Цифровая обработка сигналов

Лекция №3

Санкт-Петербург

2021

Разностный оператор

$$y_n = \Delta s_n = s_{n+1} - s_n \qquad (3.1)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$\Delta s_n = \Delta(e^{iwn}) = e^{i\omega(n+1)} - e^{i\omega n} = \left(e^{i\omega} - 1\right)e^{i\omega n}$$

$$e^{i\omega} - 1 = e^{i\frac{\omega}{2}}\left(e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{-i\frac{\omega}{2}}\right) = e^{i\frac{\omega}{2}}\left[\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) - \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

$$e^{i\omega} - 1 = ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right] \qquad (*)$$

$$\Delta(e^{iwn}) = e^{i\omega(n+1)} - e^{i\omega n} = ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]e^{i\omega n} \qquad (3.2)$$

Разностный оператор

$$\Delta^2(s_n) = \Delta(\Delta s_n) = s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} \qquad (3.3)$$

$$s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1} = \left(e^{i\omega(n+1)} - 2e^{i\omega n} + e^{i\omega(n-1)}\right) =$$

$$= e^{-i\omega}\left(e^{2i\omega} - 2e^{i\omega} + 1\right)e^{i\omega n} = e^{-i\omega}\left(e^{i\omega} - 1\right)^2 e^{i\omega n}$$

$$e^{-i\omega}\left(e^{i\omega} - 1\right)^2 = e^{-i\omega}\left(ie^{i\frac{\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]\right)^2$$

$$\Delta^2(e^{iwn}) = e^{-i\omega}\left(i^2 e^{i\frac{2\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^2\right)e^{i\omega n} \qquad (3.4)$$

Разностный оператор

$$\Delta^3(s_n) = \Delta(\Delta^2 s_n) = (s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n) - (s_{n+1} - 2s_n + s_{n-1}) =$$

$$= e^{-i\omega}\left(e^{i\omega} - 1\right)^3 e^{i\omega n}$$

$$\Delta^3(e^{iwn}) = e^{-i\omega}\left(i^3 e^{i\frac{3\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^3\right)e^{i\omega n}$$

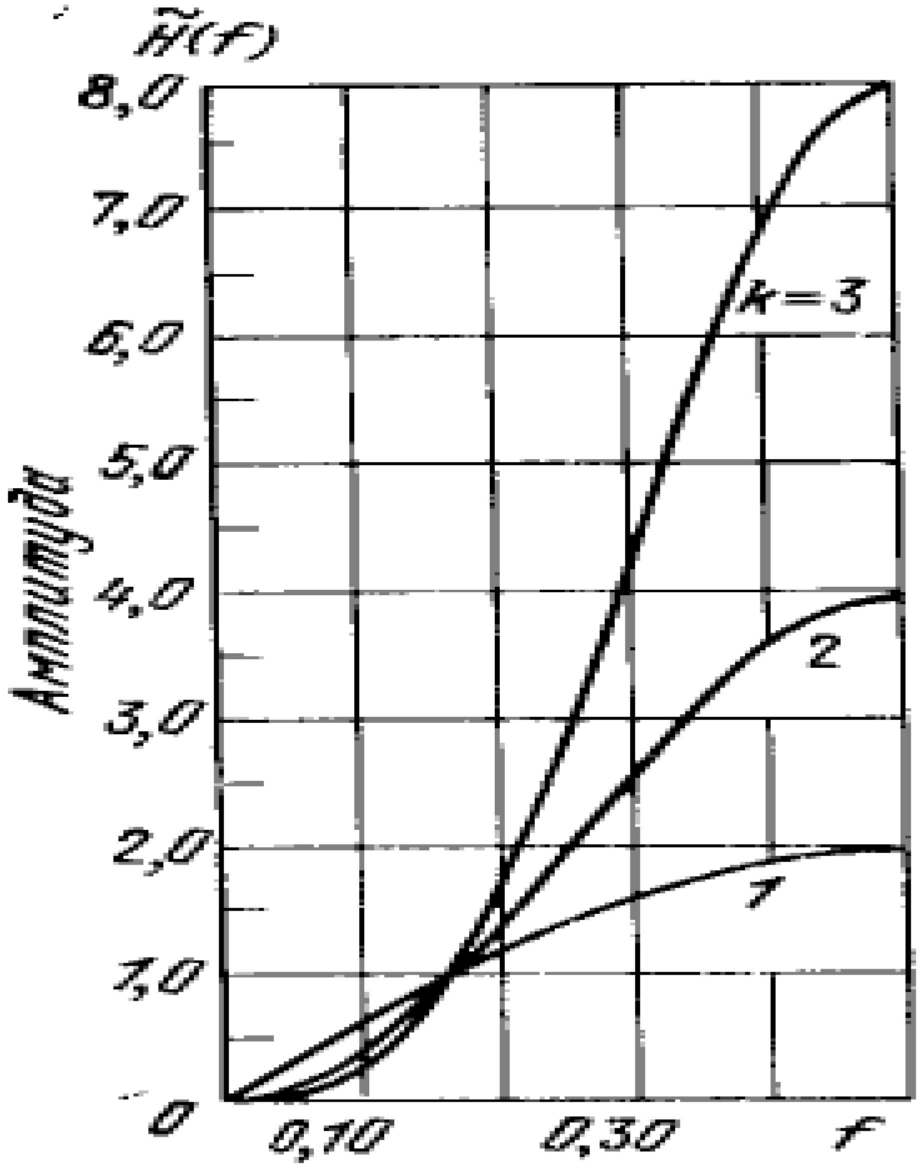
$$\Delta^k(s_n) = \Delta(\Delta^{k-1} s_n)$$

