

Цифровая обработка сигналов

Лекция №7

Санкт-Петербург
2021

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Рекурсивный фильтр может быть задан в виде:

$$y_n = \sum_{k=0}^N b_k x_{n-k} - \sum_{k=1}^M a_k y_{n-k} \quad (7.1)$$

где хотя бы один из коэффициентов a_k не равен нулю.
Основное отличие рекурсивного от нерекурсивного фильтра заключается в наличии «обратной связи» (использование при вычислениях предыдущих выходных отсчетов), создающей у рекурсивного фильтра неограниченную память - способность давать отклик от одиночного импульса произвольно долго в будущем. Поэтому их называют фильтрами с «бесконечной импульсной характеристикой» (**БИХ-фильтры**). Нерекурсивные фильтры с «конечной импульсной характеристикой» имеют наименование **КИХ-фильтры**.

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Другим важным свойством рекурсивных фильтров является то, что переходная зона между областью пропускания и областью подавления частот у него может быть достаточно узкой.

Это объясняется видом передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}$$

При приближении знаменателя к нулю, дробно-рациональная функция может быстро изменяться - резко возрастет.

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

Можно назвать следующие методы синтеза рекурсивных фильтров (частично упоминались в предыдущей лекции).

1. По аналоговому прототипу:

- метод билинейного Z -преобразования;
- метод инвариантной импульсной характеристики.

2. Прямые методы синтеза:

- оптимальные методы;
- субоптимальные методы.

В качестве субоптимальных методов можно назвать, например, методы реализованные в пакете Matlab:

- метод, основанный на решении системы уравнений Юла—Уолкера для поиска коэффициентов знаменателя функции передачи фильтра;

Синтез дискретных рекурсивных фильтров

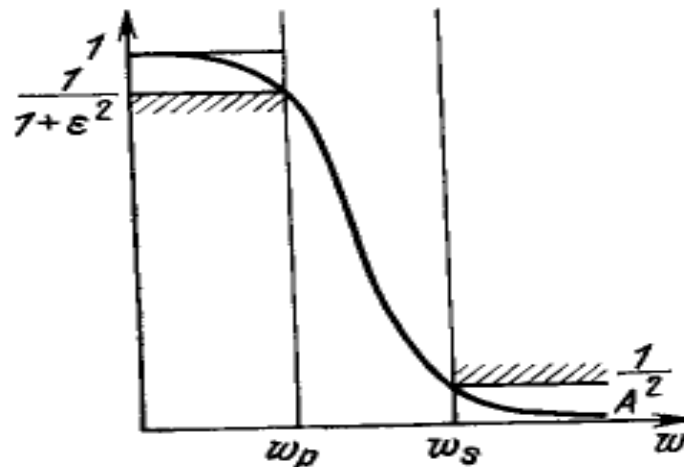
- **метод** идентификации частотной характеристики, в котором минимизируется норма разности между числителем функции передачи и произведением желаемой частотной характеристики и знаменателя функции передачи фильтра;
- **метод** аппроксимация заданной импульсной характеристики с помощью метода экспоненциального оценивания Прони (алгоритм был разработан Гаспаром Рише (бароном де Прони) в 1795 г. для подгонки экспоненциальной модели под экспериментальные данные при исследовании физических свойств газов);

Рекурсивные фильтры

К наиболее известным рекурсивным фильтрам могут быть отнесены

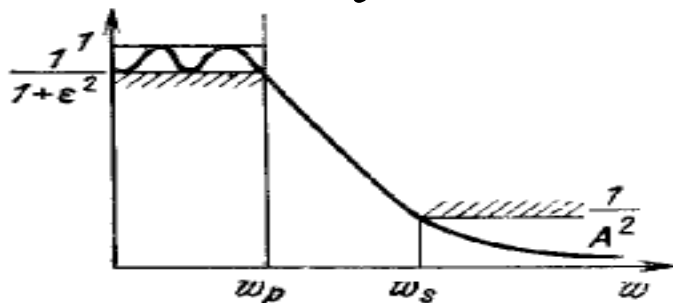
- фильтры Баттеруорта;
- фильтры Чебышева типа 1 и типа 2;
- эллиптические фильтры.

Фильтры Баттеруорта могут быть отнесены к гладким фильтрам. Частотная характеристика фильтра не имеет пульсаций, ни в полосе пропускания, ни в полосе подавления.

