Цифровая обработка сигналов

Лекция №6

Санкт-Петербург

2021

Классификация фильтров по целевому назначению

Фильтры нижних частот (ФНЧ или loss-pass filter). Пропускают частоты, меньшие ω_0 - частоты среза;

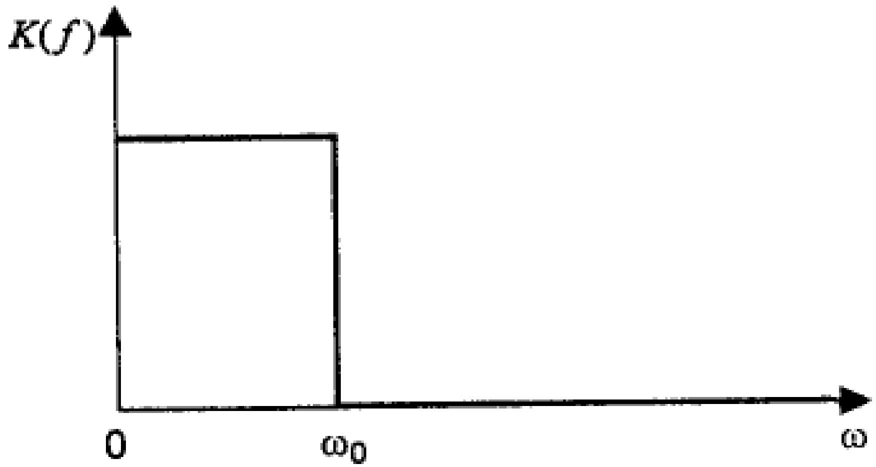
Фильтры высоких частот (ФВЧ или **high-pass filter**). Пропускают частоты, большие ω_0 - частоты среза;

Полосовые фильтры (ПФ или **band-pass filter**). Пропускают частоты в некотором диапазоне $\omega_1 \ldots \omega_2$. Характеризуются также средней частотой ω_0 и шириной полосы пропускания;

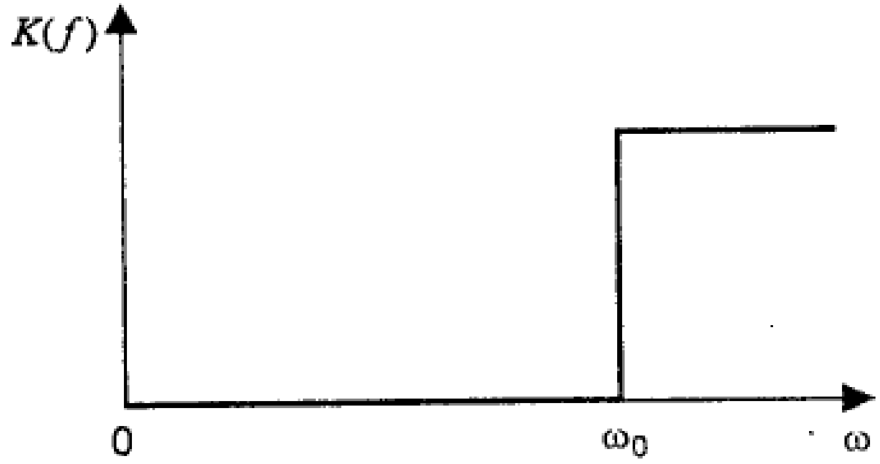
Режекторные фильтры (фильтр-пробка, заграждающий фильтр, полосно-задерживающий фильтр или **band-stop filter**), пропускающий все частоты, кроме попадающих в некоторый диапазон $\omega_1 \ldots \omega_2$. Также характеризуется средней частотой ω_0 и шириной полосы задерживания.

