МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по домашнему заданию №2
по дисциплине «Элементы функционального анализа»
Тема: Мера Лебега
12 вариант

Студент гр. 8383	____________________	Ларин А.
Преподаватель	____________________	Коточигов А.М.

Санкт-Петербург
2021

Дано.

f: кусочно-линейная неубывающая функция, заданная значениями на концах интервалов;

g: кусочно-постоянная неубывающая функция, заданная значениями на концах интервалов постоянства.

$$f(1) = 2, f(3) = 4, f(11) = 6, f(12) = 7$$

$$g(1) = 0, g(5) = 3, g(9) = 7, g(12) = 11$$

Выполнение работы.

Построим графики данных функций.

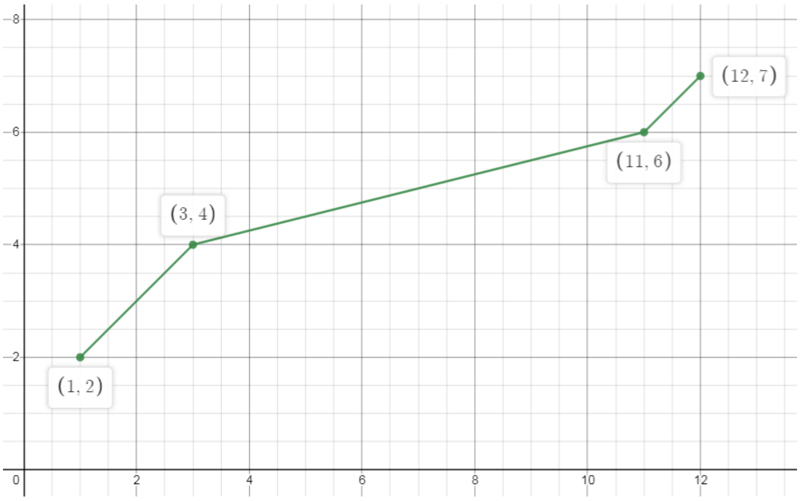

Рис. 1 - График функции $f(x)$

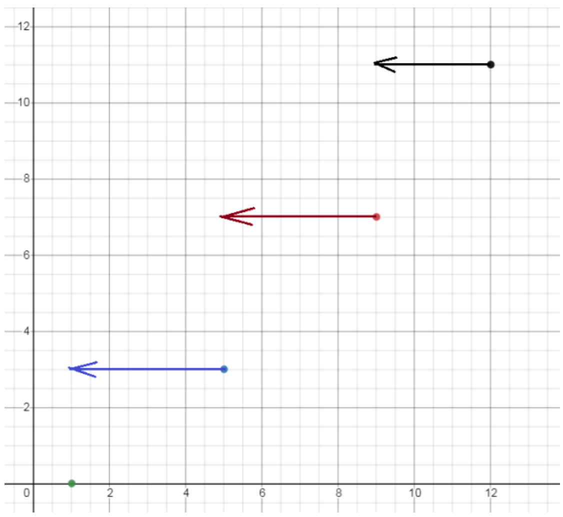

Рис. 2 - График функции $g(x)$

1. Обозначим через m – меру Лебега, и через δ_a – дельта меру – единичную нагрузку в точке a:

$\delta_a(E) = 1, a \in E$, (то есть точка a попадает в множество)

$\delta_a(E) = 0, a \notin E$ (то есть точка a не попадает в множество)

Подберем коэффициенты β_i так, чтобы для любого измеримого множества A

$$m_g(A) = \sum_i \beta_i \delta_{a_i}(A)$$

Функция g имеет следующие точки разрыва: $a_i = \{1,\ 5, 9\}$, к которым производится «стягивание» отрезков:

$\beta_1 = g(5) - g(1) = 3,$

$\beta_2 = g(9) - g(5) = 7 - 3 = \ 4,$

$\beta_3 = g(12) - g(9) = 11 - 7 = 4$

Таким образом, мера Лебега для функции g:

$m_g(A)$= $3 \cdot\ \delta_{a_1}(A) +\ 4\ \cdot\ \delta_{a_2}(A) +\ 4\ \cdot \delta_{a_3}(A)$

A — любое измеримое множество.

$m_g(A) = 3 + 4 + 4 = 11, \qquad A \in [1, 12]$

2. Интеграл от функции $\int f(x)\, dm_g = ?$

На интервалах, на которых функция g постоянна, значение интеграла будет равно нулю т.к. мера равна нулю.

