# Цифровая обработка сигналов

**Лекция №5**

Санкт-Петербург

2021

# Z-преобразование

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что $T$ – шаг дискретизации равен единице.

Для анализа дискретной последовательности $\{x_k\}$ часто удобно использовать Z-преобразование, когда этой последовательности ставится в соответствие функция комплексной переменной $z$:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \tag{5.1}$$

Эта функция определена лишь для тех значений $z$, при которых ряд (5.1) сходится.

# Z-преобразование
# примеры вычисления

## Единичная импульсная функция

$$x_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases}; \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(k) z^{-k} = z^0 = 1 \qquad (5.2)$$

Сходится на всей комплексной плоскости.

## Единичный скачок

$$x_k = \begin{cases} 1, k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}; \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad (5.3)$$

Ряд (5.3) есть геометрическая прогрессия. Ее знаменатель $z^{-1}$. Сходится при $|z| > 1$

# Z-преобразование свойства

**Линейность:**

$$\left\{ax_k^{(1)}+bx_k^{(1)}\right\}\Rightarrow aX^{(1)}(z)+bX^{(2)}(z)$$

**Задержка:**

$$y_k=x_{k-m}\Rightarrow Y(z)=X(z)z^{-m}$$

$z^{-m}$ - оператор задержки на $m$ тактов.

**Умножение на *k***

$$y_k=kx_k\rightarrow Y(z)=-z\frac{dX(z)}{dz}$$

**Свертка:**

$$y_k=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n^{(1)}x_{k-n}^{(2)}\Rightarrow Y(z)=X^{(1)}(z)X^{(2)}(z)$$

# Обратное Z-преобразование

Обратное $Z$-преобразование определяется формулой:

$$x_k = \frac{1}{i2\pi} \oint X(z) z^{k-1} dz \quad , \qquad (5.4)$$

где контурный интеграл берется по любому замкнутому контуру в области сходимости $X(z)$ и охватывающему все его полюсы.

# Обратное Z-преобразование

На практике обратное преобразование часто вычисляется посредством разложения $X(z)$ на сумму простых дробей. Например,

$$X(z)=\frac{1}{0.5z^{-2}-1.5z^{-1}+1}=\frac{2}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

Здесь первое слагаемое соответствует Z-преобразованию единичного скачка, умноженному на 2, а второе - Z-преобразованию дискретной показательной функции $2^{-k}$ В результате получим:

$$x_k=\begin{cases}2-2^{-k}, k\geq 0\\ 0 \qquad\quad , k<0\end{cases}$$

# Z-преобразование

## Таблица некоторых преобразований

| $\{x_k\}$ | $X(z)$ |
| --- | --- |
| $x_k=\begin{cases} a^k, k\ge 0 \\ 0\ , k<0 \end{cases}$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-az^{-1}}\ , \lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $x_k=k$ | $X(z)=\dfrac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$ |
| $x_k=ka^k$ | $X(z)=\dfrac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$ |
| $x_k=e^{i\omega kT}$ | $X(z)=\dfrac{1}{1-e^{i\omega kT}z^{-1}}$ |
| $x_k=\sin(\omega kT)$ | $X(z)=\dfrac{\sin(\omega T)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$ |
| $x_k=\cos(\omega kT)$ | $X(z)=\dfrac{\left(1-\cos(\omega T)\right)z^{-1}}{1-2\cos(\omega T)z^{-1}+z^{-2}}$ |

# Дискретные фильтры (общие положения)

**Дискретный фильтр** представляет собой ту или иную систему обработки дискретного сигнала, обладающую свойствами:

- линейности – выходная реакция системы на линейную комбинацию входных сигналов равна такой же линейной комбинации ее реакций на каждый из этих сигналов отдельности;
- стационарности – задержка входного сигнала приводит к такой же задержке выходного сигнала без изменения его формы.

**Дискретный фильтр** должен обладать «памятью» т.е каждый отсчет $y(k)$ выходного сигнала определяется в результате обработки нескольких (более одного) отсчетов входного сигнала $x(k)$ .