Классификация фильтров по результату действия

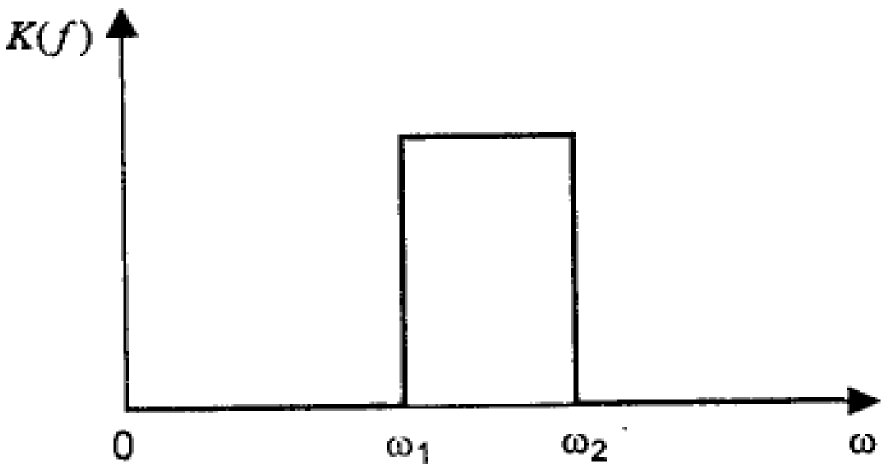
Идеальная форма ФЧХ названных фильтров



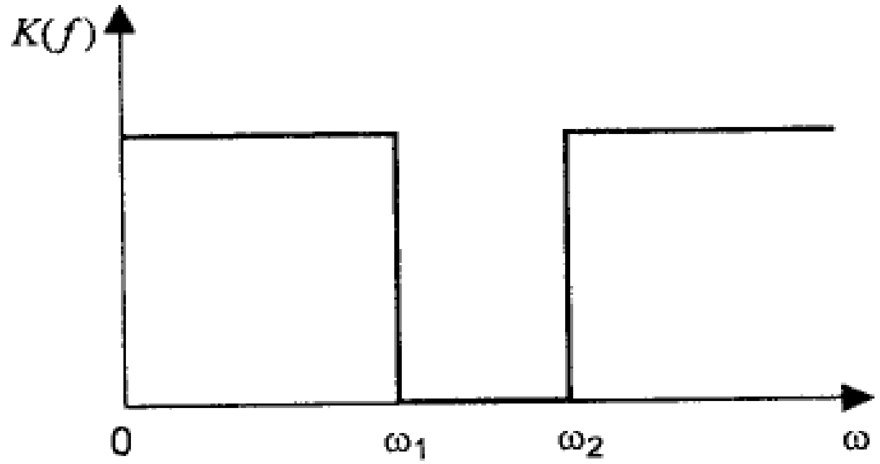
ФНЧ



ФВЧ



Полосовой фильтр



Режекторный фильтр

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Синтез дискретных фильтров заключается в выборе таких коэффициентов фильтра, при которых его характеристики удовлетворяют заданным требованиям.

Можно привести, в частности, следующие классификации методов синтеза дискретных фильтров.

По типу синтезируемого фильтра:

- синтез нерекурсивных фильтров;
- синтез рекурсивных фильтров.

По наличию аналогового прототипа:

- методы с использованием аналогового прототипа;
- методы без использования аналогового прототипа или прямые методы.

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Синтез рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу:

- метод билинейного *Z*-преобразования;
- метод инвариантной импульсной характеристики.

Прямые методы синтеза фильтров:

- **оптимальные методы**. Заключаются в поиске минимума заданного критерия качества численными итерационными методами;
- **субоптимальные методы**. Не обеспечивают оптимального значения критерия качества, но упрощают вычислительные процессы по сравнению с оптимальными методами. При этом, как правило, используется та или иная специфика конкретной задачи

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Оптимальные методы

Как правило, задается желаемая частотная характеристика метода – $H^*(\omega)$ или АЧХ - $D(\omega)$.

В качестве критерия используется p-норма e – ошибки, т.е. разности желаемой характеристики и соответствующей характеристики синтезируемого фильтра:

$$\|e\|_p = \int_0^{\omega_Д} w(\omega)\left|H^*(\omega)-H(\omega)\right|^p d\omega \Rightarrow \min \qquad (6.1)$$

$H(\omega)$ - частотная характеристика синтезируемого фильтра, $w(\omega)$ - весовая функция, p=2 или ∞.

Проектирование (синтез) дискретных фильтров

Оптимальные методы

При p=2 (решение в смысле МНК) задача (6.1) сводится к системе линейных уравнений. При единичной весовой функции коэффициенты фильтра будут равны коэффициентам разложения $H^*(\omega)$ в ряд Фурье, что приводит к возникновению эффекта Гиббса. Для снижения влияния этого эффекта применяются специальные приемы.

В общем случае оптимизация осуществляется итерационными методами.

