МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра АМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №2
по дисциплине «Функциональный анализ»
Тема:Мера Лебега

Студентка гр. 8383 ________________ Кормщикова А.О.

Преподаватель ________________ Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Постановка задачи.

Вариант 10.

$f(1) = 3,\ f(4) = 4,\ f(13) = 6,\ f(16) = 8$

$g(1) = 0,\ g(8) = 3,\ g(11) = 6,\ g(16) = 9$

f **-** кусочно-линейная неубывающая непрерывная функция, заданная значениями на концах интервалов

g **-** кусочно-постоянная неубывающая функция, заданная значениями на концах интервалов постоянства.

В точках разрыва $g(d-0) = g(d) < g(d+0)$

Выполнение работы.

Построим графики данных функций:

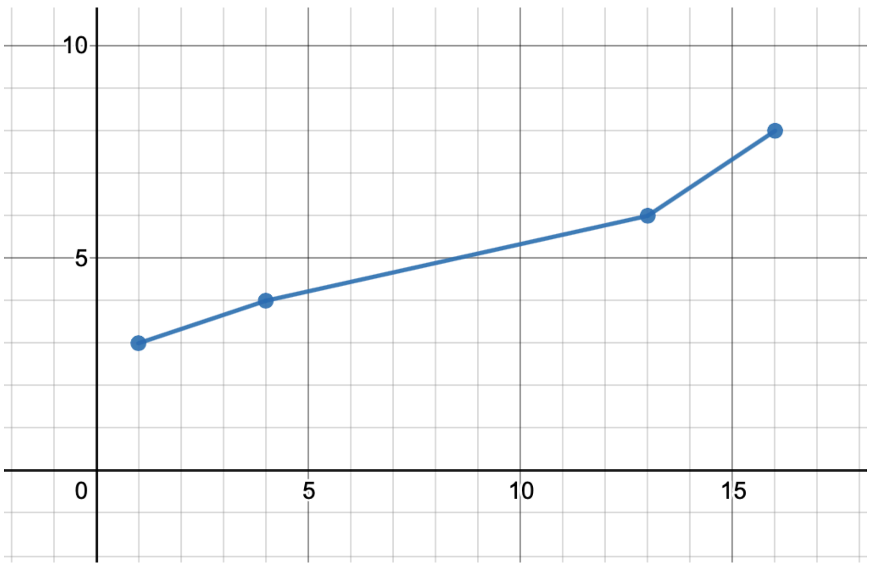

Рисунок 1 - График функции f(x)

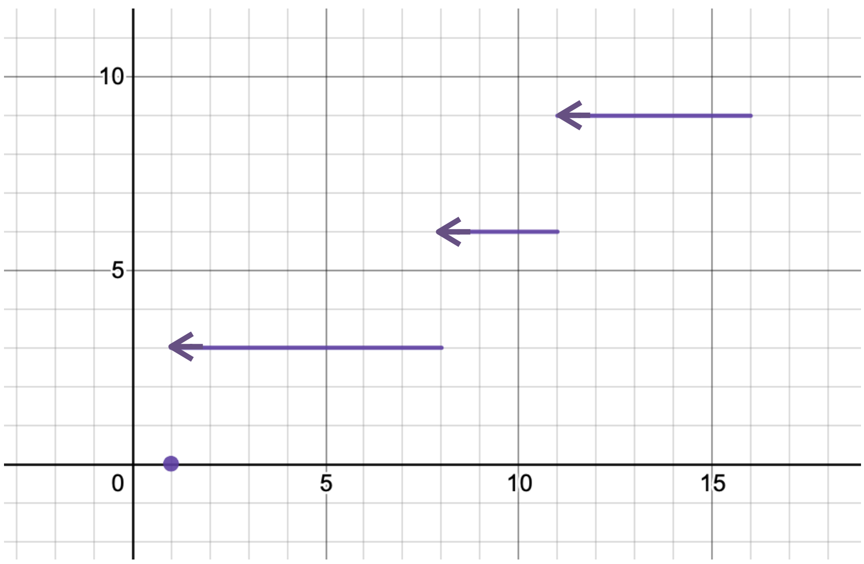

Рисунок 2 - График функции g(x)

1) Мера порожденная функцией g(x)

Обозначим через m - меру Лебега, и через δ_a - дельта меру - единичную нагрузку в точке a.

$\delta_a(E) = 1, a \in E,\ \delta_a(E) = 0, a \notin E$

Подберем коэффициенты β_i так, чтобы для любого измеримого множества A

$$m_g(A) = \sum_i \beta_i \delta_{ai}(A)$$

Выделим маленькие отрезки вокруг точек разрыва

$a_i = \{1,8,11\}$.

