Измеримые функции.

Пусть $E \subset R$ - измеримое по Лебегу множество, функция $f : E \to R \cup -\infty \cup \infty$, заданная на E и принимающая, как вещественные значения, так и, возможно, значения $\pm\infty$.

Определение.

Функция f называется измеримой, если при всяком $a \in R$ каждое из нижеследующих множеств измеримо:

$1) E_{>a}(f) = \{x \in E : f(x) > a\}$

$2) E_{\geq a}(f) = \{x \in E : f(x) \geq a\}$

$3) E_{<a}(f) = \{x \in E : f(x) < a\}$

4) $E_{\leq a}(f) = \{x \in E : f(x) \leq a\}$

Множества $E_{>a}(f)$, $E_{\geq a}(f)$, $E_{<a}(f)$ и $E_{\leq a}(f)$ называется множествами Лебега функции f.

Теорема.

Если какое-то из множеств Лебега функции f измеримо, то остальные три тоже измеримы при всяком a, следовательно, функция f тоже измерима.

Доказательство.

Заметим, что справедливы следующие соотношения:

1) $E_{\geq a}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{>a-1/n}(f)$

2) $E_{<a}(f) = E \setminus E_{\geq a}(f)$

3) $E_{\leq a}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{<a+1/n}(f)$

$4) E_{>a}(f) = E \setminus E_{\leq a}(f)\}$

Эти Соотношения доказываются проверкой того, что левой части равенства включается в правую и обратно, включением правой части в левую.

Докажем, например, соотношение (1): если $x_0 \in E_{\geq a}(f)$, то

$f(x_0) \geq a \;\to\; f(x_0) > a - 1/n, \forall n \;\to\; x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{>a-1/n}(f)$

Обратно, если $x_* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{>a-1/n}(f)$, то

$f(x_*) > a - 1/n, \forall n \ \rightarrow \ \lim\limits_{n\to\infty} f(x_*) \geq \lim\limits_{n\to\infty} (a - 1/n) = a \ \rightarrow \ x_* \in E_{\geq a}(f)$

Утверждение.

Если f измерима, то и $|f|$ измерима.

Доказательство.

Если $a \leq 0$, то $E_{<a}(f) = \emptyset$ и $\emptyset$ измеримо.

Если $a \geq 0$, то $E_{<a}(|f|) = E_{<a}(f) \cap E_{>-a}(f)$ и множества $E_{<a}(f)$, $E_{>-a}(f)$ измеримы.

Теорема.

Пусть $f_n : E \rightarrow R \cup -\infty \cup \infty$ измеримы, пусть $g(x) = \sup_n(f_n)$, $h(x) = \inf_n(f_n)$. Тогда g, h измеримы.

Доказательство.

Имеем $E_{>a}(g) = \bigcup_n E_{>a}(f_n)$, $E_{<a}(h) = \bigcup_n E_{<a}(f_n)$ множества $E_{>a}(f_n)$, $E_{<a}(f_n)$ измеримы, их объединение измеримо. Теорема доказана.

Следствие 1.

Пустьf_n измеримы, положим

$g_m = \sup_{n\geq m} f_n$, $h_m = \inf_{n\geq m} f_n$

Тогда $\forall x \in E$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g_+(x)$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = h_-(x)$

и $g_+(x)$, $h_-(x)$ измеримы.

Доказательство.

$g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \ \rightarrow \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g_+(x)$

поэтому $g_+(x) = \inf n g_n(x)$ измерима по теореме.

Аналогично $h_n(x) \leq h_{n+1}(x) \ \rightarrow \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = h_-(x)$

$h_-(x)$ измерима по теореме. Следствие доказано.

Следствие 2.

Пусть f, g измеримы, тогда и $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ измеримы. В частности, $\max(f, 0)$, $\min(f, 0)$ измеримы.

Доказательство.

$\max(f,g) = \sup_n f_n,\ f_{2k-1} = f, f_{2k} = g$

$\min(f,g) = \inf_n f_n(x)$ с теми же f_n . Следствие 2 следует из следствия 1.

Следствие 3.

Пусть f_n измеримы, и пусть $\forall x \in E \quad \exists c = f(x)$. Тогда f измерима.

Доказательство.

В обозначениях следствия 1 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x))$ тогда следствие 3 следует из следствия 1.

Приведем без доказательства еще результат.

Теорема.

Пусть $f,\ g$ измерима, тогда $af + bg$ и fg измеримы.