# Дискретные фильтры (общие положения)

Пусть последовательность $\{x_k\}$ задает дискретный сигнал. Как и раньше, будем считать, что $T$ – шаг дискретизации равен единице.

Обозначим выходной сигнал через $\{y_k\}$.

Дискретный фильтр может быть задан в виде:

$$y_k = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} - a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \ldots - a_m y_{k-m} \quad (5.5)$$

Здесь если все $a_k = 0$ получим нерекурсивный фильтр. В противном случае – рекурсивный.

Ограничений на соотношение чисел $m$ и $n$ нет.

Дискретный фильтр (5.5.) может быть представлен также разностным уравнением:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + a_2 y_{k-2} + \ldots + a_m y_{k-m} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_n x_{k-n} \quad (5.6)$$

# Дискретные фильтры (общие положения)

$\{h_k\}$ - **импульсная характеристика фильтра** – выходная реакция фильтра на единичный импульс.

Так, если положить все $x_k = 0$ кроме $x_0 = 1$, то получим, что импульсная характеристика нерекурсивного фильтра

$$h_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} = c_k \qquad (5.7)$$

определяется коэффициентами фильтра $c_k$. Для физически реализуемой системы $h_k = 0\ \forall k < 0$ - система может оперировать лишь с уже имеющимися отсчетами сигнала.

Таким образом, для произвольного сигнала выходной сигнал есть линейная комбинация импульсных характеристик фильтра.

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{k} c_n x_{k-n} \qquad (5.8)$$

# Дискретные фильтры (общие положения)

## Функция передачи

Поскольку уравнение дискретной фильтрации (5.8) представляет собой линейную свертку, согласно свойствам *Z*-преобразования:

$$Y(z) = H(z)X(z) \tag{5.9}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5.10}$$

$H(z)$ - функция передачи (передаточная функция).

Применив *Z*-преобразование к разностному уравнению (5.6), получим:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_m z^{-m}} \tag{5.11}$$

# Дискретные фильтры (общие положения)

**Частотная характеристика (комплексный коэффициент передачи)**

$$H(e^{i\omega T}) = H(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-i\omega kT} \qquad (5.12)$$

Как следует из (5.12), частотная характеристика, дискретного фильтра (дискретной системы) является периодической функцией частоты с периодом $2\pi / T$.

# Дискретные фильтры (общие положения)

## Нули и полюсы

Разложим на множители числитель и знаменатель функции передачи в форме (5.11):

$$H(z) = k\frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})...(1 - z_n z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})...(1 - p_m z^{-1})} \qquad (5.13)$$

Здесь: $k = b_0$ - коэффициент усиления; $z_i$ - нули передаточной функции; $p_i$ - полюсы передаточной функции.

Нули и полюсы могут быть, как вещественными, так и комплексно-сопряженными парами. Коэффициент усиления – всегда вещественный.

# Дискретные фильтры (общие положения)

## Устойчивость дискретных систем

Система является устойчивой, если при отсутствии входного сигнала $\left(x_k = 0\ \forall k\right)$ свободные колебания системы являются затухающими при любых начальных условиях:

$$x_k = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} y_k = 0 \qquad (5.14)$$

Можно показать, что в этом случае полюсы передаточной функции должны удовлетворять условиям $\left|p_i\right| < 1\ \forall \mathrm{i}$ .

Таким образом,

**чтобы дискретная система была устойчива, полюсы ее функции передачи должны находиться на комплексной плоскости внутри круга единичного радиуса.**

# Весовые функции

Пусть функция $f(t)$ представлена рядом Фурье:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{5.15}$$

Произведем усечение ряда (5.15) до $2K+1$ слагаемых:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{ikt} \tag{5.16}$$

