МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

А. М. КОТОЧИГОВ   И. Г. ЗЕЛЬВЕНСКИЙ

ЛЕКЦИИ
ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2015

УДК 517.98
ББК В14
К73

Коточигов А. М., Зельвенский И. Г.
К73 Лекции по функциональному анализу: учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2015. 90 с.

ISBN

Пособие охватывает некоторые разделы функционального анализа, отобранные по принципу близости к прикладной математике.

Сформировано на основе лекционного курса, который читается студентам ФКТИ. Ориентация на приложения функционального анализа делает пособие полезным студентам всех специальностей, активно использующих математические модели.

УДК 517.98
ББК В14

Рецензенты: кафедра высшей математики СПбГПУ; доц. кафедры математического анализа И. В. Виденский (СПбГУ).

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

ISBN

ВВЕДЕНИЕ

Основной способ развития математики – обобщение. Немецкому математику Леопольду Кронекеру принадлежат слова: «Бог создал натуральные числа, а всё прочее — дело рук человеческих». Функциональный анализ – типичный пример такого способа развития. В начале XX века стало заметно, что накопившиеся математические знания, формально относящиеся к разным ее областям, часто имеют между собой много общего. Была создана необходимая база и сформировалось понимание того, что нужно рассматривать функции, действующие на множестве функций так же, как ранее рассматривались функции, заданные на множестве чисел. Идея не была абсолютно новой, уже давно математики работали с функциями нескольких переменных, т. е. с функциями, заданными на векторах. Особое место здесь занимали простые, но важные объекты – линейные функции. Работа с ними, сильно отличающаяся от работы с функциями общего вида, и сформировала аппарат линейной алгебры. Этот раздел математики выделялся своей «законченностью» (возможностью за конечное число шагов получить ответ на поставленный вопрос), и естественно он оказался очень востребованным в формировании математических моделей самых разнообразных процессов. Возникало желание (у математиков) и необходимость (у тех, кто использовал этот аппарат) «перейти к пределу» – допустить к рассмотрению векторы с бесконечным числом компонент, а затем заменить их на функции. Существует множество ситуаций, где такие переходы естественны и необходимы.

Самым простым и убедительным примером подобного обобщения является скалярное произведение – удобный технический аппарат, отвечающий за геометрию конечномерного пространства:

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n),\ \vec{b} = (b_1, \ldots, b_n),\ \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{b_k}.$$

Если необходимо вычислить энергию периодического сигнал $f(x)$ по его разложению в ряд Фурье $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_n e^{inx}$, достаточно вычислить скалярное произведение бесконечного вектора $\vec{c} = (c_n)$ на себя

$$(\vec{c}, \vec{c}\,) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n \overline{c_n} = \sum_{k=1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Равенство Парсеваля утверждает, что ту же энергию можно вычислить и другим способом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Это наблюдение дает основание для определения скалярного произведения на множестве 2π-периодических функций

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Естественность таких обобщений подтверждается тем, что во всех случаях остается справедливым неравенство Коши–Буняковского

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 \leqslant \left(\vec{a}, \vec{a}\right)\left(\vec{b}, \vec{b}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)} dx\right)^2 \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx\right)\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx\right).$$

В итоге оформилась новая математическая дисциплина – функциональный анализ. Объектами ее исследований стали нормированные линейные пространства и действующие на них линейные операторы. Желание работать с бесконечномерными объектами не позволяет содержательно рассматривать нелинейные операторы, но большое количество важных задач, которые удалось решить с использованием функционального анализа, более чем оправдывают его существование.

Предлагаемое пособие не может претендовать на полноту охвата предмета. Оно построено на многолетнем опыте чтения лекций по функциональному анализу в ЛЭТИ. Основные цели курса сложились таким образом, что в нем переплетаются две линии. Одна направлена на формирование базы основных идей, на которых строится функциональный анализ. Другая имеет дело с приложениями этих идей для решения некоторых классических и прикладных задач.

Пособие состоит из 11 параграфов, представляющих базовые понятия функционального анализа и некоторые из его важных разделов. Первый параграф посвящен линейным нормированным пространствам, здесь вводятся базовые понятия функционального анализа и обсуждаются их простейшие свойства. Во втором параграфе вводятся важные характеристики бесконечномерных пространств (типичных объектов рассмотрения в функциональном анализе). Эти характеристики основаны на сравнении «размеров» множеств, содержащих бесконечное число элементов. Основное внимание в этом параграфе уделено специфическому аппарату теории множеств и соответствующим примерам. В третьем параграфе в таком же ключе, как и в первом, рассматриваются свойства линейных операторов, действующих в таких линейных нормированных пространствах. Параллельно с этим рассматриваются конечномерные аналоги введенных понятий, для которых нетрудно контролировать те или иные характеристики. Эти примеры позволяют понять смысл и возможности использования введенных объектов. Четвертый параграф посвящен рассмотрению линейных функционалов. Хотя они и являются частным случаем линейных операторов, но их значение в решении задач функционального анализа требует их отдельного изучения. В пятом параграфе обсуждается одна из фундаментальных теорем функционального анализа – теорема о продолжении линейного функционала. Этот банальный в конечномерной ситуации факт в пространствах бесконечной размерности становится уникальным инструментом для изучения этих пространств. Шестой и седьмой параграфы вставные, изложенный в них материал – теория меры и интеграл Лебега – формально не относится к функциональному анализу. Однако их значение столь велико, что без знания этого материала невозможно правильно понять содержание курса. Восьмой параграф содержит важную для приложений переформулировку теоремы о продолжении линейного функционала – теорему об отделимости выпуклых множеств. Как и в первом случае, очевидное в конечномерной ситуации утверждение о том, что два выпуклых множества всегда можно разделить плоскостью, превращается в общем случае в утверждение, имеющее множество важных следствий. В качестве иллюстрации этого утверждения здесь же рассмотрен алгоритм линейной оптимизации, основанный на теореме об отделимости. Важное и обширное поле исследований функционального анализа – спектральная теория операторов – затронуто в девятом параграфе. Основные усилия здесь сосредоточены на описании условий, при которых в бесконечномерной ситуации сохраняется возможность доказать аналог теоремы о приведении матрицы к диагональной форме. В десятом параграфе рассмотрены некоторые важные для приложений результаты об аппроксимации в банаховых пространствах. Заключительный одиннадцатый параграф близок по духу к содержанию девятого параграфа. В нем показано, как спектральная теория операторов позволяет сформировать универсальную точку зрения на ортогональные многочлены.

Текст пособия содержит много простых доказательств, которые не имеет смысла излагать в ходе лекций. Авторы полагают, что самостоятельный разбор этих доказательств является лучшим способом усвоения материала курса. В то же время в тех случаях, когда доказательство сложное, в тексте излагается только план доказательства, содержащий основные постулаты, на которых оно основано. Пособие содержит описание нескольких тем для самостоятельной работы, условно именуемых «лабораторными работами». Самостоятельная работа с этими задачами создаст хорошую базу для правильного понимания содержания курса.

Завершение доказательств теорем и других утверждений для удобства чтения помечено знаком $\blacksquare$.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Простое и естественное понятие линейного пространства – один из основных объектов исследований в функциональном анализе.

Определение 1.1. Множество X называется *линейным пространством* над полем K, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам x, y множества X ставится в соответствие третий элемент этого множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый символом $x + y$.

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу x множества X и любому элементу λ поля K ставится в соответствие элемент u этого множества, называемый произведением элемента x на элемент (число) λ и обозначаемый символом λx.

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

1) $x + y = y + x$ (*коммутативность*);

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*ассоциативность*);

3) существует нулевой элемент 0 такой, что $x + 0 = x$ (для любого x);

4) для каждого элемента x существует противоположный элемент $x' \in X$ такой, что $x + x' = 0$;

5) $1 \cdot x = x$, где 1 – единица поля K;

6) $\lambda \cdot (\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x, \quad \lambda, \mu \in K$;

7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda, \mu \in K$;

8) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \lambda \in K$.

Замечание. Элементы линейного пространства часто называют *векторами*.

Структура линейного пространства однако слишком бедна – в ней нельзя совершать предельные переходы, поэтому здесь всегда будут рассматриваться линейные пространства, снабженные нормой. С другой стороны, объем пособия не позволяет «отвлекаться» на поля, отличные от полей вещественных и комплексных чисел.

Определение 1.2. Нормой в линейном пространстве X называется любая функция, отображающая пространство X в множество вещественных неотрицательных чисел $x \to ||x||$ такая, что

1) для любого $x \in X$ и для любого $k \in K$ выполнено равенство $||kx|| = |k| \cdot ||x||$;

2) для любых $x, y \in X$ справедливо неравенство $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$;

3) для любого $x \in X$ справедливо неравенство $||x|| \geqslant 0$, причем равенство $||x|| = 0$ возможно только для $x = 0$.

Норма позволяет измерять расстояние $||x - y||$ между парой элементов линейного пространства $x, y \in X$. Следовательно, можно говорить о пределах последовательностей $x_n \in X : x_n \to x_0$, если $||x_n - x_0|| \to 0$.

Пример 1.1. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$, конечно, образует линейное пространство над $\mathbb{Q}$. Оно является полем, и в качестве коэффициентов можно взять сами элементы того же пространства. Но надо понимать, что говорить о сходимости по норме можно только, когда известен элемент $x_0 \in X$. По этой причине последовательность рациональных чисел, сходящуюся, скажем, к числу $\sqrt{2}$, нельзя назвать сходящейся в смысле нашего определения, так как предельный элемент не является элементом исходного пространства.

Чтобы облегчить операции с предельными переходами, вводится понятие фундаментальной последовательности.

Определение 1.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : \quad \forall\, n, k > N \quad ||x_n - x_k|| < \varepsilon.$$

Приняв такое определение, всегда можно расширить исходное пространство так, что всякая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Определение нормы допускает множество реализаций в одном и том же линейном пространстве, что на первый взгляд представляется излишним, однако решение задачи может быть значительно упрощено за счет введения подходящей нормы. Точнее говоря, трудности решения задачи могут быть переведены в трудности работы с определением. Главным достоинством такого подхода является то, что решение становится более прозрачным, благодаря хорошему структурированию.

Рассмотрим примеры нормированных пространств над полем $\mathbb{R}$, часто используемых в решении разнообразных задач. На этих примерах хорошо видна схема обобщения понятий, типичная для функционального анализа.

Пример 1.2. $l^1_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = |x_1| + \ldots + |x_n|\}$.

Пример 1.3. $l_n^2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}\}$ – это стандартное n-мерное евклидово пространство.

Пример 1.4. $l_\infty^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : ||x|| = \max\{|x_k|,\, k = 1, \ldots, n\}\}$.

Свойства пространства с нормой во многом определяются геометрией его шара $\{x : ||x|| < 1\}$. В приведенных примерах для малых размерностей легко изобразить шары графически. Например, для $n = 2$ и $p = 1$ «шар» представляет из себя квадрат с вершинами на осях координат $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ $(0, -1)$, для $n = 2$ и $p = \infty$ «шар» представляет из себя квадрат с вершинами $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ $(1, -1)$, а для $n = 2$ и $p = 2$ «шаром» оказывается единичный круг с центром в начале координат. Эти геометрические ассоциации полезны тем, что позволяют экстраполировать свойства нормы с малых размерностей на большие и даже бесконечные размерности. Следующие примеры показывают, как это происходит.

Пример 1.5. $l^1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$.

Пример 1.6. $l^2 = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2} < \infty\}$ – это бесконечномерное евклидово пространство.

Пример 1.7. $l^\infty = \{x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) : ||x|| = \sup\{|x_k|,\, k = 1, \ldots, n, \ldots\} < \infty\}$.

Необходимо проверить что введенные в примерах функции являются нормами – удовлетворяют свойствам, перечисленным в определении. Первое и третье свойства очевидны. Проверка неравенства треугольника в первом и третьем примерах переводится на координаты и сводится к числовым неравенствам

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \quad \max\{|a|, |b|\} \leqslant |a| + |b|.$$

Неравенство треугольника в l^2 легко вывести из неотрицательности нормы (свойство 3):

$$0 \leqslant ||x - \lambda y||^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \lambda y_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Из неотрицательности квадратного трехчлена следует, что его дискриминант меньше либо равен 0. Это дает оценку (неравенство Коши–Буняковского)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)$$

и далее

$$||x+y||^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^2 = (||x|| + ||y||)^2.$$

Переход к бесконечной размерности вносит в работу с таким объектами большие трудности. Например, приходится заменять максимум на супремум, так как бесконечная последовательность может не достигать максимума (например, $x_n = (n-1)/n$), в то время как точная верхняя граница sup существует у любой ограниченной последовательности. Этот факт – простое следствие аксиомы вложенных промежутков. Напомним определение:

$$A = \sup\{x_n\}, \text{ если } \forall\, n \;\; x_n \leqslant A \text{ и } \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n : A - x_n < \varepsilon.$$

Еще одно отличие заключается в том, что эти пространства существенно различаются по составу элементов: если $x = (1, \ldots, 1, \ldots)$, то $x \in l^\infty$, но $x \notin l^1$, $x \notin l^2$; если $x = (1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots)$, то $x \in l^2$, но $x \notin l^1$.

Это обстоятельство естественно увязывается с геометрией шаров. Они соприкасаются в точках пересечения с осями координат и разнятся на «биссектрисах» координатных углов (прямых с параметрическим описанием $(t, t, \ldots, t)$) тем больше, чем больше размерность.

Как было отмечено ранее, появление нескольких норм в одном линейном пространстве оправдывается тем, что норма может быть приспособлена к решению конкретной задачи. Оказывается, что все возможные нормы можно описать в геометрических терминах – они соответствуют выпуклым множествам, для которых 0 является внутренней точкой.

Определение 1.4. Пусть W – выпуклое множество и 0 является его внутренней точкой. *Нормой Минковского*, порожденной множеством W, называется

$$||x|| = \inf\left\{\lambda : \frac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}.$$

$x \in W$ $\longrightarrow$ $-x \in W$

Это определение нуждается в уточнении. Плоский круг $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1,\ z = 0\}$ является выпуклым множеством, но не определяет норму в пространстве $\mathbb{R}^3$. В бесконечномерных пространствах требуется более аккуратное описание множества. Это видно из следующих определения и примера.

Определение 1.5. *Выпуклым телом* называется выпуклое множество W, в котором существует такая точка w, что для любого $x \in X$ найдется число $\varepsilon(x) > 0$ такое, что множество W содержит отрезок $w + tx$, при всех $t \in (-\varepsilon(x); \varepsilon(x))$.

В конечномерных ситуациях это определение различает множества, имеющие одинаковую размерность. Однако в бесконечномерных пространствах это уже не так, примером может служить так называемый *истончающийся параллелепипед* P. Множество $P = \{x \in l^2 : |x_n| < 2^{-n}\}$ является выпуклым и открытым (т. е. вместе с каждой точкой содержит в себе некоторый шар с центром в этой точке). Но для ненулевого элемента $y = \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \in l^2$ и любого $x \in P$ не существует положительного числа t такого, что $x + ty \in P$, поскольку из соотношения $\left|x_n + \dfrac{t}{n}\right| < 2^{-n}$ следовало бы, что $\left|\dfrac{t}{n}\right| = \left|\dfrac{t}{n} + x_n - x_n\right| \leqslant \left|\dfrac{t}{n} + x_n\right| + |x_n| \leqslant \dfrac{2}{2^n}$. Таким образом, $|t| \leqslant \dfrac{2n}{2^n}$ при всех n и, значит, $t = 0$.

Теорема 1.1 (Минковского). Если W – выпуклое ограниченное тело и 0 является его внутренней точкой, то выражение $||x|| = \inf\left\{\lambda : \dfrac{x}{\lambda} \in W,\ \lambda > 0\right\}$ задает норму в пространстве X. $x \in W \Rightarrow -x \in W$

Верно и обратное, единичный шар в линейном нормированном пространстве является выпуклым ограниченным множеством и 0 является его внутренней точкой.

Доказательство. Будет доказано только первое утверждение, так как второе легко выводится из свойств нормы.

Проверим, что $||x||$ удовлетворяет всем свойствам нормы. Однородность ($||kx|| = |k| \cdot ||x||$) и неотрицательность очевидны. Из ограниченности W следует, что норма равна нулю только для нулевого элемента.

Остается проверить неравенство треугольника $||x_1 + x_2|| \leqslant ||x_1|| + ||x_2||$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем числа r_1, r_2 так, что $||x_k|| \leqslant r_k \leqslant ||x_k|| + \varepsilon$. Заметим, что $\dfrac{x_k}{r_k} \in W$ и положим $r = r_1 + r_2$. В силу выпуклости множество W содержит отрезок $\frac{t}{r}\cdot\frac{x_1}{r_1}+\frac{1-t}{r}\cdot\frac{x_2}{r_2}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Полагая $t = r_1$, получим $\frac{x_1+x_2}{r} \in W$. Следовательно, $||x_1+x_2|| \leqslant r = r_1+r_2 \leqslant ||x_1||+||x_2||+$ $+2\varepsilon$ и в силу произвольности выбора ε получаем $||x_1+x_2|| \leqslant ||x_1||+||x_2||$. ■

В некоторых случаях бывает удобно работать с целым семейством таких пространств.

Пример 1.8. $l^p = \{x = (x_1, \dots, x_n, \dots) : ||x|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$, $x_n \in \mathbb{R}$.

Еще одно важное семейство пространств возникает из предыдущего примера благодаря переходу от последовательностей к функциям.

Определение 1.6. $L^p(a,b)$ – это пространство функций f, для которых $|f(x)|^p$ интегрируема на интервале (a,b), т. е.

$$L^p(a,b) = \left\{f(x) : ||f||_p = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} < \infty\right\}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Определение 1.7. $L^\infty(a,b) = \left\{f(x) : ||f||_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|\right\}$.

Подтверждением естественности последнего определения является следующее равенство:

$$||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p.$$

Несмотря на внешние аналогии, определение нормы в пространствах $L^p(a,b)$ требует существенной доработки. Дело в том, что введенные «кандидаты» на норму в пространствах $L^p(a,b)$ не удовлетворяют третьему свойству нормы. Действительно, функция, определенная равенствами $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1$, $f(x) = 0$, $x \neq \frac{a+b}{2}$, не является нулевой, однако, $||f||_p = 0$, $1 \leqslant p < \infty$, $||f||_\infty = 1$. Это, в частности, «опровергает» утверждение задачи, предложенной ранее. Избежать этой неприятности в рамках существующих определений невозможно. Выход состоит в том, что надо изменить точку зрения на функции, точнее, считать одинаковыми функции, отличающиеся, скажем, в одной точке. Но сразу возникает вопрос о том, какие именно функции считать одинаковыми. Ответ на этот вопрос сформулировал в начале XX века французский математик Анри Лебег. Он разработал схему, позволяющую говорить о размерах (обобщающих длину, площадь, объем) практически любого множества. Эта схема будет рассмотрена позже. Для описания пространств $L^p(a,b)$ достаточно считать равными функции, отличающиеся друг от друга на множествах нулевого размера. Можно проверить, что такие классы эквивалентности образуют линейное пространство, на котором введенная норма удовлетворяет всем требуемым свойствам. Это странное, на первый взгляд, отношение к функции на поверку оказывается совершенно естественным. Привычные для нас непрерывные функции, будучи измененными на множестве нулевого размера, «помнят» свой первоначальный вид. Его можно восстановить, подходя к точкам маленького множества по последовательностям точек множества, где изменений не произошло. Так, например, действуют, когда по непрерывности определяют в нуле значение функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

Еще одна, правда, меньшая трудность связана с желанием сохранять справедливым неравенство треугольника. Для $p = 1$ и $p = \infty$ неравенство проверяется непосредственно, для $p = 2$ проходит та же схема доказательства через неравенство Коши–Буняковского. Для остальных p требуется новое доказательство. Здесь возникает еще одно подтверждение естественности определений $L^p(a, b)$ пространств. Аналогом неравенства Коши–Буняковского оказывается *неравенство Гельдера.* Точнее, неравенство Гельдера обобщает неравенство Коши–Буняковского, реализуя переход от $p = 2$ к $1 \leqslant p < \infty$. Это неравенство позволяет доказать неравенство треугольника в пространствах $L^p(a, b)$, но только этим значение неравенства Гельдера не ограничивается. Главное его значение – в выявлении связи между парами пространств с индексами, удовлетворяющими соотношению $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Значение этой связи настолько велико, что пару пространств $L^p(a, b)$ и $L^q(a, b)$ называют *двойственными* пространствами.

Доказательство неравенства Гельдера основано на следующем элементарном предложении.

Предложение 1.1. Пусть p и q – вещественные числа, большие единицы и такие, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда для любых чисел a и b справедливо неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = x^m - mx$, $x > 0$, $0 < m < 1$. Так как $\varphi'(x) = m(x^{m-1} - 1)$, то $\varphi(1) \geqslant \varphi(x)$ при всех положительных x. Последнее неравенство можно переписать в виде $x^m - 1 \leqslant m(x - 1)$. Положим теперь $m = \dfrac{1}{p}$, $x = \dfrac{|a|^p}{|b|^q}$.

Тогда $|a| \cdot |b|^{-q/p} - 1 \leqslant \dfrac{|a|^p|b|^{-q} - 1}{p}$. Если домножить неравенство на $|b|^q$ и учесть, что $q - \dfrac{q}{p} = 1$, то получится требуемое неравенство. ■

Следствие 1 (дискретное неравенство Гельдера):

$$\sum_n |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_n |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_n |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Доказательство. Для нулевых последовательностей оценка очевидна. Далее считаем, что обе последовательности не нулевые. Положим $A^p = \sum\limits_n |x_n|^p$, $B^q = \sum\limits_n |y_n|^q$, $x_n' = \dfrac{x_n}{A}$, $y_n' = \dfrac{y_n}{B}$. Неравенство из предложения дает $\left|x_n' y_n'\right| \leqslant \dfrac{|x_n'|^p}{p} + \dfrac{|y_n'|^q}{q}$. Суммируя неравенства, получим $\sum\limits_n \left|x_n' y_n'\right| \leqslant \dfrac{1}{p}\sum\limits_n \left|x_n'\right|^p + \dfrac{1}{q}\sum\limits_n \left|y_n'\right|^q = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Следовательно, $\sum\limits_n |x_n y_n| \leqslant AB$. ■

Аналогично доказывается и следствие 2.

Следствие 2 (неравенство Гельдера для функций):

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

Здесь $f \in L^p(a,b)$ и $g \in L^q(a,b)$.

Еще один пример – пространство непрерывных функций на отрезке.

Определение 1.8. $C[a,b]$ – пространство непрерывных функций на отрезке: $[a,b]$ с нормой $||f|| = \max\{|f(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Проверьте, что это равенство задает норму.

Лабораторная работа «Вычисление нормы элемента». Задача вычисления нормы элемента нормированного пространства, как правило, трудная. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим пример: алгоритм вычисления нормы, определенной в $\mathbb{R}^3$ с помощью выпуклого многогранника, заданного набором своих вершин. Цель данного примера – описание процедуры, позволяющей вычислить норму любого элемента.

Задача будет решена, если появится возможность для любой точки пространства вычислить расстояние от нее до границы многогранника. Это расстояние реализуется на одной из граней многогранника, точнее, на той, в конусе которой лежит точка (конусом грани здесь названо множество, образованное выходящими из 0 лучами, пересекающими грань). Заметим, что этот конус является выпуклой оболочкой лучей, проходящих через вершины грани.

Чтобы проверить справедливость этого утверждения, достаточно представить следующую картину: пусть по каждому лучу, исходящему из 0 и проходящему через вершину многогранника, движется точка, причем путь от 0 до вершины она проходит за единицу времени. Фиксируем одну из граней многогранника G. Подвижные точки, лежащие на лучах, проходящих через вершины грани, в момент времени t образуют многоугольник $G(t)$, подобный и параллельный многоугольнику G. Любая точка в конусе грани принадлежит одному и только одному многоугольнику $G(t)$. Норма точек, лежащих в многоугольнике $G(t)$, равна t. Всякая точка (не принадлежащая границе конусов) принадлежит одному и только одному конусу грани.

Остается выяснить, какому из конусов граней принадлежит заданная точка пространства. Эта задача легко решается, если конус образован треугольной гранью, в этом случае три вектора, исходящие из начала и заканчивающиеся в вершинах грани, образуют базис пространства. Точка попадает в конус тогда и только тогда, когда ее координаты в этом базисе неотрицательны. Для того чтобы получить координаты разложения, удобно использовать биортогональный базис. Если же грань не является треугольной, то ее можно разбить на серию непересекающихся треугольников (фиктивные грани) и работать с каждым из них по отдельности.

Приведем план решения поставленной задачи.

1. Описание граней многогранника и внешних нормалей к ним.

2. Проверка того, что 0 является внутренней точкой многогранника.

