ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Любая задача моделирования в своей постановке содержит две базовые компоненты: множество объектов, на которых строится модель, и операции, которые осуществляют преобразования этих объектов.

Построение модели заключается в решении уравнений или неравенств, связывающих модели и операции. В функциональном анализе множеством объектов, как правило, являются банаховы пространства, а в качестве операций рассматриваются линейные операторы.

Определение 3.1. Оператор $A : X \to Y$, действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y, называется *линейным*, если

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 \ \ \forall k_1, k_2 \in \mathbb{C}, \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Если оба пространства X и Y являются нормированными, то для оператора можно ввести определения ограниченности и непрерывности.

Определение . Оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если $\exists M : \forall x \in X, \ ||x|| < 1$, выполнено неравенство $||Ax|| < M$.

Определение . Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным*, если $\forall x_n \in X, \ ||x_n - x_0|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, выполнено $||Ax_n - Ax_0|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Замечание. В предложении 3.1 будет показано, что эти определения эквивалентны друг другу. В силу линейности оператора определение непрерывности достаточно проверять для последовательностей, стремящихся к нулевому элементу.

Замечание. Очевидно, что множество линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y, само образует линейное пространство. Легко проверить, что введенная ранее норма удовлетворяет всем свойствам, предъявляемым к норме. Тем самым появляется линейное нормированное пространство линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y. Более того, это пространство операторов образует алгебру, т. е. такие операторы можно перемножать $(ABx = A(Bx))$. Легко проверить, что $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$.

Вычислить норму оператора в пространстве бесконечной размерности удается редко. Обычно ограничиваются оценкой нормы, этого зачастую бывает достаточно. В пространствах конечной размерности это сделать проще, но и здесь надо преодолевать технические трудности.

Пример 3.1. Пусть оператор A действует в конечномерном гильбертовом пространстве H и обладает ортогональным базисом собственных векторов $\{e_n\}$, $Ae_n = \lambda_n e_n$. Тогда $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$.

Доказательство. Заметим, что любой элемент x пространства H можно разложить по базису $x = \sum\limits_n x_n e_n$ и при этом $Ax = \sum\limits_n Ax_n = \sum\limits_n x_n \lambda_n e_n$. По условию базис ортогональный, не умоляя общности, можно считать его нормированным и тогда $||x||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2$. Обозначим $M = \max\limits_n |\lambda_n|$. Ясно, что $||Ax||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2 |\lambda_n|^2 \leqslant M^2 \sum\limits_n |x_n|^2 = M^2 ||x||^2$. Значит, $||A|| \leqslant M$. Покажем, что эта оценка точная, т. е. найдется x такой, что $||Ax|| = M||x||$. Положим для определенности $|\lambda_1| = M$. Возьмем в качестве $x = e_1$, тогда $||Ax|| = ||\lambda_1 e_1|| = M||x||$. Следовательно, $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$. ■

Рассмотрим вычисление нормы в пространствах l_n^p, $p = 1, 2, \infty$. Все эти пространства получаются за счет введения различных норм в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Фиксируем какой-нибудь базис $\{e_n\}$ в $\mathbb{R}^n$, тогда любой линейный оператор A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ описывается матрицей $A = (a_{m,k})$, здесь $Ae_m = (a_{m,1}, \ldots, a_{m,n})^T$.

Пример 3.2. Пусть $p = \infty$, тогда

$$||x|| = \sup_m |x_m|, \quad Ax = \Big(\sum_k a_{m,k} x_k\Big)_{m=1,\ldots,n}. \quad ||A|| = \sup_m \sum_k |a_{m,k}|$$

Доказательство. $||Ax|| = \sup\limits_m |\sum\limits_k a_{m,k} x_k| \leqslant \sup\limits_m ||x|| \sum\limits_k |a_{m,k}|$. Обозначим $M = \sup\limits_m \sum\limits_k |a_{m,k}|$ и заметим, что $||Ax|| \leqslant M||x||$.

Чтобы показать точность оценки, предположим, что супремум достигается на первой строчке, т. е. $M = \sum\limits_k |a_{1,k}|$, и построим подходящий элемент x по следующему правилу: $x_k = \operatorname{sign} a_{1,k}$. Тогда $||Ax|| = \sup\limits_m |\sum\limits_k a_{m,k} x_k| = M = M||x||$. Следовательно, $||A|| = M$. ■

$||Ax|| = \sup_k \sum_m |am,k|$

Пример 3.3. Пусть $p = 1$, тогда $||x|| = \sum\limits_m |x_m|$.