Рассмотрим множества в точках разрыва $\mathrm{a}_1 = 1$, $\mathrm{a}_2 = 5$, $\mathrm{a}_3 = 9$, где имеем меру, отличную от нуля.

$$\int f(x)\, dm_g = 3 * f(\mathrm{a}_1) + 4 * f(\ \mathrm{a}_2) + 4 * f(\ \mathrm{a}_3) = 3 * f(1) + 4 * f(5) + 4 * f(9) =$$

$$= 3 * 2 + 4 *\ 4.5 + 4 *\ 5.5 = 46$$

3. Проведите аналогичное описание меры $m_f, m_f(A) = \sum_i \alpha_i\, m(A \cap B_i)$

На каждом из промежутков $[1,3],[3,11],[11,12]$ функция имеет вид $f(x) = kx + b$.

Коэффициенты - значение производной на промежутке:

$$k_i = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$k_1 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 2}{2} = 1,$$

$$k_2 = \frac{f(11) - f(3)}{11 - 3} = \frac{6 - 2}{8} = \frac{1}{4},$$

$$k_3 = \frac{f(12) - f(11)}{12 - 11} = \frac{7 - 6}{1} = 1.$$

$$m_f(A) = k_1(3 - 1) + k_2(11 - 3) + k_3(12 - 11) = 2 + 2 + 1 = 5, A \in [1,12]$$

4. $\int g(x)\, dm_f = ?$

Считаем на отрезках, где $f(x)$ -линейна и $g(x) = const$. Разобъем интегралл на сумму интегралов.

$\int_a^b g(x) dm_f = \int_a^b const\, dm_f = const * (f(b) - f(a))$.

$f(x) = kx + b \to f(b) - f(a) = k(b - a) = km_L((a,b))$.

$k_1 = 1; k_2 = \frac{1}{4}; k_3 = 1$.

$$\int g(x)dm_f = \int_1^3 g(x)dm_f + \int_3^5 g(x)dm_f + \int_5^9 g(x)dm_f \int_9^{11} g(x)dm_f + \int_{11}^{12} g(x)dm_f =$$

$$= 3 * (3 - 1) + 3 * (4.5 - 4) + 7 * (5.5 - 4.5) + 11 * (6 - 5.5) + 11 * (7 - 6)$$

$$= 6 + 1.5 + 7 + 10.5 + 11 = 36$$

5. Подберите постоянные c_1, c_2 такие, что $\forall E: c_1 m(E) \le m_f(E) \le c_2 m(E)$

Из определений меры Лебега и меры, порожденной возрастающей функцией, легко увидеть, что для такого неравенства достаточно выбрать минимальный и максимальный из коэффициентов k_i:

$$c_1 = \min(k_1, k_2, k_3) = \min\left(1, \frac{1}{4}, 1\right) = \frac{1}{4}$$

$$c_2 = \max(k_1, k_2, k_3) = \max(1, \frac{1}{4}, 1) = 1$$

Тогда для $\forall E\ E = (E \cap [1,3)) \cup (E \cap [3,11)) \cup (E \cap [11,12))$

$$c_1 m(E) \le m_f(E) \le c_2 m(E)$$

Для m_g невозможно подобрать ограничение сверху.

6. Опишите все множества A такие, что $m_g(A) = 0$

$m_g(A) = 0$ на множествах, на которых нет разрыва функции $g(x)$: $\forall A: 1{,}5{,}9 \notin A$

7. Вычислите норму функции f в пространстве $L^\infty([a,b], m_g)$

$$\|f\|_\infty = \sup_E(\sup_x(|f(x)|; x \in E): m_g(E) \ne 0)$$

Множества, на которых мера $m_g \ne 0$: $\{1,5,9\}$

$$\max_{x \in \{1,5,9\}} f(x) = 5.5; \text{при } x = 9$$

8. Вычислить интеграл от квадрата функции g в пространстве $\mathrm{L}^2([a,b], m_f s)$

$$\int g^2(x) dm_f$$

$$= \int_1^3 g^2(x) dm_f + \int_3^5 g^2(x) dm_f + \int_5^9 g^2(x) dm_f \int_9^{11} g^2(x) dm_f$$

$$+ \int_{11}^{12} g^2(x) dm_f$$

$$= 3^2 * (3-1) + 3^2 * (4.5-4) + 7^2 * (5.5-4.5) + 11^2 * (6-5.5) + 11^2$$
$$* (7-6) = 9 * 2 + 9 * 0.5 + 49 * 1 + 121 * 0.5 + 121 * 1 = 253$$