3. Если среди граней есть не треугольники, то надо создать систему фиктивных граней, разрезая каждую грань на треугольные куски.

4. Для каждого «треугольного» конуса фиксируем базис, образованный векторами, соединяющими 0 с вершинами соответствующей грани, и строим биортогональный базис (векторные произведения пар векторов исходного базиса).

5. Чтобы найти норму заданной точки, надо вычислить ее координаты во всех базисах треугольных конусов и найти конус, где все коэффициенты неотрицательны. Нетрудно показать, что норма точки равна сумме этих коэффициентов.

Среди линейных нормированных пространств естественно выделяется подмножество пространств с геометрией, близкой к обычной евклидовой геометрии. Это пространства, где задано скалярное произведение, порождающее норму. Главная отличительная черта таких пространств состоит в том, что в них определено понятие ортогональности элементов (это сильно облегчает любые действия в нормированном пространстве). В общей ситуации скалярное произведение, как и норма, должно определяться аксиоматически.

Определение 1.9. Говорят, что в линейном пространстве X задано скалярное произведение, если для любых двух элементов пространства $x, y \in X$ определено комплексное число (x, y), которое называется их *скалярным произведением*, и при этом выполнены следующие условия:

1) $(kx, y) = k(x, y)$;
2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
3) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
4) $(x, x) \geqslant 0$, причем равенство $(x, x) = 0$ влечет $x = 0$.

В любом пространстве со скалярным произведением выполнено неравенство Коши–Буняковского $(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y)$. Доказательство такое же, как и приведенное ранее доказательство этого неравенства в пространстве l^2. Легко проверить, что скалярное произведение в пространстве l^2 можно задать соотношением $(x, y) = \sum\limits_n x_n \overline{y_n}$. Аналогичным образом можно задать скалярное произведение в $L^2(a, b)$:

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Скалярное произведение всегда порождает норму по следующему правилу: $||x||^2 = (x, x)$. Все требования к норме вытекают из свойств скалярного произведения, кроме неравенства треугольника, но, как было показано при рассмотрении свойств пространства l^2, оно вытекает из неравенства Коши–Буняковского.

Пространства со скалярным произведением сохраняют еще одно важное свойство евклидовых пространств – равенство параллелограмма:

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = ||x + y||^2 + ||x - y||^2.$$

Действительно, $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) =$ $= (x, x) + 2(x, y) + (y, y) + (x, x) - 2(x, y) + (y, y) = 2(||x||^2 + ||y||^2)$.

Несложно проверить, что в пространствах l^1, l^∞, $L^1(a, b)$, $L^\infty(a, b)$, $C[a, b]$ равенство параллелограмма не выполняется, что влечет за собой невозможность задания нормы в этих пространствах с помощью скалярного произведения.

Некоторой компенсацией отсутствию понятия перпендикуляра послужит теорема 2.1 о почти перпендикуляре.

§ 2. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА. СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вернемся к обсуждению фундаментальных последовательностей (определение 1.3). Крайне неудобно работать с пространствами, у которых фундаментальная последовательность может не иметь предела в том же пространстве. Именно по этой причине необходим переход от рациональных чисел к вещественным. Рассмотрим другой пример. В пространстве $C[a,b]$ можно ввести норму, порожденную скалярным произведением из $L^2(a,b)$, при этом возникнут фундаментальные последовательности, не сходящиеся в исходной метрике, но из свойств интеграла Римана нетрудно получить, что пределами в метрике скалярного произведения окажутся функции из $L^2(a,b)$. Не всегда так легко описать пространство фундаментальных последовательностей, но можно показать, что оно всегда образует линейное нормированное пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Определение 2.1. Линейное нормированное пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Всякое линейное нормированное пространство можно *пополнить*. Эта технически сложная процедура состоит в объяснении того, что после пополнения снова получится линейное пространство. Схема доказательства таких утверждений отработана на обосновании перехода от рациональных чисел к вещественным и может без серьезных изменений применяться в других случаях. Здесь эти вопросы рассматриваться не будут.

Определение 2.2. Линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*, если оно полно, т. е. всякая фундаментальная последовательность сходится к элементу того же пространства.

Отсутствие скалярного произведения в банаховых пространствах отчасти компенсируется следующей теоремой.

Теорема 2.1. Пусть X – банахово пространство, Y – замкнутое линейное пространство, содержащееся в X и не совпадающее с ним. Тогда для любого положительного числа ε найдется элемент $x_* \in X$ такой, что $||x_*|| = 1$ и $\inf\{||x_* - y|| : y \in Y\} \geqslant 1 - \varepsilon$.

Доказательство. Возьмем какой-нибудь элемент $x_1 \in X \setminus Y$. Обозначим через $d = \inf\{||x_1 - y|| : y \in Y\}$ – расстояние от точки до пространства Y, можно считать, что $d > 0$. Из определения инфимума следует существование элемента $y_1 \in Y$ такого, что $||x_1 - y_1|| \leqslant \dfrac{d}{1-\varepsilon}$. Положим $x_* = \dfrac{x_1 - y_1}{||x_1 - y_1||}$. Тогда $||x_*|| = 1$ и для всех $y \in Y$ получаем

$||x_* - y|| = \left\| \dfrac{x_1 - y_1 - y||x_1 - y_1||}{||x_1 - y_1||} \right\|$. Следовательно, $\inf\{||x_* - y|| : y \in Y\} =$
$= \dfrac{1}{||x_1 - y_1||} \inf\{\big||x_1 - y_1 - y||x_1 - y_1||\big||\} \geqslant \dfrac{d}{||x_1 - y_1||} \geqslant \dfrac{d}{d/(1-\varepsilon)} = 1 - \varepsilon$ (первое неравенство верно потому, что $y_1 + y||x_1 - y_1|| \in Y$ и $\inf\{||x_1 - y|| : y \in Y\} = d$). ■

Определение 2.3. Линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым пространством*, если оно является полным в метрике порожденной скалярным произведением.

В дальнейшем будем рассматривать только полные нормированные пространства.

Возвращаясь к описанию линейных нормированных пространств в целом, следует заметить, что после введения нормы и проверки ее свойств всегда остается вопрос о полноте пространства.

Множества с конечным числом элементов могут образовывать линейное пространство, например, поле вычетов по модулю простого числа, но аппарат функционального анализа ориентирован на бесконечные объекты. При этом невозможно ограничиться грубой градацией, в которой множество может быть либо конечным, либо бесконечным. Необходимость сравнения бесконечных множеств требует дополнительных определений.

Определение 2.4. Два множества называются *равномощными*, если существует функция, взаимно однозначно отображающая одно множество на другое.

Это естественное определение часто приводит к неожиданным, на первый взгляд, результатам.

Пример 2.1. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ равномощно множеству четных чисел $2\mathbb{N}$. Определим отображение $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ равенствами $f(2n-1) = 4n-2$, $f(2n) = 4n$. Оно задано на всех элементах $\mathbb{N}$, разным элементам отвечают разные образы ($n \neq k \Rightarrow f(n) \neq f(k)$), и имеет обратное ($f^{-1}(4n-2) = 2n-1$, $f^{-1}(4n) = 2n$).

Пример 2.2. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ равномощно множеству целых чисел $\mathbb{Z}$. Проверьте, что отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(2n-1) = n$, $f(2n) = -n$ обладает нужными свойствами.

Пример 2.3. Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ равномощно множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Из предыдущего примера видно, что достаточно ограничиться положительными рациональными числами $\mathbb{Q}_+$. Чтобы построить нужное отображение, расположим все рациональные числа в виде таблицы со столбцами $1, 2, \dots, k, \dots$ и строками $1, 2, \dots, n, \dots$. На пересечении k-й строки и n-го столбца поместим рациональное число $\dfrac{k}{n}$. Остается провести нумерацию элементов таблицы $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$. $f\left(\dfrac{1}{1}\right) = 1$; далее рассмотрим дроби, у которых $k + n = 3$ (побочная диагональ таблицы): $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$, $f\left(\dfrac{2}{1}\right) = 3$. После этого перейдем к следующей побочной диагонали $k + n = 4$ и, чтобы обеспечить плавность движения, пройдем ее в обратном направлении: $f\left(\dfrac{3}{1}\right) = 4$, $f\left(\dfrac{2}{2}\right) = 5$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 6$. Процесс нумерации по побочным диагоналям можно продолжить (по индукции) и получить взаимно однозначное отображение множества положительных рациональных чисел на множество натуральных чисел.

Однако, предположение о том, что всякое множество можно перенумеровать (т. е. всякое бесконечное множество равномощно множеству натуральных чисел) неверно. Это показывает следующий пример.

Пример 2.4. Множество точек отрезка $[0, 1]$ имеет большую мощность, чем множество натуральных чисел.

Доказательство. Отрезок $[0, 1]$ содержит точки $1, \dfrac{1}{2}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots$, поэтому его мощность не может быть меньше множества $\mathbb{N}$. Предположим, что данное утверждение неверно, и множества имеют одинаковую мощность. Тогда найдется функция $f(x) = n$, взаимно однозначно отображающая отрезок $[0, 1]$ на $\mathbb{N}$. Построим алгоритм разбиения отрезка, которое позволит увидеть, что такое предположение неверно.

Разобьем отрезок на четыре равные части и выберем один из отрезков так, чтобы он не примыкал к отрезку, содержащему точку, у которой $f(x) = 1$. Выбранный отрезок тоже разобьем на четыре равные части и выберем один из отрезков так, чтобы он не примыкал к отрезку, содержащему точку, у которой $f(x) = 2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных замкнутых промежутков I_n, длины 4^{-n} таких, что точка x, у которой $f(x) = n$, отстоит от интервала с тем же номером на расстояние не меньшее, чем 4^{-n}. Аксиома вложенных промежутков гарантирует наличие точки $x_* \in [0, 1]$, принадлежащей всем промежуткам. По сделанному предположению $f(x_*) = m$. Но это приводит к противоречию, так как точка, имеющая номер m, отделена от точки x_* отрезком длины не менее 4^{-m}. ■

Любой отрезок отображается на отрезок $[0, 1]$ с помощью линейной функции и, следовательно, они равномощны. Вещественная прямая также равномощна отрезку, в качестве отображения можно взять функцию

$\operatorname{arctg} x$. Единичный квадрат имеет ту же мощность, что отрезок. Эффектным доказательством этого является построение непрерывной кривой (образа отрезка $[0, 1]$), проходящей через каждую точку квадрата (кривая Пеано). Построение основано на итерировании, постепенно усложняющем структуру кривой. Доказательство этого утверждения можно найти в [1]. Ту же мощность имеет множество точек куба в евклидовом пространстве любой размерности. Надежду на то, что других мощностей нет, опровергает следующее наблюдение. Для конечного множества, состоящего из N элементов, общее число подмножеств равно 2^N. Для бесконечного множества X множество всех его подмножеств по аналогии обозначают 2^X. Несложно показать, что для бесконечного множества множество всех его подмножеств имеет большую мощность, чем исходное множество. Тем самым шкала мощностей не ограничена. Немецкий математик Кантор в конце XIX века впервые обнаружил, что множество натуральных чисел «меньше» множества точек на отрезке. После этого он поставил вопрос о существовании множеств промежуточной мощности между натуральными числами и отрезком. Почти сто лет продолжались интенсивные попытки решить этот вопрос, и только в 70-е годы XX века было доказано, что это вопрос аксиоматики, т. е. можно принять аксиому об отсутствии промежуточных мощностей или, наоборот, принять как аксиому, что такие множества есть, строить на этих системах две «разные математики», каждая из которых не содержит внутренних противоречий. В принципе такая ситуация уже встречалась в начале XIX века, когда выяснилось, что существуют геометрии, в которых не выполнена пятая аксиома Евклида. Но для множеств вопрос значительно сложнее хотя бы потому, что до сих пор нет содержательных примеров, различающих эти аксиоматики.

Вернемся к банаховым пространствам. Оказывается, понятие мощности множества для них очень существенно. В прикладных вопросах, связанных с вычислениями, важную роль играет понятие ε-сети, позволяющее заменить работу с бесконечным множеством точек рассмотрением специальным образом построенного конечного множества. Однако в бесконечномерном пространстве не может быть конечной ε-сети. Некоторой заменой этому понятию для банаховых пространств является понятие всюду плотного множества.

Определение 2.5. Подмножество банахова пространства X называется *всюду плотным* в X, если для любого элемента x из X найдется последовательность элементов $\{a_n\}$ из A такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$. В этом случае говорят, что множество X является *замыканием* множества A.

Пример 2.5. Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в банаховом пространстве вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Пример 2.6. Множество многочленов с рациональными коэффициентами

$$\mathcal{P} = \{p(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n, p_k \in \mathbb{Q}\}$$

всюду плотно в банаховом пространстве непрерывных функций $C[a,b]$.

Пример 2.7. Множество кусочно-постоянных функций с рациональными коэффициентами и рациональными концами интервалов постоянства

$$\mathcal{S} = \Big\{ f(x) = c_n,\ x \in [a_n, b_n);\ \bigcup_n [a_n, b_n) = \mathbb{R},$$

$$[a_n, b_n) \cap [a_k, b_k) = \varnothing \text{ при } n \neq k,\ a_n, b_n, c_n \in \mathbb{Q},\ n, k \in \mathbb{N} \Big\}$$

всюду плотно в банаховом пространстве $L^p[a,b]$.

Пример 2.8. Множество многочленов с рациональными коэффициентами всюду плотно в банаховом пространстве $L^p[a,b]$.

Доказательство последних утверждений опирается на теорему Вейерштрасса, приведенную в § 10.

Замечание. Важно, что во всех этих примерах всюду плотное множество является счетным. В первом примере счетно множество рациональных чисел. В остальных надо воспользоваться следующим утверждением.

Предложение 2.1. Счетное объединение счетных множеств счетно.

Это, противоречащее интуиции утверждение, доказывается по той же схеме, что и доказательство счетности множества рациональных чисел. Доказательство имеется в [2].

Нет шансов приблизить все элементы банахова пространства конечным числом элементов, но и приближения с помощью выделенного счетного подмножества могут оказаться полезными.

Определение 2.6. Банахово пространство, обладающее счетным всюду плотным подмножеством, называется *сепарабельным.*

Все приведенные ранее примеры являются сепарабельными пространствами. Работа с несепарабельными пространствами значительно сложнее. Но и такие пространства не являются чем-то экзотическим.

Пример 2.9. Покажем, что пространство l^∞ не содержит счетного всюду плотного множества.

Доказательство. Фактически будет доказано, что множество всех подмножеств множества натуральных чисел несчетно. Предположим, что это не так и последовательность $\{d_n\} \in l^\infty,\ n \in \mathbb{N}$, образует счетное всюду плотное множество. Противоречие возникнет из-за того, что будет построено несчетное множество элементов, расстояние между которыми равно 1. Рассмотрим множества $T_\alpha = \{q + \alpha : q \in \mathbb{Q}\},\ \alpha \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, причем сумма вычисляется по модулю 1. Заметим, что если α – рациональное число, то T_α – множество всех рациональных чисел на отрезке. Если же α – иррациональное число, то множество T_α не содержит рациональных чисел. При этом для различных иррациональных α эти множества либо совпадают, либо не пересекаются. Последнее следует из того, что в пересечение двух таких классов могут попасть только точки, связанные равенством $\alpha_1 + r_1 = \alpha_2 + r_2$. Здесь α_1, α_2 – иррациональные числа, а r_1, r_2 – рациональные числа, следовательно, $\alpha_1 - \alpha_2 = r_2 - r_1$ и числа α_1, α_2 находятся в одном множестве T_α. Множества T_α счетны (они равномощны множеству рациональных чисел). Если удалить из множества $\{T_\alpha\}$ все совпадающие множества, то получится дизъюнктное покрытие отрезка $[0,1]$. Поскольку множество точек отрезка несчетно, то число различных множеств T_α несчетно, иначе по предложению 2.1 множество точек отрезка оказалось бы счетным. Воспользуемся аксиомой выбора и выберем из каждого множества покрытия по одной точке x_α. Множество этих точек несчетно, и все они различны.

Как и при доказательстве несчетности множества точек на отрезке, сопоставим каждой точке ее единственное двоичное разложение $x_\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_n(\alpha)}{2^n}$. Рассмотрим теперь множество последовательностей $\varepsilon_\alpha = \{\varepsilon_n(\alpha)\}$. Все они принадлежат пространству l^∞, и норма разности для любой пары из этих последовательностей равна 1 (для разных чисел последовательности должны отличаться, хотя бы на одной позиции). Рассмотрим семейство шаров в l^∞ $V_\alpha = \left\{\gamma \in l^\infty : ||\gamma - \varepsilon_\alpha|| < \dfrac{1}{3}\right\}$. Согласно предположению множество $\{d_n\} \in l^\infty$ $(n \in \mathbb{N})$ всюду плотное. Значит, в каждом шаре находится элемент из этого множества. Число шаров несчетно, следовательно, найдется элемент d_m, принадлежащий двум разным шарам V_α и V_β, тогда

$$0 = ||d_m - d_m|| = ||d_m - x_\alpha + x_\alpha - x_\beta + x_\beta - d_m|| \geqslant$$
$$\geqslant ||x_\alpha - x_\beta|| - ||d_m - x_\alpha|| - ||x_\beta - d_m|| \geqslant 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно. ■

§ 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Любая задача моделирования в своей постановке содержит две базовые компоненты: множество объектов, на которых строится модель, и операции, которые осуществляют преобразования этих объектов.

Построение модели заключается в решении уравнений или неравенств, связывающих модели и операции. В функциональном анализе множеством объектов, как правило, являются банаховы пространства, а в качестве операций рассматриваются линейные операторы. Такое, на первый взгляд, жесткое ограничение совершенно оправданно. Современный математический аппарат позволяет гарантировать существование решения нелинейного уравнения только на основании теоремы о неявной функции, которая не дает никаких гарантий сходимости приближенных решений к решению исходной задачи. С переходом к линейным пространствам бесконечной размерности даже структура линейных операторов становится очень сложной. Например, в конечномерных линейных пространствах всякий линейный оператор в подходящем базисе описывается матрицей диагональной или хотя бы жордановой формы. В бесконечномерной ситуации не существует аппарата, позволяющего эффективно описывать все линейные операторы. Аналоги диагональной формы можно установить только для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Здесь будет рассмотрен простейший (конечномерный) вариант этого утверждения, а его бесконечномерный аналог будет рассмотрен в § 9.

Тем не менее начальный этап определений и простейших свойств не вызывает никаких сложностей.

Определение 3.1. Оператор $A : X \to Y$, действующий из линейного пространства X в линейное пространство Y, называется *линейным*, если

$$A(k_1x_1 + k_2x_2) = k_1Ax_1 + k_2Ax_2 \ \ \forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{C},\ \forall\, x_1, x_2 \in X.$$

Если оба пространства X и Y являются нормированными, то для оператора можно ввести определения ограниченности и непрерывности.

Определение 3.2. Оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если $\exists M :\ \forall x \in X,\ ||x|| < 1$, выполнено неравенство $||Ax|| < M$.

Определение 3.3. Оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывным*, если $\forall x_n \in X,\ ||x_n - x_0|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, выполнено $||Ax_n - Ax_0|| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Замечание. В предложении 3.1 будет показано, что эти определения эквивалентны друг другу. В силу линейности оператора определение непрерывности достаточно проверять для последовательностей, стремящихся к нулевому элементу.

Определение 3.4. *Нормой* оператора $A : X \to Y$ называется число $||A|| = \sup\{||Ax|| : ||x|| \leqslant 1\}$.

Замечание. Очевидно, что множество линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y, само образует линейное пространство. Легко проверить, что введенная ранее норма удовлетворяет всем свойствам, предъявляемым к норме. Тем самым появляется линейное нормированное пространство линейных операторов, действующих из линейного пространства X в линейное пространство Y. Более того, это пространство операторов образует алгебру, т. е. такие операторы можно перемножать ($ABx = A(Bx)$). Легко проверить, что $||AB|| \leqslant ||A|| \cdot ||B||$.

Вычислить норму оператора в пространстве бесконечной размерности удается редко. Обычно ограничиваются оценкой нормы, этого зачастую бывает достаточно. В пространствах конечной размерности это сделать проще, но и здесь надо преодолевать технические трудности.

Пример 3.1. Пусть оператор A действует в конечномерном гильбертовом пространстве H и обладает ортогональным базисом собственных векторов $\{e_n\}$, $Ae_n = \lambda_n e_n$. Тогда $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$.

Доказательство. Заметим, что любой элемент x пространства H можно разложить по базису $x = \sum\limits_n x_n e_n$ и при этом $Ax = \sum\limits_n Ax_n = = \sum\limits_n x_n \lambda_n e_n$. По условию базис ортогональный, не умоляя общности, можно считать его нормированным и тогда $||x||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2$. Обозначим $M = \max\limits_n |\lambda_n|$. Ясно, что $||Ax||^2 = \sum\limits_n |x_n|^2 |\lambda_n|^2 \leqslant M^2 \sum\limits_n |x_n|^2 = M^2 ||x||^2$. Значит, $||A|| \leqslant M$. Покажем, что эта оценка точная, т. е. найдется x такой, что $||Ax|| = M||x||$. Положим для определенности $|\lambda_1| = M$. Возьмем в качестве $x = e_1$, тогда $||Ax|| = ||\lambda_1 e_1|| = M||x||$. Следовательно, $||A|| = \max\limits_n |\lambda_n|$. ■

Рассмотрим вычисление нормы в пространствах l_n^p, $p = 1, 2, \infty$. Все эти пространства получаются за счет введения различных норм в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Фиксируем какой-нибудь базис $\{e_n\}$ в $\mathbb{R}^n$, тогда любой линейный оператор A из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ описывается матрицей $A = (a_{m,k})$, здесь $Ae_m = (a_{m,1}, \ldots, a_{m,n})^T$.

Пример 3.2. Пусть $p = \infty$, тогда

$||A|| = \sup\limits_m \sum\limits_k |am,k|$

$$||x|| = \sup_m |x_m|, \;\; Ax = \Big(\sum_k a_{m,k} x_k\Big)_{m=1,\ldots,n}.$$

Доказательство. $||Ax|| = \sup\limits_m |\sum\limits_k a_{m,k} x_k| \leqslant \sup\limits_m ||x|| \sum\limits_k |a_{m,k}|$. Обозначим $M = \sup\limits_m \sum\limits_k |a_{m,k}|$ и заметим, что $||Ax|| \leqslant M||x||$.

Чтобы показать точность оценки, предположим, что супремум достигается на первой строчке, т. е. $M = \sum\limits_k |a_{1,k}|$, и построим подходящий элемент x по следующему правилу: $x_k = \operatorname{sign} a_{1,k}$. Тогда $||Ax|| = = \sup\limits_m |\sum\limits_k a_{m,k} x_k| = M = M||x||$. Следовательно, $||A|| = M$. ■

$||Ax|| = \sup\limits_{k} \sum\limits_{m} |am,k|$

Пример 3.3. Пусть $p = 1$, тогда $||x|| = \sum\limits_{m} |x_m|$.

Доказательство. $||Ax|| = \sum\limits_{m} \Big|\sum\limits_{k} a_{m,k} x_k\Big| \leqslant \sum\limits_{k} |x_k| \sum\limits_{m} |a_{m,k}|$. Обозначим $M = \sup\limits_{k} \sum\limits_{m} |a_{m,k}|$, тогда $||Ax|| \leqslant M \sum\limits_{k} |x_k| = M||x||$. Докажем, что оценка точная. Будем считать, что $M = \sum\limits_{m} |a_{m,1}|$ (супремум достигается на первом столбце). Построим подходящий элемент x. Положим $x_1 = 1$, $x_m = 0$, если $m > 1$. Тогда $||Ax|| = \sum\limits_{m} |a_{m,1}| = M||x||$. ■

Пример 3.4. Пусть $p = 2$, в этом случае речь идет о гильбертовом пространстве и, если у оператора имеется базис ортогональных векторов, то вопрос решен в примере 3.1. Это условие, в частности, выполняется, если матрица оператора симметрична.

Чтобы вычислить норму оператора с несимметричной матрицей, нужно использовать определение сопряженного оператора.

Определение 3.5. Пусть A – линейный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. *Сопряженным* к нему называется оператор A^*, определенный соотношением

$$(Ax, y) = (x, A^*y) \text{ для любых } x, y \in H.$$

Нетрудно проверить, что это условие однозначно определяет линейный непрерывный оператор A^*.

В конечномерном пространстве матрица оператора A^* получается комплексным сопряжением и транспонированием элементов матрицы оператора A.

Отметим простые свойства сопряженного оператора:

$$(A^*)^* = A, \quad (AB)^* = B^*A^*.$$

Из этих свойств следует, что оператор A^*A совпадает со своим сопряженным (т. е. имеет симметричную матрицу) и его собственные векторы ($A^*Ae_k = \Lambda_k e_k$) образуют ортонормированный базис. Легко видеть, что собственные числа Λ_k неотрицательны:

$$\Lambda_k = (A^*Ae_k, e_k) = (Ae_k, Ae_k) \geqslant 0.$$

Будем считать, что нумерация проведена так, что $\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_n \geqslant 0$.