Доказательство. $||Ax|| = \sum\limits_m \left|\sum\limits_k a_{m,k} x_k\right| \leqslant \sum\limits_k |x_k| \sum\limits_m |a_{m,k}|$. Обозначим $M = \sup\limits_k \sum\limits_m |a_{m,k}|$, тогда $||Ax|| \leqslant M \sum\limits_k |x_k| = M||x||$. Докажем, что оценка точная. Будем считать, что $M = \sum\limits_m |a_{m,1}|$ (супремум достигается на первом столбце). Построим подходящий элемент x. Положим $x_1 = 1$, $x_m = 0$, если $m > 1$. Тогда $||Ax|| = \sum\limits_m |a_{m,1}| = M||x||$. ■

Пример 3.4. Пусть $p = 2$, в этом случае речь идет о гильбертовом пространстве и, если у оператора имеется базис ортогональных векторов, то вопрос решен в примере 3.1. Это условие, в частности, выполняется, если матрица оператора симметрична.

Чтобы вычислить норму оператора с несимметричной матрицей, нужно использовать определение сопряженного оператора.

Определение 3.5. Пусть A – линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. *Сопряженным* к нему называется оператор A^*, определенный соотношением

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \text{ для любых } x, y \in H.$$

Отметим простые свойства сопряженного оператора:

$$(A^*)^* = A, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Из этих свойств следует, что оператор A^*A совпадает со своим сопряженным (т. е. имеет симметричную матрицу) и его собственные векторы ($A^*Ae_k = \Lambda_k e_k$) образуют ортонормированный базис. Легко видеть, что собственные числа Λ_k неотрицательны:

$$\Lambda_k = (A^*Ae_k, e_k) = (Ae_k, Ae_k) \geqslant 0.$$

Будем считать, что нумерация проведена так, что $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_n \geqslant 0$.

Перейдем к вычислению нормы оператора. Фиксируем $x = \sum\limits_k x_k e_k$ и

оценим $||Ax||^2$:

$$||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (\sum_k x_k \Lambda_k e_k, \sum_m x_m e_m) =$$

$$= \sum_k \Lambda_k x_k^2 \leqslant \Lambda_1 ||x||^2.$$

Значит, $||A|| \leqslant \Lambda_1$. Проверим точность оценки. Положим $x = e_1$, тогда $||Ax|| = ||\Lambda_1 e_1|| = \Lambda_1$ и, следовательно, $||A|| = \Lambda_1$.

Рассмотрим далее несколько простых, но важных свойств линейных операторов.

Предложение 3.1. Линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Доказательство. (1) Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что он не ограничен. В этом случае найдется последовательность $\{x_n\}$, $||x_n|| = 1$, $\alpha_n = ||Ax_n|| \to \infty$. Положим $y_n = \dfrac{x_n}{\alpha_n}$, тогда $||y_n|| = \dfrac{1}{\alpha_n} \to 0$ и по условию непрерывности $||Ay_n||$ должна стремиться к 0, но по построению $||Ay_n|| = 1$. Следовательно, непрерывный оператор обязательно ограничен.

(2) Пусть оператор A ограничен, но не является непрерывным. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к 0, для которой $\alpha_n = ||Ax_n||$ не стремится к 0. Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого N найдется число $n > N$, для которого $||Ax_n|| > \delta$. Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n = \dfrac{x_n}{||x_n||}$, тогда по определению последовательность $||Ay_n||$ тоже должна быть ограничена, но по построению

$$||Ay_n|| = \frac{||Ax_n||}{||x_n||} > \frac{\delta}{||x_n||} \to \infty\,.$$

Полученное противоречие показывает, что любой линейный ограниченный оператор непрерывен. ■

Самая типичная и распространенная задача, связанная с линейными операторами, – решение уравнений $Ax = b$. Исчерпывающим решением такой задачи является построение оператора B такого, что $Bb = x$.

Определение 3.6. Линейный оператор A, отображающий пространство X на себя, называется *обратимым*, если существует $B : X \to X$ такой, что $AB = BA = I$, где I – единичный (тождественный) оператор.

Предложение 3.2 (условие обратимости линейного оператора). Линейный непрерывный оператор A, заданный на линейном нормированном пространстве X, обратим тогда и только тогда, когда существует положительное число m такое, что для любого элемента пространства выполнено неравенство $||Ax|| > m||x||$.

Доказательство. (1) Предположим, что неравенство выполнено. Покажем, что в этом случае оператор является взаимно однозначным, т. е. переводит различные элементы в различные и, следовательно, имеет обратный. Фиксируем два различных элемента $x_1, x_2 \in X$. Заметим, что $||x_1 - x_2|| = \delta > 0$, откуда $||Ax_1 - Ax_2|| = ||A(x_1 - x_2)|| > m||x_1 - x_2|| = m\delta$, следовательно, образы элементов x_1 и x_2 тоже различны.