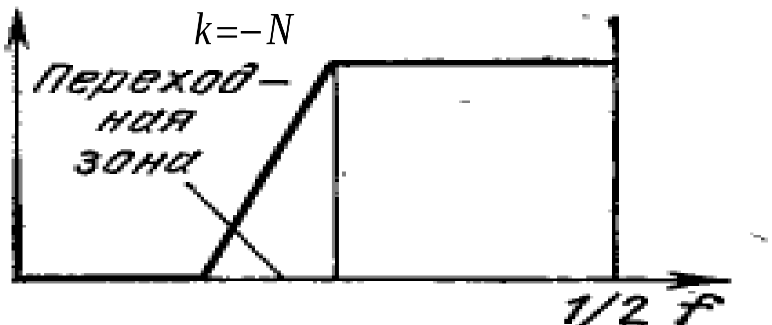
При $p=\infty$ минимизируется максимальное отклонение (минимаксная аппроксимация).

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

ФНЧ может представлен типовым сглаживающим фильтром с переходной зоной между полосами пропускания и подавления:

$$y_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k x_{n-k}, \quad (c_k = c_{-k}) \qquad (6.2)$$

Низкочастотный фильтр



Высокочастотный фильтр

При интерполировании полагаем в (6.2) $c_0 = 0$.

ФВЧ может быть получен как разность x_n - ФНЧ.

Дифференцирующий фильтр можно представить в виде аналогичном (6.2) с тем отличием, что $c_k = -c_{-k}, c_0 = 0$.

Интегрирование с помощью нерекурсивных фильтров осуществить невозможно.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Как известно, любую функцию можно представить как сумму четной и нечетной функций.

Так же и любой нерекурсивный фильтр можно представить как сумму четного (сглаживающего) и нечетного (дифференцирующего) фильтров:

$$c_k = \frac{c_k + c_{-k}}{2} + \frac{c_k - c_{-k}}{2} \qquad (6.3)$$

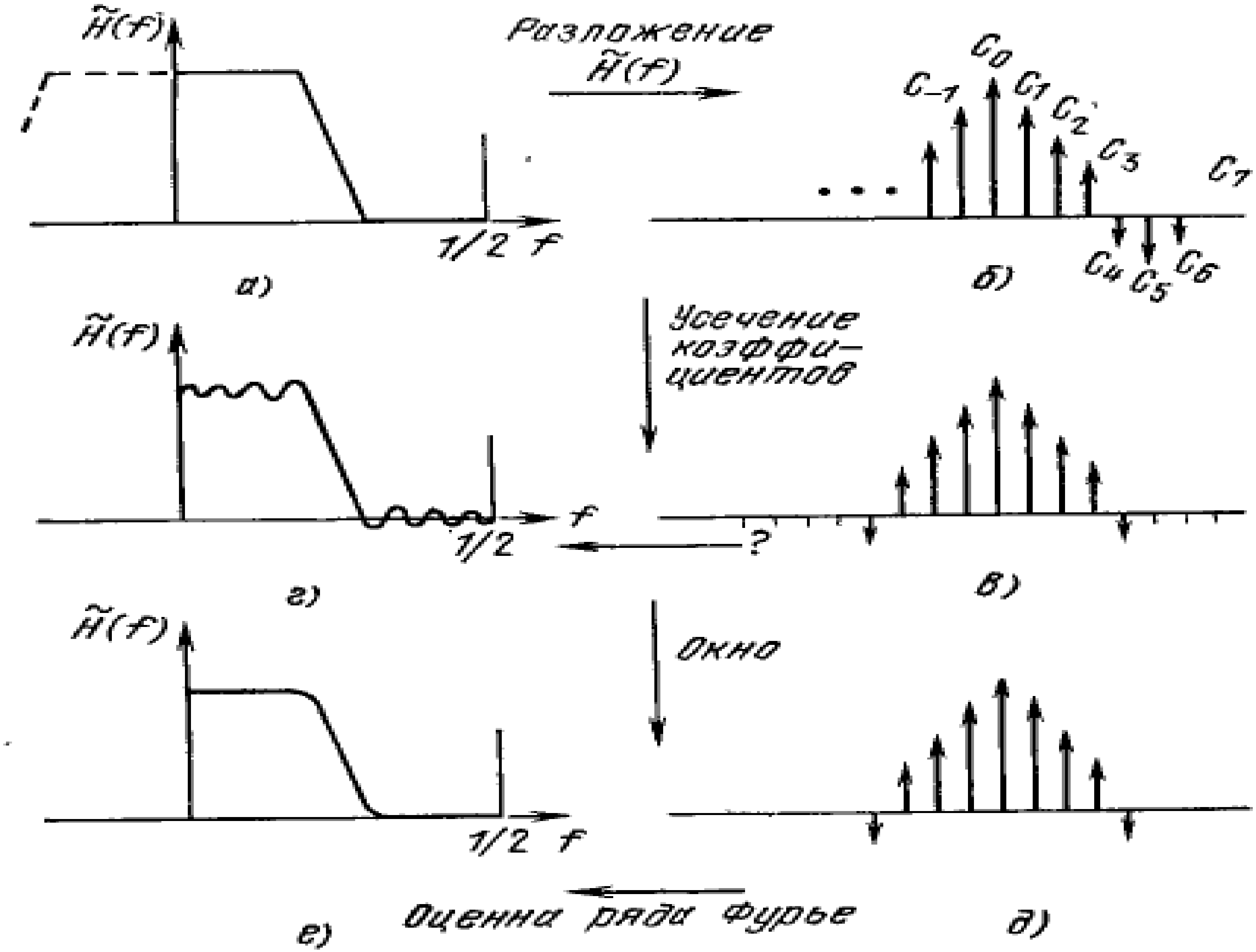
Здесь первое и второе слагаемое можно трактовать, например, как косинусные и синусные коэффициенты разложения функции в ряд Фурье.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Синтез с использованием окон (весовых функций).