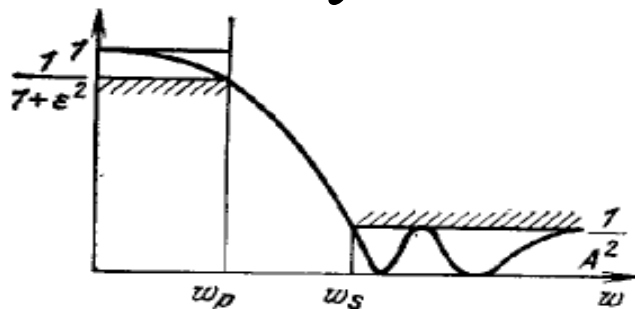


Рекурсивные фильтры

Фильтры Чебышева типа 1 допускают пульсации в полосе пропускания.



Фильтры Чебышева типа 2 допускают пульсации в полосе подавления.



Эллиптические фильтры имеют пульсации, как в полосе пропускания, так и в полосе подавления. Вместе с тем эллиптические фильтры могут иметь максимальную крутизну спада АЧХ между полосами пропускания и подавления.

Рекурсивные фильтры

Устранение фазовых сдвигов при фильтрации.

Использование фильтров Баттеруорта, как и большинства других рекурсивных фильтров, приводит в результате фильтрации к фазовому сдвигу между входным и выходным сигналом, неодинаковому, в общем случае, для разных частот. Это объясняется их несимметричностью. Если имеется возможность обрабатывать входной сигнал, как в прямом, так и в обратном порядке следования, то для устранения подобного рода фазового сдвига можно использовать следующую последовательность действий:

Сначала производится фильтрацию входного сигнала в прямом порядке следования его отсчетов.

Затем производится фильтрация полученного результата в обратном порядке следования его отсчетов.

Нужно иметь в виду, что при этом модуль передаточной функции фильтра будет возводиться в квадрат.

Рекурсивные фильтры

Переходный процесс.

Использование рекурсивных фильтров требует, кроме входных данных, задания некоторого количества начальных значений для выходных данных (начальных условий). Как правило, эти начальные значения не известны, и их часто назначают равными нулю, что приводит к переходному процессу. Чем быстрее этот процесс завершается, тем лучше (влияние начальных условий становится пренебрежимо малым).

В этой связи рекурсивные фильтры целесообразно использовать при наличии длинной записи для входного сигнала, что позволяет избавиться в какой-то момент от влияния на результат недостоверных начальных условий.

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

1. Рекурсивные фильтры сравнительно небольшого порядка (небольшой длины) могут иметь узкую переходную зону между полосой пропускания и полосой подавления. Но при этом нужно не забывать о переходном процессе, зависящем от начальных условий. Переходный процесс можно уменьшить в ряде случаев за счет специальных приемов, включая умножение на специально подобранную весовую функцию. Тем не менее фактическая ширина (время действия) этого процесса может быть найдена опытным путем в результате задания на входе единичного импульса и анализа выходного сигнала.

Рекурсивные фильтры

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

2. Если иметь в виду также фазовые сдвиги, необходимость обеспечения устойчивости фильтра, рекурсивные фильтры применяются преимущественно при очень больших входных последовательностях, а нерекурсивные — в ситуациях, когда нет проблем с машинным временем.
3. Рекурсивные фильтры также вносят значительно меньшую задержку, что делает их более предпочтительными при обработке сигналов в реальном масштабе времени. Например, в системах связи.

Рекурсивные фильтры

Сравнительный анализ практической значимости рекурсивных и нерекурсивных фильтров.

4. Рекурсивные фильтры безусловно доказывают свое преимущество лишь в обеспечении узких переходных зон.
5. Оба типа фильтров достаточно хорошо настраиваемы для различных условий и всегда можно подобрать такие особые условия, в которых каждый из них проявит себя наилучшим образом.

Эффекты квантования

Преобразование дискретных сигналов в цифровые означает переход от обработки сигналов бесконечной разрядности к обработке сигналов конечной разрядности. Эффекты, связанные с этим переходом, можно квалифицировать следующим образом:

1. Шум квантования, возникающий при аналого-цифровом преобразовании;
2. Искажение характеристик, происходящие при квантовании коэффициентов цифровых фильтров;
3. Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений;
4. Округление промежуточных результатов вычислений.

Эффекты квантования

1. Шум квантования.

Пусть гармонический сигнал $S(t)$ - гармонический сигнал, а $s_k(t)$ - результат его квантования.

В результате квантования возникает шум квантования:

$$\mu(t) = s(t) - s_k(t)$$

Значения шума квантования лежат в следующих пределах:

$$-\frac{\Delta}{2} \leq \mu(t) \leq \frac{\Delta}{2}$$

где Δ — разность между ближайшими возможными значениями квантованного сигнала.