Такое усечение равносильно почленному умножению элементов последовательности $\{c_k\}$ на элементы последовательности $\{d_k\}$, элементы которой определяются по правилу:

$$d_k = \begin{cases} 1, |k| \le K \\ 0, |k| > K \end{cases} \tag{5.17}$$

# Весовые функции

Если рассматривать элементы последовательности (5.17), как коэффициенты ряда Фурье некоторой функции $g(t)$, то ее разложение в ряд Фурье будет иметь вид:

$$g(t)=\sum_{k=-K}^{K} d_k e^{ikt} = e^{-iKt}+e^{-i(K-1)t}+\ldots+1+\ldots+e^{i(K-1)t}+e^{iKt} \quad (5.18)$$

Согласно свойствам ряда Фурье, усеченный ряд (5.16) представляет собой разложение в ряд Фурье свертки функций $f(t)$ и $g(t)$.

# Весовые функции

Разложение (5.18) является геометрической прогрессией. Найдя ее сумму, получим:

$$g(t)=\frac{\sin\left[\left(K+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},|t|<\pi \qquad (5.19)$$

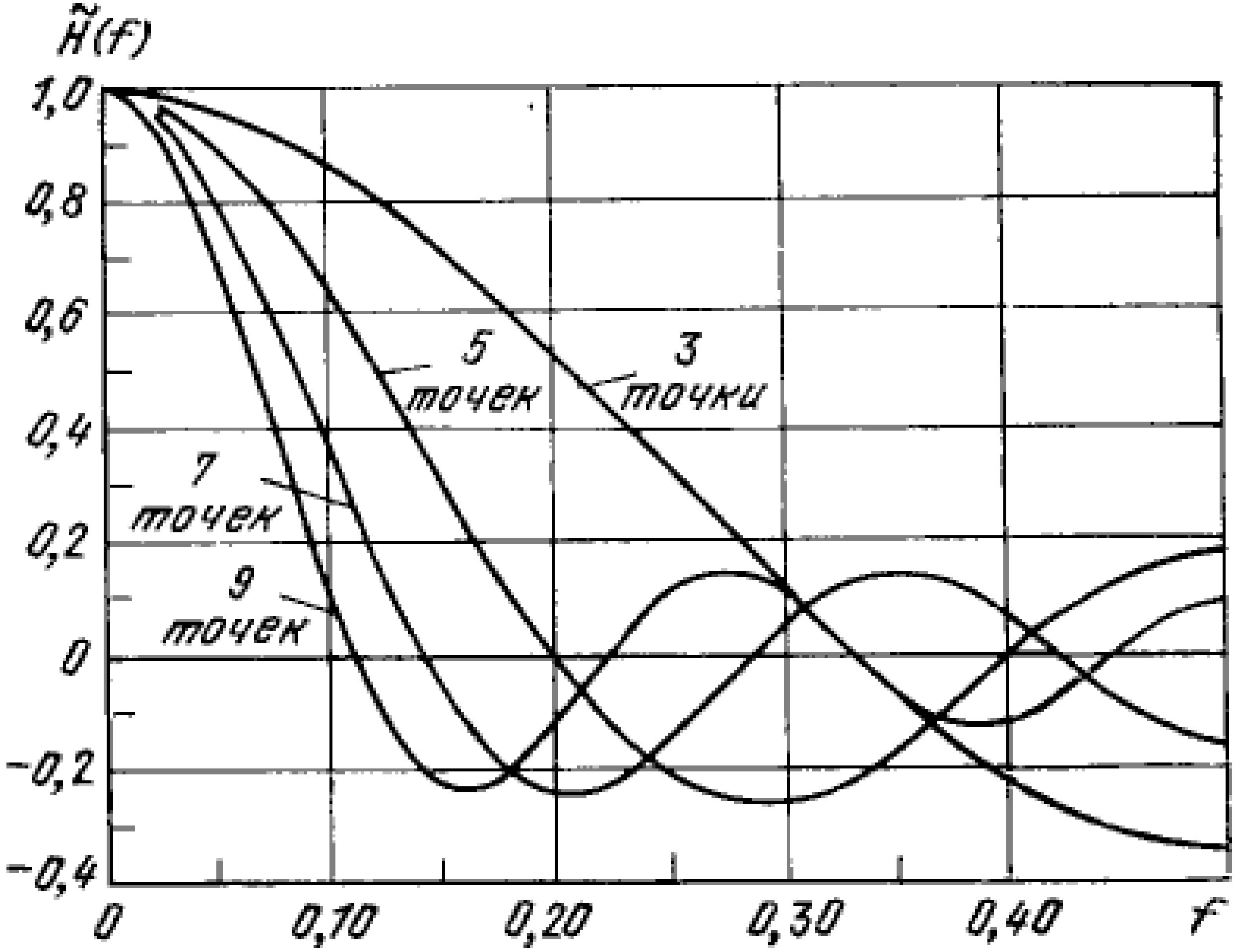
Полезно сравнить этот результат с формулой (2.11).

