МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №3
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
тема: продолжение функционала

Студент гр. 8383 ____________________ Ларин А.

Преподаватель ____________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Задание.

$L \subset R^4, L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0\}$

$a_1 = 8; a_2 = 3; a_3 = 1; a_4 = -1$

$g -$ функционал на $L: y \in L, g(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$

$K = \{y \in L: g(y) = 0\} -$ ядро функционала g

$g^{(0)} \in L; g^{(0)} \perp K, \|g^{(0)}\| = 1 \to (?)\|g\| = |(g, g^{(0)})|$

Найти $g^{(1)}, g^{(2)} \in L$

$g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)} -$ о. н. б. в L

Найти $g^{(3)} \perp L$

$f \sim (f_1, f_2, f_3, f_4): f(g^{(0)}) = g(g^{(0)}), f(g^{(k)}) = 0, k = 1,2,3$

Найти $f_k, f(y) = g(y), y \in L, \|f\| = \|g\|$

Выполнение работы.

Линейный функционал - линейное отображение линейного пространства в множество вещественных или комплексных чисел.

Однородная гиперплоскость - замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, при чем не существует линейного пространства Z такого, что Z ≠ X и Z ≠ Y и Y ⊂ Z ⊂ X.

Норма функционала: $||f|| = sup||x|| = 1|f(x)|$.

Ядро функционала: $\ker f = \{x \in X: f(x) = 0\}$.

По определению $K = \{y \in L: g(y) = 0\}$ найдем K как пересечение гиперплоскости L с гиперплоскостью, в которой функционал обращается в 0:

$$\begin{cases} 8y_1 + 3y_2 + 1y_3 - 1y_4 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \end{cases}$$

Получим базис K:

$(0,1,0.8,-1.8)^T, (1,0,0.4,-1.8)^T$

Найдем $g^{(0)}$. Известно, что $g^{(0)} \in L$ и $g^{(0)} \perp K$.

$$\begin{cases} x_2 + 0.8x_3 - 1.8x_4 = 0 \\ x_1 + 0.4x_3 - 1.8x_4 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 + 1x_3 - 1x_4 = 0 \end{cases}$$

Получим $g^{(0)} = (1, -21,78,23)$. Отнормируем его и получим

$$g^{(0)} = (0.0119, -0.2500,0.9286,0.2738)^T$$

Набор базисных векторов ядра и вектор, перпендикуялрный им образуют базис:$(0,1,0.8, -1.8)^T, (1,0,0.4, -1.8)^T, (0.0119, -0.2500,0.9286,0.2738)^T$

Превратим его в о.н.б. базис:

$$(-0.0119,0.2500, -0.9286, -0.2738)^T$$
$$(0.0000, -0.4527, -0.3621,0.8148)^T$$
$$(0.7482, -0.5656, -0.0612, -0.3414)^T$$

Данный набор векторов является онб в L и значениями $g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)}$

Проверим, что $\|g\| = |(g, g^{(0)})|$

Разложим $g(x): x \in L$ на базисные вектора:

$$x = a(g^{(0)}) + b(g^{(1)}) + c(g^{(2)})$$

$$g(x) = ag(g^{(0)}) + bg(g^{(1)}) + cg(g^{(2)})$$

Здесь $bg(g^{(1)}) + cg(g^{(2)}) = 0$ т.к. $g^{(1)}$ и $g^{(2)}$ – базисные вектора ядра K.

След. $g(x): \|x\| = 1$ будет максимальными если $b, c = 0, x = ag^{(0)}, \|x\| = 1$.

$\|g^{(0)}\| = 1, \sup\limits_{\|x\|=1} |g(x)| = \|g(x)\| = |\mathrm{g}(\mathrm{g}^{(0)})|$.

Найдем $g^{(3)} \perp L$. Гиперплоскость задается как линейная комбинация компонент с коэффицентами равными компонентам нормали. Т.о. a_1, a_2, a_3, a_4 будут являться компонентами нормали и следовательно $g^{(3)} = (8,3,1, -1)^T$

Рассмотрим линейный функционал $f : f(g^{(0)}) = g(g^{(0)}), f(g^{(k)}) = 0, k = 1,2,3$

Ядром f будет линейная оболочка векторов $g^{(k)}, k = 1,2,3$.

Вектор $g^{(0)}$ ортогонален этому базису т.е. является вектором нормали к ядру функционала.

$f_1 = 0.0119 * \lambda, f_2 = -0.2500 * \lambda, f_3 = 0.9286 * \lambda, f_4 = 0.2738 * \lambda$

Подберем λ: $f\left(g^{(0)}\right) = g(g^{(0)})$

$$\left((f_1 , f_2, f_3, f_4)^T , g^{(0)}\right) = g\left(g(0)\right), => \lambda = 0.9644$$

$$f = (0.0115, -0.2411, 0.8955, 0.2641)$$

Докажем, что $f(y) = g(y), y \in L, \|f\| = \|g\|$

$g^{(0)}, g^{(1)}, g^{(2)}$ – базис L.

$$f\left(g^{(1)}\right), f\left(g^{(2)}\right) = 0 \text{ по условию}$$

$g\left(g^{(1)}\right), g\left(g^{(2)}\right) = 0$ т. к. $g^{(1)}, g^{(2)}$входят в базис ядра функционала g

Так же $f\left(g^{(0)}\right) = g(g^{(0)})$ по условию

Следовательно для $g^{(k)}: k = 1,2,3$ $f\left(g^{(k)}\right) = g\left(g^{(k)}\right)$

Разложим вектор из L по базису $\left\{g^{(k)}: k = 1,2,3\right\}$ и возьмем его функционал

$$g(x) = ag\left(g^{(0)}\right) + bg\left(g^{(1)}\right) + cg\left(g^{(2)}\right) = af\left(g^{(0)}\right) + bf\left(g^{(1)}\right) + cf\left(g^{(2)}\right) = f(x), \blacksquare$$