Доказательство.

Фиксируем элемент сопряженного пространства f. Предложение 4.2 гарантирует, что функционал f полностью определяется своим ядром $\ker f$ и значением в точке вне ядра

$x_1 \notin \ker f$

Поскольку ядро является однородной гиперплоскостью, то $x_1 = x_* + x_0$, $x_* \perp \ker f$, $x_0 \in \ker f$.

Тогда $f(x) = f(x_*) = ||x_*|| f(\frac{x_*}{||x_*||}) = c(x, x_*)$.