

Цифровая обработка сигналов

Лекция №2

Санкт-Петербург
2021

Частотный анализ полиномиальных приближений

Входной сигнал: $s(t)$

Выходной сигнал: $y(t) = A + Bt$

Приближение (в смысле МНК) прямой линией по пяти точкам:

$$F(A, B) = \sum_{k=-2}^k (s_k - y_k)^2 = \sum_{k=-2}^k (s_k - A - Bk)^2 \Rightarrow \min \quad (2.1)$$

Система нормальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 5A + 0B = \sum_{k=-2}^{k=2} s_k \\ 0A + 10B = \sum_{k=-2}^{k=2} ks_k \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В итоге получаем:

$$y_0 = A = \frac{1}{5} \sum_{k=-2}^{k=2} s_k = \frac{1}{5} (s_{-2} + s_{-1} + s_0 + s_1 + s_2) \quad (2.3)$$

В общем случае:

$$y_n = \frac{1}{5} \sum_{k=n-2}^{k=n+2} s_k = \frac{1}{5} (s_{n-2} + s_{n-1} + s_n + s_{n+1} + s_{n+2}) \quad (2.4)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$y_n = \frac{1}{5} (e^{-2i\omega} + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega}) e^{i\omega n} = H(\omega) e^{i\omega n} \quad (2.5)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{5} (e^{-2i\omega} + e^{-i\omega} + 1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega}) \quad (2.6)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

$$H(\omega) = 0.2[1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega)] \quad (2.7)$$

Поскольку передаточная функция в форме (2.6) есть геометрическая прогрессия со знаменателем $e^{i\omega}$, ее можно представить как сумму этой прогрессии:

$$H(\omega) = \frac{e^{i\frac{5\omega}{2}} - e^{-i\frac{5\omega}{2}}}{5\left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{5\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.8)$$

$H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π . Обычно рассматривается интервал $(-\pi, \pi)$ для ω или $(-0.5, 0.5)$ для f .

$$H(\omega) = H(2\pi f) = \tilde{H}(f) \quad (2.9)$$

$$\tilde{H}(f) = 1, \text{ для } f = 0 ; \quad \tilde{H}(f) = 0, \text{ для } f = 0.2 \text{ и } f = 0.4$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

В общем случае при приближении по $2m+1$ точкам

$$H(\omega) = \frac{1}{2m+1} [1 + 2\cos(\omega) + 2\cos(2\omega) + \dots + 2\cos(m\omega)] \quad (2.10)$$