(2) Предположим, что оператор A имеет обратный оператор B, но неравенство из предложения не выполнено. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $||x_n|| = 1, \quad \alpha_n = ||Ax_n|| \to 0$. Как было отмечено, оператор B линейный и непрерывный. Ясно, что $y_n = Ax_n \to 0$, но последовательность $By_n = x_n$ не стремится к 0, что противоречит непрерывности оператора B. ■

Замечание. Доказанное утверждение дает полезный критерий отсутствия у оператора обратного, но доказательство неравенства, как правило, очень трудная задача.

Рассмотрим далее *устойчивость обратимости* – еще одно важное свойство линейных операторов, утверждающее, что если оператор обратим, то обратимы и «близкие» к нему операторы. Сначала докажем это для тождественного оператора.

Теорема 3.1. Если B – линейный непрерывный оператор, причем $||B|| = q < 1$, то оператор $A = I - B$ имеет обратный, при этом норма обратного оператора A не превосходит $\dfrac{1}{1-q}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные операторы

$$D_n = I + B + B^2 + \ldots + B^n$$

и вычислим произведение

$$AD_n = (I - B)(I + B + B^2 + \ldots + B^n) =$$

$$= I + B + B^2 + \ldots + B^n - B - B^2 - \ldots - B^n - B^{n+1} = I - B^{n+1}.$$

Заметим, что $||B^k|| \leqslant ||B||^k = q^k$ (супремум произведения не больше произведения супремумов). Следовательно, существует сумма ряда

$$D = I + B + B^2 + \ldots + B^n + \ldots,$$

так как последовательность частичных сумм D_n фундаментальная, т. е.

$$||D_n - D_m|| \leqslant q^{n+1} + \ldots + q^m \leqslant \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

значит, $AD = I$. Аналогично проверяется, что $DA = I$. Таким образом, оператор D является обратным для оператора A. ■

Доказанное утверждение говорит о том, что всякий оператор, «мало отличающийся» от тождественного, обратим. Это утверждение справедливо для любого обратимого оператора.

Теорема 3.2 (достаточное условие обратимости). Пусть X – банахово пространство. Если линейный, непрерывный оператор $A : X \to X$ имеет обратный A^{-1} и для оператора $B : X \to X$ справедлива оценка $||B|| < \dfrac{1}{||A^{-1}||}$, то оператор $C = A + B$ тоже обратим.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный оператор $D = A^{-1}C = I + A^{-1}B$. По условию $||A^{-1}B|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||B|| < 1$, следовательно, по теореме Банаха оператор D имеет обратный оператор D^{-1}. Обозначим $F = D^{-1}A^{-1}$, тогда

$$FC = F(A + B) = D^{-1}A^{-1}(A + B) = D^{-1}D = I,$$

$$CF = (A + B)F = AA^{-1}(A + B)D^{-1}A^{-1} = ADD^{-1}A^{-1} = I.$$

Следовательно, $F = (A + B)^{-1}$. ∎

Замечание. Эта внешне простое и формальное утверждение имеет огромный круг приложений. Оно лежит в основе процедуры итераций при решении уравнений методом последовательных приближений.

Следствие. Пусть линейный, непрерывный оператор A отображает банахово пространство X в себя. Если уравнение $Ax = b$ после перезаписи $(I - B)x = b$ допускает оценку $||B|| = q < 1$, то последовательность

$x_{n+1} = b + Bx_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; x_0 – произвольный элемент пространства X) сходится к решению уравнения.

Доказательство. Заметим, что $x_1 = b + Bx_0$, $x_2 = b + Bb + B^2 x_0, \ldots$, $x_n = b + Bb + \ldots + B^n x_0$, следовательно, для $n > k$

$$||x_n - x_k|| = ||B^k b + \ldots + B^{n-1} b + B^n x_0 - B^k x_0|| \leqslant$$

$$\leqslant ||B^k b|| + \ldots + ||B^{n-1} b|| + ||B^k x_0|| + ||B^n x_0|| \leqslant$$

$$\leqslant q^k \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} ||b|| + (q^k + q^n)||x_0||.$$

По условию $q < 1$ и, значит, последовательность фундаментальная, следовательно, существует предел $x_* = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Переходя к пределу в рекуррентном уравнении, определяющем последовательность, получим $x_* = b + Bx_*$ или $Ax_* = b$. ■