

# Цифровая обработка сигналов

## Лекция №1

Санкт-Петербург  
2021

# Литература

1. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов : учеб. пособие / А. Б. Сергиенко. — СПб. : Питер, 2002. — 768 с.
2. Цифровая обработка сигналов и MATLAB / А. И. Солонина [и др.]. — СПб. : БХВ-Петербург, 2013. — 512 с.
3. Р. В. Хемминг Цифровые фильтры: Москва, «Советское радио», 1980. — 224 с.

# Классификация сигналов

Периодические и непериодические сигналы

Детерминированные и случайные сигналы

Сигналы с конечной (ограниченной) и бесконечной (неограниченной) энергией

Аналоговые, дискретные и цифровые сигналы

# Классификация сигналов

## Аналоговые сигналы:.

$$s(t)$$

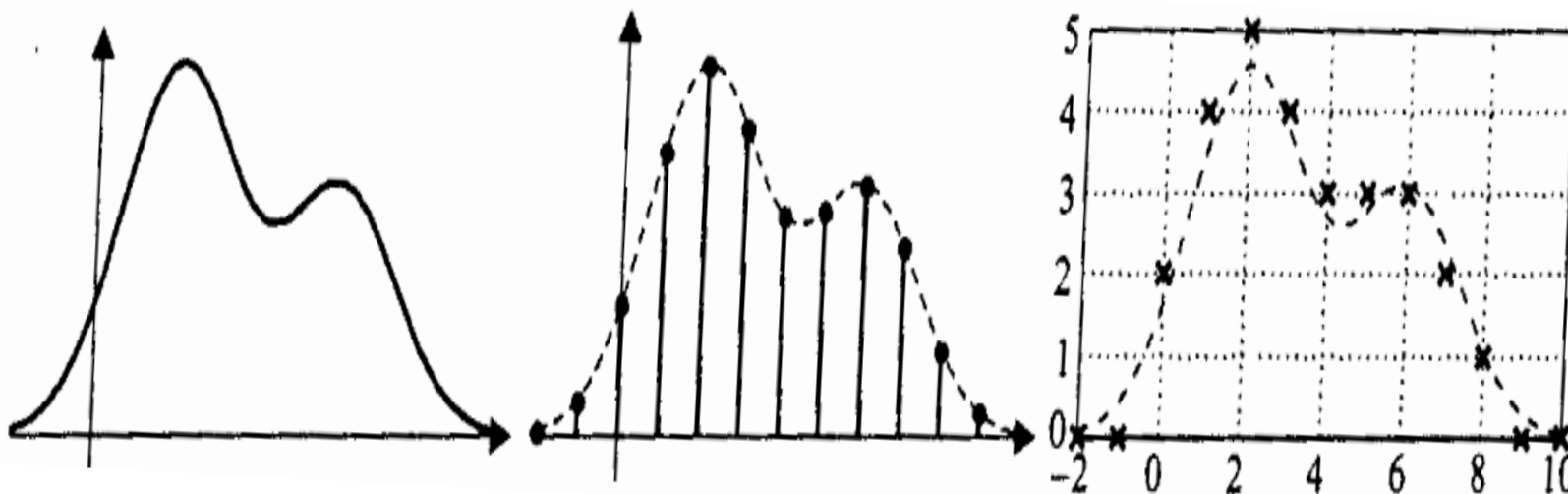
## Дискретные сигналы:

$$s(nT) \text{ , } s(n)$$

Дискретное время, дискретное нормированное время

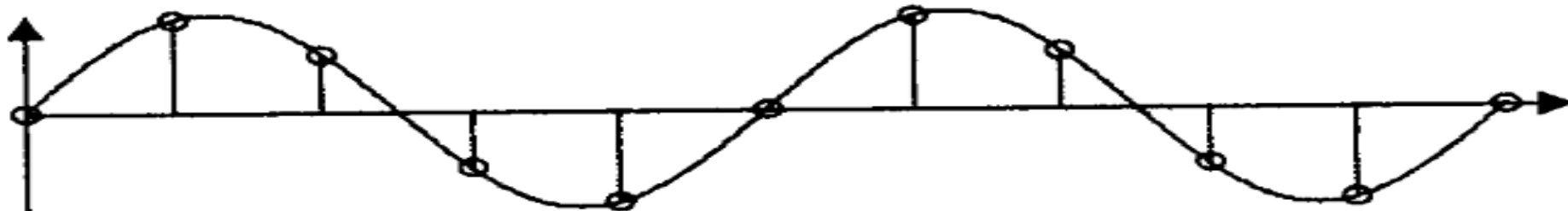
## Цифровые сигналы:

Квантование

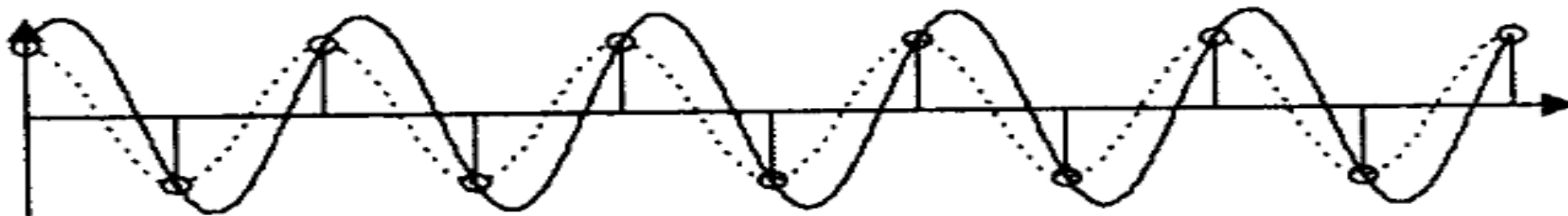


# Частота Найквиста

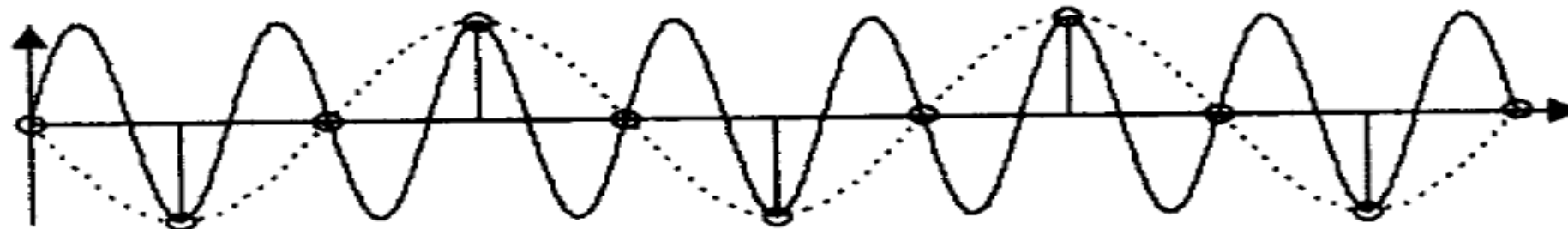
$$f_N = \frac{f_d}{2} = \frac{1}{2T}; \quad \omega_N = \frac{\omega_d}{2} = \frac{\pi}{T}$$



а



б



в

# Энергия и мощность сигнала

Энергия:

$$E = \int_0^T s^2(t) dt$$

Мгновенная мощность:

$$p(t) = s^2(t)$$

Средняя мощность:

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt$$

# Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Единичный цифровой импульс:

$$\delta_d(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Является дискретным аналогом дельта-функции (функции Дирака).

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

# Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

Дискретный единичный скачок:

$$\sigma_d(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0, \\ 0, & k < 0. \end{cases}, \quad k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Является дискретным аналогом функции единичного скачка (функция Хэвисайда)

$$\delta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5 \text{ или неопределена,} & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



# Некоторые специальные виды детерминированных дискретных сигналов

**Дискретная экспоненциальная функция:**

$$s(k) = \begin{cases} 0, & k < 0, \\ a^k, & k \geq 0. \end{cases}, k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

**Дискретная затухающая синусоида:**

$$s(k) = a^k \cos(k\omega + \varphi)$$

# Характеристики дискретного сигнала (последовательности отсчетов)

Среднее значение

Мощность – сумма квадратов значений отсчетов

Средняя мощность

Автокорреляционная функция (АКФ):

$$R_s(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} s(n)s(n+m), 0 \leq m \leq (N-1)$$

Автоковариационная функция:

$$r_s(m) = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} [s(n) - \mu_s][s(n+m) - \mu_s], 0 \leq m \leq (N-1)$$

# Случайные дискретные сигналы

Часто используемые характеристики эргодического случайного дискретного сигнала:

Математическое ожидание (среднее значение)  $\mu_s$

Дисперсия  $\sigma_s^2$

АКФ  $r_s(m)$

Автоковариационная функция  $r_s(m)$

# Случайные дискретные сигналы

## Белый шум

**Равномерный белый шум** – последовательность случайных чисел, распределенных по равномерному закону на отрезке  $[0,1]$  ( $\mu_s = 0.5$ ,  $\sigma_s^2 = 1/12$ ).

Автоковариационная функция этого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

**Нормальный белый шум** – последовательность случайных чисел, распределенных по нормальному закону с  $\mu_s = 0$  и  $\sigma_s^2 = 1$ .