1. Выбираем $\tilde{H}(f)$ - желаемую частотную функцию фильтра (симметричную).
2. Находим коэффициенты косинусного разложения $\tilde{H}(f)$ в ряд Фурье .
3. Формируем усеченный ряд Фурье для $\tilde{H}(f)$, оставляя в нем только $2N$+1 слагаемых, расположенных симметрично относительно слагаемого с нулевым номером, что порождает явление Гиббса.
4. Используя окно Ланцоша, умножаем коэффициенты усеченного ряда Фурье на сигма-факторы.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров



Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Рассмотрим конкретный пример.

Выберем идеальную передаточную функцию:

$$\tilde{H}(f)=\begin{cases}1, & 0<\left|f\right|<0.2\\ 0, & 0.2\left|f\right|<0.5\end{cases}$$

Коэффициенты ряда Фурье: $b_k=0$,

$$a_k=4\int_0^{0.5}\tilde{H}(f)\cos 2\pi kf df=4\int_0^{0.2}\cos 2\pi kf df=\frac{2\sin(0.4\pi k)}{\pi k}$$

Соответствующий ряд Фурье для идеальной передаточной функции:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_1^{\infty}\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

После усечения ряда до 5-ти (N=4) слагаемых получаем:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

и явление Гиббса.

Сигма-факторы для случая N=4: $\sigma(5,k)=\dfrac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}$

В результате получаем модифицированную передаточную функцию в виде:

$$\tilde{H}(f)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}\cdot\frac{\sin 0.4\pi kf}{\pi k}\cos 2\pi kf$$

