УМФ

Колесницкий Сергей Борисович 07.09

Про что курс:

- диффуры в частных произв (Partial Differential Equations)

Сильная и слабая корр.

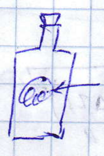
$$y'' + y' + y = 3e^x$$

$y(0) = 2$

$y'(0) = -3$! в одной и той же точке знач. произв. до порядка ур-ния

Есть Условия Дирихле, Неймана и т.д.

У нас есть идеальный термос.



это кипятильник

там нет перемешивания

Будет ли здесь стационарное распр. температуры?

Кол-во эн. в термосе д.б. пост. во времени.

Д/б теплосброс ⇒ не будет.

Это к тому, что не надо решать задачи без решения.

Решение PDE $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Система Максвелла

Ур-ние Лапласа:

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ — Δu (Лаплас u)

$\vec{E}(\vec{x}, t)$

$\vec{B}(\vec{x}, t)$

$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ ← волновое? ур-ние

$(\vec{E}, \vec{B}): \Omega \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^6$

$u_t - a\Delta u = 0$ ← ур-ние теплопров. (диффузии)

реш. ур-ния Лапласа — гармонические функции (их дофига)

Усл. Коши здесь уже не катит.

Краевые условия (краевые задачи)

Усл. Дирихле: $u(a) = A$ $A = 0$ ⇒ однородное усл.

мы задаем знач. функ. (прибили конец струны)

Усл. Неймана: $u'(a) = A$ (натяжение струны фикс.)

a ——— b

Когда гов. о краев. задачах, рассм. отр a, b и каждому концу задают по отд. (могут быть разные усл.)

Дир + Дир → зад. Дир

Нейм + Нейм → зад Нейм

Дир + Нейм → смеш. зад.

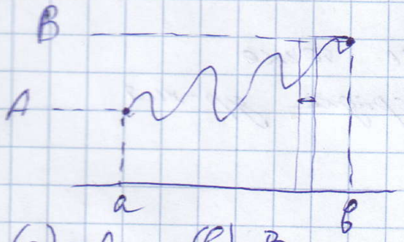
То, что происх. внутри отр — задает ур-ние.

$u'(a) - \alpha u(a) = A$ — усл. 3 типа (Робена?)

Период. усл.: $u(a) - u(b) = 0$ (ур-ние стыковки)

$u'(a) - u'(b) = 0$

Все усл. линейны.



$u(a) = A, \quad u(b) = B$

Идеальная струна сопр. растяжению, но не сопр. изгибам.

Недеформ. кусок: ΔX

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\underset{u'\Delta x}{\underset{\shortparallel}{\Delta u}})^2} - \Delta X \approx \left(\sqrt{1+(u')^2} - 1\right)\Delta X$$

$$\Delta \Pi = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$$

$$\Pi[u] = \int_a^b \frac{k\left(\sqrt{1+(u')^2} - 1\right)^2}{2} dx$$

Деформируем струну:

$$\left.\frac{\Pi[u+ht] - \Pi[u]}{t}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\Pi[u+th] - \Pi[u]\right) =: D\Pi[u]h$$

это производная в т. u в напр. h

Необх. усл. экстремума: $D\Pi[u]h = 0 \quad \forall h \in ?$ 1-ая вариация

для любого допустимого приращения. будем уточнять

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\Pi[u+th]\right|_{t=0} = D\Pi[u]h \qquad u', h' \text{ — произв. по } X$$

1) $$\Pi[u+th] = \int_a^b \frac{k\left(\sqrt{1+(u'+th')^2} - 1\right)^2}{2} dx$$

2) $$\frac{\partial}{\partial t}\Pi[u+th] = \int_a^b k\left(\sqrt{1+(u'+th')^2} - 1\right) \cdot \frac{2(u'+th')\cdot h'}{2\sqrt{1+(u'+th')^2}} dx$$

3) $$\left.\frac{\partial}{\partial t}\Pi[u+th]\right|_{t=0} = \int_a^b k\left(\sqrt{1+(u')^2} - 1\right) \cdot \frac{u'h'}{\sqrt{1+(u')^2}} dx \ominus$$