Здесь предполагается равномерное квантование.

Эффекты квантования (шум квантования)

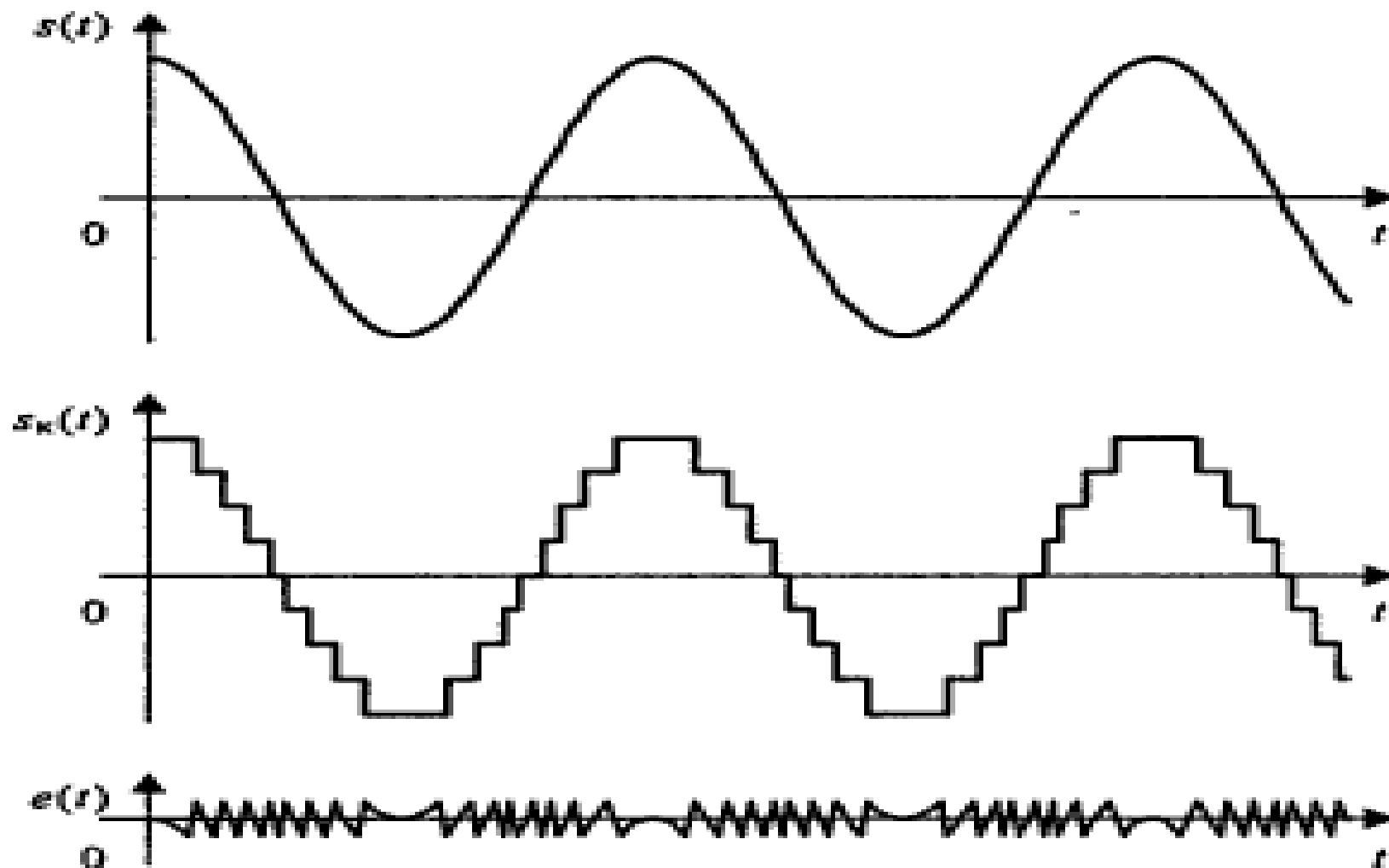
Как правило, $\mu(t)$ можно считать случайным процессом, имеющим равномерное распределение вероятности в указанных пределах. Такой случайный процесс имеет нулевое среднее значение и дисперсию $\Delta^2 / 12$.

Шум квантования для дискретной последовательности представляет собой последовательность чисел, образующая дискретный случайный процесс. Отсчеты этой последовательности можно считать некоррелированными друг с другом.

