МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №1
по дисциплине «Функциональный анализ»
Тема: Норма порожденная многогранником
Вариант 13

Студентка гр. 8383	____________________	Максимова А.А.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Постановка задачи.

Многогранник симметричен по координатным плоскостям.

Даны шесть точек: $A(6,3,0)$, $B(6,0,4)$, $H(0,7,3)$, $AA(8,0,0)$, $BB(0,6,0)$, $HH(0,0,4)$, являющиеся вершинами выпуклой поверхности W_1 в первом квадранте. Нужно проверить неравенство треугольника для векторов $(-4,8,-7)$ и $(7,-8,-5)$. Найти наибольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Выполнение работы.

1. Проверим координаты заданных точек.

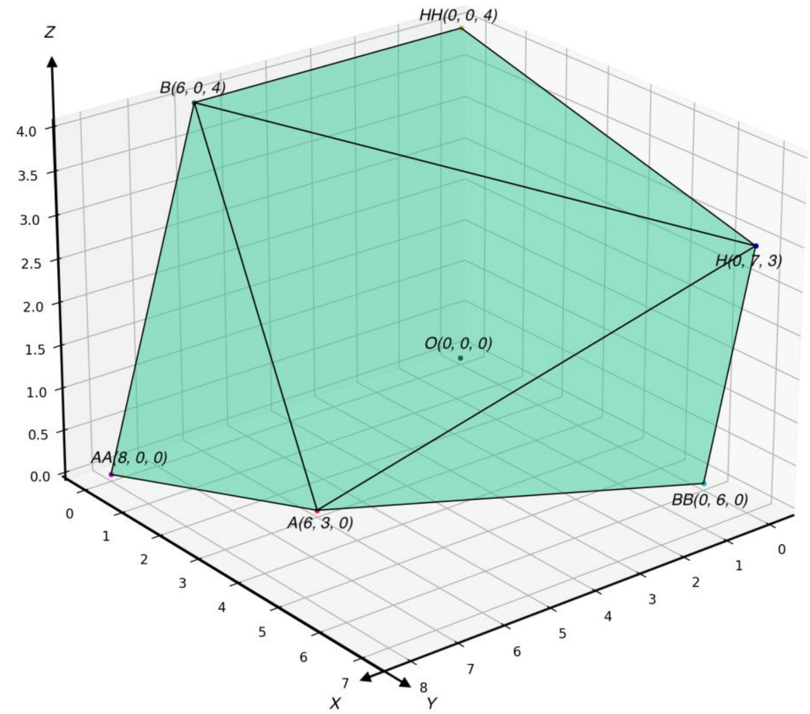

Рисунок 1 - Положение исходных точек в трехмерном пространстве

1) Отметим, что точка AA лежит на оси OX, точка BB - на OY, HH - на OZ. Рассмотри треугольники $BAAA$, $HBHH$, $AHBB$ и проверим, что они являются выпуклыми.

$BAAA$: $\begin{cases} B(\mathbf{6},0,4) \\ A(\mathbf{6},3,0) \\ AA(\mathbf{8},0,0) \end{cases}$, $xAA > xB$ и $xAA > xA$, следовательно, оставляем исходные координаты.

$AHBB$: $\begin{cases} A(6,\mathbf{3},0) \\ H(0,\mathbf{7},3) \\ BB(0,\mathbf{6},0) \end{cases}$, $yBB > yA$ и $yBB < yH$, следовательно, $yBB == yH$. Таким образом, $BB(0,\mathbf{6},0) \to BB(0,\mathbf{7},0)$.

$HBHH$: $\begin{cases} H(0,7,\mathbf{3}) \\ B(6,0,\mathbf{0}) \\ HH(0,0,\mathbf{4}) \end{cases}$, $zHH > zH$ и $zHH > zB$, следовательно, оставляем исходные координаты.

2) Найдем точки пересечения с осями: $(x^*,0,0)$, $(0,y^*,0), (0,0,z^*)$ из уравнения плоскости, проходящей через точки $A(6,3,0)$, $B(6,0,4)$, $H(0,7,3)$: $-25x - 24y - 18z + 222 = 0$.

