**лекция 12**

Мы продолжаем обсуждение теорема Хана-Банаха, которая в свое время послужила мощным импульсом развития математики, и которая по сочетанию параметров "простота формулировки"и "глубина содержания"является непревзойденным рекордсменом.

Напомним малозаметную, но важную деталь формулировки и саму формулировку.

*Определение*

Множество $Y$ называется подпространством банахова пространства $X$, если оно является **замкнутым** подмножеством $X$ и образует линейное пространство в норме пространства $X$.

*Теорема Хана-Банаха*

Пусть $Y$ – подпространство банахова пространства $X$, $f_0$ – линейный непрерывный функционал на $Y$ с нормой $||f_0|| = a$. Тогда существует линейный непрерывный функционал $f$ на $X$ с нормой $||f|| = a$ такой, что для всякого элемента $y \in Y$ выполнено равенство $f(y) = f_0(y)$.

Приведем важное следствие теоремы Хана-Банаха .

*Следствие*

Если $x_1, x_2$ – два различных элемента банахова пространства $X$, то найдется линейный непрерывный функционал, принимающий разные значения на этих элементах.

*Доказательство*

Рассмотрим линейное подпространство $Y = \{t_1x_1 + t_2x_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ и функционал $f_0$ на этом пространстве, определенный заданием его множества нулей $\ker f_0 = \{tx_1 + tx_2 : t \in \mathbb{R}\}$ и значением в точке $f_0(x_1) = 1$. Заметим, что $f_0(x_2) < 0$. На основании теоремы Хана-Банаха продолжим функционал $f_0$ с подпространства $Y$ на все пространство $X$. Это и есть требуемый функционал.

Это простое отверждение открывает путь к огромному числу разнообразных теорем отделимости, начиная с возможности отделить гиперплоскостью два произвольных выпуклых множества, и кончая задачами линейной и выпуклой оптимизации.

Существенным усилением теоремы Хана-Банаха, является ослабление требования к норме, замена его более слабым понятием

*Определение*

Полунорма это функция, заданная на всем пространстве $X$ и обладающая двумя свойствами:

1) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$ ( полуаддитивность);

2) если $k > 0$, то $p(kx) = kp(x)$ ( положительная однородность).

Всякая норма является полунормой, но обратное неверно. Теорема Хана-Банаха остается справедливой для полунорм (требуется только подправить первую часть доказательства).

Такая добавка позволяет например доказать существование интеграла Лебега. Достаточно задать интеграл на линейном пространстве хороших функций, а затем распространить функционал на пространство ограниченных функций. Некоторые,но небольшие трудности надо преодолеть, поскольку стартовое пространство должно быть замкнутым. Но это никак не обесценивает работу проделанную для построения меры Лебега. Теорема Хана-Банаха только гарантирует существование меры,но не дает никакого алгоритма ее вычисления.

## СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Функциональные пространства и операторы, действующие в этих пространствах, создают мощную базу для построения моделей. Правильный подбор функциональных пространств позволяет реализовывать модель при помощи линейных операторов, что обычно сводит задачу к построению обратного оператора. Вопрос о существовании обратного оператора естественно расширить до вопроса о построении функций от оператора $f(A)$. Если при этом из равенства $h(x) = f(x)g(x)$ будет следовать $h(A) = f(A)g(A)$, то для получения обратного оператора будет достаточно применить к нему функцию $f(x) = 1/x$. Эту идею легче всего реализовать на матрицах. Ограничение, возникающее на этом пути только одно– определитель матриц не равен нулю. Другими словами ноль не является собственным числом матрицы. Множество собственных векторов матрицы называют спектром матрицы. Именно это понятие лежит в основе описания функций от операторов, но для операторов, действующих в бесконечномерных пространствах понятие спектра необходимо расширить.

*Определение*

Спектром оператора $A$ называется множество $\sigma(A)$ комплексных чисел $\lambda$,

для которых оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного.

*Замечание*

Спектр матрицы – это множество ее собственных чисел. Из основной теоремы алгебры следует, что он всегда не пуст.

Спектр оператора в бесконечномерном пространстве может быть устроен сложнее. Например, оператор $A$, сопоставляющий функции $f \in C[0, 1]$ функцию $g(x) = xf(x)$, вообще не имеет собственных чисел. Проверим это. Допустим, что это не так, и $\lambda$ является собственных числом. Тогда существовала бы отличная от нуля функции, для которой выполнялось бы равенство $xf(x) = \lambda f(x)$, т. е. в любой точке, где функция отлична от нуля должно выполняться равенство $x = \lambda$, что невозможно.

Можно показать, что спектр этого оператора не пуст: 0 принадлежит спектру, и следовательно, оператор необратим.

Сформулируем основную цель спектральной теории – описание классов пространств и классов операторов, для которых можно получить описание спектра и построить функциональное исчисление, то есть определить функции от оператора. Этот вопрос настолько сложен и чувствителен к изменениям характеристик рассматриваемых объектов, что получить на него исчерпывающий ответ невозможно.

Всюду далее будут рассматриваться только гильбертовы пространства, так как ортогональные разложения играют центральную роль в спектральной теории операторов. Будет доказана теорема о спектральном разложении в простейшей бесконечномерной ситуации, сохраняющей максимальное сходство с матрицами.

Дальнейшие продвижения будут только намечены, но они требуют существенно иной техники.

Как было сказано выше, полное описание спектрального разложения будет дано при сильных ограничениях на оператор. Главное из них – условие компактности оператора.

*Определение*

Оператор $A$, отображающий одно банахово пространство в другое, называется *компактным*, если из любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_k\} \subset \{x_n\}$ такую, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} Ay_k$.

*Определение*

Оператор $A$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *самосопряженным*, если

$$(Ax, y) = (x, Ay) \ \forall x, y \in H.$$

*Теорема о спектральном разложении*

Если $A$ – компактный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $H$, то он имеет не более чем счетное множество собственных векторов $\{\lambda_n\}$,

собственные подпространства оператора $H_n = \{x : Ax = \lambda_n x\}$ конечномерны, ортогональны между собой и

справедлива формула спектрального разложения

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x$$

где $P_n$ – ортогональный проектор на $H_n$.

План доказательства сводится к постепенному «отщеплению» от исходного пространства собственных подпространств оператора и контролю того, что после отщепления для оставшейся части оператора выполнены условия теоремы.

Здесь будут приведены только ключевые момента, необходимые для доказательства теоремы.

*Предложение 1*

Собственные числа самосопряженного оператора вещественны,

а собственные элементы, относящиеся к разным собственным числам ортогональны.

*Доказательство*

Если $\lambda$ – собственное число самосопряженного оператора $A$, то для него существует собственный элемент ($Ax = \lambda x,\ x \neq 0$). Самосопряженность оператора означает, что $(Ax, x) = (x, Ax)$ , следовательно, $(\lambda x, x) = (x, \lambda x)$ и далее по свойствам скалярного произведения $\lambda(x, x) = \bar{\lambda}(x, x)$, то есть $\lambda = \bar{\lambda}$.

Если $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, то равенство $(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2)$ можно переписать в виде $\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$ (учли, что $\lambda_2 = \bar{\lambda_2}$). При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ такое равенство возможно только в случае $(x_1, x_2) = 0$.