Перейдем к вычислению нормы оператора. Фиксируем $x = \sum\limits_{k} x_k e_k$ и оценим $||Ax||^2$:

$$||Ax||^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (\sum_{k} x_k \Lambda_k e_k, \sum_{m} x_m e_m) =$$

$$= \sum_k \Lambda_k x_k^2 \leqslant \Lambda_1 ||x||^2.$$

Значит, $||A|| \leqslant \Lambda_1$. Проверим точность оценки. Положим $x = e_1$, тогда $||Ax|| = ||\Lambda_1 e_1|| = \Lambda_1$ и, следовательно, $||A|| = \Lambda_1$.

Рассмотрим далее несколько простых, но важных свойств линейных операторов.

Предложение 3.1. Линейный оператор $A : X \to Y$ ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Доказательство. (1) Пусть оператор A непрерывен. Предположим, что он не ограничен. В этом случае найдется последовательность $\{x_n\}$, $||x_n|| = 1$, $\alpha_n = ||Ax_n|| \to \infty$. Положим $y_n = \dfrac{x_n}{\alpha_n}$, тогда $||y_n|| = \dfrac{1}{\alpha_n} \to 0$ и по условию непрерывности $||Ay_n||$ должна стремиться к 0, но по построению $||Ay_n|| = 1$. Следовательно, непрерывный оператор обязательно ограничен.

(2) Пусть оператор A ограничен, но не является непрерывным. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$, стремящаяся к 0, для которой $\alpha_n = ||Ax_n||$ не стремится к 0. Это означает, что существует $\delta > 0$ такое, что для любого N найдется число $n > N$, для которого $||Ax_n|| > \delta$. Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n = \dfrac{x_n}{||x_n||}$, тогда по определению последовательность $||Ay_n||$ тоже должна быть ограничена, но по построению

$$||Ay_n|| = \frac{||Ax_n||}{||x_n||} > \frac{\delta}{||x_n||} \to \infty\,.$$

Полученное противоречие показывает, что любой линейный ограниченный оператор непрерывен. ■

Самая типичная и распространенная задача, связанная с линейными операторами, – решение уравнений $Ax = b$. Исчерпывающим решением такой задачи является построение оператора B такого, что $Bb = x$.

Определение 3.6. Линейный оператор A, отображающий пространство X на себя, называется *обратимым*, если существует $B : X \to X$ такой, что $AB = BA = I$, где I – единичный (тождественный) оператор.

Замечание. Нетрудно доказать, что если линейный и непрерывный оператор A имеет обратный оператор B, то оператор B тоже линейный и непрерывный.

Предложение 3.2 (условие обратимости линейного оператора). Линейный непрерывный оператор A, заданный на линейном нормированном пространстве X, обратим тогда и только тогда, когда существует положительное число m такое, что для любого элемента пространства выполнено неравенство $||Ax|| > m||x||$.

Доказательство. (1) Предположим, что неравенство выполнено. Покажем, что в этом случае оператор является взаимно однозначным, т. е. переводит различные элементы в различные и, следовательно, имеет обратный. Фиксируем два различных элемента $x_1, x_2 \in X$. Заметим, что $||x_1 - x_2|| = \delta > 0$, откуда $||Ax_1 - Ax_2|| = ||A(x_1 - x_2)|| > m||x_1 - x_2|| = m\delta$, следовательно, образы элементов x_1 и x_2 тоже различны.

(2) Предположим, что оператор A имеет обратный оператор B, но неравенство из предложения не выполнено. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $||x_n|| = 1, \quad \alpha_n = ||Ax_n|| \to 0$. Как было отмечено, оператор B линейный и непрерывный. Ясно, что $y_n = Ax_n \to 0$, но последовательность $By_n = x_n$ не стремится к 0, что противоречит непрерывности оператора B. ■

Замечание. Доказанное утверждение дает полезный критерий отсутствия у оператора обратного, но доказательство неравенства, как правило, очень трудная задача.

В конечномерных пространствах критерий обратимости можно значительно упростить: оператор обратим тогда и только тогда, когда ядро оператора содержит только нулевой элемент. (Напомним, что ядром оператора называют множество элементов, которые он переводит в ноль.) Действительно, выберем какой-нибудь базис и дадим матричное описание оператора. Нетривиальное ядро появляется тогда и только тогда, когда ноль является собственным числом оператора (матрицы оператора в выбранном базисе), а это равносильно тому, что матрица необратима.

В бесконечномерных пространствах нулевое ядро не гарантирует обратимости оператора.

Пример 3.5. Очевидно, что оператор $Ax = y, \quad y_n = \dfrac{x_n}{n}$, отображает пространство l^2 в себя. Для него легко выписать формальный обратный оператор $By = x, \ x_n = ny_n$, однако совершенно очевидно, что этот оператор неограничен.

Рассмотрим далее *устойчивость обратимости* – еще одно важное свойство линейных операторов, утверждающее, что если оператор обратим, то обратимы и «близкие» к нему операторы. Сначала докажем это для тождественного оператора.

Теорема 3.1. Если B – линейный непрерывный оператор, причем $||B|| = q < 1$, то оператор $A = I - B$ имеет обратный, при этом норма обратного оператора A не превосходит $\dfrac{1}{1-q}$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные операторы

$$D_n = I + B + B^2 + \ldots + B^n$$

и вычислим произведение

$$AD_n = (I - B)(I + B + B^2 + \ldots + B^n) =$$

$$= I + B + B^2 + \ldots + B^n - B - B^2 - \ldots - B^n - B^{n+1} = I - B^{n+1}.$$

Заметим, что $||B^k|| \leqslant ||B||^k = q^k$ (супремум произведения не больше произведения супремумов). Следовательно, существует сумма ряда

$$D = I + B + B^2 + \ldots + B^n + \ldots,$$

так как последовательность частичных сумм D_n фундаментальная, т. е.

$$||D_n - D_m|| \leqslant q^{n+1} + \ldots + q^m \leqslant \frac{q^{n+1}}{1-q},$$

значит, $AD = I$. Аналогично проверяется, что $DA = I$. Таким образом, оператор D является обратным для оператора A. ■

Доказанное утверждение говорит о том, что всякий оператор, «мало отличающийся» от тождественного, обратим. Это утверждение справедливо для любого обратимого оператора.

Теорема 3.2 (достаточное условие обратимости). Пусть X – банахово пространство. Если линейный, непрерывный оператор $A : X \to X$ имеет обратный A^{-1} и для оператора $B : X \to X$ справедлива оценка $||B|| < \dfrac{1}{||A^{-1}||}$, то оператор $C = A + B$ тоже обратим.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательный оператор $D = A^{-1}C = I + A^{-1}B$. По условию $||A^{-1}B|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||B|| < 1$, следовательно, по теореме Банаха оператор D имеет обратный оператор D^{-1}. Обозначим $F = D^{-1}A^{-1}$, тогда

$$FC = F(A + B) = D^{-1}A^{-1}(A + B) = D^{-1}D = I,$$

$$CF = (A + B)F = AA^{-1}(A + B)D^{-1}A^{-1} = ADD^{-1}A^{-1} = I.$$

Следовательно, $F = (A + B)^{-1}$. ■

Замечание. Эта внешне простое и формальное утверждение имеет огромный круг приложений. Оно лежит в основе процедуры итераций при решении уравнений методом последовательных приближений.

Следствие. Пусть линейный, непрерывный оператор A отображает банахово пространство X в себя. Если уравнение $Ax = b$ после перезаписи $(I - B)x = b$ допускает оценку $||B|| = q < 1$, то последовательность

$x_{n+1} = b + Bx_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots;$ x_0 – произвольный элемент пространства X) сходится к решению уравнения.

Доказательство. Заметим, что $x_1 = b+Bx_0$, $x_2 = b+Bb+B^2x_0, \ldots$, $x_n = b + Bb + \ldots + B^n x_0$, следовательно, для $n > k$

$$||x_n - x_k|| = ||B^k b + \ldots + B^{n-1}b + B^n x_0 - B^k x_0|| \leqslant$$

$$\leqslant ||B^k b|| + \ldots + ||B^{n-1}b|| + ||B^k x_0|| + ||B^n x_0|| \leqslant$$

$$\leqslant q^k \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} ||b|| + (q^k + q^n)||x_0||.$$

По условию $q < 1$ и, значит, последовательность фундаментальная, следовательно, существует предел $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Переходя к пределу в рекуррентном уравнении, определяющем последовательность, получим $x_* = b + Bx_*$ или $Ax_* = b$. ■

Еще одно важное приложение оценок норм линейных операторов возникает в связи с оценками погрешностей решения. Допустим, решается уравнение $Ax = b$ и известно, что в определении правых частей присутствуют неконтролируемые ошибки Δb, т. е. фактически решается система $Ax = b + \Delta b$. Требуется оценить ошибку в решении через погрешность в определении правой части уравнения. Будем считать, что x – решение исходного уравнения, иными словами, считаем, что выполнено тождество $Ax = b$, и аналогично для второго уравнения $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Такая постановка задачи обычно предполагает, что ошибка, имеющаяся в правой части уравнения, невелика в сравнении с самой правой частью, и оценку желательно получить для относительных погрешностей, т. е. оценить $\dfrac{||\Delta x||}{||x||}$ через $\dfrac{||\Delta b||}{||b||}$. Такую оценку легко получить для обратимых операторов.

Неравенство для оценки относительной погрешности:

$$\frac{||\Delta x||}{||x||} \leqslant ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||\Delta b||}{||b||}.$$

Доказательство. По условию $Ax = b$ и $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Оператор линейный, следовательно, $A\Delta x = \Delta b$. Обратимость оператора позволяет написать $\Delta x = A^{-1}\Delta b$, откуда $||\Delta x|| \leqslant ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b||$. Воспользуемся непрерывностью оператора и получим из равенства $Ax = b$ оценку $||b|| \leqslant ||A|| \cdot ||x||$. Перепишем это неравенство в удобном для доказательства виде $\dfrac{1}{||x||} \leqslant ||A|| \cdot \dfrac{1}{||b||}$. Перемножив два полученных неравенства, получим требуемую оценку. ■

Доказанное неравенство играет важную роль в организации вычислений. Если у оператора A величина $||A|| \cdot ||A^{-1}||$ очень велика, то надо быть готовым к тому, что небольшие погрешности в определении правой части приведут к такой потере точности, которая лишит вычисление всякого смысла.

Определение 3.7. *Числом обусловленности* линейного оператора A называется

$$\operatorname{cond}(A) = ||A|| \cdot ||A^{-1}||.$$

Пример 3.6. Покажем, что оператор, заданный в l_2^2 матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix},$$

при малых δ плохо обусловлен. Вычислим собственные числа матрицы

$$\lambda^2 - (2+\delta)\lambda + \delta = 0, \ \lambda_{1,2} = \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \pm \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}$$

и заменим их на приближенные значения так, чтобы для малых δ потеря точности была незначительной. Используем формулу Тейлора $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x^2/8\ldots$, она дает такие оценки: $\lambda_1 \approx 2, \lambda_2 \approx \dfrac{\delta}{2}$. Связь между собственными числами и нормой оператора, отмеченная в примере 3.1, позволяет утверждает, что число обусловленности обратно пропорционально δ:

$$\operatorname{cond}(A) \approx \frac{4}{\delta}.$$

Замечание. Важно понимать, что число обусловленности характеризует не только оператор, но и нормированное пространство, в котором он действует. Если на одном линейном пространстве введено две нормы, то оператор, действующий в этом пространстве, будет иметь два числа обусловленности, отвечающих каждое своей норме.

Приведенные примеры позволяют вычислить число обусловленности в пространствах $l_n^p, \ p = 1, 2, \infty$. Большое число обусловленности требует повышенного внимания к вычислениям, но не означает, что положение безнадежно. Возникновение погрешности максимально большого размера – явление редкое и требует очень специального сочетания параметров. Это видно из следующего доказательства точности оценки.

Предложение 3.3. Пусть A – линейный, непрерывный, обратимый оператор, отображающий пространство l_n^2 в себя. Тогда существуют элементы $b, c \in l_n^2$ такие, что для решений уравнений $Ax = b, \ Ay = c$ выполнено равенство

$$\frac{||x-y||}{||x||} = ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||b-c||}{||b||}$$

(т. е. на этих векторах «реализуется» число обусловленности).

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными для вычисления нормы оператора, отображающего пространство l_n^2 в себя (см. пример 3.4):

$$B = A^*A,\ Be_k = \Lambda_k e_k,\ k = 1, \ldots, n,$$
$$\Lambda_1 \geqslant \Lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_n \geqslant 0, (e_k, e_j) = 0, (e_k, e_k) = 1.$$

В этих обозначениях $||A|| = \sigma_1$, $\sigma_1 = \sqrt{\Lambda_1}$. Далее проведем вспомогательные оценки: $||x-y||^2 = (x-y, x-y) = (A^{-1}(b-c), A^{-1}(b-c)) = ((A^{-1})^*A^{-1}(b-c), (b-c))$. Покажем, что матрицы $B = A^*A$ и $C = AA^*$ имеют одинаковые собственные числа:

$$C^{-1} = (A^{-1})^*A^{-1} = (A^*)^{-1}A^{-1};$$

$$\det(C-\lambda E) = \det(AA^*-\lambda E) = \det(A(A^*-\lambda A^{-1})) = \det(A)\det(A^*-\lambda A^{-1});$$
$$\det(B-\lambda E) = \det(A^*A-\lambda E) = \det((A^*-\lambda A^{-1})A) = \det(A)\det(A^*-\lambda A^{-1}).$$

Следовательно, существуют такие векторы d_k, что $Cd_k = \Lambda_k d_k$, $k = 1, \ldots, n$, $(d_k, d_j) = 0$, $(d_k, d_k) = 1$. Продолжим тождество, представляющее $||x-y||^2$:

$$||x-y||^2 = (C^{-1}(b-c), (b-c)) \leqslant \Lambda_n^{-1}||b-c||^2.$$

Заметим, что $||b||^2 = (Ax, Ax) = (Cx, x) \leqslant \Lambda_1||x||^2$ и $||x||^2 \geqslant \Lambda_1^{-1}||b||^2$. Следовательно,

$$\frac{||x-y||^2}{||x||^2} \leqslant \frac{\Lambda_n^{-1}||b-c||^2}{\Lambda_1^{-1}||b||^2} = ||A||^2 \cdot ||A^{-1}||^2 \cdot \frac{||b-c||^2}{||b||^2}.$$

Выберем сначала элемент b. Положим $x = e_1$, тогда $b = Ae_1 = \Lambda_1 e_1$ и, следовательно, $||x||^2 = \Lambda_1^{-1}||b||^2$.

Затем выберем элемент c так, чтобы $b - c = d_n$, тогда $x - y = A^{-1}(b-c) = \Lambda_n^{-1}d_n$ и, следовательно, $||x-y||^2 = \Lambda_n^{-1}||b-c||^2$.

В итоге получаем

$$\frac{||x-y||^2}{||x||^2} = \frac{\Lambda_n^{-1}||b-c||^2}{\Lambda_1^{-1}||b||^2} = ||A||^2 \cdot ||A^{-1}||^2 \cdot \frac{||b-c||^2}{||b||^2}. \blacksquare$$

Лабораторная работа «Вычисление нормы оператора». Задана матрица $A\,(4 \times 4)$. Требуется:

1) вычислить обратную матрицу;

2) вычислить норму операторов $A, \quad A^{-1}$ и число обусловленности в пространстве l_n^1 (найти элемент, реализующий норму для $A, \quad A^{-1}$);

3) вычислить норму операторов $A, \quad A^{-1}$ и число обусловленности в пространстве l_n^∞ (найти элемент, реализующий норму для $A, \quad A^{-1}$);

4) вычислить матрицу $B = A^*A$ и ее собственные числа и векторы;

5) вычислить матрицу $C = AA^*$ и ее собственные числа и векторы;

6) вычислить собственные числа оператора A, норму оператора, обратного оператора и число обусловленности в пространстве l_n^2 (найти элемент, реализующий норму для $A, \quad A^{-1}$);

7) составить две системы уравнений $Ax = b$ и $A(x+\Delta x) = b+\Delta b$ (подобрать b и Δb) так, чтобы на них реализовался худший вариант погрешности решения в норме l_n^2.

§ 4. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Эффективное использование линейного оператора требует тщательного изучения его свойств. Свойства операторов во многом определяются размерностью пространств, в которых они действуют (чем меньше, тем лучше). Пространство, на котором определяется оператор, как правило, определяется условиями задачи, но пространство, в которое он действует, обычно можно выбирать. Самой простой, безусловно, является ситуация, когда пространство, в которое действует оператор имеет размерность 1. Первым такой подход успешно реализовал Декарт, предложивший использовать для описания точек в плоскости два линейных оператора, сопоставляющих точке пару чисел – проекции на координатные оси. Эта идея часто и разнообразно эксплуатировалась впоследствии и с появлением функционального анализа получила специальное наименование.

Определение 4.1. *Линейным функционалом* называется линейное отображение линейного пространства в множество вещественных или комплексных чисел.

Линейный функционал является частным случаем линейного оператора, и если он действует в нормированном пространстве, то можно говорить о его норме, ограниченности и непрерывности.

Напомним, что для линейных операторов понятия ограниченности и непрерывности совпадают. Линейный функционал не обязательно ограничен, например, линейный функционал $\{x_n\} \to \{nx_n\}$ не ограничен ни в одном из пространств l^p.

Далее будут рассматриваться только линейные непрерывные функционалы, заданные в банаховых пространствах.

Пример 4.1. Неравенство Гельдера гарантирует, что любой элемент $f = \{f_n\}$ пространства l^q порождает линейный непрерывный функционал на пространстве l^p (здесь $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$).

Предположим, что $f(x) = \sum\limits_n f_n x_n$. Из неравенства Гельдера следует неравенство $|\sum\limits_n f_n x_n| \leqslant \left(\sum\limits_n |x_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum\limits_n |f_n|^q\right)^{1/q}$, т. е. норма этого функционала не больше нормы $||f|| = \left(\sum\limits_n |f_n|^q\right)^{1/q}$ элемента f в пространстве l^q.

Проверим, что эта оценка точная. Обозначим $A^q = \sum\limits_n |f_n|$ ($A = ||f||_q$ – в тех случаях, когда надо работать с несколькими нормами, удобно помечать их нижними индексами). Чтобы доказать точность оценки, надо построить элемент x из l^p, реализующий норму, т. е. $||x||_p = 1$, $\sum\limits_n f_n x_n = A$. Положим $x_n = A^\alpha \dfrac{|f_n|}{f_n} |f_n|^{q-1}$, параметр α будет выбран позже. Тогда $\sum\limits_n |x_n|^p = A^{\alpha p} \sum\limits_n |f_n|^{p(q-1)} = A^{\alpha p} \sum\limits_n |f_n|^q = A^{\alpha p + q}$ (воспользовались тем, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ и, следовательно, $p(q-1) = q$). Далее $\sum\limits_n f_n x_n = A^\alpha \sum\limits_n |f_n|^q = A^{\alpha + q}$. Чтобы получить требуемый элемент x, надо обеспечить равенства $\alpha p + q = 0$, $\alpha + q = 1$. Для этого достаточно положить $\alpha = -\dfrac{q}{p} = 1 - q$.

Приведенный пример типичен в том отношении, что доказывать оценку нормы сверху много проще, чем доказывать ее точность.

Пример 4.2. Аналогично доказывается, что любая функция из пространства $L^q(a, b)$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(a, b)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Надо помнить, что элементами пространств $L^p(a, b)$ являются не функции, а классы функций, состоящие из функций, интеграл от модуля разности которых равен нулю. Точное описание этих классов опирается на теорию меры, изложенную в § 6.

То, что соответствие $g \to < f, g >= \int\limits_a^b f(x) g(x) dx$ определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $L^p(a, b)$, следует из неравенства Гельдера. Доказательство точности оценки полностью повторяет доказательство для l^p, как это происходило в доказательстве неравенства Гельдера.

Пример 4.3. Функционалы на пространстве непрерывных функций $C[a, b]$ устроены сложнее. Легко понять, что значение функции в точке отрезка или интегралы от произведения функции из пространства $C[a, b]$ на фиксированную интегрируемую на отрезке функцию задают линейные непрерывные функционалы. Однако этим дело не исчерпывается. Можно показать, что любая ограниченная *мера* (см. § 6) на отрезке $[a, b]$ задает линейный непрерывный функционал.

Важным свойством линейных функционалов является то, что такой функционал с точностью до постоянного множителя определяется множеством своих нулей.

Определение 4.2. Пусть f – линейный функционал на банаховом пространстве X. *Ядром* функционала называется множество $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

Чтобы доказать вышеупомянутое свойство, надо описать структуру линейных пространств, вложенных одно в другое.

Предложение 4.1. Пусть Y – подпространство линейного пространства X, тогда равносильны утверждения:

1) для любого $x_0 \in X \setminus Y$ справедливо равенство $X = \{x = tx_0 + y : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$, при этом пара $x_0,\ x$ однозначно определяет пару $t,\ y$;

2) если Z – линейное пространство такое, что $Y \subset Z \subset X$, то $Z = Y$ или $Z = X$.

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$ Предположим, что утверждение 2 неверно. Тогда найдутся элементы $x_0 \in X \setminus Z$ и $x_1 \in Z \setminus Y$. По условию $x_1 = tx_0 + y$, $y \in Y$, $t \in \mathbb{R}$, причем $t \neq 0$. Получили, что $x_0 = \dfrac{x_1}{t} - \dfrac{y}{t}$, откуда $x_0 \in Z$, что противоречит предположению.

$(2 \Rightarrow 1)$ Фиксируем $x_0 \in X \setminus Y$ и обозначим $Z = \{x = tx_0 + y : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}$; из условия следует, что $Z = X$. Осталось проверить единственность представления. Предположим, что это не так, тогда для некоторого элемента найдутся два представления $x = t_1 x_0 + y_1$, $x = t_2 x_0 + y_2$, $t_1 \neq t_2$. Из этого следует, что $x_0 = -\dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \in Y$. Следовательно, предположение неверно. ■

Замечание. Рассмотрим линейный функционал $\varphi \to \varphi(a)$ на пространстве непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$. Его ядро удовлетворяет условиям предыдущего предложения. Но условиям предложения удовлетворяют и множества, плохо связанные с линейными функционалами. Например, множество всех многочленов образует линейное пространство, вложенное в пространство непрерывных функций, и для него справедливо предыдущее предложение. Но это множество слишком большое (многочлены образуют всюду плотное подмножество в пространстве непрерывных функций). Если непрерывный функционал обращается на нем в 0, то он тождественно нулевой. Чтобы избежать этого неудобства, вводится дополнительное определение.

Определение 4.3. Замкнутое линейное пространство Y, содержащееся в банаховом пространстве X, называется *однородной гиперплоскостью*, если не существует линейного пространства Z, не равного X или Y, такого, что $Y \subset Z \subset X$.

Замечание. Добавление к термину эпитета «однородный» выделяет линейные пространства. В приложениях часто приходится использовать и «просто» гиперплоскости, т. е. сдвиги однородных гиперплоскостей. Однородная гиперплоскость в $\mathbb{R}^2$ – это прямая, проходящая через 0, а гиперплоскость – это произвольная прямая.

Однородная гиперплоскость и линейный непрерывный функционал – это практически одно и то же. Предыдущее предложение почти доказывает этот факт. Трудность возникают только при доказательстве того, что замкнутость ядра гарантирует непрерывность функционала. Язык ε–δ трудно привязать к условию замкнутости ядра. Здесь удобно перейти на другой – топологический язык описаний. Топология – ветвь математики, имеющая дело с множествами, не имеющими ни линейной структуры, ни метрики, но наделенными системой окрестностей, заданных для каждой точки пространства. Это позволяет легко переносить на такие структуры стандартные определения. Например, открытым называется множество, содержащее вместе с каждой точкой некоторую ее окрестность. Менее очевидно определение непрерывности отображения одного топологического пространства в другое. Тем более удивительно, что выглядит оно значительно проще классического определения на языке ε–δ: прообраз любого открытого множества открыт. Не вдаваясь в тонкости терминологии, удобно перевести некоторые свойства отображений на топологический язык.

Предложение 4.2.

(1) Если f – непрерывный функционал, то его ядро замкнуто.

(2) Если Y – однородная гиперплоскость, то любой функционал f с ядром $\ker f = Y$ непрерывен.

Доказательство. (1) Если последовательность точек $x_n \in \ker f$, $x_n \to x_0$, то из непрерывности f следует, что $0 = f(x_n) \to f(x_0)$, т. е. $x_0 \in \ker f$.