или

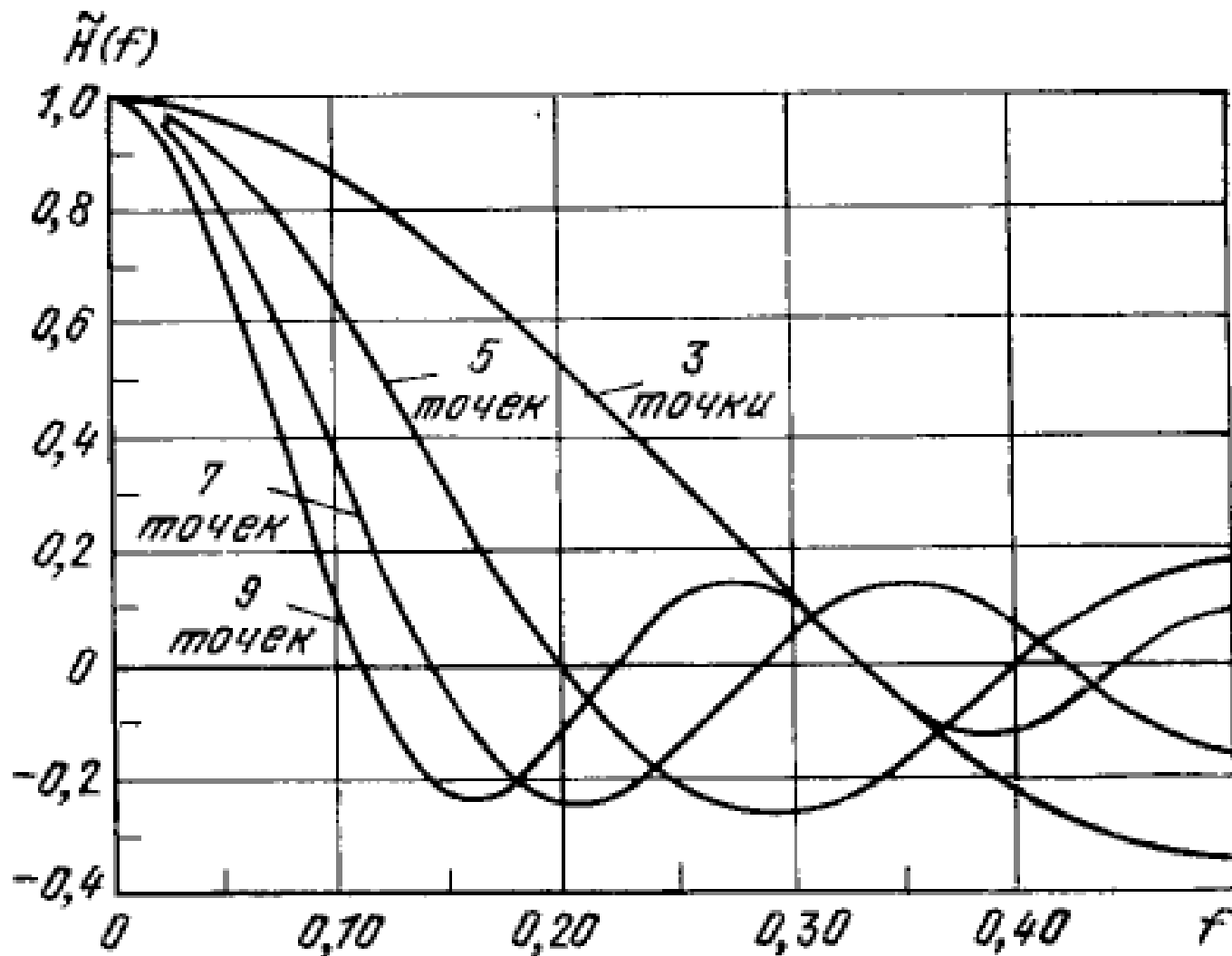
$$H(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\omega}{2}\right)}{(2m+1)\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.11)$$

Во всех случаях $H(\omega)$ - периодическая функция с периодом, равным 2π . Кроме того,

$$\text{если } s(t) = \sum_{m=1}^M c_m e^{i\omega_m t}, \text{ то } y(t) = \sum_{m=1}^M c_m H(\omega_m) e^{i\omega_m t} \quad (2.12)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании прямой линией по 3, 5, 7 и 9 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание полиномом второй степени:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2$$

При сглаживании по пяти точкам:

$$y_n = \frac{1}{35}(-3s_{n-2} + 12s_{n-1} + 17s_n + 12s_{n+1} - 3s_{n+2}) \quad (2.13)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{35}[17 + 24\cos(\omega) - 6\cos(2\omega)] \quad (2.14)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание полиномом второй степени:
по семи, девяти и одиннадцати точкам:

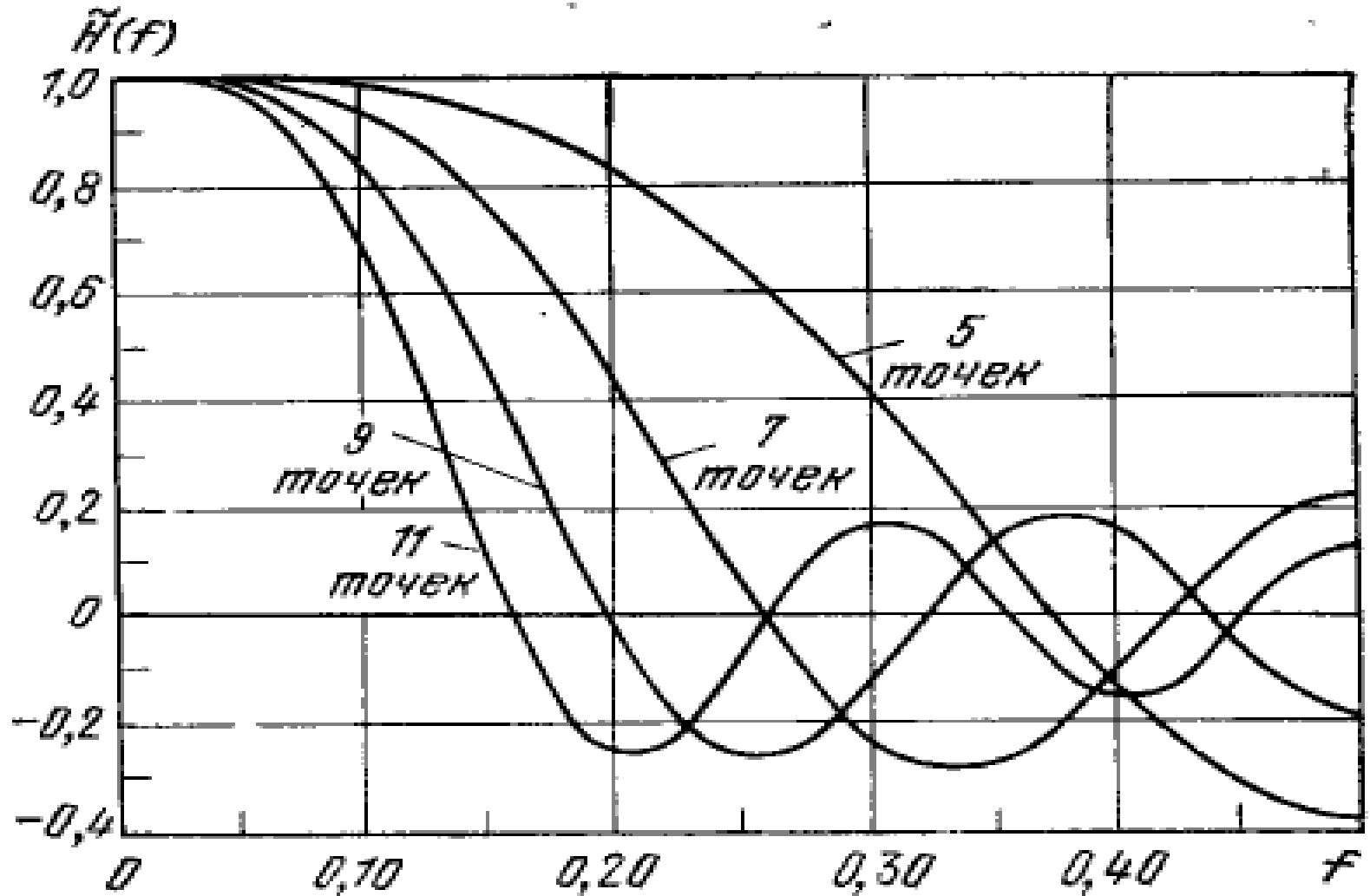
$$y_n = \frac{1}{21}(-2s_{n-3} + 3s_{n-2} + 6s_{n-1} + 7s_n + 6s_{n+1} + 3s_{n+2} - 2s_{n+3}) \quad (2.15)$$

$$y_n = \frac{1}{231}(-21s_{n-4} + 14s_{n-3} + 39s_{n-2} + 54s_{n-1} + 59s_n + 54s_{n+1} + \\ + 39s_{n+2} + 14s_{n+3} - 21s_{n+4}) \quad (2.16)$$

$$y_n = \frac{1}{429}(-36s_{n-5} + 9s_{n-4} + 44s_{n-3} + 69s_{n-2} + 84s_{n-1} + 89s_n + \\ + 84s_{n+1} + 69s_{n+2} + 44s_{n+3} + 9s_{n+4} - 36s_{n+5}) \quad (2.17)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