При $y = 0,\ z = 0$: $25x = 222 \to x = \frac{222}{25} = 8.88$

При $x = 0,\ z = 0$: $24y = 222 \to y = \frac{222}{24} = 9.25$

При $x = 0,\ y = 0$: $18z = 222 \to z = \frac{222}{18} \approx 12.33$

Таким образом, имеем следующие точки пересечения с осями: $(8.88,0,0)$, $(0,9.25,0), (0,0,12.33)$.

Проведем проверку:

$$xAA < x^*: 8 < 8.88, \text{следовательно, оставляем исходные координаты.}$$

$$yBB < y^*: 6 < 9.25, \text{следовательно, оставляем исходные координаты.}$$

$$zHH < z^*: 4 < 12.33, \text{следовательно, оставляем исходные координаты.}$$

2. Изобразим получившуюся поверхность, образованную вершинами выпуклой поверхности W_1 в первом квадранте.

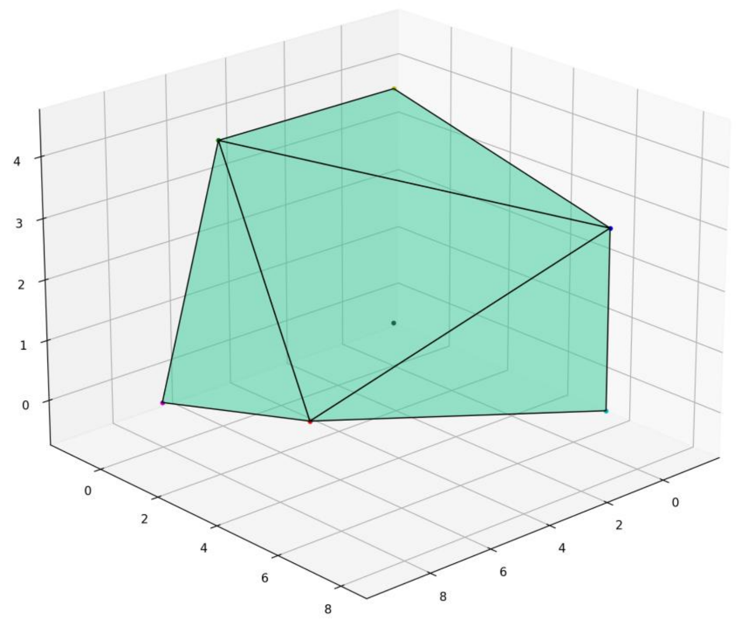

Рисунок 2 - Поверхность, образованная вершинами в первом квадранте

3. По приведенному ниже правилу, сформируем выпуклый, центрально симметричный многогранник W.

Правило построения многогранника.

Необходимо трижды отобразить заданную поверхность относительно координатных плоскостей:

$$W_1 \rightarrow W_2: (x, y, z) \rightarrow (x, -y, z)$$

$$W_2 \rightarrow W_3: (x, y, z) \rightarrow (-x, y, z)$$

$$W_3 \rightarrow W_4: (x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$$

Применив данный алгоритм для всех точек, получим множество W_{1234}, состоящее из 48 вершин:

W_1 - исходный набор из 6 точек

$W_{12} = W_1(x, y, z) \cup W_1(x, -y, z)$ - 12 точек

$W_{123} = W_{12}(x, y, z) \cup W_{12}(-x, y, z)$ - 24 точки

$W_{1234} = W_{123}(x, y, z) \cup W_{123}(x, y, -z)$ - 48 точек

Построим выпуклый многогранник по полученным вершинам:

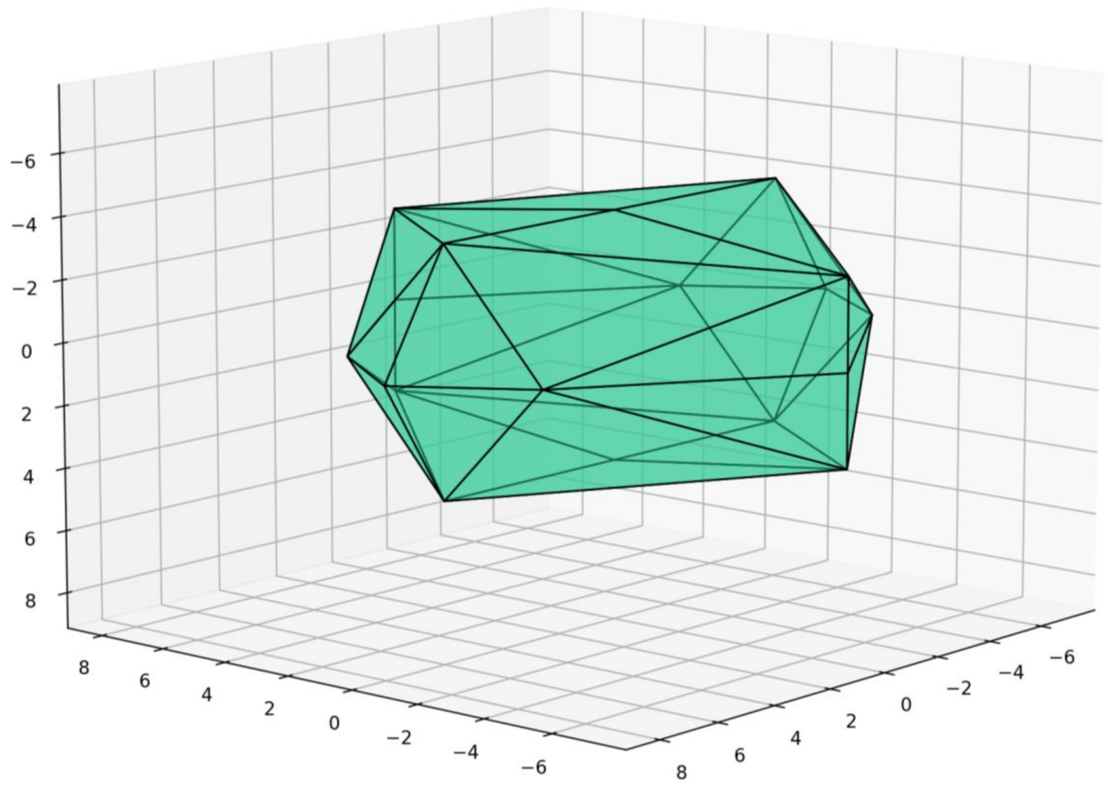

Рисунок 3 - Выпуклый, центрально симметричный многогранник W

4. Как и в случае плоскости, симметрия фигуры такова, что $\|(x, y, z)\|w = \|(|x|, |y|, |z|)\|w$. Проще говоря, норма не зависит от знаков координат, поэтому будем вычислять норму точек в первом квадранте.

Таким образом, после переноса имеем следующие вектора:

$$V_1(-4, 8, -7) \rightarrow V_1(4, 8, 7)$$

$$V_2(7, -8, -5) \rightarrow V_2(7, 8, 5)$$

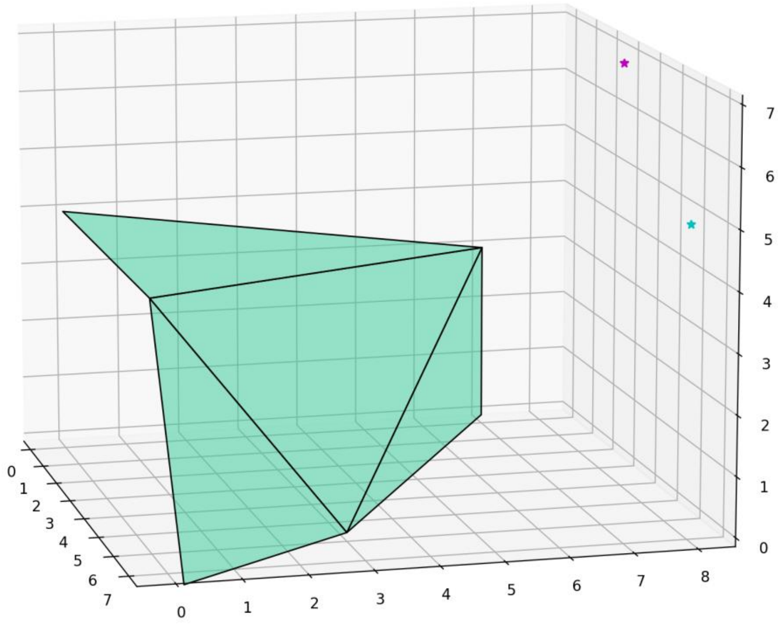

Рисунок 4 - Точки V_1 (*) и V_2 (*) в первом квадранте

5. Для заданной точки $V_1(4, 8, 7)$ найдем угол, в базисе которого она имеет положительные координаты, тогда норма окажется суммой координат. Необходимо рассмотреть все трехгранные углы в $((x, y, z) : z > 0)$, а именно: $OHBHH, OBHA, OAHBB, OABAA$.

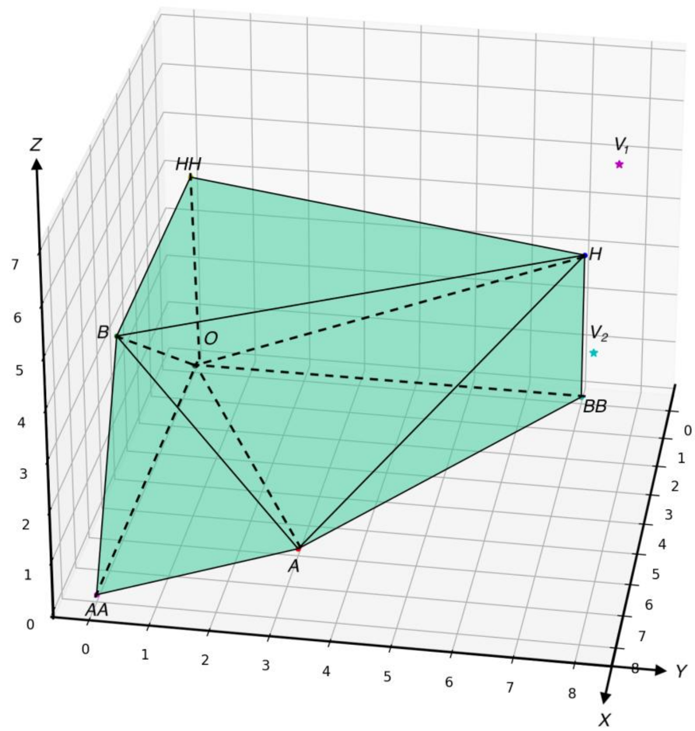

Рисунок 5 - График поверхности и точек в первом квадранте с подписями

Рассмотрим любой из имеющихся углов, например, $OHBHH$. Построим для базиса OH, OB, OHH биортогональный. Для этого необходимо найти вектора OH', OB', OHH' такие, что

$$(OH', OH) = 1, (OH', OB) = 0, (OH', OHH) = 0$$

$$(OB', OH) = 0, (OB', OB) = 1, (OB', OHH) = 0$$

$$(OHH', OH) = 0, (OHH', OB) = 0, (OHH', OHH) = 1$$

Заготовку для этого дают векторные произведения:

$$OH_1 = OB \times OHH = (0, -24, 0)$$

$$OB_1 = OH \times OHH = (28, 0, 0)$$

$$OHH_1 = OH \times OB = (28, 18, -42)$$

Тогда вектора OH', OB', OHH' вычисляются следующим образом:

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (0, 0.1429, 0)$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (0.1667, 0, 0)$$

$$OHH' = \frac{1}{(OHH_1, OHH)} OHH_1 = (-0.1667, -0.1072, 0.25)$$

Найдем коэффициенты разложения k_1, k_2, k_3 для вектора OV_1 по формуле: $OV_1 = k_1 OH + k_2 OB + k_3 OHH$,

$$k_1 = (OV_1,\ OH') = 1.1429 > 0$$

$$k_2 = (OV_1,\ OB') = 0.6667 > 0$$

$$k_3 = (OV_1,\ OHH') = 0.2261 > 0$$

Проверим правильность расчетов:

$$OV_1 = k_1 OH + k_2 OB + k_3 OHH = (4, 8, 7)$$

Так как все коэффициенты положительны, то, следовательно, угол был выбран правильно. В ином случае, продолжили бы данную процедуру до тех пора, пока не было выполнено: $k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0,\ k_3 \geq 0.$