АКФ такого белого шума имеет вид цифрового единичного импульса.

# Дискретные фильтры - введение

Входной детерминированный дискретный сигнал:

$$x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Последовательность чисел  $y_n$  - выходной сигнал формируется по правилу:

$$y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^M d_k y_{n-k}, n = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

Формула (1) представляет собой одну из возможных форм записи дискретного фильтра.

Сумма вида  $\sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$  называется линейной сверткой.

# Дискретные фильтры - введение

Свертка  $y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k}$  двух последовательностей

$$y_0 = c_0 x_0 \quad x_n \text{ и } c_n, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_1 = c_0 x_1 + c_1 x_0$$

$$y_2 = c_0 x_2 + c_1 x_1 + c_2 x_0$$

$$y_n = c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \dots + c_{n-1} x_1 + c_n x_0$$

$$y_{2N-3} = c_{N-1} x_{N-2} + c_{N-2} x_{N-1}$$

$$y_{2N-2} = c_{N-1} x_{N-1}$$

$$\begin{array}{cccccccc} c_{N-1} & c_{N-2} & \cdot & \cdot & c_2 & c_1 & c_0 & \rightarrow \\ & & & & & & x_0 & x_1 & x_2 & \cdot & \cdot & x_{N-2} & x_{N-1} \end{array}$$

# Дискретные фильтры - введение

В качестве примера **нерекурсивного** фильтра можно привести известную формулу сглаживания:

$$y_n = \frac{1}{5}(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n + x_{n+1} + x_{n+2}), \quad n = 2, 3, \dots, N-3 \quad (1.2)$$

В качестве примера **рекурсивного** фильтра можно привести известную формулу трапеций для численного интегрирования:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) + y_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-2 \quad (1.3)$$

# Дискретные фильтры – введение

## Усиление шума при фильтрации

Пусть входной сигнал задан формулой:

$$x_n = x_n + u_n, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Здесь  $u_n, n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  - шум, некоррелированные случайные значения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma_u^2$ .

Зададим нерекурсивный фильтр

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}), n = 1, 2, \dots, N-1$$

Дисперсия результата определяется формулой:

$$D(y_n) = E \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{N-1} c_k (x_{n-k} + u_{n-k}) - \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k} \right]^2 \right\} = \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{N-1} c_k^2 \quad (1.4)$$



# Собственные функции линейных операторов

Собственные числа и собственные векторы в линейной алгебре:

$$Ax = \lambda x$$

$\sin(x)$  и  $\cos(x)$  - собственные функции операции сдвига:

$$A \sin(x+h) + B \cos(x+h) = \tilde{A} \sin(x) + \tilde{B} \cos(x)$$

$$\tilde{A} = A \cos h - B \sin h; \quad \tilde{B} = A \sin h + B \cos h$$

Формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

# Собственные функции линейных операторов

Пусть  $y(t) = e^{it}$

Тогда  $y(t+h) = e^{i(t+h)} = e^{ih} y(t)$

Пусть теперь  $x_n = e^{i\omega n}$

Для нерекурсивного фильтра получим следующее выражение:

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k x_{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{i\omega(n-k)} = e^{i\omega n} \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{-i\omega k} = \lambda(\omega) e^{i\omega n} = \lambda(\omega) x_n$$

Аналогичный результат имеет место и для рекурсивного фильтра

# Собственные функции линейных операторов

$$y_n = \sum_{k=0}^N c_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^M d_k y_{n-k} \quad (1.5)$$

Пусть  $x_n = Ae^{i\omega n}$  и  $y_n = Be^{i\omega n}$ . Подставляем в (1.5):

$$Be^{i\omega n} = A \sum_{k=0}^N c_k e^{i\omega(n-k)} + B \sum_{k=1}^M d_k e^{i\omega(n-k)} \quad (1.6)$$

В результате 
$$H(\omega) = \frac{B}{A} = \frac{\sum_{k=0}^N c_k e^{-i\omega k}}{1 - \sum_{k=1}^M d_k e^{-i\omega k}}$$

$$y_n = H(\omega)x_n \quad (1.7)$$

# Собственные функции линейных операторов

Функция  $e^{i\omega t}$  является собственной функцией и для операций дифференцирования, интегрирования и вычисления разностей:

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} = \lambda(\omega) e^{i\omega t}$$

$$\int e^{i\omega t} dt = \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} = \lambda(\omega) e^{i\omega t}$$

$$\Delta e^{i\omega t} = e^{i\omega(t+1)} - e^{i\omega t} = (e^{i\omega} - 1) e^{i\omega t} = \lambda(\omega) e^{i\omega t}$$

Степенные функции от  $t$  указанным свойством не обладают.