$\beta_i = F(a_i + 0) - F(a_i - 0) = \{3,3,3\}$

$m_g(A) = 3 + 3 + 3 = 9, A \in [1,16]$

2) $\int f(x) dm_g = ?$

Там, где функция. g(x) постоянна - интеграл будет равняться 0, т.к. Мера равна 0. Рассмотрим множества в точках разрыва, где мера будет равна скачку в этой точке.

$$\int f(x) dm_g = 3 * f(1) + 3 * f(8) + 3 * f(11)$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}, x \in [1,4)$$

$$f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{28}{9}, x \in [4,13)$$

$$\int f(x) dm_g = 3 * 3 + 3 * 4.889 + 3 * 5.556 = 40.34$$

3) Мера порожденная функцией f(x)

Обозначим меру для функции f(x) как m_f, такую, что

$$m_f(A) = \sum_i a_i m(A \cap B_i)$$

На отрезках функция имеет вид $f(x) = kx + b$

$\forall [a, b] m_f = f(b) - f(a) = k(b - a)$

$\forall E \; E = (E \cap [1,4)) \cup (E \cap [4,13)) \cup (E \cap [13,16))$

$$k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = \frac{2}{9}, k_3 = \frac{2}{3}$$

$$m_f(A) = \frac{1}{3}(4 - 1) + \frac{2}{9}(13 - 4) + \frac{2}{3}(16 - 13) = 5, \; A \in [1,16]$$

4) $\int g(x) dm_f = ?$

Считаем на отрезках, где f(x) - линейна и g(x) = *const*. Разобьем интеграл на сумму интегралов.

$$\int_a^b g(x) dm_f = \int_a^b const \; dm_f = const * (f(b) - f(a))$$

$$f(x) = kx + b \rightarrow f(b) - f(a) = k(b - a) = k \; m_L((a, b))$$

$$k_1 = \frac{1}{3}, k_2 = \frac{2}{9}, k_3 = \frac{2}{3}$$

$$\int g(x) dm_f = \int_1^4 g(x) dm_f + \int_4^{13} g(x) dm_f + \int_{13}^{16} g(x) dm_f$$

$$\int_1^4 g(x) dm_f = 3(4 - 3) = 3$$

$$\int_4^{13} g(x) dm_f = \int_4^8 g(x) dm_f + \int_8^{11} g(x) dm_f + \int_{11}^{13} g(x) dm_f = 3 * \frac{2}{9}(8 - 4) + 6 * \frac{2}{9}(11 - 8) + 9\frac{2}{9}(13 - 11) = 10.667$$

$$\int_{13}^{16} g(x) dm_f = 9 * (8 - 6) = 18$$

$$\int g(x) dm_f = 31.667$$

5) подберем c_1, c_2 так, что

$\forall E : c_1 m(E) \leq m_f(E) \leq c_2 m(E)$

Из определения $m_f(A) = \sum_i a_i m(A \cap B_i)$ следует, что нужно выбрать максимальный и минимальный из коэффициентов a_i

$c_1 = \min(a_i) = \frac{2}{9}$

$c_2 = \max(a_i) = \frac{2}{3}$

Тогда для $\forall E \ E = (E \cap [1,4)) \cup (E \cap [4,13)) \cup (E \cap [13,16))$

$c_1 m(E) \leq m_f(E) \leq c_2 m(E)$

Для m_g невозможно подобрать ограничение сверху. Потому что $m_g(A) = 0$, там, где не содержатся точки разрыва.

6) Опишите все множества A такие, что $m_g(A) = 0$. $m_g(A) = 0$ на множествах, на которых нет разрыва функции g(x)

$A : \forall a_i \in A : g(a_i - 0) = g(a_i + 0)$

7) $||f||_\infty = \sup_E(\sup_x(|f(x)|, x \in E) : m_g(E) \neq 0) = 8$

8) Аналогично 4му пункту вычислим $\int g(x)^2 dm_f$

$$\int g(x)^2 dm_f = \int_1^4 g(x)^2 dm_f + \int_4^{13} g(x)^2 dm_f + \int_{13}^{16} g(x)^2 dm_f$$

$$\int_1^4 g(x)^2 dm_f = 3^2 * (4-3) = 9$$

$$\int_4^{13} g(x)^2 dm_f = \int_4^8 g(x)^2 dm_f + \int_8^{11} g(x)^2 dm_f + \int_{11}^{13} g(x)^2 dm_f = 3^2 * \frac{2}{9}(8-4) + 6^2 * \frac{2}{9}(11-8) + 9^2 \frac{2}{9}(13-11) =$$

68

$$\int_{13}^{16} g(x)^2 dm_f = 9^2 * (8 - 6) = 162$$

$$\int g(x)^2 dm_f = 239$$

Вывод.

Во время выполнения домашнего задания была изучена тема мера Лебега