При квантовании производится не только округление значений уровня сигнала. На практике вместо этого может использоваться усечение, то есть округление в сторону меньшего значения. Тогда шум квантования лежит в диапазоне от 0 до Δ , среднее значение равно $\Delta/2$, а дисперсия - $\Delta^2 / 12$.

Эффекты квантования (шум квантования)

Графическое отображение процесса квантования



Эффекты квантования

2.1. Квантование коэффициентов цифровых фильтров.

При практической реализации фильтров возникает необходимость округления их коэффициентов. Это связано с поддерживаемыми форматами представления чисел и со стремлением повысить быстродействие.

Округление коэффициентов приводит к искажению характеристики фильтра. Величина искажений зависит не только от погрешности округления, но и от исходных параметров фильтра и формы его построения.

В нерекурсивных фильтрах коэффициенты равны отсчетам импульсной характеристики и линейно связаны с комплексным коэффициентом передачи. Поэтому малые искажения коэффициентов приводят к малым искажениям частотных характеристик и проблемы, связанные с округлением коэффициентов, проявляются редко.

Эффекты квантования

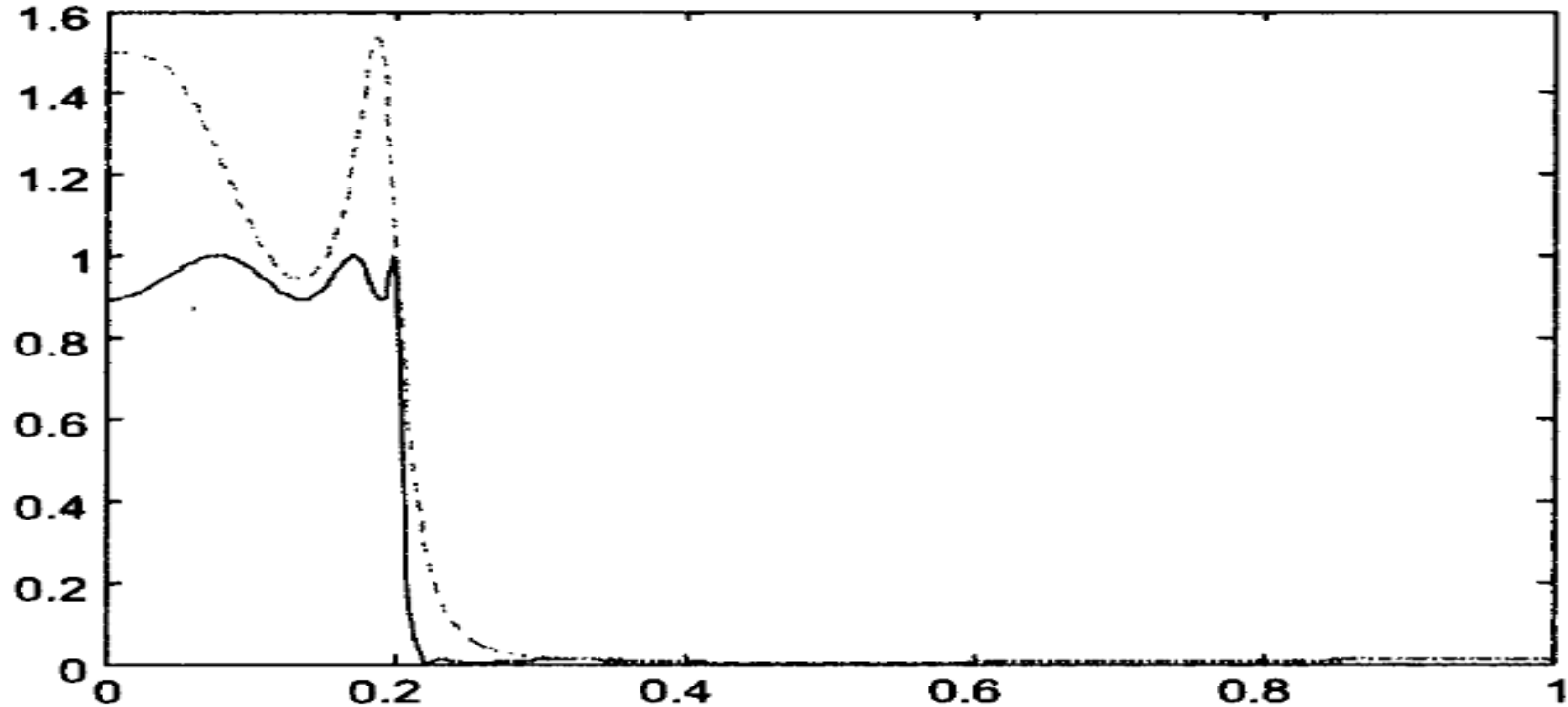
Квантование коэффициентов цифровых фильтров.