График передаточной функции при сглаживании полиномом второй степени по 5, 7, 9 и 11 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание полиномом четвертой степени:

$$y(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4$$

При сглаживании по семи точкам:

$$y_n = \frac{1}{231} (5s_{n-3} - 30s_{n-2} + 75s_{n-1} + 131s_n + 75s_{n+1} - 30s_{n+2} + 5s_{n+3}) \quad (2.18)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{231} [131 + 150 \cos(\omega) - 60 \cos(2\omega) + 10 \cos(3\omega)] \quad (2.19)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание полиномом четвертой степени:
При сглаживании по 9-ти, 11-ти и 13-ти точкам:

$$y_n = \frac{1}{429} (15s_{n-4} - 55s_{n-3} + 30s_{n-2} + 135s_{n-1} + 179s_n + 135s_{n+1} + 30s_{n+2} - 55s_{n+3} + 15s_{n+4}) \quad (2.20)$$

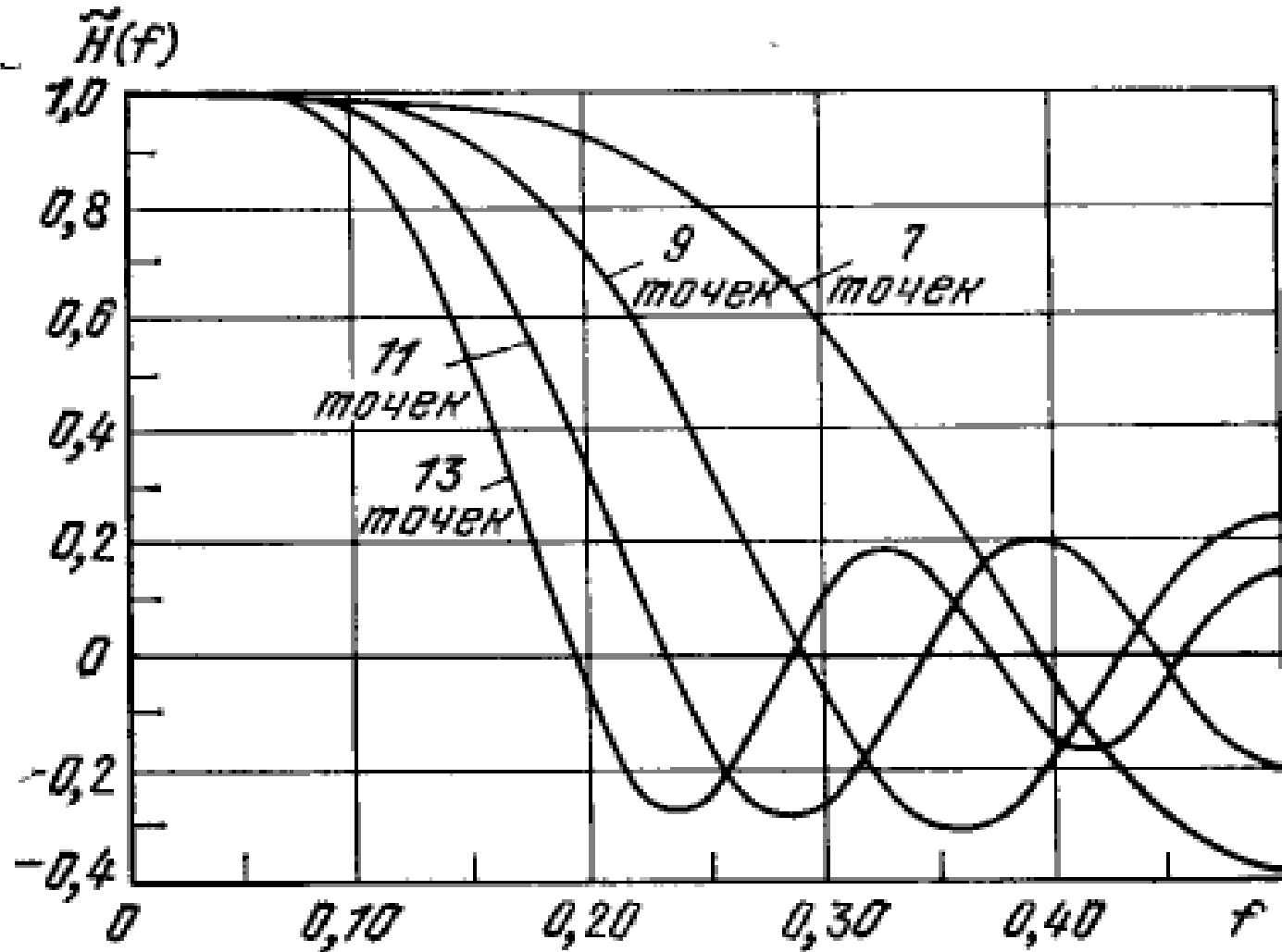
$$y_n = \frac{1}{429} (18s_{n-5} - 45s_{n-4} - 10s_{n-3} + 60s_{n-2} + 120s_{n-1} + 143s_n + 120s_{n+1} + 60s_{n+2} - 10s_{n+3} - 45s_{n+4} + 18s_{n+5}) \quad (2.21)$$