(2) Пусть $\ker f$ – однородная гиперплоскость. Надо проверить, что прообраз любого открытого множества открыт. Произвольное открытое

множество на прямой является объединением непересекающихся открытых интервалов. Достаточно доказать утверждение для одного интервала. Интервал есть пересечение пары открытых полупрямых. Остается доказать, что множества $\{x : f(x) < a\}$ открыты для всех $a \in \mathbb{R}$. Поскольку функционал линеен, достаточно проверить это для $a = 0$. Предположим, что это не так, тогда существует точка x_0, $f(x_0) < 0$, такая, что в любом шаре $V_n = \left\{v : ||v - x_0|| < \dfrac{1}{n}\right\}$ найдется точка x_n, $f(x_n) \geqslant 0$. Из определения однородной гиперплоскости следует существование числа t_n такого, что $x_n = t_n x_0 + y_n$, $y_n \in \ker f$. Поскольку функционал линеен, то $f(x_n) = t_n f(x_0)$. Значит, $t_n \leqslant 0$. Если $t_n = 0$, то $f(x_n) = 0$. В случае когда $f(x_n) < 0$, отрезок $x = t x_0 + \dfrac{1-t}{1-t_n} y_n,\ t \in [t_n, 1]$, соединяющий точки x_0 и x_n, целиком лежит в шаре V_n и содержит точку $v_n = \dfrac{1}{1-t_n}\, y_n$, $f(v_n) = 0$. Таким образом можно получить последовательность точек из $\ker f$, сходящуюся к x_0, но $\ker f$ замкнуто, что и приводит к противоречию, так как по предположению $f(x_0) < 0$. ■

Следствие 1. Однородная гиперплоскость, являющаяся ядром функционала, определяет его с точностью до константы.

Следствие 2. Множество всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X образует банахово пространство с нормой $||f|| = \sup\{|f(x)| : ||x|| < 1\}$.

Определение 4.4. Банахово пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов над банаховым пространством X называется сопряженным пространством и обозначается X^*.

Всякий элемент $x \in X$ определяет линейный непрерывный функционал на X^* по очевидному правилу: для всех $f \in X^*$ полагаем $x(f) = f(x)$. Часто бывает, что других линейных непрерывных функционалов над пространством X^* нет. Такие пространства наиболее похожи на евклидовы.

Определение 4.5. Банахово пространство X называется *рефлексивным*, если оно совпадает со своим вторым сопряженным, т. е. $X = (X^*)^*$.

Пример 4.4. Пусть $1 < p < \infty$, тогда $(l^p)^* = l^q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, откуда следует, что эти пространства рефлексивные. Из примера 4.1 следует, что пространство l^q является подмножеством пространства $(l^p)^*$. Остается показать, что других линейных непрерывных функционалов нет. Пусть f – линейный функционал на пространстве l^p. Обозначим $f_n = f(e_n)$, где e_n – канонический базис в пространстве l^p $(e_n = \{e_{n,k}\}_k$, $e_{n,n} = 1$, $e_{n,k} = 0, n \neq k$.

Как отмечено ранее, если $\sum\limits_n |f_n|^q < \infty$ (т. е. $f \in l^q$), то этот функционал является непрерывным. Если же $\sum\limits_n |f_n|^q = \infty$, то, рассуждая как в примере 4.1, можно построить элемент $x \in l^p$, $||x|| = 1$, такой, что $\sum\limits_{n=1}^N f_n x_n \to \infty$. Следовательно, функционал не является непрерывным.

Пример 4.5. Как и в примере 4.1, доказывается, что $(l^1)^* = l^\infty$, но известно, что пространство $(l^\infty)^*$ существенно больше пространства l^1, т. е. пространство l^1 нерефлексивно [3].

Пример 4.6. Для пространств $L^p(a, b)$ картина такая же, но доказательство несколько сложнее, поскольку в $L^p(a, b)$ нет такого простого базиса, как в l^p, и приходится работать с множеством всех ступенчатых функций.

Пример 4.7. Пространство непрерывных функций на отрезке $C[a, b]$ тоже нерефлексивно, сопряженное к нему совпадает с $M(a, b)$ – пространством всех мер на отрезке (это пространство будет определено в § 6).

Можно сказать, что рефлексивные пространства устроены «проще», чем нерефлексивные. Гильбертовы пространства занимают здесь особую позицию – они «самые простые».

Теорема 4.1 (Рисса–Фишера). Если H – гильбертово пространство, то существует взаимно однозначное непрерывное отображение $J : H \to H^*$ (каждый функционал можно записать как скалярное произведение с подходящим элементом). Причем J^2 является тождественным отображением.

Доказательство. Фиксируем элемент сопряженного пространства $f \in H^*$. Предложение 4.2 гарантирует, что функционал f полностью определяется своим ядром $\ker f$ и значением в точке вне ядра $x_1 \notin \ker f$. Поскольку ядро является однородной гиперплоскостью, то $x_1 = x_* + x_0$, $x_* \perp \ker f$, $x_0 \in \ker f$. Тогда $f(x) = f(x_*) = ||x_*|| f\left(\dfrac{x_*}{||x_*||}\right) = c(x, x_*)$. ■

Следствие. Все гильбертовы пространства рефлексивны.

Введение понятия сопряженного пространства позволяет определить еще одну структуру, полезную для исследования линейных операторов, – сопряженный оператор.

Определение 4.6. Пусть A – линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство X в себя. Оператор A^*, отображающий банахово пространство X^* в себя, называется *сопряженным оператором*, если $\forall x \in X$, $\forall f \in X^*$ выполняется равенство $< Ax, f >=< x, A^* f >$ (здесь $< Ax, f >$ означает $f(Ax)$).

Замечание. Определенный таким образом оператор линеен и непрерывен, причем $||A^*|| = ||A||$. Все эти утверждения легко проверить.

Сопряженные операторы в гильбертовых пространствах были определены в § 3 равенством $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y \in H$. Теорема Рисса–Фишера позволяет не упоминать в определении сопряженное пространство и гарантирует идентичность двух определений. Новое определение вполне осмысленно, поскольку вскоре будет доказано, что элемент банахова пространства x однозначно определяется набором чисел $f(x) = < x, f >$, $f \in X^*$. Чтобы доказать корректность определения, удобно воспользоваться теоремой Хана–Банаха (см. § 5).

§ 5. ТЕОРЕМА О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИОНАЛА

Эта очень простая по формулировке теорема, может быть доказана в чрезвычайно общей ситуации, и благодаря гибкости входящих в нее условий она позволяет доказать множество утверждений, являющихся сами по себе сильными результатами. Расплатой за эту общность является необходимость использовать для ее доказательства аксиому выбора, которая утверждает «тривиальную» вещь: из любой системы множеств можно выбрать по одному элементу. Почувствовать силу этой аксиомы можно по эквивалентному утверждению: всякое множество можно упорядочить так, что для любой пары элементов найдется элемент больший и того, и другого. Аксиома выбора играет роль аксиомы индукции, но применима к множествам любой природы, в том числе и к несчетным. Огромным недостатком аксиомы выбора является ее абсолютная неконструктивность, т. е. она не содержит никаких намеков на алгоритм, с помощью которого утверждение может быть проверено. Все предшествующие аксиомы, используемые в математике, содержали хотя бы намек на алгоритм. Это обстоятельство вызывает сомнения в правомочности принятия аксиомы выбора. Однако без нее ряд принципиальных вопросов останется без ответа.

Для формулировки теоремы надо зафиксировать еще один стандартный термин.

Определение 5.1. Множество Y называется подпространством банахова пространства X, если оно является замкнутым подмножеством X и образует линейное пространство в норме пространства X.

Теорема 5.1 (Хана–Банаха). Пусть Y – подпространство банахова пространства X, f_0 – линейный непрерывный функционал на Y с нормой $||f_0|| = a$. Тогда существует линейный непрерывный функционал f на X с нормой $||f|| = a$ такой, что для всякого элемента $y \in Y$ выполнено равенство $f(y) = f_0(y)$.

Замечание. В этой формулировке теорему часто называют теоремой о продолжении линейного функционала. Теорема Хана–Банаха имеет и другую – геометрическую – формулировку, которая будет рассмотрена позже.

Для понимания, что собственно утверждает теорема, полезно обсудить ее в простейшем случае $X = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_k \in \mathbb{R}\}$, $Y = \{(y_1, y_2, 0) : y_k \in \mathbb{R}\}$, рассматривая в них l^2-норму. Тогда линейный функционал задается скалярным произведением

$$f_0(y) = y_1 k_1 + y_2 k_2,\ \ ||f_0||^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Проверьте, что задача продолжения функционала будет решена, если через прямую $\{y : f_0(y) = 1\}$ провести плоскость, находящуюся на том же расстоянии от 0, что и исходная прямая (среди множества плоскостей, проходящих через прямую, есть только одна такая плоскость).

Эта конструкция легко переносится на любое гильбертово пространство, но для банаховых пространств ситуация сложнее.

План доказательства:

1) продолжение функционала на линейное пространство, имеющее размерность на 1 больше, чем исходное пространство;

2) выбор «наибольшего» продолжения функционала среди всех возможных (применение аксиомы выбора).

Доказательство (ч. 1). Фиксируем произвольный элемент $z \in X \backslash Y$. Обозначим $Y_1 = \{x = tz + y : t \in \mathbb{R},\, y \in Y\}$. Определим продолжение функционала формулой

$$f(x) = f(tz + y) = f(tz) + f_0(y) = tc + f_0(y).$$

Остается подобрать параметр c так, чтобы норма функционала не возросла, т. е. при любом $t \in \mathbb{R}$ должно выполняться $f(tz + y) \leqslant ||f_0|| \cdot ||tz + y||$ или $tc + f_0(y) \leqslant ||f_0|| \cdot ||tz + y||$, т. е.

$$tc \leqslant ||f_0|| \cdot ||tz + y|| - f_0(y).$$

Чтобы проводить дальнейшей анализ, надо освободить параметр c от множителя. Заметим, что при $t = 0$ оценка очевидно верна. При $t > 0$ ее можно переписать в виде

$$c \leqslant ||f_0|| \cdot \Big|\Big|z + \frac{y}{t}\Big|\Big| - f_0\Big(\frac{y}{t}\Big).$$

При $t < 0$ ее можно переписать в виде

$$c \geqslant ||f_0|| \cdot \frac{1}{t} \cdot |t| \cdot \Big|\Big|z + \frac{y}{t}\Big|\Big| - f_0\Big(\frac{y}{t}\Big) - ||f_0|| \cdot \Big|\Big|z + \frac{y}{t}\Big|\Big| - f_0\Big(\frac{y}{t}\Big).$$

Чтобы доказать существование подходящего параметра c, достаточно проверить, что для всех $y_1, y_2 \in Y$ выполнено неравенство

$$-||f_0|| \cdot \left|\left|z + \frac{y_1}{t}\right|\right| - f_0\left(\frac{y_1}{t}\right) \leqslant ||f_0|| \cdot \left|\left|z + \frac{y_2}{t}\right|\right| - f_0\left(\frac{y_2}{t}\right).$$

Перепишем неравенство в виде

$$f_0\left(\frac{y_2}{t}\right) - f_0\left(\frac{y_1}{t}\right) \leqslant ||f_0|| \cdot \left|\left|z + \frac{y_2}{t}\right|\right| + ||f_0|| \cdot \left|\left|z + \frac{y_1}{t}\right|\right|.$$

Левую часть можно преобразовать и оценить:

$$f_0\left(\frac{y_2}{t}\right) - f_0\left(\frac{y_1}{t}\right) = f_0\left(\frac{y_2}{t} - \frac{y_1}{t}\right) \leqslant ||f_0|| \cdot \left|\left|\frac{y_2}{t} - \frac{y_1}{t}\right|\right|.$$

Остается заметить, что

$$\left|\left|\frac{y_2}{t} - \frac{y_1}{t}\right|\right| = \left|\left|\left(\frac{y_2}{t} + z\right) - \left(\frac{y_1}{t} + z\right)\right|\right| \leqslant \left|\left|z + \frac{y_2}{t}\right|\right| + \left|\left|z + \frac{y_1}{t}\right|\right|.$$

Доказательство (ч. 2). Повторяя процедуру, описанную в первой части доказательства, можно построить расширяющуюся цепочку подпространств Y_n и продолжения линейного функционала f_0 на каждое из них с сохранением нормы функционала. Если пространство X сепарабельно, т. е. имеет счетное всюду плотное подмножество, то построенная система вложенных подпространств в объединении дает все пространство, а тем самым и требуемое продолжение функционала. Если пространство не сепарабельно, то для завершения доказательства приходится привлекать аксиому выбора (описание этой части доказательства можно найти в [3]). ■

Теорема Хана–Банаха используется очень широко и позволяет доказывать сложные утверждения. Например, в определении сопряженного оператора был использован тот факт, что значения всех линейных непрерывных функционалов на некотором элементе банахова пространства полностью определяют этот элемент. С помощью теоремы Хана–Банаха это утверждение легко доказывается.

Следствие 1. Если x_1, x_2 – два различных элемента банахова пространства X, то найдется линейный непрерывный функционал, принимающий разные значения на этих элементах.

Доказательство. Рассмотрим линейное подпространство $Y = \{t_1x_1 + t_2x_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ и функционал f_0 на этом пространстве, определенный заданием его множества нулей $\ker f_0 = \{tx_1 + tx_2 : t \in \mathbb{R}\}$ и значением в точке $f_0(x_1) = 1$. Заметим, что $f_0(x_2) < 0$. На основании теоремы Хана–Банаха продолжим функционал f_0 с подпространства Y на все пространство X. Это и есть требуемый функционал. ■

Доказанное следствие чуть позже будет перенесено на два произвольных выпуклых множества. Оно составляет основу для решения задач линейной и выпуклой оптимизации.

Следующее утверждение о существовании интеграла очень глубокое и нетривиальное. Правильное понимание его требует знания теории интеграла Лебега (см. § 6).

Следствие 2. Пусть X – банахово пространство ограниченных периодических (период равен 1, т. е. $x(t+1) = x(t)$) функций на вещественной прямой с нормой пространства $L^\infty(\mathbb{R})$. Существует линейный непрерывный функционал, действующий на X и обладающий следующими свойствами:

1) если $x(t) \geqslant 0$, то $f(x) \geqslant 0$ (*монотонность*);

2) если $x_*(t) = x(t+t_0)$, то $f(x_*) = f(x)$ (*инвариантность по сдвигу*);

3) если $x_*(t) = x(1-t)$, то $f(x_*) = f(x)$ (*симметрия*);

4) $f(1) = 1$ (*нормировка*).

План доказательства. Достаточно громоздкая техническая процедура описана в [3]. Здесь будут намечены только основные этапы доказательства хорошо иллюстрирующие возможности теоремы. Прежде всего следует отметить, что в доказательстве используется усиленный вариант теоремы, а именно вместо нормы функционала $||f||$ используется его оценка через полунорму: $f(x) \leqslant p(x)$.

Определение 5.2. *Полунорма* – это функция, заданная на всем пространстве X и обладающая двумя свойствами:

1) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ (*полуаддитивность*);

2) если $k > 0$, то $p(kx) = kp(x)$ (*положительная однородность*).

Всякая норма является полунормой, но обратное неверно. Теорема Хана–Банаха остается справедливой для полунорм (требуется только подправить первую часть доказательства). Первый шаг в доказательстве следствия – построение подходящей полунормы.

Фиксируем вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и положим

$$\pi(x, a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(t + a_k).$$

Нужная полунорма определяется соотношением

$$p(x) = \inf\{\pi(x, a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Положительная однородность полунормы очевидна, а полуадитивность надо доказывать.

Построим нужный линейный функционал f_0 на множестве линейных функций (это просто площадь). Легко показать, что функционал f, построенный по теореме Хана–Банаха, как продолжение f_0 будет обладать всеми требуемыми свойствами, кроме симметрии.Чтобы исправить этот недостаток, достаточно определить новый функционал по формуле

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x_*)), \text{ где } x_*(t) = x(1-t). \blacksquare$$

Построенный функционал на функциях, интегрируемых по Риману, совпадает с интегралом Римана. В § 6 будет построен интеграл Лебега, обобщающий интеграл Римана. Конструкцию построенного здесь функционала можно подкорректировать, и он совпадет с интегралом Лебега на тех функциях, для которых он существует. Отметим еще раз, что сам функционал определен на всех ограниченных функциях.

Следствие 3. Построенный в теореме функционал позволяет определить меру $\mu(E)$ любого подмножества E отрезка $[0,1]$:

$$\mu(E) = f(\chi_E), \text{ где } \chi_E(t) = 1 \text{ при } t \in E, \ \chi_E(t) = 0 \text{ при } t \notin E.$$

На «обычных» множествах мера равна длине множества, но определена она на всех подмножествах. Расплатой за универсальность меры является отсутствие алгоритма ее вычисления. В § 6 будет построена мера Лебега, которая хотя и сложно, но конструктивно позволяет приписать меру очень широкому классу множеств. Подтверждением ее универсальности является тот факт, что для описания плохого (неизмеримого) множества приходится использовать аксиому выбора.

§ 6. МЕРА ЛЕБЕГА. ИЗМЕРИМЫЕ МНОЖЕСТВА

Необходимость сравнения множеств «по размеру» очень важна при работе с функциями. Определение 1.6 пространств L^p остается не завершенным, пока не будет дано точного описания классов ограниченных функций, интеграл от разности которых равен нулю. Наивный ответ на этот вопрос: функции должны совпадать вне «маленького» множества, требует определения «маленького» множества. В свое время формирование ответа на этот вопрос потребовало разработки новых конструкций, получивших название теории меры, созданной французским математиком Лебегом в начале XX века.

Толчком к построению теории меры послужил построенный Кантором пример маленького множества, в котором содержится очень много точек. Конструкция множества очень проста: из отрезка $[0,1]$ удаляется средний отрезок $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, эта процедура применяется к двум оставшимся отрезкам и т. д. Легко понять, что общая длина удаленных отрезков в пределе даст 1, но удалены не все точки. Остались, например, точки $\frac{1}{3}$

и $\dfrac{2}{3}$. Более тщательный анализ показывает, что останутся все точки вида $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon_n}{3^n}$, $\varepsilon_n \in \{0, 2\}$ (заметим, что $\dfrac{1}{3} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{3^n}$). Но равномощное множество $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\delta_n}{2^n}$, $\delta_n \in \{0, 1\}$, представляет собой двоичную запись координат всех точек отрезка $[0, 1]$, т. е. множество этих точек несчетно. Значит, мощность множества не связана с его «размером».

В следствии 3 из теоремы 5.1 утверждалось существование функционала, позволяющего сопоставить любому множеству из отрезка $[0, 1]$ число, причем на простых множествах (отрезках или их объединениях) это будет обычная длина множеств. Но теорема 5.1 гарантирует только существование такой меры и не позволяет ее вычислить. Для приложений подобное положение неприемлемо. Теория меры, построенная Лебегом дает алгоритм, хотя и очень сложный, вычисления меры множеств, но она не гарантирует, что измеримыми будут все множества. Имеется очень сложный пример конструкции пары непересекающихся множеств на поверхности сферы (в размерности два), таких что любая мера, обладающая естественными свойствами площади, припишет объединению этих множеств число, отличное от суммы мер этих множеств. Такие множества приходится считать неизмеримыми. Решая задачи, связанные с функциями, невозможно уклониться от предельных переходов, и здесь очень важно, чтобы мера обладала свойством счетной аддитивности, т. е. мера счетного объединения непересекающихся измеримых множеств равнялась бы сумме мер этих множеств. Если принять это требование, то окажется, что даже на отрезке (в размерности один) не существует меры, заданной на всех подмножествах отрезка $[0, 1]$.

Чтобы понять, насколько хорошо работает построенная Лебегом теория, полезно оценить сложность конструкции неизмеримого множества. Для построения такого множества необходимо использовать аксиому выбора.

Пример 6.1. Предположим, что на всех подмножествах E отрезка $[0, 1]$ задана *мера* m, обладающая следующими свойствами:

1) $m(E) \geqslant 0$ (*неотрицательность*);

2) для любых непересекающихся множеств, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, выполнено $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$ (*аддитивность*).

То же верно для счетного числа слагаемых (*счетная аддитивность*);

3) $m(E) = m(E+x)$ для всех вещественных чисел x (*инвариантность по сдвигу*).

Чтобы доказать, что такой меры не существует, построим счетную систему множеств, для которой не выполнено условие аддитивности. В основе конструкции лежат те же идеи, что были использованы при доказательстве несепарабельности пространства l^∞ (пример 2.9).

Множество удобно строить на единичной окружности $T = \{e^{i\pi t} : t \in [0,1]\}$. Фиксируем иррациональное число $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ и для каждого числа $t \in [0,1]$ определим множество $A(t) = \{e^{i(\pi t + \alpha n)}\}$.

Рассмотрим свойства этих множеств:

– все множества $A(t)$ счетны;

– множества либо совпадают, либо не пересекаются: если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $t_1 - t_2 = m\alpha$, то $A(t_1) = A(t_2)$, иначе $A(t_1) \cap A(t_2) = \varnothing$.

Воспользуемся аксиомой выбора и выберем из всех различных множеств $A(t)$ по одному элементу. Полученное множество обозначим B_0. Рассмотрим семейство поворотов множества B_0: $B_n = \left\{\tau e^{i\alpha n} : \tau \in B_0\right\}$. Эти множества обладают следующими свойствами:

– они не пересекаются: это следует из того, что не пересекаются множества $A(t)$, участвующие в построении;

– объединение множеств дает всю окружность: любая точка окружности принадлежит одному из множеств $A(t)$, в множестве $A(t)$ имеется точка t_*, принадлежащая множеству B_0, следовательно, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $t \in B_n$.

В силу инвариантности по сдвигам $m(B_n) = m(B_0) = \Delta$. Но счетная аддитивность меры гарантирует равенства

$$2\pi = m(T) = m\Big(\bigcup_n B_n\Big) = \sum_n m(B_n) = \Delta \cdot \infty = \infty,$$

что невозможно, и, следовательно, построенное множество неизмеримо для любой такой меры. ■

Переходя к изложению основных идей, позволяющих построить меру Лебега, еще раз сформулируем цель конструкции: на максимально широком классе подмножеств множества отрезка надо определить размер (меру) множеств, обладающую естественными геометрическими свойствами: положительность, счетная аддитивность, инвариантность по сдвигам.

Для краткости здесь будет описано построение меры на отрезке $[0,1]$. Построение меры на прямой и в евклидовых пространствах более высоких размерностей отличается только техническими деталями.

Первый этап – построение меры на отрезках и их конечных объединениях – носит чисто терминологический характер. Для отрезков все очевидно:

$$m([a,b]) = b - a.$$

Заметим, что для меры Лебега граничные точки несущественны, так как мера любой точки равна нулю (иначе невозможно сохранить инвариантность меры по сдвигу).

Второй этап – определение меры на множествах, полученных из отрезков с использованием стандартных операций над множествами: объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$ и дополнения $[0,1] \setminus A$.

Если эти операции применяются конечное число раз (такие множества называют *элементарными*), то в результате всегда будет получаться множество, состоящее из конечного числа непересекающихся отрезков и определение меры не вызывает затруднений. Все требуемые свойства меры, очевидно, выполняются.

Данное в примере 6.1 определение меры требует проверки корректности, т. е. доказательства независимости меры от способа разбиения множества на непересекающиеся отрезки. Это верно, поскольку для любых двух таких разбиений можно составить третье, такое что каждый отрезок первого или второго разбиения является объединением нескольких отрезков третьего разбиения, легко видеть, что корректность определения следует из того, что сумма не зависит от порядка слагаемых.

Третий этап – расширение совокупности элементарных множеств за счет рассмотрения бесконечных объединений и пересечений элементарных множеств. Существенным моментом конструкции становится проверка счетной аддитивности. Доказательство этого факта использует важное топологическое понятие компактного множества (в рассматриваемом случае отрезка – это любое замкнутое множество). Центральную роль в доказательстве играет следующее свойство компактных множеств.

Предложение 6.1. Если компактное множество покрыто системой открытых интервалов, то из них всегда можно выбрать конечное число интервалов так, что выбранные интервалы по-прежнему покрывают множество.

Счетную аддитивность легко получить из следующего утверждения.

Теорема 6.1 (о монотонности). Если множество B и множества $A_n,\ n = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, являются элементарными, причем $B \subset \bigcup\limits_n A_n$, то

$$m(B) \leqslant \sum_n m(A_n).$$

Доказательство. Для анализа свойств меры сложных множеств необходимо очень точно их (или их дополнения до отрезков) приближать, при этом важно точно контролировать, что происходит на концах отрезков. Опишем конструкцию, которая позволит это сделать.