Функция $g(t)$ испытывает колебания с уменьшающейся амплитудой и с тем большей частотой, чем больше значение $K$ - так называемые боковые лепестки.

Именно это порождает явление Гибса при свертывании дискретного сигнала с прямоугольным окном.

# Весовые функции

Для наглядности повторим графики, приведенные в лекции №2 для $2K+1$ равному 3.5.7.и 9.



# Весовые функции

Можно модифицировать окно представив функцию $g(t)$ в виде:

$$g(t)=\frac{1}{2}e^{-iKt}+e^{-i(K-1)t}+\ldots+1+\ldots e^{i(K-1)t}+\frac{1}{2}e^{iKt} \quad (5.20)$$

или после преобразований:

$$g(t)=\frac{\sin[Kt]}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cos\left(\frac{t}{2}\right), |t|<\pi \quad (5.21)$$

при свертывании с таким модифицированным окном явление Гиббса (колебательный процесс пульсации вблизи границы окна) будет проявляться в некоторой меньшей степени, поскольку $\cos(t/2)$ будет плавно стремиться к нулю. Наблюдается уменьшение боковых лепестков.

# Весовые функции

По существу модифицированное окно получается в результате умножения последовательности $\{d_k\}$, определяемой (5.17) на весовую функцию – весовые множители $\{v_k\}$, которые определяются по правилу:

$$v_k = \begin{cases} 1, |k| \le K-1 \\ 0, |k| > K \end{cases}, v_{-(K-1)} = v_{K+1} = \frac{1}{2}$$

В результате вместо последовательности $\{d_k\}$ получается последовательность $\{v_k d_k\}$.

Другой пример уже упоминавшихся весовых множителей – сигма-факторы Ланцоша (лекция №3, формула 3.26).

Обоснованный выбор весовой функции позволяет скорректировать негативные свойства прямоугольного окна.

# Весовые функции

Рассмотрим весовые множители вида:

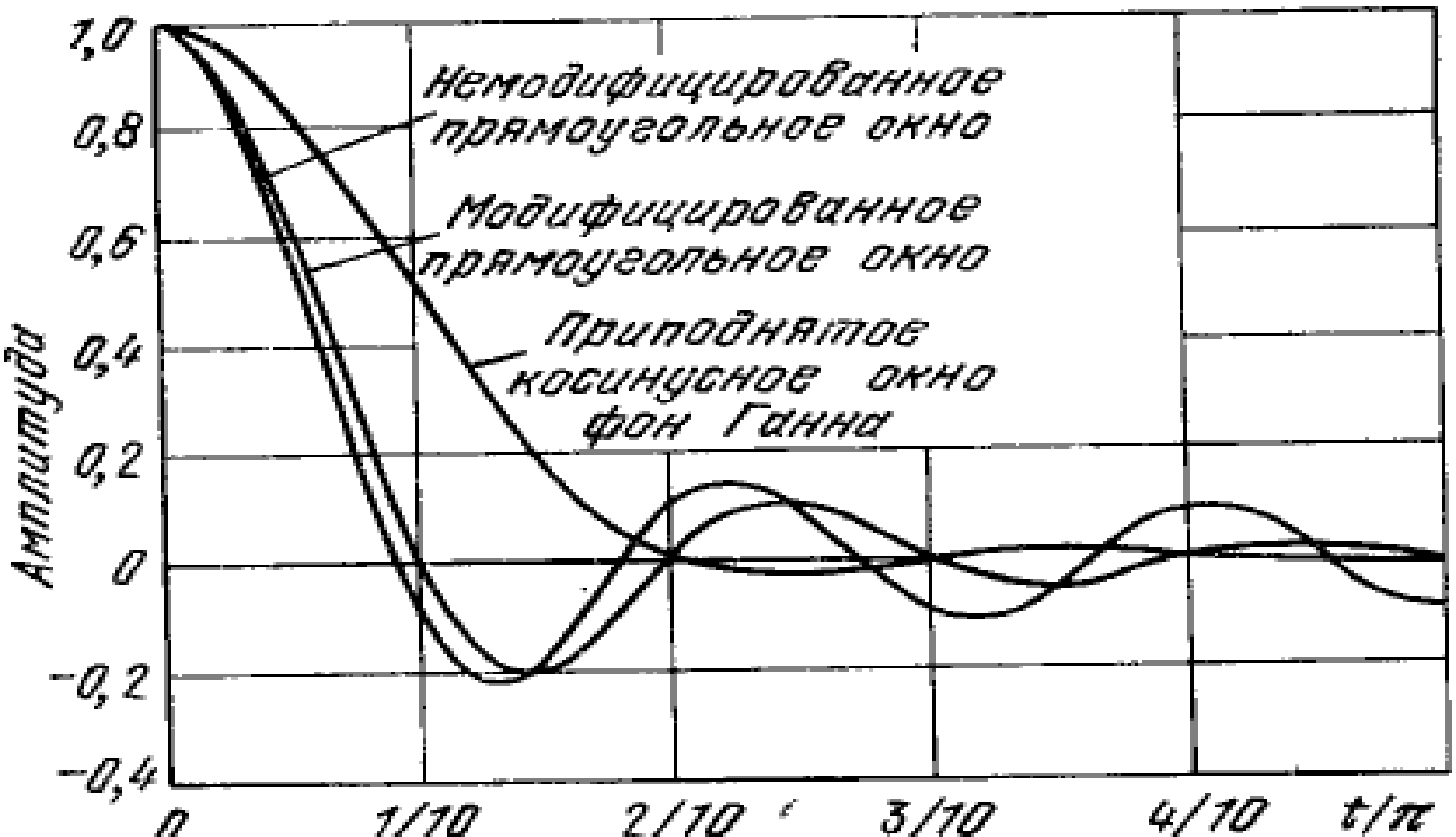
$$\nu_k = \begin{cases} \dfrac{1+\cos\left(\dfrac{k\pi}{K}\right)}{2}, & |k| \le K \\ 0, & |k| > K \end{cases} \qquad (5.22)$$

Если рассматривать эту последовательность, как значения дифференцируемой функции, то при $k=K$ равна нулю, и сама функция, и ее первая производная.

Весовая функция (5.22) определяет так называемое окно Ганна или приподнятое косинусное окно Ганна.

# Весовые функции

Графики частотных характеристик функций окон с пятью членами (11 элементов в фильтре).



# Весовые функции

Как видно из приведенных графиков, первый ноль на графике для прямоугольного окна находится ближе к началу координат, чем для модифицированного окна и окна Ганна. Для окна Ганна – напротив, дальше от начала координат, чем у других двух окон. При этом для окна Ганна подавление боковых лепестков наиболее существенное.

# Весовые функции

Еще одно окно - **Окно Хемминга -** представляет собой взвешенную сумму весовых функций окна Ганна и модифицированного окна:

$$v_k = 2a\cos\frac{\pi k}{K} + b;\;\; 2a + b = 1 \qquad (5.23)$$

Основным аргументом такого подхода является то, что боковые лепестки модифицированного окна и окна Ганна имеют противоположные знаки.

Коэффициенты взвешенной суммы (5.23) могут быть определены из условия минимизации максимумов боковых лепестков.