Теперь вычислим норму для точки V_1:

$$\|V_1\|_W = k_1 + k_2 + k_3 = 2.0357$$

6. По тому же алгоритму найдем норму для точки $V_2(7,8,5)$. Рассмотрим угол $OAHBB$. Построим для базиса OA, OH, OBB биортогональный. Тогда векторные произведения:

$$OA_1 = OH \times OBB = (-21,0,0)$$

$$OH_1 = OA \times OBB = (0,0,42)$$

$$OBB_1 = OA \times OH = (9,-18,42)$$

Вектора:

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1 = (0.1667, 0, 0)$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (0, 0, 0.3333)$$

$$OBB' = \frac{1}{(OBB_1, OBB)} OBB_1 = (-0.0714, 0.1429, -0.3333)$$

Найдем коэффициенты разложения k_1, k_2, k_3 для вектора OV_2 по формуле: $OV_2 = k_1 OA + k_2 OH + k_3 OBB$,

$$k_1 = (OV_2,\ OA') = 1.1667 > 0$$

$$k_2 = (OV_2,\ OH') = 1.6667 > 0$$

$$k_3 = (OV_2,\ OBB') = -1.0238 < 0$$

Так как не все коэффициенты положительны, то, следовательно, угол был выбран неправильно.

Рассмотрим угол $OBHA$. Построим для базиса OB, OH, OA биортогональный. Тогда векторные произведения:

$$OB_1 = OH \times OA = (-9, 18, -42)$$

$$OH_1 = OB \times OA = (-12, 24, 18)$$

$$OA_1 = OB \times OH = (-28, -18, 42)$$

Вектора:

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (0.0405, -0.0811, 0.1892)$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (-0.0541, 0.1081, 0.0811)$$

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1 = (0.1261, 0.0811, -0.1892)$$

Найдем коэффициенты разложения k_1, k_2, k_3 для вектора OV_2 по формуле: $OV_2 = k_1 OB + k_2 OH + k_3 OA$,

$$k_1 = (OV_2,\ OB') = 0.5811 > 0$$

$$k_2 = (OV_2,\ OH') = 0.8919 > 0$$

$$k_3 = (OV_2,\ OA') = 0.5856 > 0$$

Проверим правильность расчетов:

$$OV_2 = k_1 OB + k_2 OH + k_3 OA = (7, 8, 5)$$

Так как все коэффициенты положительны, то, следовательно, угол был выбран правильно. В ином случае, продолжили бы данную процедуру до тех пора, пока не было выполнено: $k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0,\ k_3 \geq 0.$

Теперь вычислим норму для точки V_2:

$$\|V_2\|_W = k_1 + k_2 + k_3 = 2.0586$$

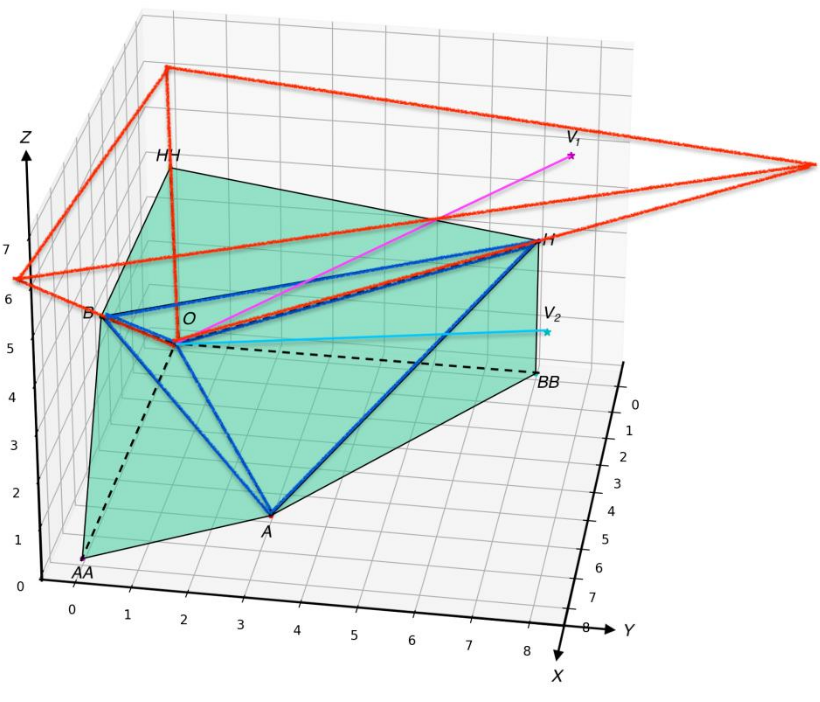

Рисунок 6 - Углы

7. Для проверки неравенства треугольника для векторов $\|V_1\| + \|V_2\| \geq \|V_1 + V_2\|$ вычислим норму $V_3 = V_1 + V_2 = (11,\ 16,\ 12)$.

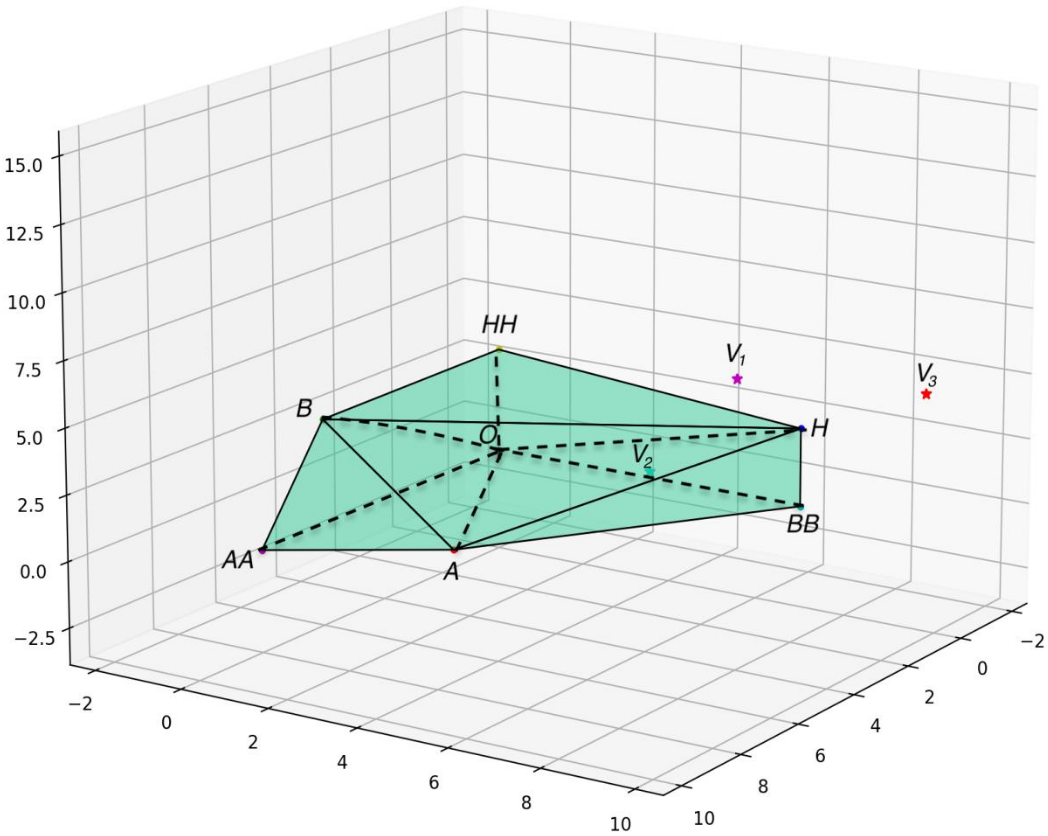

Рисунок 7 - Точки V_1 (*), V_2 (*) и V_3(*) в первом квадранте

Рассмотрим угол $OHBHH$. Построим для базиса OH, OB, OHH биортогональный. Тогда векторные произведения:

$$OH_1 = OB \times OHH = (0, -24, 0)$$

$$OB_1 = OH \times OHH = (28, 0, 0)$$

$$OHH_1 = OH \times OB = (28, 18, -42)$$

Вектора:

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (0, 0.1429, 0)$$

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (0.1667, 0, 0)$$

$$OHH' = \frac{1}{(OHH_1, OHH)} OHH_1 = (-0.1667, -0.1071, 0.25)$$

Найдем коэффициенты разложения k_1, k_2, k_3 для вектора OV_3 по формуле: $OV_3 = k_1 OH + k_2 OB + k_3 OHH$,

$$k_1 = (OV_3,\ OH') = 2.2857 > 0$$

$$k_2 = (OV_3,\ OB') = 1.8333 > 0$$

$$k_3 = (OV_3,\ OHH') = -0.5476 < 0$$

Так как не все коэффициенты положительны, то, следовательно, угол был выбран неправильно.

Рассмотрим угол $OBHA$. Построим для базиса $OB,\ OH,\ OA$ биортогональный. Тогда векторные произведения:

$$OB_1 = OH \times OA = (-9, 18, -42)$$

$$OH_1 = OB \times OA = (-12, 24, 18)$$

$$OA_1 = OB \times OH = (-28, -18, 42)$$

Вектора:

$$OB' = \frac{1}{(OB_1, OB)} OB_1 = (0.0405, -0.0811, 0.1892)$$

$$OH' = \frac{1}{(OH_1, OH)} OH_1 = (-0.0541, 0.1081, 0.0811)$$

$$OA' = \frac{1}{(OA_1, OA)} OA_1 = (0.1261, 0.0811, -0.1892)$$

Найдем коэффициенты разложения $k_1,\ k_2,\ k_3$ для вектора OV_3 по формуле: $OV_3 = k_1 OB + k_2 OH + k_3 OA$,

$$k_1 = (OV_3,\ OB') = 1.4189 > 0$$

$$k_2 = (OV_3,\ OH') = 2.1081 > 0$$

$$k_3 = (OV_3,\ OA') = 0.4144 > 0$$

Проверим правильность расчетов:

$$OV_3 = k_1 OB + k_2 OH + k_3 OA = (11, 16, 12)$$

Так как все коэффициенты положительны, то, следовательно, угол был выбран правильно. В ином случае, продолжили бы данную процедуру до тех пора, пока не было выполнено: $k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0,\ k_3 \geq 0$.

Теперь вычислим норму для точки V_3:

$$\|V_3\|_W = k_1 + k_2 + k_3 = 3.9414$$

8. Выполним проверку неравенства треугольника:

$$\|V_1\| + \|V_2\| \geq \|V_1 + V_2\|\colon 2.0357 + 2.0586 > 3.9414\,.$$

Как видно, неравенство выполняется.

9. Найдем наибольшее и наименьшее значение евклидовой нормы на векторах, имеющих норму 1 в норме, порожденной многогранником.

Найдем радиус описанной сферы: наибольшее расстояние от одной из вершин первого квадранта: A, B, H, AA, BB, HH до начала координат.

$$A(6,3,0): \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} \approx 6.7082$$

$$B(6,0,4): \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{55} \approx 7.4162$$

$$H(0,7,3): \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58} \approx 7.6158$$

$$AA(8,0,0): \sqrt{64} = 8$$

$$BB(0,7,0): \sqrt{49} = 7$$

$$HH(0,0,4): \sqrt{16} = 4$$

Как видно из вычислений, радиус описанной сферы равен восьми.

