Приложения интеграла Лебега

Связь между интегралом Римана и интегралом Лебега сформулирована в следующей теореме.

Теорема

Пусть функция f интегрируется по Риману на промежутке (a, b).

Тогда она измерима по Лебегу на множестве $E = (a, b)$, суммируема и справедливо равенство

$\int_a^b f(x)dx = \int_E f(x)dm$

здесь левой части равенства интеграл Римана от f, а в правой интеграл Лебега по множеству $E = (a, b)$ от f.

Примем без доказательства.

При этом существуют функции, не интегрируемые по Риману на (a, b),
но интеграл Лебега от которых существует. Например, функция Дирихле f_0:

$f_0(x) = 1,\ x \in Q \cap a, b)$
$f_0(x) = 0,\ x \notin Q \cap a, b)$

Q - множество рациональных чисел. Эта функция неинтегрируема по Риману, так как ее все ее верхние интегральные суммы равны 1, а нижние равны 0.

Что касается интеграла Лебега, то $m(Q) = 0$, поэтому $f_0 \sim 0$ на $a, b)$, поэтому

$\int_E f_0(x)dm = 0$

Пространства $L^p(E)$

Пусть $E \subset R$, $E \neq \emptyset$ - измеримое множество, $m(E) > 0$, и пусть $1 \leq p\infty$.

Будем рассматривать функции f такие, что $\int_E |f(x)|^p dm < \infty$

Если $f_1 \sim f$, то $|f_1|^p \sim |f|^p$, поэтому $\int_E |f_1(x)|^p dm = \int_E |f(x)|^p dm$.

Рассмотрим множество всех функций, эквивалентных f, обозначим это множество $\dot{f}$.

Если $f_0 \in \dot{f}$, то $\dot{f_0} = \dot{f}$, поэтому, взяв любую функцию $f_0 \in \dot{f}$,

мы не изменим множество всех функций, эквивалентных f, если будем рассматривать множество всех функций, эквивалентных f_0.

Определение.

Пусть $1 \leq p\infty$. Через $L^p(E)$ обозначим множество всех совокупностей $\dot{f}$ таких , что $|f(x)|^p \in \mathcal{L}(E),\ \ f \in \dot{f}$

Утверждение.

$L^p(E)$- линейное пространство.

Доказательство.

Для $f \in \dot{f}$, $g \in \dot{g}$ положим $\dot{f} + \dot{g} = f \dot{+} g$

Для $f \in \dot{f}$, $c \in R$ положим $c\dot{g} = \dot{cf}$

через $\dot{0}$ обозначим все функции, эквивалентные 0.

Из того, что $f_0 \sim f_1,\ \ g_0 \sim g_1$ следует $f_0 + g_0 \sim f_1 + g_1$, $cf_0 \sin cf_1$, $c \in R$

это и влечет необходимые свойства линейного пространства. Например,

$\dot{f} + (\dot{-f}) = f \dot{+} (-f) = \dot{0}$

Утверждение.

$L^p(E)$– банахово пространство.

Для $\dot{f} \in L^p(E)$ положим

$||\dot{f}||_{L^p(E)} = \left(\int_E |f|^p dm\right)^{1/p}$

Корректность определения нормы следует из комментария к определению нормы,

неравенство треугольника следует из неравенства Минковского: для $|f(x)|^p \in \mathcal{L}(E)$,$|g(x)|^p \in \mathcal{L}(E)$ выполнено

$\left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dm\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f(x)|^p dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p dm\right)^{1/p}$

Поэтому

$||\dot{f} + \dot{g}||_{L^p(E)} = \left(\int_E |f(x) + g(x)|^p dm\right)^{1/p} \leq$

$\left(\int_E |f(x)|^p dm\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p dm\right)^{1/p} = ||\dot{f}||_{L^p(E)} + ||\dot{g}||_{L^p(E)}$

$||c\dot{f}||_{L^p(E)} = ||\dot{cf}||_{L^p(E)} = \left(\int_E |cf(x)|^p dm\right)^{1/p} = |c| \left(\int_E |f(x)|^p dm\right)^{1/p} = |c|||\dot{f}||_{L^p(E)}$

Если $||\dot{f}_0||_{L^p(E)} = 0$, то $\int_E |cf(x)|^p dm = 0$

Покажем, что $f_0 x = 0$.

Предположим, что это не так, тогда существует $F \subset E,\ \ m(F) > 0,\ \ f_0(x) > 0,\ x \in F$

Тогда для некоторого n найдется $F_n \subset F$ такое что $f_0(x) > \frac{1}{n},\ x \in F_n$

следовательно $\int_E |f_0(x)|^p dm \geq \int_{F_n} |f_(x)|^p dm \geq \int_{F_n} |\frac{1}{n}|^p dm > 0$

Но ранее было показано, что $\int_E |f_0(x)|^p dm = 0$.Следовательно $f_0 x = 0$.

Таким образом доказано, что $L^p(E)$– нормированное пространство.

Окончание доказательства требует следующей теоремы.

Теорема.

$L^p(E)$– полное пространство.

Примем без доказательства.

Пространства $L^\infty(E)$

Пусть f – измеримая функция на E. Будем называть f *существенно ограниченной*,

если существует число $M > 0$ т.ч. $m\,(x \in E : |f(x)| > M) = 0$

Другими словами, для почти всех (п.в.) $x \in E$ выполнено $|f(x)| < M$

. Определение.

Путь f – существенно ограниченная функция. Положим

$\text{esssup}(f) = \inf\,(M :\ \text{при п.в. } x \in E, |f(x)| < M)$

Множество существенно ограниченных функций обозначим через $\mathcal{L}^\infty(E)$

. Через $\dot{f}$, как и ранее, обозначим множество всех функций f_0, эквивалентных f.

Утверждение.

Если $f \in \mathcal{L}^\infty(E),\ \ f_0 \sim f$, то $f_0 \in L^\infty(E),\ \ \text{esssup}(f_0) = \text{esssup}(f)$

Доказательство следует из определения эквивалентных функций.

Определение.

Множество всех совокупностей $\dot{f}$, где $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$, обозначим через $L^\infty(E)$

Для $\dot{f} \in L^\infty(E)$ положим

$||\dot{f}||_{L^\infty(E)} = \text{esssup}(f),\ f \in \dot{f}$

Теорема.

Введенная норма делает множество $L^\infty(E)$- линейным пространством.

Полученное нормированное пространство является полным, т.е. $L^\infty(E)$ – банахово пространство.

Примем без доказательства.