$= 0 \quad \forall$ допуст. h

$h \in C^1([a,b]) : h(a) = h(b) = 0$

$$= -\int_a \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\left(\sqrt{1+(u')^2}-1\right)u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)} h\,dx + \underbrace{\boxed{}\, h(x)\Big|_{x=a}^{x=b}}_{=0} =$$

$=$

Лемма Дюбуа-Реймона

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g(x) \in C_0^\infty(a,b)$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \text{ п.в.}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)u'\right) = 0$$

ур-ние Эйлера

Носитель функ. – замык. множ-ва точек, где $f \neq 0$. $(supp(f))$

Замыкание – множ-во + предельные точки

$$C_0^\infty(a,b) = \{f \in C^\infty(a,b) : supp(f) \subset (a,b)\}$$

Д/з: док-ть, что кратч. расст. между 2 т. – прямая

$$L[u] = \int_a^b \sqrt{1+(u')^2}\,dx$$

$u(a) = A$, $u(b) = B$

Усложнение: $\tilde{L}[u] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{u}\,dx$ (метрика Лобач.)

① $$DL[u]h = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b \sqrt{1+(u'+h't)^2}\,dx\right)\Big|_{t=0} = \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b \left(1+(u')^2+2h'tu'+(h't)^2\right)^{1/2} dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \frac{2u'h'+\cancel{2h't}}{2\sqrt{1+(u'+\cancel{h't})^2}}\,dx\Big|_{t=0} = \boxed{\int_a^b \frac{u'h'}{\sqrt{1+(u')^2}}\,dx} =$$

$$= \int \frac{\cancel{1-(u')^2}}{\cancel{1}} \cdot \frac{1}{(1+(u')^2)^{3/2}}\, h\,dx + \cancel{\frac{u'h}{\sqrt{1+(u')^2}}\Big|_{x=a}^{x=b}}$$

$$\frac{1}{(1+(u')^2)^{3/2}} = 0$$

$$-\frac{u''}{(1+(u')^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow u'' = 0$$

$\Rightarrow u' = \alpha$

$\Rightarrow u = \alpha x + \beta$

$\Rightarrow$ мин.

$$E = \frac{1}{2}(u')^2 - fu$$

$$DE = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}(u'+h't)^2 - f(u+ht)\right)}{\partial t}\Big|_{t=0} = u'h' - fh$$

$1+(u$

Вар-ты дистант. лекций: **14.09** лек.

ПН 9:50, 11:40 лек (на ЧТ)
ВТ 9:50 но не точно
СР 9:50, 11:40, 13:40
ЧТ 9:50, 11:40, 13:40, 15:30
ПТ 9:50

Когда у меня эти грешные мастеры?..

Записи всех занятий будут.

Каждую неделю или через одну?

Осн. предмет изучения: ДУ в ЧП 2 порядка (преим. линейные)
Возможно, будет кусок про интегральные ур-ния.

~~Пон~~ диффур: $F(\underbrace{x, u}_{\text{неизв. функ.}}, Du, D^2u) = 0$ $\qquad u_{x_1x_3x_4} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_3 \partial x_4}$

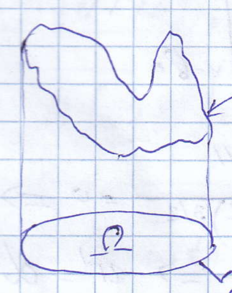
Линейные ДУ: $\underbrace{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}}_{\text{старшая часть}} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f(x)$

~~Пон~~
Полулинейные ДУ: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + b(x, u, Du) = 0$
(старшая часть линейная, остальное — нет)

Квазилинейные ДУ: $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, Du) u_{x_i x_j} + b(x, u, Du) = 0$

Есть еще полностью нелинейные ДУ.