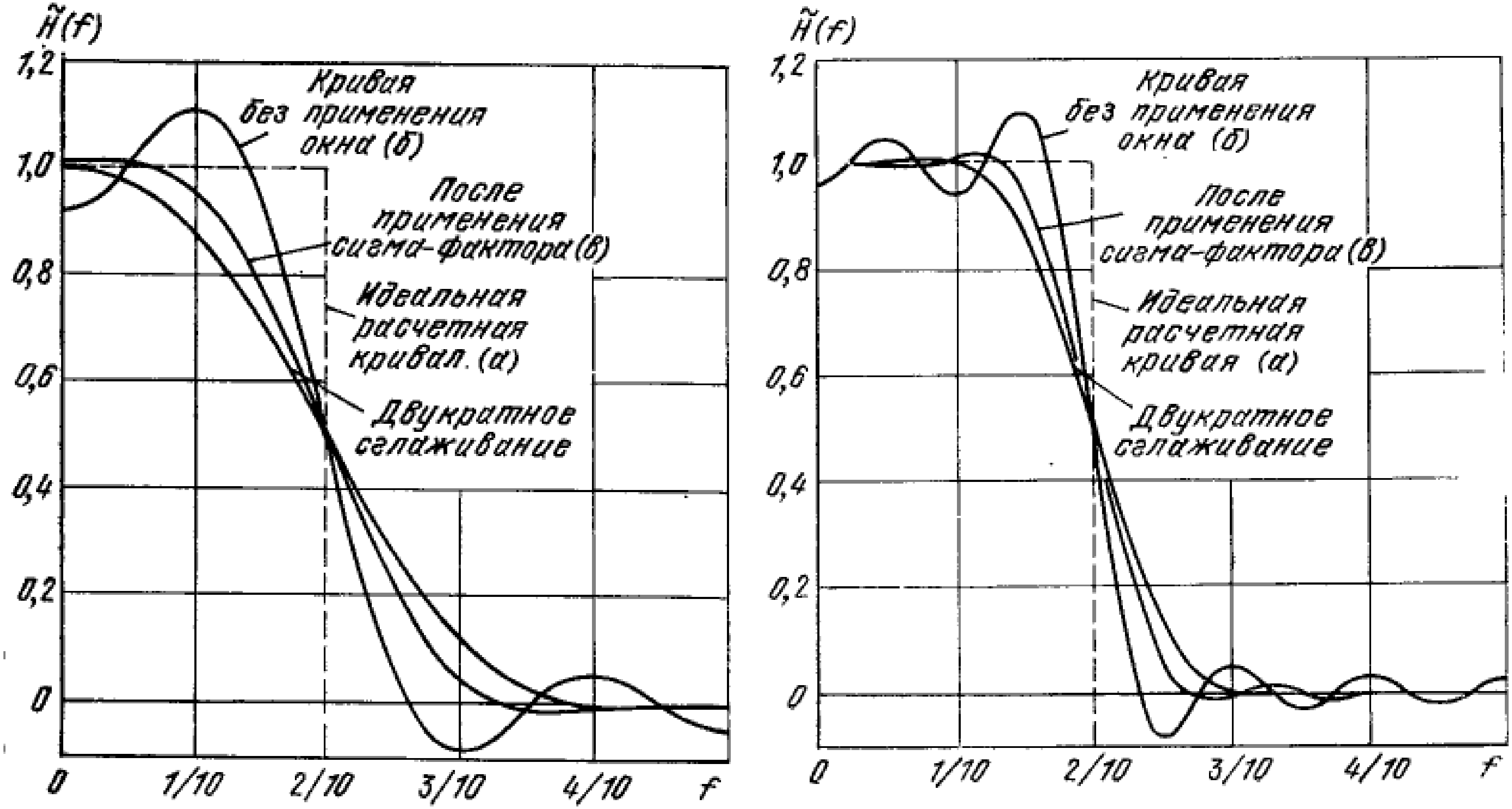
или

$$H(\omega)=\frac{4}{10}+2\sum_{1}^{4}\frac{\sin 0.2\pi k}{0.2\pi k}\cdot\frac{\sin 0.2k\omega}{\pi k}\cos k\omega \qquad (6.4)$$

Коэффициенты (кроме c_0 -постоянного члена) дискретного симметричного фильтра (6.2) будут в два раза меньше чем в косинусном разложении.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Визуализация результата использования окна Ланцоша



N=4 N=9

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Для снижения уровня боковых лепестков могут быть использованы и другие весовые функции.

Тип окна	Уровень боковых лепестков, дБ
Прямоугольное	–21,0
Треугольное	–26,5
Бартлетта	–26,5
Ханна	–44,0
Хэмминга	–53,6
Блэкмена	–75,3
Кайзера при $\beta = 4$	–45,2
Кайзера при $\beta = 9$	–90,5
Чебышева при $\beta = 40$ дБ	–51,0
Чебышева при $\beta = 60$ дБ	–71,6
Чебышева при $\beta = 80$ дБ	–92,4

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Основной целью операции взвешивания является уменьшение уровня боковых лепестков частотной характеристики.

Вместе с тем увеличивается ширина полосы пропускания.

Поэтому выбор весовой функции должен учитывать это обстоятельство.

Еще одним важным обстоятельством при взвешивании является задача получения модифицированной частотной характеристики, которая была непрерывной вместе со своими производными (хотя бы первой) в полосе пропускания.

В последнем случае скорость убывания АЧХ частотной характеристики возрастает, что должно способствовать снижению влияния отрицательных эффектов вызываемых усечением рядов.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Фильтр с косинусоидальным сглаживанием.

Главной целью этого подхода является получение синтезируемой АЧХ не имеющей разрывов.

АЧХ фильтра представляет собой в аналоговом случае свертку АЧХ идеального прямоугольного окна с весовой функцией в виде половины периода косинуса:

$$W(\omega)=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{2\alpha\omega_0}\cos\left(\dfrac{\pi\omega}{2\alpha\omega_0}\right), & |\omega|\le\alpha\omega_0\\ 0 & ,|\omega|>\alpha\omega_0\end{cases}. \qquad (6.5)$$

α - параметр сглаживания. Он равен половине ширины переходной зоны, нормированной к частоте среза ω_0 .

В результате такой свертки АЧХ фильтра и ее первая производная будут непрерывны, а импульсная характеристика фильтра будет убывать пропорционально t^3 .

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Синтезируем дискретный фильтр с косинусоидальным сглаживанием. Пусть частота среза равна одной восьмой частоты дискретизации:

$$\omega_0 = \omega_Д / 8$$

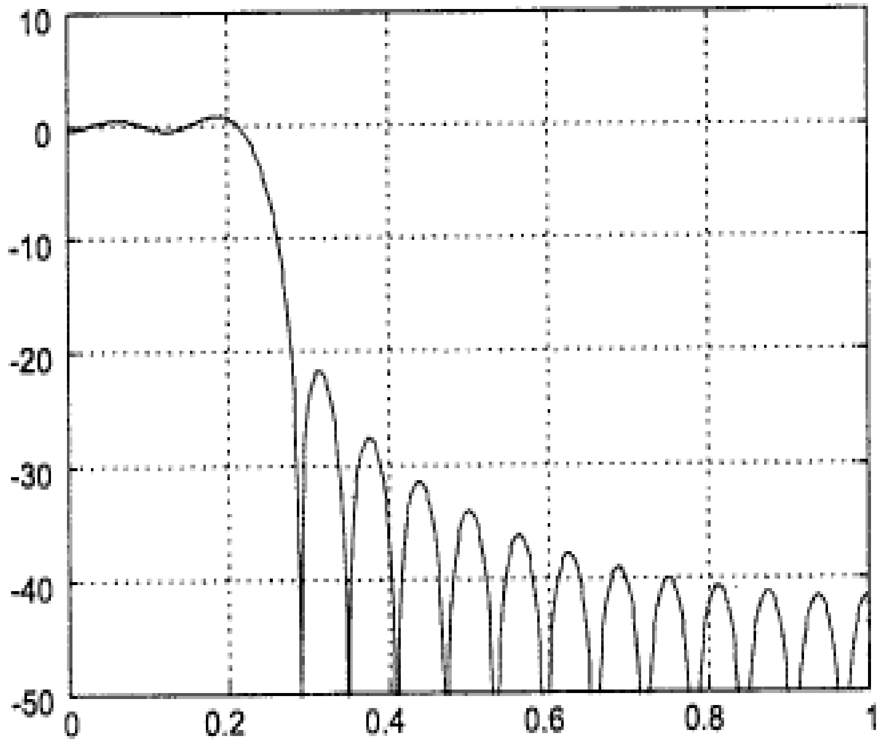
Узлы сетки:

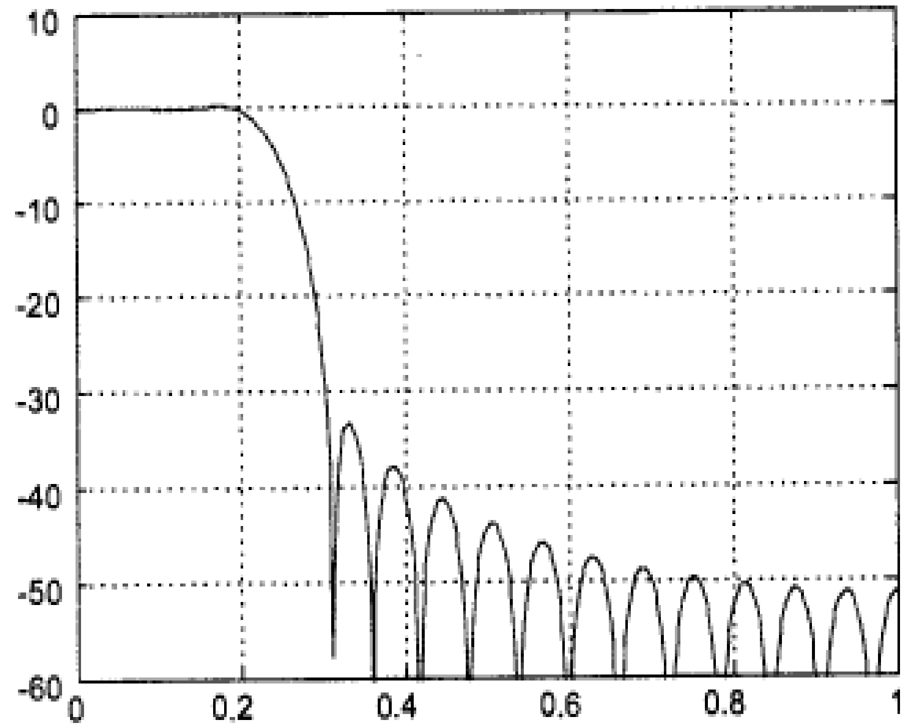
$$t_k = kT = \frac{2\pi}{\omega_Д} k = \frac{\pi k}{4\omega_0}$$

Импульсная характеристика фильтра запишется в виде:

$$h(k) = \frac{1}{4} \frac{\cos\left(\frac{\alpha\pi k}{4}\right)}{1-\left(\frac{\alpha k}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{4}\right)}{\frac{\pi k}{4}} \qquad (6.6)$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров





АЧХ: прямоугольного окна

Дискретного фильтра с косинусоидальным сглаживанием при $\alpha = 0.25$ и k от -16 до 16.

Наблюдается ослабление боковых лепестков при очень незначительном расширении полосы пропускания.

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Как известно, $\cos(n\theta)$ можно представить как полином степени n относительно $\cos(\theta)$. Ход рассуждений здесь следующий: $e^{in\theta} = [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = \left(e^{i\theta}\right)^n = [\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$

$\cos(n\theta)$ равен вещественной части $[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]^n$.

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{n} C(n,2k)[\cos(\theta)]^{n-2k}[i\sin(\theta)]^{2k}$$

Здесь суммирование прекращается как только n-$2k$ станет меньше нуля. $[\sin(\theta)]^{2k} = [\sin^2(\theta)]^k = [1-\cos^2(\theta)]^k$

Отсюда следует, что выражение для передаточной функции

$$\tilde{H}(f) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} c_k \cos(2\pi kf) \qquad (6.7)$$

может быть представлено как полином по степеням $\cos(2\pi f)$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k\left[\cos(2\pi f)\right]^k$$

Сделаем замену переменной: $t=\cos(2\pi f)$

$$0\le f<0.5 \Rightarrow 1\ge t=\cos(2\pi f)>-1$$

$$\tilde{H}(f)=\sum_{k=0}^{N} b_k t^k \qquad (6.8)$$

Передаточная функция теперь представлена в виде разложения по степеням $t=\cos(2\pi f)$. Переход к степеням t приводит к нелинейному растяжению и реверсированию оси частот (абсцисс).

Дальнейший ход рассуждений следующий:

1.Зададим функцию:

$$g(t)=(1+t)^p(1-t)^q\ ; \qquad (6.9)$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

2.Найдем неопределенный интеграл $\int g(t)dt = G(t) + C$;

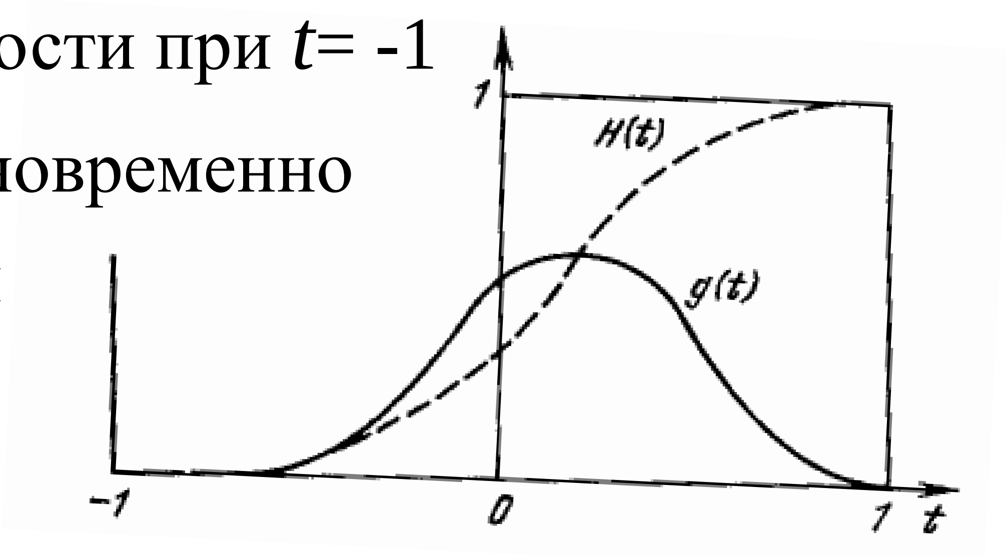
3.Константу C^* определим из условия: $G(-1) + C^* = 0$;

4.Вычислим значение $\lambda = G(1) + C^*$;

5.Определим функцию:

$$H(t) = \frac{1}{\lambda}\left(G(t) + C^*\right)$$

$H(t)$ имеет корень p+1 кратности при t= -1 и равна единице при t=1 одновременно с q производными, равными нулю.



Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

6. Функцию $H(t)$ считаем передаточной функцией синтезируемого фильтра, преобразованной в полином (6.8) по степеням t :

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^{N} b_k t^k$$

Производим обратную замену переменной и записываем эту функцию в виде:

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^{N} b_k \left[\cos(2\pi f)\right]^k \qquad (6.9)$$

7. Завершая синтез фильтра, преобразовываем (6.9) к стандартному виду передаточной функции:

$$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^{N} c_k \cos(2\pi k f) \qquad (6.10)$$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Преобразование (6.9) в (6.10) может осуществляться по следующей рекуррентной схеме.

Пусть дан степенной ряд вида: $\sum_{k=0}^{N} b_k [\cos\theta]^k$

Запишем его в цепной форме

$$b_0 + \{\cos\theta(b_1 + \cos\theta)(... + \cos\theta[b_{N-2} + \cos\theta(b_{N-1} + b_N \cos\theta)]\}$$

Сначала берем последние два слагаемых $b_{N-1} + b_N \cos\theta$. Они уже представлены в форме ряда Фурье.

Умножаем эту сумму на $\cos\theta$ и прибавляем к этому произведению b_{N-2}. Результат преобразовываем к форме в виде ряда Фурье используя формулу:

$$\cos\theta \cos n\theta = 0.5\left(\cos[(n+1)\theta] + \cos[(n-1)\theta]\right)$$

Продолжая этот процесс, получим в конечном итоге эквивалентный исходному ряду ряд Фурье, коэффициенты которого c_k будут коэффициентами искомого дискретного фильтра

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

Рассмотрим пример расчета гладкого фильтра.

Требуется рассчитать ФНЧ, пропускающий частоты в первой трети интервала Найквиста (от 0 до $\pi/3$) и подавляет частоты в верхней трети. $\cos(\pi/3)=0.5$ поэтому выбираем p=3 и q=1 так, чтобы (p-q)/(p+q)=0.5.

Далее действуем по рассмотренной схеме.

1. $g(t)=(1+t)^3(1-t)=1+2t-2t^3-t^4$
2. $\int g(t)dt=\int(1+2t-2t^3-t^4)dt=(t+t^2-0.5t^4-0.2t^5)+C=G(t)+C$
3. $G(-1)+C^*=0\Rightarrow C^*=0.3$
4. $\lambda=G(1)+C*=1.6$
5. $H(t)=(3+10t+10t^2-5t^4-2t^5)/16$

Субоптимальные методы синтеза нерекурсивных фильтров

Гладкие фильтры.

6. $$\tilde{H}(f) = \sum_{k=0}^{N} b_k \left[\cos(2\pi f)\right]^k =$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{10}{16}\cos(2\pi f) + \frac{10}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^2 - \frac{5}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^4 - \frac{2}{16}\left[\cos(2\pi f)\right]^5 \qquad (6.11)$$

7. Преобразование (6.11) к стандартному виду позволяет получить следующие коэффициенты дискретного фильтра

$$\frac{1}{16}\left[-1,-5,-5,20,70,98,70,20,-5,-5,-1\right]$$

и монотонный фильтр, график передаточной функции которого изображен на рисунке.