Линейные функционалы

Эффективное использование линейного оператора требует тщательного изучения его свойств. Свойства операторов во многом определяются размерностью пространств, в которых они действуют (чем меньше, тем лучше). Пространство, на котором определяется оператор, как правило, определяется условиями задачи, но пространство, в которое он действует, обычно можно выбирать. Самой простой, безусловно, является ситуация, когда пространство, в которое действует оператор имеет размерность 1. Первым такой подход успешно реализовал Декарт, предложивший использовать для описания точек в плоскости два линейных оператора, сопоставляющих точке пару чисел – проекции на координатные оси. Эта идея часто и разнообразно эксплуатировалась впоследствии и с появлением функционального анализа получила специальное наименование.

Определение

Линейным функционалом называется линейное отображение линейного пространства в множество вещественных или комплексных чисел.

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора, и если он действует в нормированном пространстве, то можно говорить о его норме, ограниченности и непрерывности.

Напомним, что для линейных операторов понятия ограниченности и непрерывности совпадают. Линейный функционал не обязательно ограничен, например, линейный функционал $\{x_n\} \to \{nx_n\}$ не ограничен ни в одном из пространств l^p.

Далее будут рассматриваться только линейные непрерывные функционалы, заданные в банаховых пространствах.

Пример 1.

Неравенство Гельдера гарантирует, что любой элемент $f = \{f_n\}$ пространства l^q порождает линейный непрерывный функционал на пространстве l^p (здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Предположим, что $f(x) = \sum\limits_n f_n x_n$. Из неравенства Гельдера следует неравенство

$$|\sum_n f_n x_n| \leq \Big(\sum_n |x_n|^p\Big)^{1/p} \cdot \Big(\sum_n |f_n|^q\Big)^{1/q},$$

т. е. норма этого функционала не больше нормы

$||f|| = \Big(\sum\limits_n |f_n|^q\Big)^{1/q}$ элемента f в пространстве l^q.

Проверим, что эта оценка точная. Обозначим $A^q = \sum\limits_n |f_n|$

($A = ||f||_q$ – в тех случаях, когда надо работать с несколькими нормами, удобно помечать их нижними индексами).

Чтобы доказать точность оценки, надо построить элемент x из l^p, реализующий норму, т. е.

$||x||_p = 1$, $\sum\limits_n f_n x_n = A$.

Положим $x_n = A^\alpha \dfrac{|f_n|}{f_n} |f_n|^{q-1}$, параметр α будет выбран позже.

Тогда

$\sum\limits_n |x_n|^p = A^{\alpha p} \sum\limits_n |f_n|^{p(q-1)} = A^{\alpha p} \sum\limits_n |f_n|^q = A^{\alpha p + q}$
(воспользовались тем, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и, следовательно, $p(q-1) = q$).

Далее $\sum\limits_n f_n x_n = A^\alpha \sum\limits_n |f_n|^q = A^{\alpha+q}$.

Чтобы получить требуемый элемент x, надо обеспечить равенства $\alpha p + q = 0$, $\alpha + q = 1$. Для этого достаточно положить $\alpha = -\dfrac{q}{p} = 1 - q$.

Приведенный пример типичен в том отношении, что доказывать оценку нормы сверху много проще, чем доказывать ее точность.

Пример 2.

Аналогично доказывается, что любая функция из пространства $L^q(a,b)$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(a,b)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Надо помнить, что элементами пространств $L^p(a,b)$ являются не функции, а классы функций, состоящие из функций, интеграл от модуля разности которых равен нулю.

То, что соответствие $g \to < f, g >= \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(a,b)$, следует из неравенства Гельдера.

Доказательство точности оценки полностью повторяет доказательство для l^p, как это происходило в доказательстве неравенства Гельдера.

Пример 3.

Функционалы на пространстве непрерывных функций $C[a,b]$ устроены сложнее.

Легко понять, что значение функции в точке отрезка или интегралы от произведения функции из пространства $C[a,b]$ на фиксированную интегрируемую на отрезке функцию задают линейные непрерывные функционалы.

Однако этим дело не исчерпывается. Можно показать, что любая ограниченная *мера* на отрезке $[a,b]$ задает линейный непрерывный функционал.

Важным свойством линейных функционалов является то, что такой функционал с точностью до постоянного множителя определяется множеством своих нулей.

Определение

Пусть f – линейный функционал на банаховом пространстве X.
Ядром функционала называется множество

$\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Чтобы доказать вышеупомянутое свойство, надо описать структуру линейных пространств, вложенных одно в другое.

Предложение

Пусть Y – подпространство линейного пространства X, тогда равносильны утверждения:

1) для любого $x_0 \in X \setminus Y$ справедливо равенство

$X = \{x = tx_0 + y : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$,

при этом пара $x_0,\ x$ однозначно определяет пару $t,\ y$;

2) если Z – линейное пространство такое, что $Y \subset Z \subset X$, то

$Z = Y$ или $Z = X$.

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$

Предположим, что утверждение (2) неверно. Тогда найдутся элементы

$x_0 \in X \setminus Z$ и $x_1 \in Z \setminus Y$

По условию $x_1 = tx_0 + y$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$, причем $t \neq 0$.

Получили, что $x_0 = \dfrac{x_1}{t} - \dfrac{y}{t}$, откуда $x_0 \in Z$, что противоречит предположению.

$(2 \Rightarrow 1)$

Фиксируем $x_0 \in X \setminus Y$ и обозначим $Z = \{x = tx_0 + y : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$;

из условия следует, что $Z = X$. Осталось проверить единственность представления.

Предположим, что это не так, тогда для некоторого элемента найдутся два представления

$x = t_1x_0 + y_1$, $x = t_2x_0 + y_2$, $t_1 \neq t_2$.

Из этого следует, что $x_0 = -\dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \in Y$. Следовательно, предположение неверно.

Замечание

Рассмотрим линейный функционал $\phi \to \phi(a)$ на пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$.
Его ядро удовлетворяет условиям предыдущего предложения. Но условиям предложения удовлетворяют и множества, плохо связанные с линейными функционалами.

Например, множество всех многочленов образует линейное пространство, вложенное в пространство непрерывных функций, и для него справедливо предыдущее предложение.

Но это множество слишком большое (многочлены образуют всюду плотное подмножество в пространстве непрерывных функций). Если непрерывный функционал обращается на нем в 0, то он тождественно нулевой. Чтобы избежать этого неудобства, вводится дополнительное определение.

Определение

Замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, называется *однородной гиперплоскостью*,

если не существует линейного пространства Z, не равного X или Y,

такого, что $Y \subset Z \subset X$.

Замечание
Добавление к термину эпитета «однородный» выделяет линейные пространства, являющиеся настоящими линейными пространствами (содержащие ноль).

В приложениях часто приходится использовать и «просто» гиперплоскости, т. е. сдвиги однородных гиперплоскостей.

Однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ – это прямая, проходящая через 0, а гиперплоскость – это произвольная прямая.