$$\Delta^k(e^{iwn}) = \psi(\omega) i^k e^{i\frac{k\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^k e^{i\omega n}$$

$$H_k(\omega) = \psi(\omega) i^k e^{i\frac{k\omega}{2}}\left[2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^k \qquad (3.5)$$

Разностный оператор Δ^k

График изменения передаточной функции:



Численное дифференцирование

Аппроксимация производной разностью первого порядка:

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$s'_n = \frac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2h} \qquad (3.6)$$

$$h = T = 1$$

$$H(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2} = i\sin(\omega) \qquad (3.7)$$

Точное значение производной от $e^{i\omega t}$ равно $i\omega e^{i\omega t}$

Отношение значений:

$$\frac{\text{Вычисленное}}{\text{Точное}} = \frac{\sin(\omega)}{\omega} \qquad (3.8)$$

Восстановление пропущенных данных

Интерполяция с помощью полинома третьего порядка:

$$\Delta^4(s_{n-2}) = s_{n-2} - 4s_{n-1} + 6s_n - 4s_{n+1} + s_{n+2} = 0 \qquad (3.9)$$

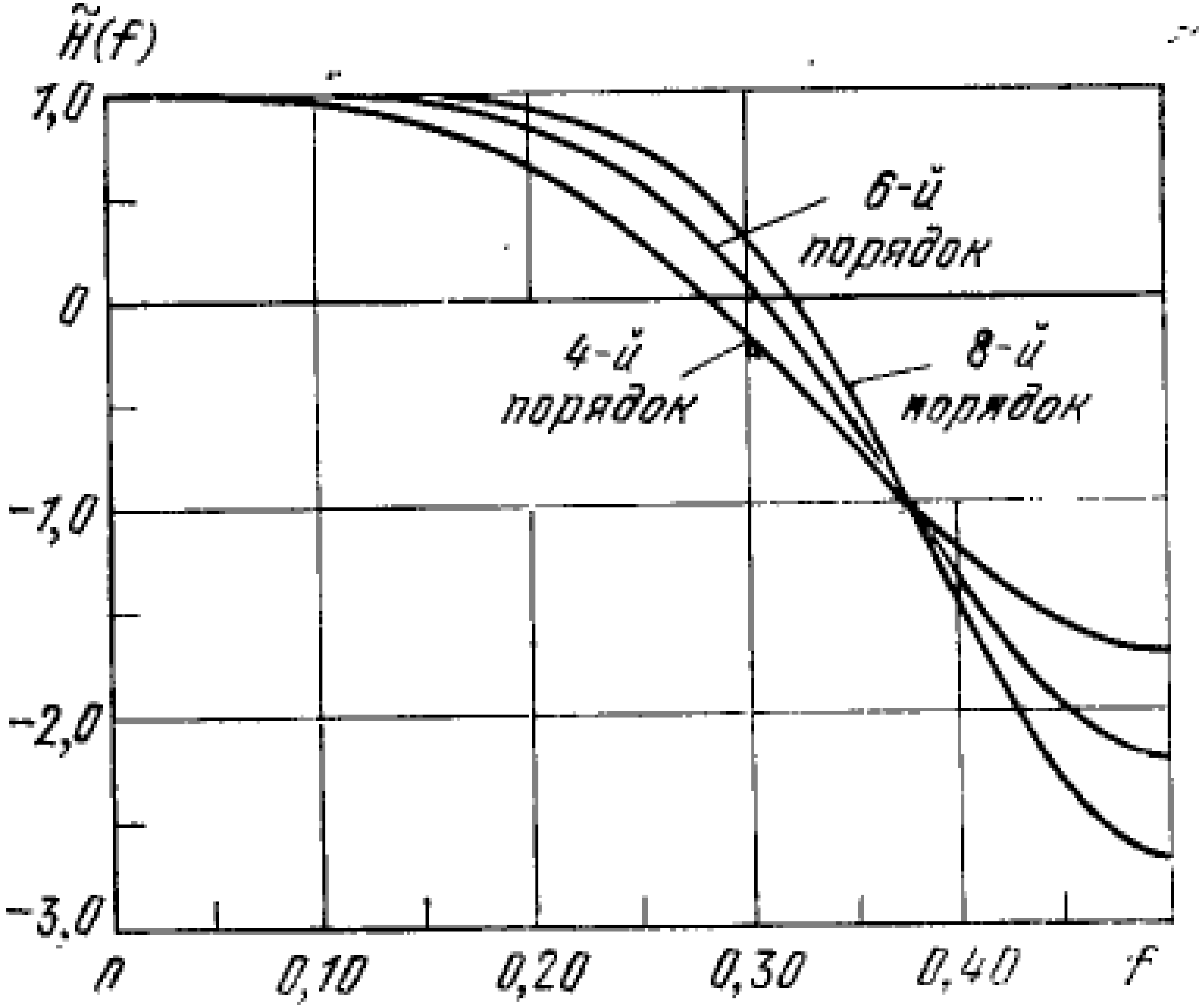
$$\tilde{s}_n = \frac{1}{6}(-s_{n-2} + 4s_{n-1} + 4s_{n+1} - s_{n+2}) \qquad (3.10)$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(4\cos(\omega) - \cos(2\omega)) \qquad (3.11)$$

Восстановление пропущенных данных

График передаточной функции при использовании полиномов 4-го,6-го и 8-го порядков:



Пример расчета симметричного нерекурсивного фильтра

$$y_n = as_{n-2} + bs_{n-1} + cs_n + bs_{n+1} + as_{n+2}$$

$$s_n = e^{i\omega n}$$

$$H(\omega) = 2a\cos(2\omega) + 2b\cos(\omega) + c$$

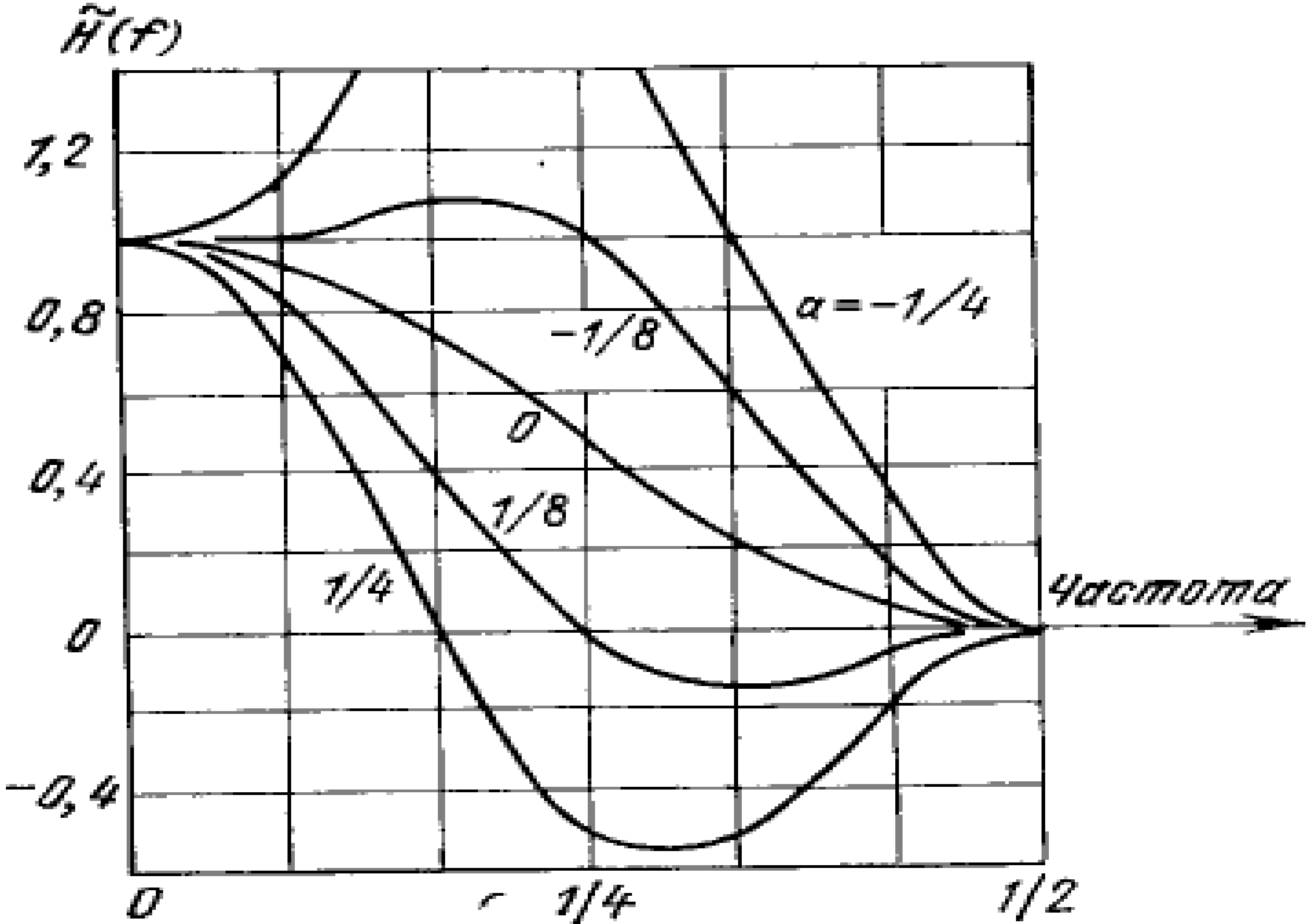
Условия: $H(0) = 1; \quad H(\pi) = 0.$

Результат: $b = \frac{1}{4}; \quad c = \frac{1}{2} - 2a.$

$$H(\omega) = 4a\left[-1 + \cos(\omega)\left(\cos(\omega) + \frac{1}{8a}\right) + \frac{1}{8a}\right]$$

Пример расчета симметричного нерекурсивного фильтра

Передаточная функция фильтра в зависимости от значения параметра a:



Пример работы фильтра

Зададим передаточную функцию в виде:

$$\tilde{H}(f) = 2A\cos(2\pi f) + B$$

Потребуем выполнения условий:

$$\tilde{H}\left(\frac{1}{8}\right) = 1;$$

$$\tilde{H}\left(\frac{3}{8}\right) = 0.$$

В результате получим:

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

Пример работы фильтра

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n-1} + \frac{1}{2} s_n + \frac{\sqrt{2}}{4} s_{n+1}$$

n	$s_n = \cos(\pi n/4)$	$y_n = \tilde{H} s_n$	$\tilde{s}_n = \cos(3\pi n/4)$	$\tilde{y}_n = \tilde{H}\tilde{s}_n$	$s_n + \tilde{s}_n$	$y_n + \tilde{y}_n = \tilde{H}(s_n + \tilde{s}_n)$
1	2	3	4	5	6	7
0	1.0	-	1.0	-	2.0	-
1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	-1.0	-1.0	-1.0	0.0	-2.0	-1.0
5	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.0	0.0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	1.0	-	1.0	-	2.0	-

Ортогональность функций

Ортогональность функций:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g_1(t) g_2(t) dt = 0$$

Система $g_k(t)\; k = 1, 2, \ldots, N$ ортогональных на отрезке $[\alpha, \beta]$ функций

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) g_m(t) g_n(t) dt = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \lambda_n^2, m = n \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

Система тригонометрических функций

$$1,\ \cos(t),\ \cos(2t),\ \cos(3t),\ \ldots$$

$$\sin(t),\ \sin(2t),\ \sin(3t),\ \ldots$$

ортогональна на отрезке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

Система ортогональных тригонометрических функций

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)\,dt = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases}$$

Ряд Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \qquad (3.12)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos(kt) dt, k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (3.13)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin(kt) dt, k = 1, 2, \ldots \qquad (3.14)$$

Ряд Фурье

Равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt, k = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \qquad (3.15)$$

Неравенство Бесселя:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt, k > \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \qquad (3.16)$$

Для конечного N ряд Фурье является аппроксимацией функции в смысле МНК.

Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t) = t \quad , \quad -\pi \le t \le \pi \tag{3.17}$$

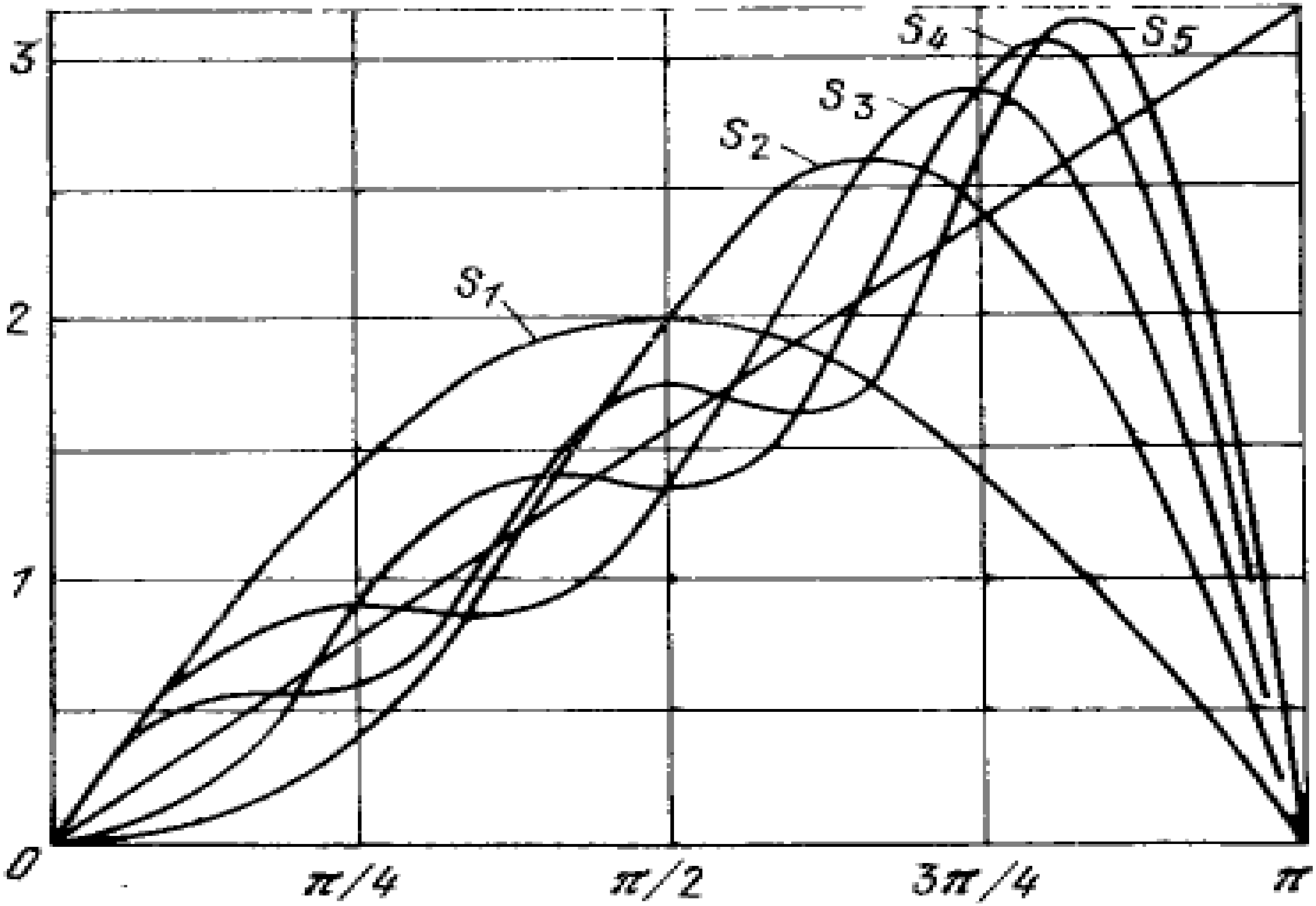
$$a_k = 0 \tag{3.18}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt)dt, k = 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}, k = 1, 2, \ldots \tag{3.19}$$

$$t = 2\left[\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + \ldots\right] \tag{3.20}$$