Заметные искажения частотных характеристик фильтра (**нерекурсивного**) могут иметь место, как правило, лишь в случае когда АЧХ фильтра имеет крутой спад между полосами пропускания и подавления.

У рекурсивных фильтров коэффициенты знаменателя функции передачи связаны с импульсной и частотными характеристиками нелинейно. В результате округление коэффициентов сказывается на характеристиках фильтра серьезнее. Как правило, наибольшие искажения здесь также происходят в тех случаях, когда АЧХ фильтра имеет резкие изменения в переходных зонах между полосами пропускания и подавления.

Эффекты квантования

Квантование коэффициентов цифровых фильтров.



АЧХ эллиптического фильтра до (сплошная линия) и после (пунктирная линия) квантования коэффициентов (демонстрационный пример).

Существуют различные методы устранения подобных искажений, с которыми можно ознакомиться в литературе.

2.2. Масштабирование коэффициентов цифровых фильтров.

Необходимость масштабирования коэффициентов фильтра может возникнуть при работе с числами в формате с фиксированной запятой. В этом случае может случиться, что значения некоторых коэффициентов не могут быть представлены в заданном диапазоне.

При масштабировании цифрового фильтра все его коэффициенты делятся на одну и ту же константу, и на нее же умножается рассчитанный выходной сигнал. В качестве масштабирующего множителя удобно выбирать степень двойки. Самые маленькие по модулю коэффициенты фильтра могут при этом терять значащие цифры, что приводит к ситуации предыдущего пункта 2.1.

Эффекты квантования

3. Переполнение разрядной сетки в процессе вычислений.

Переполнение может возникать чаще всего в процессе вычислений в промежуточных результатах вычислений. Проблема достаточно актуальная в практическом отношении. Если она имеет место (выяснилось, например, в процессе тестирования) то, либо фильтр корректируется, либо осуществляется переход к формату с плавающей запятой.

4. Округление промежуточных результатов вычислений.

Помимо ошибок, накапливающихся в процессе вычислений, в результате округления промежуточных результатов вычислений могут возникать, так называемые **предельные циклы**.

Эффекты квантования

Предельные циклы.

Рассмотрим очень простой рекурсивный фильтр:

$$y_n = x_n + 0.95y_{n-1}$$

Условие устойчивости фильтра выполнено (полюс функции передачи равен $0.95 < 1$)

Пусть $\forall n$ значение $x_n = 0$, а $y_0 = 13$. При целочисленном формате для выходных значений получим следующий процесс: $y(1) = [0.95 y(0)] = [0.95 \cdot 13] = [12.35] = 12$,

$$y(2) = [0.95 y(1)] = [0.95 \cdot 12] = [11.4] = 11,$$

$$y(3) = [0.95 y(2)] = [0.95 \cdot 11] = [10.45] = 10,$$

$$y(4) = [0.95 y(3)] = [0.95 \cdot 10] = [9.5] = 10,$$

$$y(5) = [0.95 y(4)] = [0.95 \cdot 10] = [9.5] = 10,$$

...

Видно, как на значении 10 процесс «зациклился».

Эффекты квантования

Предельные циклы.

Различают два типа предельных циклов:

- «зернистые» предельные циклы. Возникают, когда значения внутреннего состояния фильтра при отсутствии входного сигнала затухают, но из-за округления не доходят до нуля;
- «переполняющие» предельные циклы. Имеют место в том случае, когда значения внутреннего состояния фильтра при отсутствии входного сигнала не затухают, а возрастают, вызывая переполнение.

Для исследования возможности возникновения предельных циклов анализируются некоторые специальные характеристики фильтров.

Заключительные замечания

1. Перед синтезированием цифрового фильтра необходимо проанализировать свойства входной последовательности, что позволит аргументированно выбрать тип фильтра. желательную АЧХ фильтра, его порядок и способ его синтеза.
2. Синтезированный фильтр необходимо проверить (посредством проведения вычислительных экспериментов) на соответствие его фактических свойств предполагавшимся теоретически, а также практическим требованиям.
3. Рассмотренные нерекурсивные и рекурсивные фильтры, способы их синтеза предполагают стационарность входной последовательности.
4. Для нестационарных последовательностей необходимо синтезирование адаптивных фильтров, к числу которых относятся, например, фильтры Калмана.