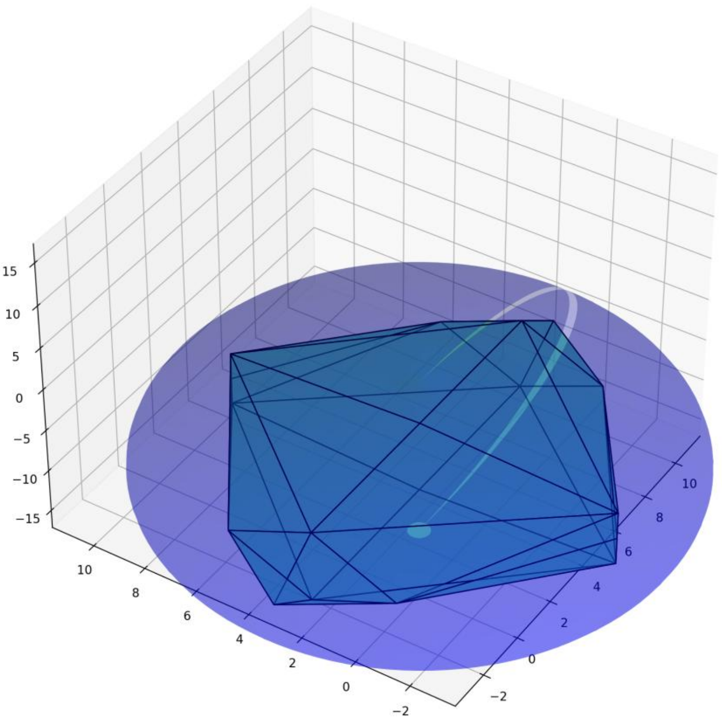

Рисунок 8 - Описанная сфера

Найдем радиус вписанной сферы: наименьшее расстояния от одной из четырех граней $HBHH, ABH, AHBB, AABA$ до начала координат.

Расстояние от точки $O(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле: $d = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Грань $HBHH$ — уравнение плоскости: $-6y - 42z + 168 = 0$

$$d = \frac{|168|}{\sqrt{6^2 + 42^2}} = 3.9598$$

Грань ABH — уравнение плоскости: $-25x - 24y - 18z + 222 = 0$

$$d = \frac{|222|}{\sqrt{25^2 + 24^2 + 18^2}} = 5.6848$$

Грань $AHBB$ — уравнение плоскости: $-9x - 18y + 6z + 108 = 0$

$$d = \frac{|108|}{\sqrt{9^2 + 18^2 + 6^2}} = 5.1604$$

Грань $AABA$ — уравнение плоскости: $-12x - 8y - 6z + 96 = 0$

$$d = \frac{|96|}{\sqrt{12^2 + 8^2 + 6^2}} = 6.1458$$

Как видно из вычислений, радиус вписанной сферы равен 3.9598.

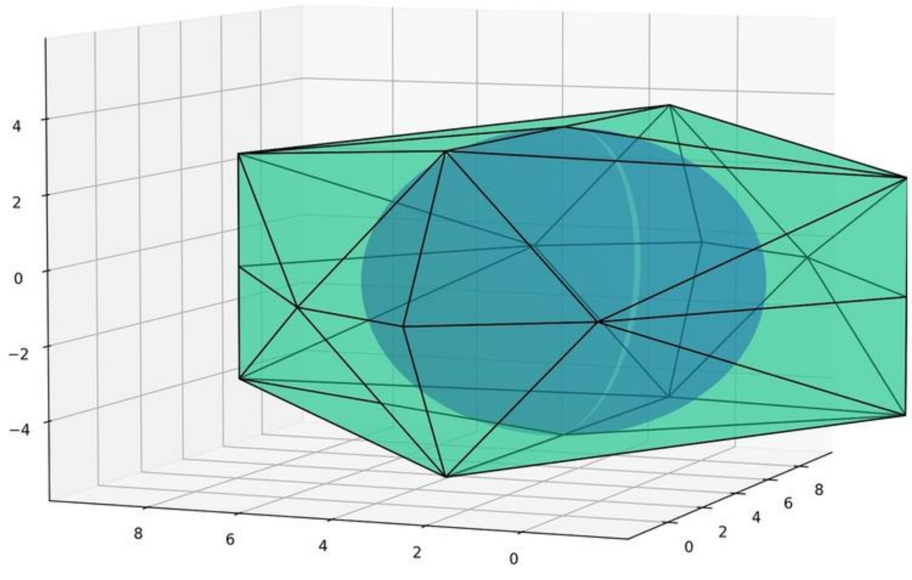

Рисунок 9 - Вписанная сфера