Фиксируем число $\varepsilon > 0$. Для любого отрезка P обозначим через $\widetilde{P}$ открытый отрезок с тем же центром, содержащий P, близкий к нему по площади ($m(\widetilde{P}) < m(P) + \varepsilon$). Расширим таким образом каждое из множеств A_n. Поскольку эти множества являются элементарными, то каждое из них является объединением конечного числа отрезков. Фиксируем множество A_n, обозначим через s число входящих в него отрезков и заменим в конструкции расширения ε на $2^{-n}\dfrac{\varepsilon}{s}$. Проведем расширение каждого отрезка, входящего в множество A_n, и получим открытое множество $\widetilde{A_n}$, такое что

$$A_n \subset \widetilde{A_n}, \quad m\big(\widetilde{A_n}\big) < m(A_n) + 2^{-n}\varepsilon.$$

Для продолжения доказательства требуется получить покрытие замыкания $\overline{B}$ множества B открытыми множествами. Поскольку число множеств A_n может быть счетным, то построенных множеств $\widetilde{A_n}$ может не хватить (пример: $B = (0,1)$, $A_n = \left(\dfrac{1}{n}, 1\right)$, но $[0,1] \neq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{n}, 1\right] = (0,1]$). Однако множество B тоже элементарное и при замыкании к нему может добавиться только конечное число точек на концах отрезков. Обозначим число таких точек через K и рассмотрим симметричные окрестности V_k этих точек длины $\dfrac{\varepsilon}{K}$. Таким образом, получаем открытое покрытие замыкания множества B

$$B \subset \overline{B} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{K} V_k\right).$$

Основное свойство компактов позволяет выделить конечное покрытие:

$$B \subset \overline{B} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{N}\widetilde{A_n}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{K} V_k\right).$$

На всякий случай, включаем в покрытие все отрезки V_k. Пользуясь конечной аддитивностью, можно получить неравенства:

$$m(B) \leqslant m\big(\overline{B}\big) \leqslant m\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N}\widetilde{A_n}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{K} V_k\right)\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} m\big(\widetilde{A_n}\big) + \sum_{k=1}^{K} m(V_k) < \sum_{n=1}^{N} m(A_n) + 2\varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + 2\varepsilon.$$

Поскольку левая часть не зависит от ε, значение которого произвольно, то

$$m(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n). \blacksquare$$

Следствие (счетная аддитивность меры). Пусть множество B и множества A_n, $n = 1, 2, \ldots$, являются элементарными, $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и множества A_n попарно не пересекаются. Тогда

$$m(B) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

Доказательство. Обозначим $B_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. Множества B, B_n удовлетворяют условиям теоремы 6.1 и, следовательно, $m(B) \leqslant \sum\limits_{n} m(A_n)$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset B$ для любого n и из аддитивности меры следует, что $m(B) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} m(A_k)$. Суммы в правой части неравенства образуют монотонно возрастающую ограниченную (длиной промежутка) последовательность. Следовательно, эта последовательность имеет предел и $m(B) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. Объединив неравенства, получим $m(B) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(A_n)$. ■

Проведенные конструкции позволяют вычислить меру для очень большой совокупности множеств.

Пример 6.2. Всякое конечное множество A измеримо. Действительно, пусть A состоит из k точек. Построив окрестности каждой точки длиной $\frac{\varepsilon}{k}$, получаем совокупность интервалов, покрывающих множество A, общей длиной ε, где ε сколь угодно мало. Следовательно, мера A меньше ε, и поскольку ε – произвольное положительное число, то $m(A) = 0$.

Пример 6.3. Всякое счетное множество A измеримо. Чтобы в этом убедиться, пронумеруем точки множества A и выберем число ε. Построим окрестность длиной $\frac{\varepsilon}{2}$ для первой точки, длиной $\frac{\varepsilon}{4}$ – для второй точки, длиной $\frac{\varepsilon}{2^n}$ – для n-й и т. д. Счетная аддитивность меры гарантирует, что мера покрытия равна ε, следовательно, $m(A) < \varepsilon$, а поскольку ε – произвольное положительное число, то $m(A) = 0$. В частности, множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ имеет меру, равную нулю. Множество иррациональных точек отрезка $[0, 1]$, являющееся дополнением множества рациональных чисел, имеет меру, равную 1.

Пример 6.4. Всякое открытое множество измеримо. Из определения отрытого множества следует, что оно всегда содержит внутри себя интервал. В свою очередь, всякий интервал содержит рациональное число. Следовательно, открытое множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа непересекающихся открытых интервалов. Чтобы вычислить меру такого множества, достаточно воспользоваться счетной аддитивностью меры. Переходя к дополнениям, получим, что всякое замкнутое множество измеримо. В частности, измеримо канторово множество, определенное в начале этого параграфа.

Однако, как было показано в примере 6.1, на отрезке существуют множества, на которых нельзя определить счетно-аддитивную меру. Для того чтобы разделить множества на измеримые и неизмеримые с сохранением стандартных свойств меры, требуется еще один шаг.

Четвертый этап – определение измеримых множеств. Временно пожертвуем условием счетной аддитивности и введем суррогат меры, заданный на всех множествах.

Определение 6.1. *Внешней мерой* множества A называется

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{n} m(B_k) : B_k - \text{открытые множества},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k\right\}.$$

Замечание. Внешняя мера элементарного множества совпадает с мерой, определенной ранее. Для внешней меры можно доказать аналог теоремы 6.1 (о монотонности), но счетной аддитивности гарантировать не удастся (поскольку бывают неизмеримые множества).

Измеримыми будут названы множества, «близкие» к элементарным. Для этого потребуется еще один термин.

Определение 6.2. *Внутренняя мера* множества A – это внешняя мера его дополнения – $m^*\big([0,1] \setminus A\big)$.

Определение 6.3. *Измеримыми* называются те множества, для которых внешняя мера равна внутренней. Совокупность всех измеримых множеств будет обозначаться через $\mathfrak{M}$.

К сожалению, процедура вычисления инфимума не обладает никаким универсальным алгоритмом и не допускает никакого явного способа различить измеримые и неизмеримые множества. Часто бывает полезным другое эквивалентное определение измеримости.

Теорема 6.2. Множество A измеримо тогда и только тогда, когда для любого положительного ε существует элементарное множество B, такое что $m^*(A \triangle B) < \varepsilon$.

Здесь был использован символ симметрической разности двух множеств

$$A \triangle B = \big(([0,1] \setminus A) \cap B\big) \cup \big(([0,1] \setminus B) \cap A\big).$$

Следствие. Всякое подмножество измеримого множества меры ноль измеримо.

Проверка того, что так определенная на $\mathfrak{M}$ мера является положительной, счетно-аддитивной и инвариантной по сдвигам, требует только тщательной работы с уже имеющимися определениями. Ознакомиться с доказательством можно в [4].

Замечание. Теория меры переносится на случай двух и более измерений. Все, что требуется изменить, – это перейти от отрезков к параллелепипедам соответствующей размерности (см. [4]). Более того, все эти конструкции можно проводить в произвольном банаховом пространстве. Но там возникнут большие трудности, связанные со сложностью описания компактных множеств в этих пространствах. Несложно показать, что шар в бесконечномерном банаховом пространстве не является компактом.

Отметим еще одно важное обстоятельство – в приложениях часто возникает необходимость рассматривать меры, не являющиеся инвариантными по сдвигу. Типичным примером являются задачи теории вероятностей; легко понять, что вероятность попадания случайной величины в фиксированное множество фактически задает меру, и если эта случайная величина не является равномерно распределенной, то соответствующая мера не будет инвариантной по сдвигу.

§ 7. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Измеримые множества, в основном, обслуживают внутренние потребности теории меры. В прикладных вопросах очень важен новый тип интеграла, для которого понятия меры и измеримого множества совершенно необходимы. Определение этого интеграла требует введения нескольких технических понятий.

Определение 7.1. Вещественная функция f, заданная на отрезке $[0,1]$, называется *измеримой*, если для любого вещественного числа t измеримо множество $E_t = \{x \in [0,1] : f(x) < t\}$.

Замечание. Гибкость измеримых множеств по отношению к любым операциям над множествами позволяет заменить в этом определении множество $\{x \in [0,1] : f(x) < t\}$ на любое из множеств $\{x \in [0,1] : f(x) > t\}$, $\{x \in [0,1] : f(x) \leqslant t\}$, $\{x \in [0,1] : f(x) \geqslant t\}$. Более того, те же свойства измеримых множеств позволяют доказать, что f измерима тогда и только тогда, когда для любого $A \in \mathfrak{M}$ множество $\{x :$ существует $y \in A$ такой, что $x = f(y)\}$ измеримо.

Предложение 7.1. Если функции измеримы, то измеримы их сумма, произведение, частное (при условии, что знаменатель не обращается в ноль) и суперпозиция.

Предложение 7.2. Если функции f_n измеримы и для каждого $x \in [0,1]$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

Доказательства такого рода утверждений, как правило, сводятся к несложной, но громоздкой проверке определений. Они изложены, например, в [4]. Для иллюстрации этого можно посмотреть на тождество, которое, по существу, является доказательством предложения 7.2:

$$\{x : f(x) < t\} = \bigcup_k \left(\bigcup_n \left(\bigcap_{j>n} \left\{ x : f_j(x) < t - \frac{1}{k} \right\} \right) \right).$$

Определение 7.2. Две измеримые функции f и g называются *эквивалентными*, если множество, где они не равны, имеет меру ноль:

$$m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Замечание. Это настоящее соотношение эквивалентности. Оно симметрично и транзитивно. Легко проверить, что в определении достаточно требовать измеримости одной из функций, тогда вторая тоже будет измеримой.

Возможность пренебречь значениями функции на множестве меры ноль очень существенна во всем, что касается интеграла Лебега. Это отражается в соответствующей терминологии.

Определение 7.3. Говорят, что функции f_n *сходятся* к функции f *почти всюду*, если существует множество A нулевой меры, такое что для любой точки x вне его ($x \in [0,1] \setminus A$) имеет место сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Для сокращения записи в книгах в такой ситуации обычно пишут «сходится п. в.». Это понятие позволяет усилить предложение 7.2.

Предложение 7.3. Если функции f_n измеримы и п. в. существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то предельная функция f тоже измерима.

Это утверждение является простым следствием того, что на множестве меры ноль измерима любая функция.

Теперь все готово для определения интеграла Лебега. Внешне процедура напоминает определение интеграла Римана, формально она даже проще. Возможность приписать меру любому множеству, связанному с измеримой функцией, открывает широкую перспективу. Образное представление об отличиях этих интегралов дают описания двух способов подсчета денег.

«Способ Римана» предполагает последовательное суммирование купюр в том порядке, в каком они оказались. «Способ Лебега» предполагает на первом этапе сортировку купюр по достоинствам и последующее суммирование.

Как и интеграл Римана, интеграл Лебега вначале определяется на простых объектах.

Определение 7.4. Функция f называется *простой*, если она постоянна на измеримых множествах A_n, которые попарно не пересекаются и в объединении дают весь отрезок $[0,1]$: $f(x) = \sum\limits_n c_n \chi_n(x)$, где $c_n \in \mathbb{R}$, $\chi_n(x) = 1$ при $x \in A_n$, $\chi_n(x) = 0$ при $x \notin A_n$.

Легко проверить, что всякая простая функция измерима.

Предложение 7.4. Функция f измерима тогда и только тогда, когда существует последовательность простых функций f_n таких, что

$$\sup\bigl\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [0,1]\bigr\} \to 0.$$

Доказательство. Достаточно положить $f_n(x) = \dfrac{k}{n}$, когда $\dfrac{k}{n} \leqslant$ $\leqslant f(x) < \dfrac{k+1}{n}$. ■

Определение 7.5. *Интегралом Лебега* $\int\limits_0^1 f(x)dm$ от простой функции $f(x) = \sum\limits_n c_n \chi_n(x)$ по отрезку $[0,1]$ называется $\sum\limits_n c_n m(A_n)$, если ряд сходится.

Поскольку нет никакого естественного порядка для нумерации множеств A_n, то странно видеть в определении условно сходящийся ряд (сумма которого может меняться при перестановках слагаемых). С другой стороны, любую измеримую функцию можно представить как разность двух положительных измеримых функций $f = f_+ - f_-$, где

$$f_+(x) = f(x), \text{ когда } f(x) \geqslant 0, \ f_+(x) = 0, \text{ когда } f(x) < 0;$$
$$f_-(x) = -f(x), \text{ когда } f(x) < 0, \ f_-(x) = 0, \text{ когда } f(x) \geqslant 0.$$

Чтобы избежать появления условной сходимости, вводится еще одно понятие.

Определение 7.6. Простая функция $\sum\limits_n c_n \chi_n(x)$ называется *суммируемой*, если

$$\sum_n |c_n|\, m(A_n) < \infty.$$

Замечание. Работа с суммируемыми функциями значительно упрощает исследование сходимости интеграла. Но надо понимать, что существуют простые измеримые, но не суммируемые функции, например:

$$f(x) = (-1)^n n,\ x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Теперь можно завершить определение интеграла Лебега.

Определение 7.7. Функция f называется *интегрируемой по Лебегу*, если существуют последовательность измеримых простых функций f_n, таких что $\lim\limits_n f_n(x) = f(x)$, и предел $\lim\limits_n \int\limits_0^1 f_n(x)dm = I$; тогда число I называют *интегралом Лебега от функции* f и обозначают $\int\limits_0^1 f(x)dm$.

Интеграл по любому измеримому множеству A определяется равенством

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_0^1 f(x)\chi_A(x)dm,$$

где $\chi_A(x) = 1$ при $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ при $x \notin A$.

Замечание. Надо доказать, что определенный таким образом интеграл не зависит от выбора последовательности простых функций и что на простых функциях новое определение совпадает со старым. Оба эти утверждения верны и доказываются прямой проверкой [4].

Предложение 7.5 (свойства интеграла Лебега).

1. Интеграл Лебега неотрицателен, линеен, счетно-аддитивен, инвариантен по сдвигу.

2. Функция и ее модуль интегрируемы или нет одновременно.

3. На множестве меры ноль интегрируема любая функция и интеграл всегда равен нулю.

4. Если измеримые функции эквивалентны (иначе говоря, *почти всюду совпадают*), то интегралы от них по любому множеству равны.

Доказательства всех этих утверждений легко следуют из соответствующих определений.

Завершив построение интеграла, можно дать правильное определение пространств $L^p(a, b)$.

Определение 7.8. Пространство $L^p(a,b)$ состоит из классов эквивалентных функций. Норма определяется как $\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\, dm\right)^{1/p}$, где f – любой представитель рассматриваемого класса (свойство 4 предложения 7.5 гарантирует, что определение не зависит от выбора функции f).

Отметим еще несколько важных свойств интеграла Лебега.

Предложение 7.6 (неравенство Чебышева). Если f – положительная измеримая функция, A – измеримое множество, c – положительная постоянная, то

$$m\big(\{x : f(x) > c,\ x \in A\}\big) \leqslant \frac{1}{c} \int\limits_A f(x)dm.$$

Доказательство. Обозначим через $B = \{x : f(x) > c,\ x \in A\}$. Нужная оценка получается из аддитивности и монотонности интеграла

$$\int\limits_A f(x)dm = \int\limits_B f(x)dm + \int\limits_{A\setminus B} f(x)dm \geqslant C \geqslant c \cdot m(B). \ \blacksquare$$

Предложение 7.7 (абсолютная непрерывность меры Лебега). Если f – суммируемая функция, A – измеримое множество, то для любого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого $B \subset A$ из условия $m(B) < \delta$ следует $\left|\int\limits_B f(x)dm\right| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим через A_n множество $\{x : n \leqslant |f(x)| <$ $< n+1\}$. Свойства интеграла позволяют получить оценку

$$\left|\int\limits_A f(x)dm\right| \leqslant \int\limits_A |f(x)|dm = \sum_n \int\limits_{A_n} |f(x)|dm.$$

Из суммируемости функции следует существование такого числа N, что $\sum\limits_{n>N} \int\limits_{A_n} |f(x)|dm < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $B_N = B \bigcap \left(\bigcup\limits_{n\leqslant N} A_n\right)$, $C_N = D \setminus B_N$. Выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2N}$, тогда для $m(B) < \delta$ будем иметь:

$$\left|\int\limits_B f(x)dm\right| \leqslant \int\limits_B |f(x)|dm = \int\limits_{B_N} |f(x)|dm + \int\limits_{C_N} |f(x)|dm \leqslant N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \blacksquare$$

Следствие. Если f – положительная измеримая функция, то формула

$$\mu(A) = \int\limits_A f(x)dm$$

задает на измеримых множествах счетно-аддитивную меру, но не инвариантную по сдвигу.

Замечание. Исторически первым обобщением интеграла Римана был *интеграл Стилтьеса*. Он определяется через возрастающую функцию g (для каждой функции свой интеграл) по формуле

$$\int\limits_0^1 f(x)dg(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\left(g\left(\frac{n}{N}\right) - g\left(\frac{n-1}{N}\right)\right).$$

Еще одно обстоятельство делает интеграл Лебега удобным в работе – он в отличие от интеграла Римана хорошо выдерживает предельные переходы. Нельзя сказать, что предел суммируемых функций суммируем, но имеется ряд простых условий, гарантирующих выполнение этого утверждения. Перечислим некоторые из них (доказательства этих утверждений имеются в [4]).

Теорема 7.1 (Лебега). Если суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует число M такое, что $\int\limits_0^1 f_n(x)dm \leqslant M$, то предельная функция f тоже суммируема.

Теорема 7.2 (Фату). Если положительные суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду и существует положительная измеримая функция g такая, что $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, то предельная функция f тоже суммируема.

Теорема 7.3 (Леви). Если суммируемые функции f_n сходятся к функции f почти всюду, существует число M такое, что при любом n $\int\limits_0^1 f_n(x)dm \leqslant M$, и выполнены неравенства $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, то предельная функция f тоже суммируема.

§ 8. ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ. ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Свойства функционалов позволяют придать теореме Хана–Банаха геометрический смысл. В основе этого лежит то обстоятельство, что ядро функционала (однородная гиперплоскость) разделяет пространство на две части (полупространства). Тем же свойством обладают и сдвиги ядра, т. е. множества $\{x \in X : f(x) = a\}$, называемые *гиперплоскостями*.

Определение 8.1. Пусть M и N – подмножества банахова пространства X. Говорят, что функционал f *разделяет* эти множества, если

$$\inf\{f(x) : x \in M\} \geqslant \sup\{f(x) : x \in N\}.$$

Следующие простые утверждения необходимы для доказательства теоремы об отделимости.

Предложение 8.1.

1. Если функционал f разделяет множества M и N, то он разделяет и множества $M - x_0 = \{x : x = x_1 - x_0,\ x_1 \in M\}$ и $N - x_0$.

2. Если функционал f разделяет множества M и N, то он разделяет и множества $A = M - N = \{x_1 - x_2 : x_1 \in M,\ x_2 \in N\}$ и $B = \{0\}$.

Теорема 8.1 (об отделимости пары выпуклых множеств). Пусть M и N – выпуклые множества в банаховом пространстве X, причем M открытое и $M \cap N = \varnothing$, тогда существует линейный непрерывный функционал, разделяющий эти множества.

Доказательство. «Изготовим» из множеств M и N вспомогательное множество A, которое позволит ввести полунорму (см. § 5) и с ее помощью доказать существование нужного функционала.

Предложение 8.1 позволяет считать, что $0 \in M$. Фиксируем точку $y_0 \in N$, тогда множество $M - N$ содержит точку $-y_0$. Тогда множество $A = M - N + y_0$ содержит точку 0, но не содержит точку y_0, иначе точка 0 попадала бы в множество $M - N$, но по условию $M \cap N = \varnothing$. Таким образом, множество A оказывается выпуклым телом, содержащим точку 0. Теорема Минковского гарантирует, что это множество порождает полунорму на пространстве X:

$$p_A(x) = \inf\left\{r : \frac{x}{r} \in A,\ x \in X\right\}$$

(полунорма появляется по той причине, что множество A может оказаться неограниченным).

Как отмечалось, теорема Хана–Банаха остается справедливой, если заменить в ней оценку через норму оценкой через полунорму. Зададим подходящий стартовый функционал, который будет продолжен по теореме Хана–Банаха. Определим его на одномерном подпространстве $X_0 = \{y = ty_0 : t \in \mathbb{R}\}$ формулой

$$f_0(y) = p_A(y_0)\, t,\ y = ty_0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Нужную оценку функционала $f_0(y) \leqslant p_A(y)$ легко получить. Для $t \geqslant 0$ она следует из свойства положительной однородности полунормы ($p(tx) = tp(x)$). Если $t < 0$, то $f(ty_0) < 0$, в то время как определенная ранее полунорма всегда положительна.

Применим теорему Хана–Банаха и получим функционал f – продолжение функционала f_0 на все пространство X. Покажем, что этот функционал разделяет множества M и N. Возьмем произвольные точки из этих множеств $x_M \in M$, $x_N \in N$, тогда точка $x = x_M - x_N + y_0 \in A$. По построению $p_A(x) < 1$, для всех $x \in A$. Следовательно, $f(x_M) - f(x_N) + p(y_0) \leqslant 1$, или $f(x_M) \leqslant f(x_N) + 1 - p(y_0)$. Точка y_0 не принадлежит множеству A, поэтому $p_A(y_0) > 1$. Значит, $1 - p_A(y_0) < 0$ и $f(x_M) < f(x_N)$. Теорема доказана. ■

Полученный результат допускает обобщение, важное для приложений в задачах оптимизации.

Теорема 8.2 (об отделимости групп множеств). Пусть X – банахово пространство, $V_0, \ldots, V_{n-1}$ – открытые выпуклые подмножества X, V_n – выпуклое подмножество X, $\bigcap\limits_{k=0}^{n} V_k = \varnothing$. Тогда существуют открытые полупространства $D_k = \{x : f_k(x) < c_k,\ f_k \in X^*,\ c_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \ldots, n\}$ такие, что $V_k \subset D_k,\ r = 0, \ldots, n-1,\ V_n \subset \overline{D_n},\ \bigcap\limits_{k=0}^{n} D_k = \varnothing$ ($\overline{D_n}$ означает замыкание множества D_n).

Замечание. Для приложений бывает важно, что одно из множеств не обязано быть открытым. Это обстоятельство не создает принципиальных трудностей, но требует многочисленных технических оговорок в доказательстве. Чтобы избежать этого, здесь будет рассматриваться только случай, когда все множества открыты.

Доказательство. По теореме Хана–Банаха найдется полупространство D_0, содержащее множество V_0 и не пересекающееся с множеством $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k$, так как множества V_0 и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k$ выпуклы, открыты и не пересекаются. Здесь и далее используется то обстоятельство, что пересечение открытых выпуклых множеств тоже открыто и выпукло.

Рассмотрим теперь пару множеств V_1 и $D_0 \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=2}^{n} V_k \right)$. По построению эти множества не пересекаются, оба множества открыты и выпуклы. Они не пересекаются, так как если бы существовала точка x, принадлежащая и тому и другому множеству, то эта точка попала бы в пересечение множеств D_0 и $\bigcap\limits_{k=1}^{n} V_k$, что противоречит определению множества D_0.

Снова воспользуемся теоремой Хана–Банаха и построим полупространство D_1, содержащее множество V_1 и не пересекающееся с множеством $(D_0 \bigcap D_1) \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=2}^{n} V_k \right)$. В ходе этого процесса «вытеснения» на n-м шаге будет построено полупространство D_n, содержащее множество V_n и не пересекающееся с множеством $D_0 \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} D_k \right)$. Остается заметить, что построенная система полупространств искомая. ■

Следующая теорема составляет основу для «перевода» абстрактных алгоритмов функционального анализа в вычислительные процедуры в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Теорема 8.3 (о численном описании пустоты пересечения полупространств). Пусть $D_k = \{x : f_k(x) < c_k,\ f_k \in X^*,\ c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \ldots, n\}$ – произвольное множество полупространств в банаховом пространстве X. Пересечение этих полупространств пусто тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_k \geqslant 0$, не все равные нулю, такие что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \leqslant 0$.

Доказательство.

Необходимость. Рассмотрим отображение пространства X в $\mathbb{R}^n$, сопоставляющее $x \in X$ точку $(f_1(x) - c_1, \ldots, f_n(x) - c_n) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что все координаты такой точки не могут быть отрицательны, иначе пересечение полупространств было бы не пусто. Обозначим через A образ всего пространства X при этом отображении. A является сдвигом линейного пространства $\{y = (y_1, \ldots, y_n) : y_k = f_k(x),\ x \in X\}$.

Как отмечено ранее, в образе пространства X не могут находиться точки, все координаты которых отрицательны. Другими словами, конус $B = \{(y_1, \ldots, y_n) \in R^n : y_k < 0\}$ не пересекается с множеством A. Поскольку множество A является сдвигом линейного пространства, то существует содержащая его плоскость $P = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k = \lambda\}$, которая не пересекается с множеством B. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k (f_k(x) - c_k) = \lambda$ для всех $x \in X$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k < \lambda$ для всех $y \in B$.

Отметим, что в этом построении могло бы оказаться, что второе неравенство будет иметь противоположный смысл (неправильная ориентация нормали к плоскости). В этом случае достаточно сменить знаки всех коэффициентов. При этом первое равенство сохранится (равенство не нарушается при умножении на -1 обеих частей).

Проведем анализ коэффициентов. Числа λ_k неотрицательны, так как наличие $\lambda_k < 0$ сделало бы невозможным неравенство. Число λ не может быть отрицательным, иначе сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k$ при подходящих значениях $y \in B$ могла бы принимать значения сколь угодно близкие к 0 и неравенство было бы нарушено.

Из первого условия следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \lambda_k + \lambda$ для всех $x \in X$. Поскольку правая часть равенства не зависит от x, то левая может быть только константой, но при $x = 0$ левая часть равна нулю ($f_k(0) = 0$), значит, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \lambda_k + \lambda = 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \lambda_k \leqslant 0$.

Достаточность. Если выполнены условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$, все $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \leqslant 0$ и пересечение полупространств не пусто, то для точки x_* из этого пересечения были бы выполнены соотношения: $f_k(x_*) < c_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_*) < \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \lambda_k \leqslant 0$. Но это означало бы, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x_*) \neq 0$, а это противоречит сделанному предположению. ■

Для описания решения задачи линейной оптимизации теорему 8.3 надо модифицировать, выделив в ней один из функционалов. При этом в доказательстве будет использовано следующее простое утверждение.

Предложение 8.2. Если два открытых множества имеют непустое пересечение, то замыкание их пересечения равно пересечению замыканий.

Теорема 8.4. Пусть $g, f_1, \ldots, f_n \in X^*$, $c_k \in \mathbb{R}$, $D_k = \{x \in X : f_k(x) < c_k\}$. Если $\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k \neq \varnothing$, $g \in X^*$ и $g(x) \geqslant 0$ при $x \in \overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k}$, то существуют неотрицательные числа λ_k, такие что $g + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

Доказательство. Обозначим $D_0 = \{x : g(x) < 0\}$. Из условия теоремы следует, что $D_0 \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{D_k} \right) = \varnothing$. Предложение 8.2 позволяет поменять порядок замыкания и объединения $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{D_k} = \overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k}$. Следовательно, $D_0 \bigcap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k \right) \subset D_0 \bigcap \overline{\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k \right)} = \varnothing$. По теореме 8.3 найдутся неотрицательные коэффициенты λ_k, такие что $\lambda_0 g + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$. Остается заметить,что $\lambda_0 \neq 0$, так как из той же теоремы следовало, что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} D_k = \varnothing$. ■

Еще одна вспомогательная теорема показывает, каким может быть функционал, обращающийся в ноль на пересечении ядер нескольких других функционалов.

Теорема 8.5. Предположим, что $g, f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Если $g(x) = 0$ для $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$, то существуют вещественные числа α_k, такие что $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ банахова пространства X в пространство $\mathbb{R}^n$. На образе пространства X в $\mathbb{R}^n$ построим еще одно отображение ψ по формуле $\psi(y) = g(x) \in \mathbb{R}$, если $y = \varphi(x)$. Поскольку одному y может соответствовать несколько x, необходимо проверить корректность определения ψ, т. е. убедиться, что функционал g принимает на них одинаковые значения. Пусть $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, тогда $x_1 - x_2 \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} \ker f_k$ и по условию $x_1 - x_2 \in \ker g$. Следовательно, $g(x_1) = g(x_2)$. Очевидно, что ψ – линейное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. Всякое такое отображение имеет вид $\psi(y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k y_k$. Остается заметить, что $g(x) = \psi(\varphi(x)) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$. ■

Перейдем к рассмотрению задачи *линейной оптимизации*. Пусть в банаховом пространстве X задан «многоугольник» $A = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{x : f_j(x) < c_j\}$, $f_j \in X^*$, $c_j \in \mathbb{R}$, многоугольник рассечен сдвинутым линейным пространством $Y = \{y : g_k(y) = d_k\}$, где $g_k \in X^*$, $d_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$. Кроме того, задан функционал $h \in X^*$, максимум которого на $A \cap Y$ требуется найти.

Поставленная задача будет решена в несколько расширенной постановке, а именно будет дано описание точек $\overline{x} \in A \cap Y$, для которых $h(\overline{x}) = \max\{h(x) : x \in A \cap Y\}$.

Теорема 8.6. Элемент $\overline{x}$ является решением поставленной ранее задачи оптимизации тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_j \geqslant 0$

$(j \in J(\overline{x})$ и μ_k $(k = 1, \ldots, m)$, такие что $h = \sum\limits_{j \in J} \lambda_j f_j + \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k g_k$; где J – множество индексов «выхода на грань»: $J(\overline{x}) = \{j : f_j(\overline{x}) = c_k\}$.

Замечание. Появление в формулировке множества индексов J важно для приложений. Это можно понять на простом примере вычисления наибольшего значения линейной функции на треугольнике. Без упоминания множества J теорема 8.6 утверждала бы очевидный факт: наибольшее значение достигается в одной из вершин, а в существующей формулировке указывается вершина, в которой достигается наибольшее значение. Формулировка теоремы может создавать ощущение трудности ее применения в практических задачах, но это не так. Выяснив, по какой минимальной системе функционалов из числа f_j возможно разложить функционал h так, чтобы коэффициенты были положительны, можно точно описать то множество точек, на котором функционал принимает наибольшее значение.

Для доказательства теоремы 8.6 важно следующее свойство совокупности индексов J, имеющее простой геометрический смысл. Функционал h достигает наибольшего значения в вершине, на ребре или грани многогранника A. Предложение 8.3 утверждает, что рядом с этим множеством принадлежность точки многограннику зависит только от функционалов с номерами из J.

Предложение 8.3. Пусть $C = \{x \in A : h(x) = h(\overline{x})\}$. Тогда для любой достаточно малой окрестности V множества C выполняется равенство

$$V \bigcap \left(\bigcap_{j \in J} \{x : f_j(x) < c_j\} \right) = V \cap A.$$

Доказательство. Поскольку функционал h непрерывен и линеен, то множество C замкнуто и выпукло. Обозначим через d наименьшее расстояние от множества C до гиперплоскостей $\{x : f_r(x) = c_r,\ r \notin J\}$. Тогда в качестве искомой окрестности можно взять

$$V = \left\{ x : \inf\bigl\{ ||x - c|| : c \in C \bigr\} < \frac{d}{2} \right\}.$$

Из того, что в множество V не попадают никакие гиперплоскости $\{x : f_j(x) < c_j\}$ кроме тех, у которых $j \in J$, немедленно следует необходимое равенство. ■

Доказательство теоремы 8.6. (1) Рассмотрим сначала случай, когда нет ограничений вида $g_k(y) = d_k$. В этом случае условие теоремы можно записать так: множества (полупространства) $D_j = \{x : f_j(x) < c_j\}$,

$j=1,\ldots,n$, таковы, что $A=\bigcap\limits_{j=1}^{n}\{x : f_j(x)<c_j\}\neq\varnothing$, и $D_0=\{x : h(x)>$ $>h(\overline{x})\}$ таково, что $D_0\cap A=\varnothing$.

В силу теоремы 8.3 это утверждение равносильно существованию чисел $\lambda_j\geqslant 0$ таких, что $h=\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j f_j$. Для завершения доказательства достаточно показать, что сумму можно «сократить», т. е. ограничить суммирование индексами, попадающим в множество J. Та же теорема 8.3 гарантирует, что для этого достаточно доказать, что функционал h достигает в точке $\overline{x}$ своего наибольшего значения на множестве $\bigcap\limits_{j\in J} D_j$.

Предложение 8.2 утверждает, что существует отрытое множество V, содержащее точку $\overline{x}$, такое, что $A\cap V = V\bigcap\left(\bigcap\limits_{j\in J} D_j\right)$. По условию на этом множестве $h(x)<h(\overline{x})$. Возьмем произвольную точку из множества $x_1\in\bigcap\limits_{j\in J} D_j$. Поскольку это пересечение выпукло и точка $\overline{x}$ лежит на его границе, то отрезок $\{x=x_1+t(\overline{x}-x_1) : 0\leqslant t<1\}$ содержится в этом множестве. Так как множество V открыто и точка $\overline{x}$ принадлежит границе этого множества, то на отрезке найдется точка $x_2=x_1+t_2(\overline{x}-x_1)\in V$. Как уже было отмечено, в этом случае $h(\overline{x})>h(x_2)$. Покажем теперь, что $h(x_2)>h(x_1)$; действительно, $(1-t_2)x_1=x_2-t_2\overline{x}$, откуда $(1-t_2)(x_1-x_2)=t_2x_2-t_2\overline{x}$, следовательно, $(1-t_2)(h(x_1)-h(x_2))=t_2(h(x_2)-h(\overline{x}))$ и $h(x_2)>h(x_1)$.

(2) Рассмотрим общий случай, когда присутствуют ограничения вида $g_k(y)=d_k$. Чтобы перейти к линейным пространствам, проведем сдвиг $x\to x-\overline{x}$, т. е. переместим точку, где достигается наибольшее значение, в 0. При этом в ограничениях изменятся постоянные: c_j на $c_j-f_j(\overline{x})$, d_k на $d_k-g_k(\overline{x})=0$. Не меняя обозначений для функционалов, запишем эквивалентную задачу: выяснить необходимые и достаточные условия для того, чтобы 0 доставлял решение экстремальной задачи $h(\overline{x})=\max\{h(x) : x\in A\cap Y\}$.

Сузим задачу на линейное пространство Y, которое после сдвига стало линейным пространством $\{x : g_k(x)=0,\ k=1,\ldots,m\}$. Обозначим через $\widetilde{f}_j$ и $\widetilde{h}$ сужения функционалов f_j и h на линейное пространство Y. Задача на наибольшее значение «наследуется» пространством Y, но при этом теряет ограничения, связанные с равенствами. Такая задача решена в первой части доказательства. Функционал $\widetilde{h}$ является ее решением тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_j \geqslant 0$ такие, что $\widetilde{h} = \sum_{j \in \widetilde{J}} \lambda_j \widetilde{f}_j$ (здесь $\widetilde{J} = \{j : \widetilde{f}_j = c_j - f_j(\overline{x})\}$). Заметим, что множества $\widetilde{J}$ и J совпадают.

Чтобы завершить доказательство, надо вернуться в пространство X. Это легко сделать, поскольку функционалы f_j являются продолжениями $\widetilde{f}_j$ с пространства Y на X. Чтобы получить все решения, надо добавить к имеющемуся любой из функционалов, обращающийся в 0 на пространстве Y. Описание таких функционалов имеется в теоремах 8.4 и 8.5, согласно которым 0 является решением задачи оптимизации тогда и только тогда, когда $h + \sum\limits_{j \in J} \lambda_j f_j + \sum\limits_{k} \mu_k g_k = 0$. Для завершения доказательства остается сделать обратный сдвиг, переводящий точку 0 в $\overline{x}$. ■

Замечание. Интересна история доказательства этой теоремы. Впервые оно было получено советским математиком С. В. Канторовичем в 1938 г., как решение практической задачи оптимизации раскроя материала на реальном производстве. Оно было внедрено на производстве и дало хороший эффект, но не прижилось, поскольку предприятие перестало выполнять план по сдаче отходов производства. Тем не менее Канторович опубликовал построенный алгоритм, остававшийся решением теоретической задачи [5]. Общая задача линейного программирования была впервые поставлена в 1947 г. Данцигом и Вудом. Первое успешное решение задачи линейного программирования на ЭВМ было проведено в 1952 г. Алгоритм стал очень популярным в экономических моделях. В итоге в 1975 г. Канторовичу была присуждена Нобелевская премия по экономике. В дальнейшем оказалось, что идеи, заложенные в алгоритм решения задачи, можно перенести на задачу выпуклой оптимизации (поиск наибольшего значения выпуклого функционала на выпуклом множестве). Первый шаг в этом направлении уже приведен – это теорема об отделимости группы выпуклых множеств. Следует отметить, что математический аппарат, необходимый для решения этой задачи в общем виде, значительно сложнее. Подробное описание этих вопросов имеется в [6].

Лабораторная работа «Задача оптимизации». Задан список координат вершин многогранника и список номеров вершин, формирующих каждую из его граней.

Требуется разработать алгоритм, который для любого заданного функционала:

1) вычисляет его наибольшее и наименьшее значения на многограннике;

2) описывает множество точек многогранника, на которых достигаются эти значения.

Алгоритм должен быть построен на основании теоремы об описании точек экстремума.

Точка x_* является точкой минимума функционала $f = (f_1, f_2, f_3)$ на многограннике тогда и только тогда, когда:

1) точка x_* принадлежит пересечению граней многогранника $g_1, \ldots, g_r$, $r = 1, 2, 3, 4, 5$;

2) в точках минимума существуют неотрицательные числа λ_k такие, что $f + \lambda_1 n_1 + \ldots + \lambda_r n_r = 0$ (n_k – внешняя нормаль к грани g_k).

В точках максимума верно аналогичное утверждение, но меняется условие на функционал: $f = \lambda_1 n_1 + \ldots + \lambda_r n_r$, т. е. вектор f лежит в конусе, образованном векторами $n_1, \ldots, n_r$.

Рассмотрим план решения задачи. Назовем конусом вершины конус, образованный нормалями граней, примыкающих к вершине. Конусы вершин не имеют общих внутренних точек. Любой вектор $f = (f_1, f_2, f_3)$ принадлежит хотя бы одному из конусов вершин. Для решения задачи достаточно определить, в какой из конусов вершин попадает вектор f.

Проверка принадлежности вектора конусу проходит по алгоритму, использованному в лабораторной работе «Вычисление нормы элемента» (см. § 1). Надо построить биортогональный базис и вычислить коэффициенты разложения вектора f в этом базисе. Если все они положительны, то вектор лежит в конусе и максимум достигается в вершине. Если все коэффициенты отрицательны, то в вершине достигается минимум.

Если один из коэффициентов равен нулю, а остальные положительны, то максимум достигается на ребре. Если два коэффициента равны нулю, а третий положителен, то максимум достигается на грани. Аналогичные утверждения верны для точек минимума.

§ 9. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Функциональные пространства и операторы, действующие в этих пространствах, создают мощную базу для построения моделей. Правильный подбор функциональных пространств позволяет реализовывать модель при помощи линейных операторов, что сводит задачу к построению обратного оператора. Вопрос о существовании обратного оператора естественно расширить до вопроса о построении функций от оператора $f(A)$. Если при этом из равенства $h(x) = f(x)g(x)$ будет следовать $h(A) = f(A)g(A)$, то для получения обратного оператора будет достаточно применить к нему функцию $f(x) = 1/x$. Эту идею легче всего реализовать на диагональных матрицах

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} a^{n} & 0 \\ 0 & b^{n} \end{pmatrix}.$$

Единственным ограничением здесь является условие: числа на диагонали должны быть отличны от нуля. Продолжая эти построения, можно определить многочлены от диагональной матрицы, аналитические функции (сходящиеся степенные ряды) и далее ряды Лорана (в последнем случае необходимо гарантировать, что диагональные элементы не совпадают с полюсами функции). При обращении матрицы требуется именно это условие, чтобы диагональные элементы не обращались в ноль. Условие диагональности матрицы можно значительно ослабить. Все построения проходят для матриц, допускающих приведение к диагональному виду, т. е. матриц, собственные векторы которых образуют базис пространства. Для таких матриц всегда возможно разложение $A = V^{-1}DV$, где D – диагональная матрица, и тогда $A^n = V^{-1}D^nV$ и $f(A) = V^{-1}f(D)V$ при условии, что диагональные элементы (собственные числа матрицы A) не совпадают с полюсами функции f. В этом случае

$$f(A)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k d_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) x_k d_k,$$

где λ_k – собственные числа, d_k – собственные векторы оператора.

Отметим, что для операторов в конечномерных пространствах (матриц), такой способ построения функции от оператора проходит всегда, поскольку любую матрицу можно привести к жордановой форме, а для жордановых блоков операция возведения в степень допускает конструктивное описание (правда, форма ответа сильно усложняется, что затрудняет использование этого результата). Полное и подробное изложение таких конструкций для матриц имеется в [7]. Этим и исчерпывается спектральная теория конечномерных операторов.

Важная роль собственных чисел в этих построениях привела к тому, что для их множества появилось свое устойчивое название.

Определение 9.1. *Спектром оператора* A называется множество $\sigma(A)$ комплексных чисел λ, для которых оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного.

Замечание. Спектр матрицы – это множество ее собственных чисел. Из основной теоремы алгебры следует, что он всегда не пуст. Спектр оператора в бесконечномерном пространстве может быть устроен сложнее. Например, оператор A, сопоставляющий функции $f \in C[0,1]$ функцию $g(x) = xf(x)$, вообще не имеет собственных чисел. Проверим это. Допустим, что это не так, и λ является собственных числом. Тогда существовала бы отличная от нуля функция, для которой выполнялось бы равенство $xf(x) = \lambda f(x)$, т. е. в любой точке, где функция отлична от нуля, должно выполняться равенство $x = \lambda$, что невозможно. Причем спектр оператора не пуст: 0 принадлежит спектру, и, следовательно, оператор необратим. Следует это из предложения 3.2 и того обстоятельства, что последовательность непрерывных функций f_n, линейных на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ и принимающих значения $f_n(0) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = 1$ на концах этих отрезков, переводится этим оператором в функции с нормами $\frac{1}{2n}$, в то время как сами функции имеют норму, равную единице.

Возможна и другая крайность. Оператор сдвига, отображающий пространство l^2 в себя, заданный формулой $y = Ax$, $y_n = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, имеет «слишком много» собственных чисел, точнее, всякое комплексное число λ, по модулю меньшее 1, является собственным числом этого оператора. Проверим это, рассмотрев последовательность $x = \{1, \lambda, \ldots, \lambda^n, \ldots\}$, которая принадлежит l^2:

$$||x||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{2n} = \frac{1}{1 - |\lambda|^2}\,.$$

Оператор сдвига переводит ее в последовательность $y_n = x_{n+1} = \lambda^{n+1} = \lambda x_n$, т. е. $y = \lambda x$. Значит, весь единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ входит в спектр оператора.

Сформулируем основную цель спектральной теории – описание классов пространств и операторов, для которых можно получить описание спектра и построить функциональное исчисление. Этот вопрос настолько сложен и чувствителен к изменениям характеристик рассматриваемых объектов, что получить на него исчерпывающий ответ невозможно. Всюду далее будут рассматриваться только гильбертовы пространства, так как ортогональные разложения играют центральную роль в спектральной теории операторов. Будет доказана теорема о спектральном разложении в простейшей бесконечномерной ситуации, сохраняющая сходство с аналогичным результатом для матриц. Дальнейшие продвижения будут только намечены, но они требуют существенно иной техники.

Как было отмечено ранее, полное описание спектрального разложения будет дано при сильных ограничениях на оператор. Главное из них – условие компактности оператора.

Определение 9.2. Оператор A, отображающий одно банахово пространство в другое, называется *компактным*, если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ такую, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} Ay_k$.

Определение 9.3. Оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *самосопряженным*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \ \forall x, y \in H.$$

Теорема 9.1 (о спектральном разложении). Если A – компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве H, то он имеет не более чем счетное множество собственных векторов $\{\lambda_n\}$, собственные подпространства оператора $H_n = \{x : Ax = \lambda_n x\}$ конечномерны, ортогональны между собой и справедлива формула спектрального разложения $Ax = \sum\limits_n \lambda_n P_n x$, где P_n – проектор на H_n.

План доказательства сводится к постепенному «отщеплению» от исходного пространства собственных подпространств оператора и контролю того, что после отщепления для оставшейся части оператора выполнены условия теоремы. Доказательство удобно представить в виде последовательности утверждений, реализующих этот план. Вначале будут рассмотрены некоторые свойства компактных и самосопряженных операторов, необходимые для доказательства теоремы.

Предложение 9.1. Собственные числа самосопряженного оператора вещественны, а собственные элементы, относящиеся к разным собственным числам, ортогональны.

Доказательство. Если λ – собственное число самосопряженного оператора A, то для него существует собственный элемент ($Ax = \lambda x, x \neq 0$). Самосопряженность оператора означает, что $(Ax, x) = (x, Ax)$ (определение 3.5), следовательно, $(\lambda x, x) = (x, \lambda x)$ и далее по свойствам скалярного произведения $\lambda(x, x) = \overline{\lambda}(x, x)$, т. е. $\lambda = \overline{\lambda}$.

Если $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, то равенство $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$ можно переписать в виде $\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$ (учли, что $\lambda_2 = \overline{\lambda_2}$); при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ такое равенство возможно только в случае $(x_1, x_2) = 0$. ■

Предложение 9.2. Произведение самосопряженных операторов является самосопряженным оператором тогда и только тогда, когда они коммутируют.

Доказательство. Утверждение следует из тождества $(AB)^* = B^*A^*$, которое легко вывести из определения 3.5 сопряженного оператора. Из самосопряженности операторов A и B следует $(AB)^* = B^*A^* = BA$, а из самосопряженности оператора AB следует $(AB)^* = AB$. Эти два равенства доказывают требуемое. ■

Предложение 9.3. Если оператор A самосопряжен, то скалярное произведение (Ax, x) вещественно для любого x.

Доказательство. Если A самосопряжен, то $(Ax, x) = (x, Ax)$, а по свойствам скалярного произведения $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)}$, т. е. скалярное произведение вещественно. ■

Предложение 9.4. Если оператор A самосопряжен, то

$$||A|| = \sup\{|(Ax, x)| : ||x|| \leqslant 1\}.$$

Доказательство. Обозначим $Q = \sup\{|(Ax, x)| : ||x|| \leqslant 1\}$. Поскольку для $||x|| \leqslant 1$

$$|(Ax, x)| \leqslant ||Ax|| \cdot ||x|| \leqslant ||A|| \cdot ||x|| \leqslant ||A||,$$

то $Q \leqslant ||A||$. Для завершения доказательства достаточно установить обратное неравенство. Это можно сделать, используя тождества, которые легко проверяются непосредственно:

$$(A(x + y), x + y) = (Ax, x) + 2\operatorname{Re}(Ax, y) + (Ay, y),$$

$$(A(x - y), x - y) = (Ax, x) - 2\operatorname{Re}(Ax, y) + (Ay, y).$$

Из этих тождеств и равенства параллелограмма следует оценка

$$|\operatorname{Re}(Ax, y)| = \frac{1}{4}\big|(A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y)\big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q}{4}\left[||x + y||^2 + ||x - y||^2\right] = \frac{Q}{2}\left[||x||^2 + ||y||^2\right].$$

Фиксируем элемент x такой, что $||x|| \leqslant 1$ и $Ax \neq 0$, и положим $y = \dfrac{Ax}{||Ax||}$, тогда $||y|| = 1$. Получаем

$$||Ax|| = (Ax, y) = \frac{1}{||Ax||}(Ax, Ax) = \operatorname{Re}\left(Ax, \frac{Ax}{||Ax||}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Q}{2}\left[||x||^2 + ||y||^2\right] \leqslant Q\,.$$

Неравенство тем более верно, если $Ax = 0$. Следовательно, $||A|| \leqslant Q$. Вместе с обратным неравенством это дает доказательство предложения. ■

Теорема 9.2 (о существовании собственного числа). Если A – компактный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то он имеет собственное число λ такое, что $||A|| = |\lambda|$.

Доказательство. Обозначим $m = \inf\{(Ax, x) : ||x|| = 1\}$, $M = \sup\{(Ax, x) : ||x|| = 1\}$. Тогда по предложению 9.4 $||A|| = \max\{|m|, M\}$. Обозначим $\lambda = \max\{|m|, M\}$ и покажем, что это – собственное число оператора. Для определенности будем считать, что $\lambda = M$. Из определения супремума следует существование последовательности $\{x_n\}$ такой, что $||x_n|| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = \lambda$. Из определения компактности оператора следует, что найдется подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ такая, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ay_k = z_0$. Тогда $||Ay_k - \lambda y_k||^2 = ||Ay_k||^2 - 2\lambda(Ay_k, y_k) + \lambda^2 \leqslant \leqslant ||A||^2 - 2\lambda^2 + o(1) + \lambda^2 = o(1)$. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda y_k = z_0$. Положим $x_0 = \lambda^{-1} z_0$ и получим $Ax_0 = \lambda x_0$. ■

Компактность оператора обязывает собственные подпространства такого оператора иметь конечную размерность.

Предложение 9.5. Если A – компактный оператор и $H_1 = \{x : Ax = = \lambda x\}$ – его собственное подпространство, то размерность H_1 конечна.