$$y_n = \frac{1}{2431} (110s_{n-6} - 198s_{n-5} - 135s_{n-4} + 110s_{n-3} + 390s_{n-2} + 600s_{n-1} + 677s_n + 600s_{n+1} + 390s_{n+2} + 110s_{n+3} - 135s_{n+4} - 198s_{n+5} + 110s_{n+6}) \quad (2.22)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

12

График передаточной функции при сглаживании полиномом 4-й степени по 7, 9, 11 и 13 точкам



Частотный анализ полиномиальных приближений

Сглаживание с помощью **формул Спенсера** для 15-ти 21-ой точек:

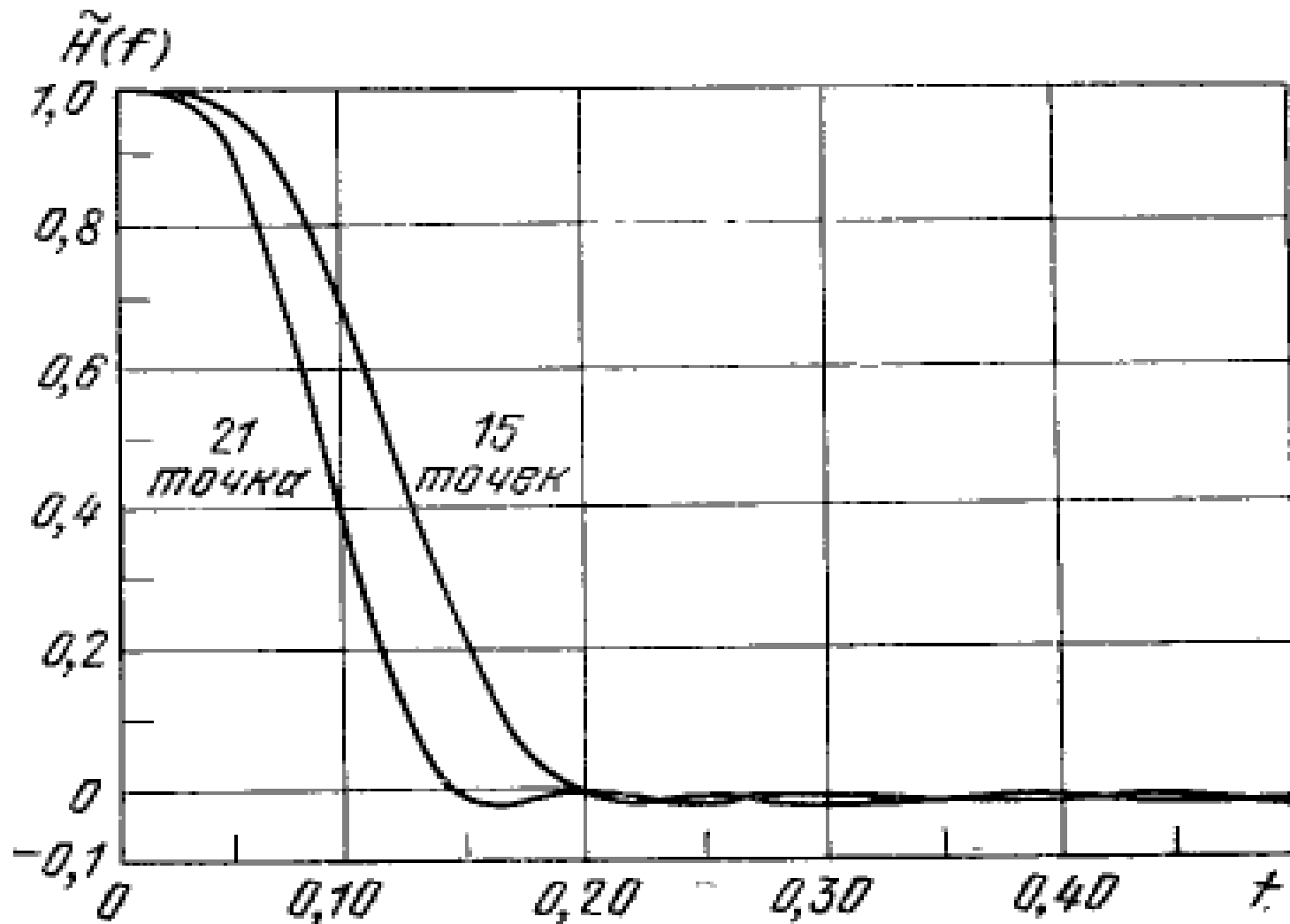
$$y_n = \frac{1}{320} (-3s_{n-7} - 6s_{n-6} - 5s_{n-5} + 3s_{n-4} + 21s_{n-3} + 46s_{n-2} + \\ + 67s_{n-1} + 74s_n + 67s_{n+1} + 46s_{n+2}....) \quad (2.23)$$