Частичные суммы ряда Фурье



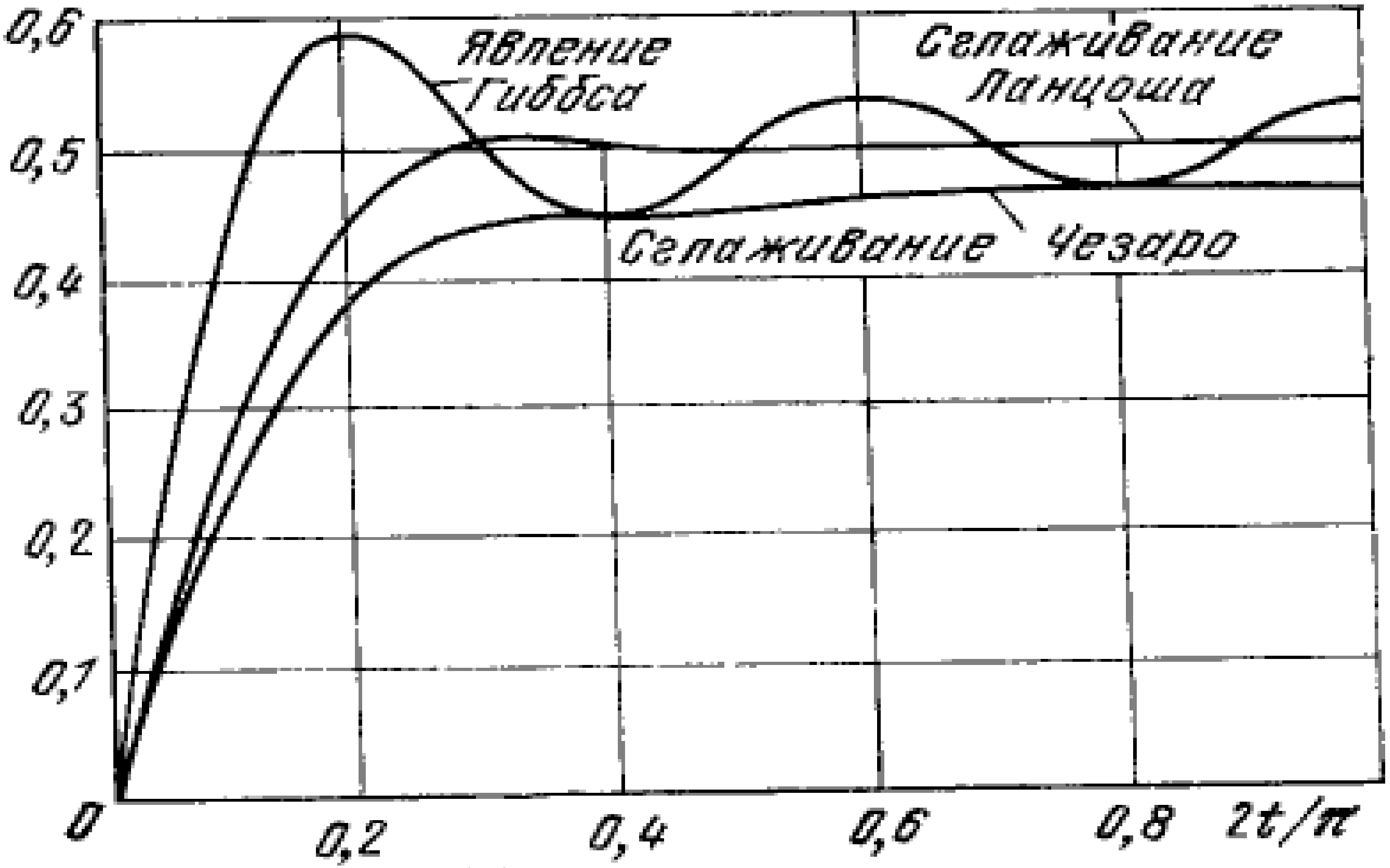
Примеры разложения в ряд Фурье

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, 0<t<\pi \\ -\dfrac{1}{2}, -\pi<t<0\end{cases} \tag{3.21}$$

$$g(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} \tag{3.22}$$

$$S_N=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} \tag{3.23}$$

Частичная сумма ряда Фурье для пяти первых слагаемых



Явление Гиббса и сглаживание Ланцоша.

Коррекция частичных сумм ряда Фурье

Сглаживание Ланцоша: $\bar{S}_N = \dfrac{N}{2\pi}\displaystyle\int_{t-\frac{\pi}{N}}^{t+\frac{\pi}{N}} S_N(x)dx$ (3.24)

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left\{\sigma(N,k)[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)]\right\} \quad (3.25)$$

$$\sigma(N,k) = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi k}{N}\right)}{\left(\dfrac{\pi k}{N}\right)} \quad (3.26)$$

Сглаживание Чезаре (Фейера):

$$\bar{S}_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{N-k}{N}[a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)]\right\} \quad (3.27)$$

Комплексный ряд Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \qquad (3.28)$$

$$\cos(kt) = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}; \sin(kt) = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \qquad (3.29)$$

....

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \qquad (3.30)$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{a_k - ib_k}{2}, k > 0 \\ \dfrac{a_0}{2}, k = 0 \\ \dfrac{a_k + ib_k}{2}, k < 0 \end{cases} \qquad (3.31)$$

Комплексный ряд Фурье

Пусть, как и прежде

$\omega = 2\pi f$ - круговая частота, а f -циклическая

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} \qquad (3.32)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\omega) e^{-ik\omega} d\omega \qquad (3.33)$$

$$g(\omega) = g(2\pi f) = \tilde{g}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi ikf} \qquad (3.34)$$

$$c_k = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{g}(f) e^{-2\pi ikf} df \qquad (3.35)$$

Комплексный ряд Фурье

Следует обратить внимание, что выражение (3.32) для комплексного ряда Фурье:

$$g(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega}$$

согласуется с использовавшемся ранее выражением для передаточной функции нерекурсивного фильтра:

$$H(\omega) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{-ik\omega} = \sum_{k=-K}^{K} c_{-k} e^{ik\omega}$$

Фазовая форма ряда Фурье

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]$$

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k cos(kt + \varphi_k), \qquad (3.36)$$

Для четных функций $\varphi_k = 0$ или π

Для нечетных функций $\varphi_k = \pm\frac{\pi}{2}$

Некоторые свойства ряда Фурье

Пусть

$$g_1(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{и} \quad g_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$$

Тогда:

$$Ag_1(t)+Bg_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(Ac_k+Bd_k\right)e^{ikt} \tag{3.37}$$

$$g_1(t)g_2(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d_{k-n}\right]e^{ikt} \tag{3.38}$$

$$\tilde{g}(t)=\int_{-\pi}^{\pi} g_1(s)g_2(t-s)ds=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k d_k e^{ikt} \tag{3.39}$$

Преобразование Фурье

Прямое преобразование Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (3.40)$$

или

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt \qquad (3.41)$$

Обратное преобразование Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (3.42)$$

или

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{i2\pi ft} df \qquad (3.43)$$

Свойства преобразования Фурье

$g(t)$ - вещественная функция $\Rightarrow G(\omega)$ - сопряженно -симметричная относительно $\omega = 0$

$g(t)$ - четная $\Rightarrow G(\omega)$ - вещественная и четная

$g(t)$ - нечетная $\Rightarrow G(\omega)$ - чисто мнимая, нечетная

Модуль спектральной функции $G(\omega)$ называют амплитудным спектром $g(t)$.

Аргумент спектральной функции $G(\omega)$ называют фазовым спектром $g(t)$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = ag_1(t) + bg_2(t) \Rightarrow G(\omega) = aG_1(\omega) + bG_2(\omega)$$

$$g(t) = f(t-\tau) \Rightarrow G(\omega) = F(\omega)e^{-i\omega\tau}$$

$$g(t) = f(at) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} \Rightarrow G(\omega) = i\omega F(\omega)$$

Свойства преобразования Фурье

$$g(t) = \int f(t)dt \Rightarrow G(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega}, \text{ если } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \Rightarrow G(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

$$g(t) = f_1(t) f_2(t) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\varphi) F_2(\omega-\varphi) d\varphi$$

$$g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow G(\omega) = \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} F(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-i\varphi_0} F(\omega+\omega_0)$$