Доказательство. Предположим, это неверно. Тогда в H_1 можно построить ортогональный нормированный базис $\{e_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Из компактности оператора следует, что у последовательности $\{Ae_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{Ae_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$. Но из того, что $e_{n_k} \in H_1$, следует $Ae_{n_k} = \lambda e_{n_k}$, т. е. последовательность ортогональных векторов $\{e_{n_k}\}$ сходится, однако в силу ортогональности $||e_{n_k} - e_{n_m}||^2 = 2$. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно. ■

Рассматриваемые далее операторы проектирования играют важную роль в формулировке и доказательстве спектральной теоремы.

Определение 9.4. Оператор P называется *проектором* гильбертова пространства H на подпространство H_1, если на H_1 он действует как тождественный оператор, а на его ортогональном дополнении $H_0 = \{x : (x, y) = 0$ для всякого $y \in H_1\}$ он действует как нулевой оператор.

Предложение 9.6. Оператор P является проектором тогда и только тогда, когда он является самосопряженным и равен своему квадрату.

Доказательство.

Необходимость. Если P проектор, то для любых $x, y \in H$ можно записать ортогональные разложения

$$x = x_1 + x_0,\ y = y_1 + y_0,\ x_1, y_1 \in H_1,\ x_0, y_0 \in H_0.$$

Легко проверяется, что оператор самосопряжен:

$$(Px, y) = (x_1, y_1 + y_0) = (x_1, y_1) = (x_1, Py_1) = (x, Py).$$

Второе свойство очевидно: $Px = x_1$, $P(Px) = x_1$.

Достаточность. Обозначим $H_1 = \{x : \exists y \in H$ такой, что $x = Py\}$, $H_0 = \{x : (x, y) = 0\ \forall y \in H_1\}$. Проверим, что на H_1 оператор P является тождественным оператором. Пусть $x \in H_1$, тогда $x = Py$, $y \in H$ и по условию $Px = P^2 y = Py = x$.

Проверим, что на H_0 оператор P является нулевым. Пусть $x \in H_0$, по определению Px ортогонален H_0. С другой стороны, для любого $y \in H_1$ $(Px, y) = (x, Py) = 0$, так как $x \in H_0$, $Py \in H_1$. Таким образом, элемент Px ортогонален всем элементам пространства H, следовательно, $Px = 0$. ■

Предложение 9.7. Подпространства H_0 и H_1 гильбертова пространства H ортогональны тогда и только тогда, когда $P_0P_1 = P_1P_0 = 0$, где P_0 и P_1 – проекторы на H_0 и H_1 соответственно.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $x \in H$, тогда $x = x_0 + x_1$, $P_0(P_1(x)) = P_0(x_1) = 0$.

Достаточность. Если $P_0P_1 = P_1P_0 = 0$, то $P_1x = P_1P_0x = 0$ для любого $x \in H_0$, значит, x ортогонален H_1. ■

Теперь все готово для описания процедуры отщепления собственных подпространств.

Предложение 9.8. Пусть A – компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве H, λ_1 – его собственное число такое, что $|\lambda_1| = ||A||$, $H_1 = \{x : Ax = \lambda_1 x\}$ – соответствующее собственное подпространство, P_1 – ортогональный проектор на это подпространство, тогда $\lambda_1 P_1 = AP_1 = P_1 A$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in H$. Обозначим $x_1 = P_1 x$, $x_0 = x - x_1$, тогда x_0 ортогонально H_1, так как P_1 – ортогональный проектор. Значит, $AP_1 x = Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $\lambda_1 P_1 x = \lambda_1 x_1$. Следовательно, $\lambda_1 P_1 = AP_1$.

Второе равенство утверждает, что операторы A и P_1 перестановочны. Предложение 9.2 гарантирует, что для этого достаточно, чтобы оператор AP_1 был самосопряжен. Проверим это, взяв пару элементов $x, y \in H$ и разложив каждый в ортогональную сумму $x = x_1 + x_0$, $y = y_1 + y_0$, тогда $(P_1Ax, y) = (P_1Ax, y_1 + y_0) = (Ax, y_1) = (x, Ay_1) = \lambda_1(x_1 + x_0, y_1) = \lambda_1(x_1, y_1)$; справедливость этих равенств следует из самосопряженности операторов и ортогональности компонент разложения элементов. Равенство $(AP_1x, y) = \lambda_1(x_1, y_1)$ проверяется аналогично. ■

Для описания процесса отщеплений собственных подпространств удобно обозначить оператор A через A_1 и сохранить обозначение λ_1 для наибольшего по модулю собственного вектора подпространства H_1 и проектора P_1.

Предложение 9.9. Обозначим $A_2 = A_1 - \lambda_1 P_1$ и $\widetilde{P_1} = I - P_1$. Тогда оператор $\widetilde{P_1}$ – ортогональный проектор и оператор A_2 самосопряженный и компактный, причем $||A_2|| \leqslant ||A_1||$.

Доказательство. Предложение 9.6 утверждает, что оператор $\widetilde{P_1}$ будет проектором, если он самосопряжен и равен своему квадрату. Оба утверждения проверяются прямым вычислением.

Заметим, что $\widetilde{P_1}A_1 = A_1 - P_1A_1 = A_1 - A_1P_1 = A_1\widetilde{P_1}$. То же предложение 9.6 гарантирует, что оператор $A_2 = \widetilde{P_1}A_1$ самосопряжен.

Компактность оператора A_2 наследуется от A_1. Действительно, компактность оператора A_1 означает, что из любой ограниченной последовательности x_n можно выделить подпоследовательность x_{n_k} такую, что последовательность $A_1x_{n_k}$ является сходящейся. Очевидно оператор проектирования не нарушит сходимости, т. е. последовательность $A_2x_{n_k}$ тоже является сходящейся, а оператор A_2 компактный.

Оценка норм следует из того, что оператор проектирования имеет норму, равную 1: $||A_2|| = ||\widetilde{P_1}A_1|| \leqslant ||\widetilde{P_1}|| \cdot ||A_1|| = ||A_1||$. ■

Предложение 9.10. Оператор A_2 имеет собственные числа, отличные от числа λ_1.

Доказательство. Пусть λ_2 – собственное число оператора A_2. Заметим, что из теоремы 9.2 и предложения 9.10 следует $|\lambda_2| = ||A_2|| \leqslant ||A_1||$. Предположим, что утверждение неверно и $\lambda_2 = \lambda_1$, тогда найдется ненулевой элемент $x \in H$ такой, что $A_2x = \lambda_1 x$. Из определения оператора получим $(A_1 - \lambda_1 P_1)x = A_1x - \lambda_1 P_1 x = \lambda_1 x$. Применим к обеим частям равенства проектор P_1 и получим $P_1A_1x - \lambda_1 P_1 x = \lambda_1 P_1 x$. Как показано в предложении 9.9, $P_1A_1 = \lambda_1 P_1$ и, значит, $P_1x = 0$. Но будучи собственным вектором для λ_1 элемент x должен быть ненулевым элементом из H_1. Полученное противоречие говорит о том, что сделанное предположение неверно. ■

Предложение 9.11. Если λ_* – собственное число оператора A_2, $H_* = \{x : A_2x = \lambda_* x\}$ – соответствующее собственное пространство, то λ_* и H_* являются собственным числом и собственным пространством оператора A_1.

Доказательство. Покажем, что всякий ненулевой элемент $x_* \in H_*$ является собственным вектором оператора A_1 с тем же собственным числом. Отметим, что элемент x_* ортогонален H_1 (для самосопряженного оператора собственные элементы, отвечающие разным собственным числам, ортогональны – предложение 9.1). Следовательно, $P_1x_* = 0$, $\widetilde{P_1}x_* = x_*$, откуда $A_1x_* = A_1\widetilde{P_1}x_* = A_2x_* = \lambda_* x_*$.

Предположим, $A_1x^* = \lambda_* x^*$ и покажем, что $x^* \in H_*$. Как было отмечено, элемент x^* ортогонален H_1 и, значит, $\widetilde{P_1}x^* = x^*$. Тогда $A_2x^* = A_1\widetilde{P_1}x^* = A_1x^*$. ■

Предложение 9.12. Оператор A можно представить в виде

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n + A\widetilde{P_n},$$

где P_k – ортогональные проекторы на попарно ортогональные пространства H_k, оператор $\widetilde{P_n}$ – это ортогональный проектор на пространство $\widetilde{H_n}$ – ортогональное дополнение линейной оболочки пространств H_k (т. е. H является суммой ортогональных пространств $H_k,\ k = 1, \ldots, n$, и $\widetilde{H_n}$).

Доказательство. Серия утверждений, доказанных ранее, составляет базу индукции для доказательства этого предложения. Во-первых, $A_1 = \lambda_1 P_1 + A_1\widetilde{P_1}$; напомним использованное ранее обозначение $A = A_1$. Во-вторых, предположим, что доказано равенство $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + {}$ ${}+\lambda_n P_n + A\widetilde{P_n}$. Тогда оператор $A_{n+1} = A\widetilde{P_n}$ будет самосопряженным и компактным (предложение 9.10) и для него можно реализовать процедуру разложения $A_{n+1} = \lambda_{n+1} P_{n+1} + A_{n+1}\widetilde{P}_{n+1}$. Объединяя это равенство с равенством, составляющим индукционное предположение, получим требуемое. ■

Доказательство теоремы 9.1. Воспользуемся результатом предложения 9.12 и запишем конечное разложение оператора $A = \lambda_1 P_1 + {}$ ${}+\lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n + A\widetilde{P_n}$. Если найдется n такое, что $A\widetilde{P_n} \equiv \{0\}$, то разложение завершено и теорема доказана.

Покажем, что если оператор имеет бесконечное число различных собственных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, то они должны стремиться к 0. Предположим, что это не так. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $|\lambda_n| > c > 0$, иначе рассмотрим подпоследовательность с таким свойством. Выберем собственные элементы $Ax_n = \lambda_n x_n$, $||x_n|| = 1$, тогда из последовательности $y_n = Ax_n$ невозможно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к 0, так как $||y_n|| = |\lambda_n| > c > 0$ и элементы y_n попарно ортогональны. Это противоречит компактности оператора.

Покажем, что последовательность $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n$ сходится к оператору A, точнее, докажем, что разность $A_{n+1} = A - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + {}$ ${}+ \ldots + \lambda_n P_n)$ стремится к нулевому оператору. Оператор A_{n+1} возникает на соответствующем этапе построения в предложении 9.10. Его собственное число λ_{n+1} появляется там из теоремы 9.2 и по построению $||A_{n+1}|| = |\lambda_{n+1}|$. Следовательно, норма разности (оператора A_{n+1}) стремится к 0 и сходимость доказана.

Легко проверить, что оператор не имеет собственных чисел, отличных от λ_n и, может быть, 0. (Последнее означает, что ядро оператора содержит элементы, отличные от 0.) Если бы нашлось такое собственное число

$\lambda_* \neq 0$, то линейное пространство его собственных элементов было бы ортогонально всем H_k и оператор $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n + \ldots$ оказался бы на нем нулевым. Но на собственном подпространстве оператор действует как умножение на λ_*.

Из доказанного также следует, что число собственных чисел оператора не более, чем счетно. ■

Следствие (альтернатива Фредгольма). Пусть A – самосопряженный компактный оператор в гильбертовом пространстве H, $b \in H$, $\mu \in \mathbb{R}$, λ_n – собственные числа, d_n – собственные элементы оператора A, $b = b_0 + \sum\limits_n \beta_n d_n$, где $b_0 \in \ker A$, – разложение правой части по базису собственных элементов. Тогда о решении уравнения

$$x - \mu A x = b$$

можно утверждать следующее:

1) если для всех n произведение $\mu\lambda_n \neq 1$, то уравнение имеет единственное решение;

2) если существует m такое, что $\mu\lambda_m = 1$ и $\beta_m \neq 0$, то уравнение не имеет решений;

3) если существует m такое, что $\mu\lambda_m = 1$ и $\beta_m = 0$, то уравнение имеет бесконечно много решений.

Доказательство. Используя введенные обозначения, уравнение можно переписать в виде

$$\left(x_0 + \sum_n \alpha_n d_n\right) - \sum_n \mu\lambda_n \alpha_n d_n = b_0 + \sum_n \beta_n d_n.$$

Здесь $x_0 + \sum\limits_n \alpha_n d_n$ – разложение искомого элемента по базису, неопределенные коэффициенты α_n надо найти. В силу линейной независимости элементов базиса это означает, что $x_0 = b_0$ и при всех n выполнены равенства $(1 - \lambda_n)\alpha_n = \beta_n$. Перечисленные в формулировке альтернативы теперь очевидны. ■

Замечание. Форма записи уравнения не создает никаких ограничений (в таком виде можно записать любое уравнение). Но надо понимать, что при этом условие компактности оператора A будет выполнено далеко не всегда.

Дополнение. В приведенном доказательстве спектральной теоремы условие компактности оператора играет решающую роль. Отказ от него в корне меняет ситуацию, но оставляет возможности для доказательства спектральной теоремы. Дадим краткое описание этой конструкции для произвольного ограниченного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Полное доказательство приведено в [3]. Спектр такого оператора не обязан быть дискретным, и суммы проекторов придется заменить на интегралы. Главная трудность, возникающая на этом пути, – построение спектральной меры, соответствующей оператору. Понятно, что для любого многочлена $p(t)$ можно построить оператор $p(A)$. На отрезке, содержащем спектр оператора, любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить многочленом. Оказывается, сходимость сохранится и для многочленов от операторов.

Рассмотрим семейство непрерывных функций $\varphi_a(t) = 0, \;\; t < a$, $\varphi_a(t) = t - a, \;\; t \geqslant a$. Построим соответствующие операторы $\varphi_a(A)$ и обозначим ядра этих операторов $H_a = \{x : \varphi_a(A)(x) = 0\}$, проекторы на эти пространства обозначим P_a. Можно доказать, что пространства H_a образуют расширяющееся семейство подпространств, причем левее спектра $H_a = \{0\}$, а правее $H_a = H$. Эта монотонность переносится на проекторы и дает возможность определить интегральные суммы от непрерывной функции, в которых вместо длины интервала разбиения $a_{k+1} - a_k$ стоит приращение проекторов $P_{a_{k+1}} - P_{a_k}$. Можно доказать сходимость операторнозначных интегральных сумм и получить спектральное разложение оператора

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t dP_t \,.$$

Эта необычная формула, легко сводится к обычным интегралам. Она означает, что для любых $x, y \in H$ справедливо числовое равенство

$$(Ax, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} td(P_t(x), y).$$

§ 10. ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ

Параграф состоит из двух разнородных частей. В первой рассматриваются вопросы аппроксимации в пространстве непрерывных функций, а во второй – в произвольном гильбертовом пространстве. Такое деление вполне оправдано, поскольку в гильбертовых пространствах решать подобные задачи много проще. Для банаховых же пространств задачи аппроксимации приходится решать отдельно для каждого пространства и шансов справиться с проблемой значительно меньше. Множество непрерывных функций – самое популярное банахово пространство, и те утверждения о непрерывных функциях, которые здесь будут рассмотрены, были получены задолго до возникновения самого термина «функциональный анализ».

Первая из приводимых здесь теорем была доказана в середине XIX века Вейерштрассом и на современном языке формулируется так: многочлены плотны в пространстве непрерывных функций. Во времена Вейерштрасса большой интерес вызывал вопрос: верно ли, что любую непрерывную функцию можно приблизить многочленом? Заслуга Вейерштрасса состоит не только в том, что он дал ответ на этот вопрос, но и в том, что он указал термины, в которых задачу надо формулировать. По существу, он ввел понятие нормы для пространства непрерывных функций.

Теорема 10.1 (Вейерштрасса). Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого положительного ε найдется многочлен такой, что

$$\max\{|f(x) - p(x)| : a \leqslant x \leqslant b\} < \varepsilon.$$

Замечание. Теорема имеет множество доказательств, приводимое здесь принадлежит С. Н. Бернштейну и привлекательно тем, что показывает глубокие связи, существующие между различными разделами математики. Оказывается, утверждение теоремы можно рассматривать как следствие центральной предельной теоремы для случайной величины, распределенной по закону Бернулли.

Доказательство. Будем считать, что $a = 0$ и $b = 1$. Возьмем произвольное число $x \in [0, 1]$ и рассмотрим независимые случайные величины $\mathcal{X}_k,\ k = 1, \ldots, n$, имеющие одинаковое распределение:

$$P(\mathcal{X}_k = 1) = x, \quad P(\mathcal{X}_k = 0) = 1 - x.$$

Вычислим для них математическое ожидание $E(\mathcal{X}_k) = x$ и дисперсию $D(\mathcal{X}_k) = E((\mathcal{X}_k - x)^2) = x(1 - x)$. Обозначим $\overline{\mathcal{X}} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathcal{X}_k$. Тогда

$$P\Big(\overline{\mathcal{X}} = \frac{k}{n}\Big) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k},$$

$$E(\mathcal{X}) = x\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1}(1 - x)^{n-k} = x,$$

$$D(\mathcal{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(\mathcal{X}_k) = \frac{x(1 - x)}{n}.$$

Покажем, что требуемое приближение функции дает многочлен

$$p(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Введем еще одну случайную величину

$$\mathcal{Z} = f(\overline{\mathcal{X}}),\ P\Big(\mathcal{Z} = f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) = P\Big(\overline{\mathcal{X}} = \frac{k}{n}\Big) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Следовательно, $E(\mathcal{Z}) = p(x, f)$. Центральная предельная теорема гарантирует, что усредняемая случайная величина концентрируется около среднего значения усредняемых величин. Это и составляет основную идею доказательства. Количественные оценки можно получить из неравенства Чебышева

$$P(|\mathcal{Z} - E(\mathcal{Z})| > \delta) \leqslant \frac{D(\mathcal{Z})}{\delta^2}.$$

Заметим, что, с одной стороны,

$$P(|\mathcal{Z} - E(\mathcal{Z})| > \delta) = \sum_{|k/n - x| \geqslant \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

а с другой – $P(|\mathcal{Z} - E(\mathcal{Z})| > \delta) = P(|\mathcal{X} - E(\mathcal{X})| > \delta) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{n\delta^2}$.

Эти соотношения означают, что слагаемые, имеющие номера, для которых $|k/n - x| \geqslant \delta$, вносят незначительный вклад в формирование многочлена $p(x, f)$. Поэтому для проведения оценки удобно разбить всю сумму на две части

$$p(x, f) = \sum_{|k/n - x| \geqslant \delta} f\Big(\frac{k}{n}\Big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{|k/n - x| < \delta} f\Big(\frac{k}{n}\Big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Покажем, что разность $f(x) - p(x, f)$ мала, оценивая ее для каждой из сумм по отдельности. Для оценки первой суммы воспользуемся очевидным неравенством

$$\Big| f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant 2 \max\{|f(t)| : 0 \leqslant t \leqslant 1\} = 2||f||$$

и получим

$$\Bigg| \sum_{|k/n - x| \geqslant \delta} \Big(f(x) - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant 2||f|| \sum_{|k/n - x| \geqslant \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant 2||f|| \cdot \frac{x(1-x)}{n\delta^2}.$$

При оценке второй суммы учтем, что функция f равномерно непрерывна и, следовательно, для любого ε найдется δ такое, что из $|x_1 - x_2| < \delta$

следует $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Тогда

$$\left| \sum_{|k/n - x| < \delta} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon.$$

Объединив полученные оценки, получим

$$|f(x) - p(x,f)| \leqslant 2||f|| \cdot \frac{x(1-x)}{n\delta^2} + \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{||f||)}{2\delta^2} + \varepsilon.$$

Выберем теперь n настолько большим, чтобы выполнялась оценка $\dfrac{||f||}{2n\delta^2} < \varepsilon$ и получим

$$|f(x) - p(x,f)| \leqslant 2\varepsilon. \ \blacksquare$$

Теорема Вейерштрасса имеет огромное количество обобщений. Приведем для примера два из них [8].

Теорема Мюнца. Для того чтобы линейная оболочка функций x^{λ_n}, $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, была плотна в пространстве $C[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_0 = 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_n} = \infty$.

Теорема Стоуна. Теорема Вейерштрасса справедлива для $C[K]$, где K – произвольный компакт в $\mathbb{R}^n$.

Не менее важным оказался вопрос о существовании многочлена наилучшего приближения. Ответ на него получил Чебышев примерно в то же время, когда доказал свою теорему Вейерштрасс. Отметим, что результат Вейерштрасса завершал определенный этап в изучении непрерывных функций, а теорема Чебышева открывала новое направление исследований.

Теорема 10.2 (Чебышева). Пусть $f \in C[a,b]$ и p – многочлен степени n такой, что для любого многочлена q той же степени выполнено неравенство

$$||f - p|| \leqslant ||f - q||.$$

Тогда разность $f(x) - p(x)$ принимает с чередующимися знаками значение $||f - p||$ не менее,чем в $n+2$ точках. При этом, если многочлен p имеет на промежутке (a,b) ровно n корней, то такой многочлен единственен.

О нетривиальности этого результата свидетельствует вид этих многочленов в самом простом случае $f(x) \equiv 0, \quad a = -1, b = 1$ (многочлены Чебышева):

$$p(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right).$$

Исчерпывающая подборка материалов на эту тему имеется в [8].

Приведенные здесь результаты об аппроксимации в пространстве непрерывных функций невозможно перенести на другие банаховы пространства. В этом смысле результаты индивидуальны. Совсем другая ситуация в гильбертовых пространствах.

Теорема 10.3. Пусть G – замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства H, f – элемент H, не принадлежащий G. Тогда существует единственный элемент наилучшего приложения $g_* \in G$ такой, что

$$||f - g_*|| = \min\{||f - g|| : g \in G\}.$$

Доказательство. Обозначим $d = \inf\{||f - g|| : g \in G\}$ и для $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon = \{x : ||f - x|| \leqslant d + \varepsilon, \quad P_\varepsilon = G \cap B_\varepsilon$. Поскольку множества P_ε выпуклы и замкнуты, а гильбертово пространство по определению является полным, то в нем справедлива *аксиома вложенных промежутков*: $\bigcap\limits_{\varepsilon} P_\varepsilon \neq \varnothing$. Любой элемент из этого пересечения является элементом наилучшего приближения.

Покажем, что такой элемент единственен. Предположим, это не так и существуют элементы $a, b \in \bigcap\limits_{\varepsilon} P_\varepsilon$. Воспользуемся равенством параллелограмма для элементов $f - a$ и $f - b$. Заметим, что диагоналями такого параллелограмма являются элементы $b - a$ и $2(m - f)$, где $m = \dfrac{1}{2}(a + b)$. В таком случае

$$2(||f - a||^2 + ||f - b||^2) = ||2(m - f)||^2 + ||b - a||^2.$$

Оценим норму $b - a$, используя соотношения $||f - a|| = ||f - b|| = d$ и $||m - f|| \geqslant d$:

$$||b - a||^2 = (||f - a||^2 + ||f - b||^2 - 2||m - f||^2) \leqslant 0.$$

Следовательно, $a = b$, т. е. элемент наилучшего приближения единственен. ■

Следствие 1. Элемент $g_* \in G$ является наилучшим приближением элемента f тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ выполнено равенство $(g_* - f, g - g_*) = 0$.

Доказанная теорема является чистой теоремой существования, нет никаких надежд получить эффективный вычислительный алгоритм для ее решения. Однако, если выпуклое множество представляет собой подпространство, то задача сильно упрощается и решение сводится к описанию проекции элемента на подпространство.

Следствие 2. Пусть G – замкнутое подпространство, содержащееся в H. Элемент $g_* \in G$ является наилучшим приближением элемента f тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ выполнено равенство $(g_* - f, g) = 0$.

В случае когда это подпространство конечномерно, задача решается средствами линейной алгебры. Следующие две теоремы содержат описание решения такой задачи.

Определение 10.1. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – элементы гильбертова пространства H. Определителем Грама этих элементов называют

$$\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det((f_k, f_j))_{k,j=1}^n.$$

Теорема 10.4. Элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n \in H$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда $\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$.

Доказательство.

Достаточность. Предположим, что это не так, т. е. определитель $\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$, но элементы линейно зависимы (существуют числа α_k, не все равные нулю и такие, что $\sum\limits_k \alpha_k f_k = 0$). Домножив скалярно это равенство на элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$, получим систему уравнений

$$\sum_k \alpha_k (f_k, f_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

По предположению система имеет нетривиальное решение. Это возможно, только если $\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0$. Следовательно, сделанное предположение неверно.

Необходимость. Достаточно доказать, что из линейной независимости элементов f_k следует, что система $\sum\limits_k \alpha_k (f_k, f_j) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n$, имеет только тривиальное решение. Предположим, что существует нетривиальное решение. Это можно интерпретировать так, что некоторый элемент $\sum\limits_k \alpha_k f_k$ ортогонален всем элементам f_j . Вычислим норму этого элемента:

$$\left\|\sum_k \alpha_k f_k\right\|^2 = \left(\sum_k \alpha_k f_k, \sum_j \alpha_j f_j\right) = \sum_k \alpha_k \left(\sum_j \alpha_j (f_k, f_j)\right) = 0.$$

Следовательно, по свойствам нормы $\sum\limits_k \alpha_k f_k = 0$. Противоречие. ■

Следующая теорема дает описание элемента наилучшего приближения.

Теорема 10.5. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ – элементы гильбертова пространства H, а Y – линейная оболочка этих элементов. Тогда для любого элемента $f \in H$ элемент наилучшего приближения из пространства Y единственным образом представляется в виде $g_* = \sum\limits_k d_k f_k$, где d_k – решение системы $\sum\limits_k d_k(f_k, f_j) = (f, f_j),\ j = 1, 2, \ldots, n$, при этом

$$||f - g_*||^2 = \frac{\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n, f)}{\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_n)}.$$

Доказательство. Если g_* – элемент наилучшего приближения, то $f - g_*$ ортогонально всему пространству Y; в частности, из ортогональности этого элемента всем f_k следует, что справедливо равенство

$$\sum_k d_k(f_k, f_j) = (g_*, f_j) = (f, f_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вычислим расстояние d от элемента f до пространства Y:

$$d^2 = ||f - g_*||^2 = (f - g_*, f - g_*).$$

Еще раз воспользуемся ортогональностью $f - g_*$ и Y. Элемент g_* входит в Y и, следовательно, ортогонален $f - g_*$, тогда

$$d^2 = (f, f - g_*) = ||f||^2 - (f, g_*) = ||f||^2 - \sum_k d_k(f_k, f).$$

Это равенство можно переписать в виде $\sum\limits_k d_k(f_k, f) = ||f||^2 - d^2$.

Чтобы получить выражение для расстояния через определители Грама, рассмотрим однородную систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(f_k, f_j) - x_{n+1}(f_k, f) = 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(f_k, f) - x_{n+1}\left((f, f) - d^2\right) = 0.$$

Из предыдущих рассмотрений следует, что система имеет нетривиальное решение $(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (d_1, d_2, \ldots, d_n, 1)$. Следовательно, определитель матрицы коэффициентов равен нулю

$$\begin{vmatrix} (f_1, f_1) & \ldots & (f_1, f_n) & -(f, f_1) \\ (f_2, f_1) & \ldots & (f_2, f_n) & -(f, f_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (f, f_1) & \ldots & (f, f_n) & -(f, f) + d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель в сумму по последнему столбцу

$$\begin{vmatrix} (f_1,f_1) & \dots & (f_1,f_n) & -(f,f_1) \\ (f_2,f_1) & \dots & (f_2,f_n) & -(f,f_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (f,f_1) & \dots & (f,f_n) & -(f,f) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (f_1,f_1) & \dots & (f_1,f_n) & 0 \\ (f_2,f_1) & \dots & (f_2,f_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (f,f_1) & \dots & (f,f_n) & 0+d^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\Delta(f_1,f_2,\dots,f_n,f) = d^2\Delta(f_1,f_2,\dots,f_n)$. ■

Последняя теорема сильно упрощается, если элементы f_k ортогональны.

Следствие. Если к условиям предыдущей теоремы добавить попарную ортогональность элементов f_k, то элемент наилучшего приближения запишется в виде $g_* = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k f_k$, где $d_k = (f, f_k)$.

Отметим, что условие ортогональности элементов f_k чисто техническое, поскольку стандартный прием (алгоритм Грама–Шмидта) позволяет переделать любую линейно независимую систему $f_1, f_2, \dots, f_n$ в ортонормированную $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$:

1) $\widetilde{\varphi}_1 = f_1,\ \ \varphi_1 = \dfrac{\widetilde{\varphi}_1}{||\widetilde{\varphi}_1||}$;

2) $\widetilde{\varphi}_2 = f_2 - \alpha_{21}\varphi_1,\ \ \alpha_{21} = (\widetilde{\varphi}_2, \varphi_1),\ \ \varphi_2 = \dfrac{\widetilde{\varphi}_2}{||\widetilde{\varphi}_2||}$;

...

n) $\widetilde{\varphi}_n = f_n - \sum\limits_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj}\varphi_j,\ \ \alpha_{nj} = (\widetilde{\varphi}_n, \varphi_j),\ \ \varphi_n = \dfrac{\widetilde{\varphi}_n}{||\widetilde{\varphi}_n||}$.

§ 11. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Цель этого параграфа – показать на примере стандартных объектов математического анализа – ортогональных многочленов – насколько хорошо аппарат функционального анализа позволяет оформить единую и удобную точку зрения на эти объекты. Многочлены – самые удобные объекты для моделирования, развитие математики показывает, что хорошо продуманные модели, основанные на многочленах, могут быть очень полезными. Первыми и самыми простыми попытками приближения функций многочленами были интерполяционные многочлены Лагранжа, принимающие в заданных точках те же значения, что и функция. Получить их очень легко, но дальнейшее их использование в решениях задач крайне затруднительно. Ортогональные многочлены появились в начале XIX века при попытках решать дифференциальные уравнения, отвечающие физическим задачам. Постепенно обнаружилось, что многочлены, интегралы от произведения которых равны нулю (на современном языке: скалярное произведение равно нулю), обладают замечательными свойствами. Таковыми являются, например, многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля. Понимание причин этого явления, как и сам термин, начало формироваться в начале XX века и окончательно оформилось с появлением функционального анализа. Ортогональные многочлены оказались собственными функциями самосопряженных операторов (это обеспечивало их ортогональность), именно поэтому они очень естественно появлялись в решениях задач, описывающих физические модели.

Для современного этапа развития математики ортогональные многочлены естественно понимать как ортогональный базис в гильбертовом пространстве функций

$$H = L^2([a,b],\omega) = \left\{ f : \int\limits_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx < \infty \right\},$$

где весовая функция ω – непрерывная неотрицательная функция, определяющая конкретный вид многочленов. В свете изложенных в § 10 фактов ортогональные многочлены можно получить, применяя алгоритм Грама–Шмидта к последовательности одночленов $1, x, x^2, \ldots$. Но надо понимать, что это технически сложная процедура, не дающая общей формулы.

Пример 11.1. Построим три первых многочлена в пространстве $L^2(-1,1)$ (здесь $\omega(x) \equiv 1$).

Легко проверить, что $p_0(x) \equiv 1$, $p_1(x) = x$. Многочлен p_2 будем искать в виде $p_2(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Вычислим скалярные произведения $(p_2, p_0) = \int\limits_{-1}^{1} p_2(x)dx = \dfrac{2}{3} + \beta$, $(p_2, p_1) = \int\limits_{-1}^{1} p_2(x)p_1(x)dx = \dfrac{2}{3} + \beta = \dfrac{1}{2} + \alpha$. Поскольку оба скалярных произведения должны обращаться в ноль, то $p_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}$.

Так просто определенные многочлены автоматически обладают целым рядом нетривиальных свойств.

Теорема 11.1 (о корнях). Пусть p – многочлен степени n, ортогональный в $L^2([a,b],\omega)$ одночленам $1, x, \ldots, x^{n-1}$, т. е.

$$\int\limits_a^b x^k p(x)\omega(x)dx = 0, \;\; k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

тогда многочлен p имеет ровно n корней на промежутке (a,b).

Доказательство. Покажем, что на промежутке (a, b) есть хотя бы один корень. Предположим, это не так, тогда непрерывная функция $p(x)\omega(x)$ не меняет знака на отрезке (a, b). Поскольку она не нулевая, то найдется интервал $[c, d] \subset (a, b)$, где $|p(x)\omega(x)| > 0$, $x \in [c, d]$, и, следовательно,

$$\left|\int\limits_a^b p(x)\omega(x)dx\right| \geqslant \left|\int\limits_c^d p(x)\omega(x)dx\right| = \left|\frac{1}{d-c}f(x_*)\right| > 0$$

(в последнем равенстве использована интегральная теорема о среднем). Предположение противоречит условию теоремы, значит, оно неверно.

Допустим, что у многочлена p имеются корни $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m < n$. Покажем, что тогда он имеет еще один корень на отрезке (a, b). Предположим, это не так, и обозначим $p_0(x) = (x - x_1)\cdots(x - x_m)$. Меняя, если нужно, знак многочлена, получим неравенство $p(x)p_0(x) > 0$ на отрезке (a, b). Тогда, повторяя рассуждение из первой части доказательства, приходим к неравенству $\int\limits_a^b p(x)p_0(x)\omega(x)dx > 0$. Но по построению степень многочлена p_0 равна $m < n$, и, следовательно, по условию этот интеграл равен нулю. Полученное противоречие доказывает теорему. ■

Условия ортогональности приводят к появлению у многочленов разнообразных связей, значительно облегчающих работу с ними. В частности, многочлены могут быть получены на основании рекуррентных формул.

Теорема 11.2. Если $p_n(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ – ортогональные многочлены из пространства $L^2([a, b], \omega)$, то они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \lambda_n p_n(x) - \mu_n p_{n-1}(x),$$

где $\lambda_n = \dfrac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}$, $\mu_n = \dfrac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$.

Доказательство. Обозначим $q(x) = xp_n(x)$. Этот многочлен можно разложить в базисе многочленов $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$: $q(x) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} c_k p_k(x)$. В силу принятой нормировки старших коэффициентов $c_{n+1} = 1$. Покажем, что большинство коэффициентов $c_k = 0$. Это следует из того, что многочлен p_n ортогонален всем многочленам степени меньше n. Действительно, если $k + 1 < n$,

$$c_k = (q, p_k) = \int\limits_a^b xp_n(x)p_k(x)\omega(x)dx = \int\limits_a^b p_n(x)\left(xp_k(x)\right)\omega(x)dx = 0.$$

Следовательно, $xp_n(x) = p_{n+1}(x) + c_n p_n(x) + c_{n-1} p_{n-1}(x)$.

Вычислим оставшиеся коэффициенты c_n:

$$(xp_n(x), p_n(x)) = (p_{n+1}, p_n) + c_n(p_n, p_n) + c_{n-1}(p_{n-1}, p_n).$$

Первое и третье слагаемые в правой части равенства равны нулю в силу ортогональности многочленов, таким образом, $c_n = \dfrac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}$. Аналогично можно получить $c_{n-1} = \dfrac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$. Числитель последней дроби упрощается, если воспользоваться равенством

$$xp_{n-1}(x) = p_n(x) + \widetilde{c}_{n-1} p_{n-1}(x) + \widetilde{c}_{n-2} p_{n-2}(x),$$

откуда следует, что $(xp_n, p_{n-1}) = (p_n, xp_{n-1}) = (p_n, p_n) + \widetilde{c}_{n-1}(p_n, p_{n-1}) + \widetilde{c}_{n-2}(p_n, p_{n-2}) = (p_n, p_n)$, поскольку $(p_n, p_{n-1}) = (p_n, p_{n-2}) = 0$. ■

Доказанное рекуррентное соотношение дает удобный способ вычисления ортогональных многочленов, но помимо этого позволяет выяснить важные свойства этих многочленов.

Следствие 1. Корни ортогональных многочленов с соседними номерами не могут совпадать.

Доказательство. Предположим, это не так и существует $x_0 \in (a, b)$ такое, что $p_{n+1}(x_0) = p_n(x_0) = 0$. Но тогда из рекуррентного соотношения, доказанного в теореме 11.2, следует, что $p_{n-1}(x_0) = 0$. Продолжая далее процедуру понижения степени многочлена, можно дойти до равенства $p_0(x_0) = 0$, что невозможно, так как по определению $p_0(x_0) \equiv 1$. Значит, предположение неверно. ■

Следствие 2. Если ортогональный многочлен p_n обращается в какой-то точке x_0 в 0, то соседние многочлены принимают в этой точке значения разных знаков: $p_{n+1}(x_0)p_{n-1}(x_0) < 0$.

Доказательство. Из следствия 1 получаем, что произведение $p_{n+1}(x_0)p_{n-1}(x_0) \neq 0$. Остается заметить,что в условиях следствия 2 соотношение из теоремы 11.2 примет вид $p_{n+1}(x_0) = -\mu_n p_{n-1}(x_0)$, и, учитывая что $\mu_n = \dfrac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} > 0$, получим требуемое неравенство. ■

Следствие 3. Корни соседних ортогональных многочленов чередуются.

Доказательство. Обозначим через $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ корни многочлена p_n. Теорема 11.1 позволяет считать, что $a < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} < b$. Надо доказать неравенства

$$x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < \ldots < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)}.$$

Докажем это по индукции. Предварительно отметим, что в силу теоремы 11.1 многочлены p_n сохраняют знак на интервалах $(-\infty, a]$ и $[b, +\infty)$, т. е. имеют тот же знак, что и одночлен x^n «на бесконечности».

Для $n = 1$ из следствия 2 получим $p_0\Big(x_1^{(1)}\Big)p_2\Big(x_1^{(1)}\Big) < 0$, а так как $p_0(x_0) \equiv 1$, то $p_2\Big(x_1^{(1)}\Big) < 0$. С другой стороны, из сделанного замечания о числах $p_n(a)$ и $p_n(b)$ следует, что $p_2(a) > 0$ и $p_2(b) > 0$. По теореме о существовании корня многочлен p_2 имеет корни на интервалах $\big(a, x_1^{(1)}\big)$ и $\big(x_1^{(1)}, b\big)$, т. е. $a < x_2^{(1)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} < b$.

Предположим, утверждение верно для многочлена p_n, и покажем, что тогда оно верно и для p_{n+1}. Докажем, что на отрезке $\big(a, x_1^{(n)}\big)$ имеется корень многочлена p_{n+1}. В силу следствия 2 $p_{n+1}\Big(x_1^{(n)}\Big)p_{n-1}\Big(x_1^{(n)}\Big) < 0$, а по сделанному замечанию $p_{n+1}(a)p_{n-1}(a) > 0$, и кроме того по индукционному предположению многочлен p_{n-1} не имеет здесь корней. Следовательно, $p_{n+1}(a)p_{n+1}\Big(x_1^{(n)}\Big) < 0$. Это означает, что многочлен p_n имеет корень на промежутке $\big(a, x_1^{(n)}\big)$. Рассуждения такого типа можно продолжить, что и докажет требуемое утверждение. ■

Аккуратное завершение доказательства требует оформления *вложенной индукции.* В [9] можно найти полное доказательство.

Доказанное рекуррентное соотношение иногда удобно использовать с другой нормировкой.

Следствие 4. Пусть $p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$ – ортогональные многочлены из пространства $L^2([a, b], \omega)$, имеющие единичную норму $\int\limits_a^b p_n^2(x)\omega(x)dx = 1$. Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_n(x) - \frac{a_{n-1}}{a_n}p_{n-1}(x).$$

Следующие две теоремы справедливы для любых ортогональных базисов, в частности, их аналоги рассматриваются при изучении рядов Фурье.

Теорема 11.3 (экстремальное свойство ортогональных многочленов). Если $p_n(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ – ортогональные многочлены из пространства $L^2([a, b], \omega)$, то

$$||p_n|| = \min\{||q|| : q(x) = x^n + \widetilde{q}(x)\},$$

где $\widetilde{q}(x)$ – произвольный многочлен степени меньше n.

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{P}$ линейное пространство многочленов степени меньше n. Тогда $\mathcal{P}_* = \{x^n + q(x) : q \in \mathcal{P}\}$ – замкнутое выпуклое подпространство пространства $L^2([a,b],\omega)$. По теореме 10.3 в $\mathcal{P}_*$ существует единственный элемент p_*, на котором реализуется расстояние от нуля до $\mathcal{P}_*$, и по следствию 2 из этой теоремы многочлен p_* ортогонален всем многочленам из $\mathcal{P}_*$, но этим свойством обладает многочлен p_n. Следовательно $p_n = p_*$. ■

Рассмотрим вопрос о частичных суммах разложений по ортогональному базису. Оказывается, для них, как и для рядов Фурье, существует удобное для работы интегральное представление.

Теорема 11.4. Если $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n(x)$ – разложение функции f по ортогональному нормированному базису многочленов в пространстве $L^2([a,b],\omega)$, то для частичных сумм $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n p_n(x)$ имеет место интегральное представление

$$S_N(x) = \int\limits_a^b f(t) K_n(x,t)\,dt,$$

где

$$K_n(x,t) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+1}(t)p_n(x) - p_n(t)p_{n+1}(x)}{t-x}.$$

Доказательство. Коэффициенты разложения по ортогональному нормированному базису вычисляются по формуле

$$\alpha_n = (f, p_n) = \int\limits_a^b f(x) p_n(x) \omega(x)\,dx,$$

следовательно,

$$S_N(x) = \int\limits_a^b f(t)\omega(x)\,dx.$$

Теперь воспользуемся тождеством из следствия 4, переписав его в следующем виде:

$$xp_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}} p_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) p_n(x) + \frac{a_{n-1}}{a_n} p_{n-1}(x).$$

Чтобы получить произведение $p_n(x)p_n(t)$, домножим обе части равенства на $p_n(t)$. Затем перепишем это равенство, поменяв в нем местами переменные t и x, далее, вычитая одно равенство из другого, получим тождества, справедливые для $n = 1, \ldots, N$:

$$(t-x)p_n(x)p_n(t) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\left[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_n(t)p_{n+1}(x)\right] - \\ - \frac{a_{n-1}}{a_n}\left[p_n(t)p_{n-1}(x) - p_{n-1}(t)p_n(x)\right].$$

Для перехода к сумме надо написать аналог последнего тождества для $n = 0$. В принятых обозначениях $p_0(x) \equiv a_0, \quad p_1(x) = a_1x + \alpha$, где α – постоянная, определяемая из условий ортогональности. Тогда

$$xp_0(x) = \frac{a_0}{a_1}p_1(x) - \alpha\frac{a_0}{a_1}(t-x)p_0(t)p_0(x) = \frac{a_0}{a_1}(p_1(t)p_0(x) - p_0(t)p_1(x)).$$

Заметим, что для $n = 1$ аналогичное тождество имеет вид

$$(t-x)p_1(x)p_1(t) = \frac{a_1}{a_2}\left[p_2(t)p_1(x) - p_1(t)p_2(x)\right] - \\ - \frac{a_0}{a_1}\left[p_1(t)p_0(x) - p_0(t)p_1(x)\right].$$

Сложив эти равенства, получим в правой части

$$\frac{a_1}{a_2}\left[p_2(t)p_1(x) - p_1(t)p_2(x)\right],$$

но это слагаемое входит со знаком минус в формулу при $n = 3$. Эти сокращения продолжатся и дальше. В итоге получится

$$(t-x)\sum_{n=0}^{N} p_n(x)p_n(t) = \frac{a_N}{a_{N+1}}\left[p_{N+1}(t)p_N(x) - p_N(t)p_{n+1}(x)\right],$$

что и доказывает требуемую формулу. ■

Рассмотрим далее несколько примеров классических ортогональных многочленов. Доказательства утверждений, приведенных в этих примерах, можно найти в [10]–[12].

Пример 11.2 (многочлены Лежандра). Так называются ортогональные многочлены p_n, образующие базис в гильбертовом пространстве $L^2([-1,1])$ (весовая функция $\omega(x) \equiv 1$).

Многочлены Лежандра можно вычислить по формуле $p_n(x) = L^{(n)}(x)$, где $L(x) = \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}$.

Эти многочлены обладают следующими свойствами:

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_k(x)dx = 0 \text{ при } n \neq k, \quad \int_{-1}^{1} p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$p_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}x^n + \ldots.$$

Многочлены p_n удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$(n+1)p_{n+1}(x) - (2n+1)xp_n(x) + np_{n-1}(x) = 0.$$

Многочлены p_n являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$(1-x^2)p_n''(x) - 2xp_n'(x) + n(n+1)p_n(x) = 0.$$

Последнее утверждение можно пересказать в операторных терминах – многочлены Лежандра являются собственными функциями самосопряженного оператора A:

$$Ap_n = n(n+1)p_n, \text{ где } Af(x) = -(1-x^2)f''(x) + 2xf'(x).$$

Многочлены p_n являются коэффициентами разложения в степенной ряд функции двух переменных (*производящей функции*)

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x)t^n.$$

В заключение приведем несколько первых многочленов Лежандра:

$$p_0(x) = 1, \ p_1(x) = x, \ p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \ p_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Пример 11.3 (многочлены Чебышева). Так называются ортогональные многочлены t_n, образующие базис в гильбертовом пространстве $L^2([-1,1],\omega)$ с весовой функцией $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Многочлены Чебышева для любого $x \in [-1,1]$ можно вычислить по формуле $t_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$.

Эти многочлены обладают следующими свойствами:

$$\int_{-1}^{1} \frac{t_n(x)t_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \text{ при } n \neq k, \ \int_{-1}^{1} \frac{t_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} \text{ при } n > 0,$$

$$t_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots.$$

Многочлены t_n удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = 2xt_n(x),$$

так как $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha = 2\cos\alpha\cos n\alpha$.

Многочлены t_n являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$(1-x^2)t_n''(x) - xt_n'(x) + n^2 t_n(x) = 0.$$

В операторных терминах – многочлены Чебышева являются собственными функциями самосопряженного оператора A:

$$At_n(x) = n^2 t_n(x), \text{ где } Af(x) = -(1-x^2)f''(x) + xf'(x).$$

Производящая функция для многочленов Чебышева:

$$\frac{1-tx}{1-2tx+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)t^n.$$

И несколько первых многочленов Чебышева:

$$t_0(x) = 1,\ t_1(x) = x,\ t_2(x) = 2x^2 - 1,\ t_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Многочлены Чебышева являются частным случаем многочленов Якоби, образующих ортогональный базис в пространстве $L^2([-1,1],\omega)$ с весовой функцией $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}}}$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

Пример 11.4 (многочлены Эрмита). Так называются ортогональные многочлены H_n, образующие базис в гильбертовом пространстве $L^2((-\infty,+\infty),\omega)$ с весовой функцией $\omega(x) = e^{-x^2/2}$.

Многочлены Эрмита порождаются собственной весовой функцией: $H_n(x) = (-1)^n \omega(x)\omega^{(n)}(x)$.

Многочлены H_n обладают следующими свойствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)H_k(x)\omega(x)dx = 0 \text{ при } n \neq k,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(x)\omega(x)dx = n!\sqrt{2\pi},$$

$$H_n(x) = x^n + \ldots.$$

Многочлены H_n удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x).$$

Многочлены H_n являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$H_n''(x) - xH_n'(x) + nH_n(x) = 0.$$

В операторных терминах – многочлены Эрмита являются собственными функциями самосопряженного оператора A:

$$AH_n(x) = nH_n(x), \text{ где } Af(x) = -f''(x) + xf'(x).$$

Производящая функция для многочленов Эрмита:

$$e^{xt - t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) t^n.$$

Несколько первых многочленов Эрмита:

$$H_0(x) = 1, \ H_1(x) = x, \ H_2(x) = x^2 - 1, \ H_3(x) = x^3 - 3x.$$

Лабораторная работа «Ортогональные многочлены». Входными данными задания являются два параметра a и b.

Рассматривается гильбертово пространство $H = L^2((a,b),\omega)$ со скалярным произведением $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$, где весовая функция $\omega(x) = \sin\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$.

Требуется:

1) с помощью алгоритма Грама–Шмидта построить в $L^2((a,b),\omega)$ ортогональные многочлены p_0, $p_1(x)$,..., $p_4(x)$ (полагаем, что $p_n(x) = x^n + b_n x^{n-1} + \ldots$);

2) проверить рекуррентную формулу для многочленов $p_2(x)$, $p_3(x)$ и $p_4(x)$;

3) найти элемент наилучшего приближения (проекцию) для функции $f(x) = x^4$ и подпространства $L = \left\{g(x) = \sum\limits_{k=0}^{3} \alpha_k p_k(x)\right\}$ – линейной оболочки ортогональных многочленов;

4) вычислить расстояние от функции $f(x) = x^4$ до подпространства L;

5) построить (на одном рисунке на компьютере) графики многочленов $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ и $p_4(x)$.

Список литературы

1. Избранные задачи по вещественному анализу / Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов. СПб.: Невский Диалект, БХВ-Петербург, 2004.

2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2006.

5. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.

6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.

7. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1973.

8. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

9. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.–Л.: Гостехиздат, 1949.

10. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: Иностр. лит., 1948.

11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

12. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. СПб.: БХВ-Петербург, 2010.

Оглавление

Коточигов Александр Михайлович
Зельвенский Игорь Григорьевич

Лекции по функциональному анализу

Учебное пособие

Редактор И. Г. Скачек

Подписано в печать 28.12.15. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 5,75.
Гарнитура «Computer Modern Roman». Тираж 40 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5