$$y_n = \frac{1}{350} (-s_{n-10} - 3s_{n-9} - 5s_{n-8} - 5s_{n-7} - 2s_{n-6} + 6s_{n-5} + 18s_{n-4} + 33s_{n-3} + \\ + 47s_{n-2} + 57s_{n-1} + 60s_n + 57s_{n+1}...) \quad (2.24)$$

Частотный анализ полиномиальных приближений

14

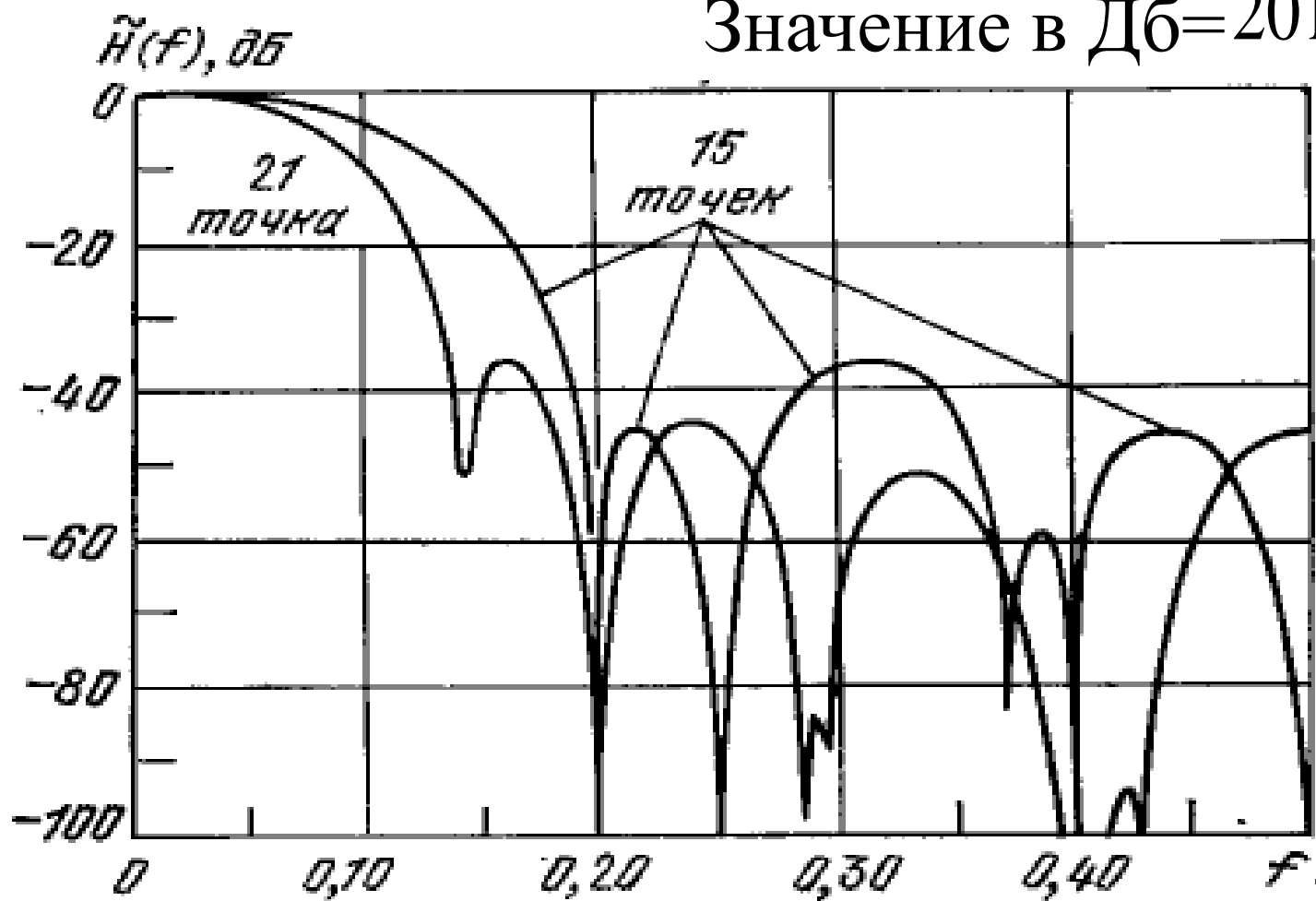
График передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера для 13-ти и 21-ой точек:



Частотный анализ полиномиальных приближений

15

График передаточной функции при сглаживании по формулам Спенсера для 13-ти и 21-ой точек в логарифмической шкале (Дб).



Численное интегрирование

Формула трапеций: $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(s_n + s_{n+1}), y_0 = 0.$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$ и $y_n = H(\omega)e^{i\omega n}$.

В результате:
$$H(\omega) = \frac{(e^{i\omega} + 1)}{2(e^{i\omega} - 1)} = \frac{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}{2i \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.25)$$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\gamma = \frac{\text{Вычисленное}}{\text{Точное}} = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} = 1 - \frac{\omega^2}{12} + \frac{\omega^4}{720} + \dots \quad (2.26)$$

Численное интегрирование

Формула Симпсона:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{1}{3}(s_{n-1} + 4s_n + s_{n+1}), \quad y_0 = 0. \quad (2.27)$$

Пусть $s_n = e^{i\omega n}$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{\text{Вычисленное}}{\text{Точное}} = \frac{2 + \cos(\omega)}{3} \cdot \frac{\omega}{\sin \omega} = 1 + \frac{\omega^4}{180} + \dots \quad (2.28)$$

Численное интегрирование

Формула прямоугольников:

$$y_{n+1} = y_n + s_{n+\frac{1}{2}}, \quad y_0 = 0. \quad (2.29)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

Точное значение интеграла от $e^{i\omega t}$ равно $\frac{e^{i\omega t}}{i\omega}$

Отношение значений:

$$\frac{\text{Вычисленное}}{\text{Точное}} = \frac{\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.30)$$

Численное интегрирование

График изменения значения γ для формул численного интегрирования:

