Свойства интеграла Лебега
Справедливы следующие свойства:

1. Пусть f измерима на E, $m(E) < \infty$ и существует $C < \infty$ такая, что $|f(x)| < C, \ x \in E$

Тогда $f \in \mathcal{L}E)$

Доказаельство.

Следует из того, что $f \in \mathcal{L}(E)$ тогда и только тогда, когда $|f| \in \mathcal{L}(E)$,

для всякой простой функции $s, \ 0 \leq s(x) \leq |f(x)|$, справедливо $s(x) \leq C$, поэтому

$$\int_E s(x)dm \leq \int_E Cdm \leq Cm(E) \Rightarrow \int_E |f(x)|dm \leq$$

2. Если f измерима на E, $m(E) < \infty, \ a \leq f(x) \leq b, \ x \in E$,то

$a \ m(E) \leq \int_E f(x)dm \leq b \ m(E)$

Доказывается аналогично 1.

3. Если $f, \ g \in \mathcal{L}E)$ и $f(x) \leq g(x), \ x \in E$, то

$\int_E f(x)dm \leq \int_E f(x)dm$

Примем без доказательства.

4. $f \in \mathcal{L}(E), \ C \in R \ \Rightarrow \ C \ f \in \mathcal{L}(E), \ \int_E C \ f(x)dm = C \ \int_E f(x)dm$

Приведем доказательство для $f(x) \geq 0, \ x \in E, \ C > 0$.

Пусть $s(x) \in A(f)$, т.ч. s-простая функция, $0 \leq s(x) \leq f(x), \ x \in E$

Тогда $C \ s(x) \in A(C \ f)$

$\int_E C \ s(x)dm = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{F_j}(x)$

если
$F_j \cap F_k = \emptyset, \ j \neq k$

Переходя к супремуму по $s(x) \in A(f)$, получим свойство 4.

5. Если $m(E) = 0$, f измерима, то
$\int_E f(x)dm = 0$

Доказательство следует из того, что если $F_j \subset E$, то $0 \leq m(F_j) \leq m(E) = 0$

Для любой простой функции $s(x) \in A(f)$ имеем $0 \leq s(x) \leq |f(x)| = 0 \ \rightarrow \ s(x) = 0$

$\int_E \ s(x)dm = 0 \ \rightarrow \ \int_E |f(x)|dm = 0$
Что влечет

$0 \leq \int_E f^+(x)dm \leq \int_E |f(x)|dm = 0$

$0 \leq \int_E f^-(x)dm \leq \int_E |f(x)|dm = 0$

$\int_E f(x)dm = \int_E f^+(x)dm - \int_E f^-(x)dm = 0$

6. Если $f \in \mathcal{L}(E), \ \ F \subset E, \ \ F$ измеримо, то $f \in \mathcal{L}(F)$

Доказательство следует из того, что для $s(x) \in A(|f|)$ на множестве F положим

$s_0(x) = s(x), \ x \in F, \ s_0(x) = 0, \ x \in E \setminus F$

тогда

$\int_E s_0(x)dm = \int_F s(x)dm \leq \int_E |f(x)|dm$

тогда
$\int_F |f(x)|dm \leq \int_E |f(x)|dm \rightarrow \ f \in \mathcal{L}(F)$

Следующая теорема относится к важным свойствам интеграла Лебега, мы ее примем без доказательства.

Теорема о счётной аддитивности интеграла Лебега.

Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,
множества $E, \ E_n$ измеримы, $E_m \cap E_n = \emptyset, \ m \neq n$, и пусть $f \in \mathcal{L}(E)$

Тогда

$\leq \int_E f(x)dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E+} f(x)dm$

ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Следствие.

Если $E = \bigcup_{n=1}^{N} E_n$, $N < \infty, \ \ E_m \cap E_n = \emptyset, \ m \neq n$, то

$\int_E f(x)dm = \sum_{n=1}^{N} \int_{E+} f(x)dm$

В частности, если $E = E_0 \cup S$, $E_0 \cap S = \emptyset$, $m(S) = 0$, то

$\int_E f(x)dm = \int_{E_0} f(x)dm + \int_S f(x)dm = \int_{E_0} f(x)dm$

поскольку $\int_S f(x)dm = 0$

Отсюда следует важное свойство интеграла Лебега

пусть $f \sim g$ |, $f \in \mathcal{L}(E)$. Тогда

$\int_S f(x)dm = \int_S g(x)dm$

Доказательство.

Пусть $E_0 = \{x \in E : f(x) = g(x)$, $S = E \setminus E_0$. Тогда $m(S) = 0$

$\int_E f(x)dm = \int_{E_0} f(x)dm,\ \int_E g(x)dm = \int_{E_0} g(x)dm$

что и доказывает это свойство.

7. Пусть $f,\ g \in \mathcal{L}(E)$.

Тогда $f + g \in \mathcal{L}(E)$ и

$\int_E (f(x) + g(x))dm = \int_E f(x)dm + \int_E g(x)dm$