Содержательные примеры:

- $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ — ур-ние Лапласа (Δu)
- $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f$ — ур-ние Пуассона
- $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ — волновое ур-ние
- $u_t - a\Delta u = 0$ — ур-ние теплопроводности
  — ур-ние реакции-диффузии (его очень любят биологи)
  биологи занимаются тварями
- 

  задача Плато?

  $S[u] = \iint\limits_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dx\, dy$ (минимизировать)

  $-\left(\dfrac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right)_x - \left(\dfrac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\right)_y = 0$

  (квазилин.)
- $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = f(x, y)$ — ур-ние Монжа (?), полностью нелин.

Ур-ния в ЧП — это как распивать водку.

1 — ДУ
2 — Область
3 — Краевые усл.

Пренебрегать хотя бы одним пунктом очень плохо.

Пример A: обл.: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ y>0\}$

КУ: $\partial D = \{y=0\}$

$u(x,0)=\varphi(x)$;

$\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=\psi(x)$.

(задача Коши)

$u_y - u_{xx} = 0$ ⟵ это корректная задача

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ ⟵ а это нет (пример Адамара?)

Класс задач $M(u)=F$ корректен по Адамару, если:

1) $\forall F \ \exists u_F : M(u_F) = F$ (решение сущ.)

2) $M(u_1) = M(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$ (решение единственно)

3) $F_k \to F \Rightarrow u_{F_k} \to u_F$ (малые откл. в данных ~~[illegible]~~ задачи вызыв. контролируемо малые откл. в решении)

иначе на практике не сможем применять

$u_n(x,y) = \frac{1}{n}\cos(nx)\, ch(ny)$

$\Delta u_n = 0$

$ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$

$ch''(t) = ch(t)$

$(\cos(t))'' = -\cos(t)$

$ch'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = sh(t)$

$\varphi_n(x) = u_n(x,0) = \frac{1}{n}\cos(nx) \to 0$

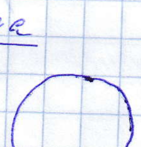
$\psi_n(x) = \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,0) = \frac{1}{n}\cos(nx)\cdot 0 = 0 \to 0$

$u_n(0,1) = \frac{1}{n} ch(n) = \frac{e^n + e^{-n}}{2n} \longrightarrow \infty$

Данные задачи стремятся к 0, а решение нет.
Что делать с такой задачей? Не решать ее.
Есть ситуации, в которые просто не надо попадать.

Проблема громоотводе

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$



$D_1 = B$

[виды диффуров корр. по Адамару примеры]

$\varphi \in C^\varepsilon(\partial\Omega) \Rightarrow u \in C^{2+\varepsilon}(\Omega)$

(чуть лучше непр.)

Если мы ~~разрез~~ надрежем область,

$\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$, но u не огр. в 0!

По этому принципу работает громоотвод.

Еще пример:

$-\Delta u = f > 0$

стац. распр. темп.

$u\Big|_{\partial\Omega} = 0$ — усл. Дирихле $\Rightarrow$ стац. распр. темп. есть

$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$ — усл. Неймана $\Rightarrow$ вместо палатки оказались в термосе $\Rightarrow$ стац. распр. темп. нет

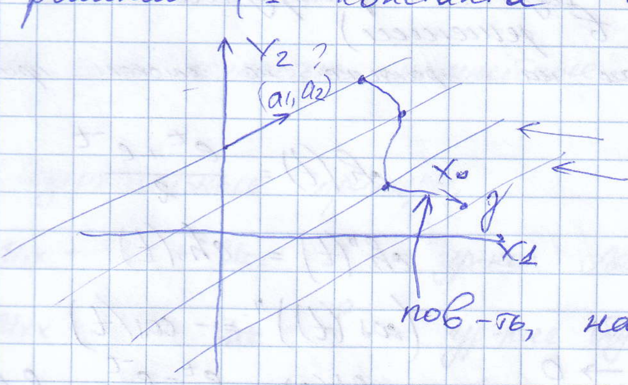
Диффур 1 п: ~~$a_1 x_1$~~ $a_1 u_{x_1} + \ldots + a_n u_{x_n} + a u = f(x)$ 27.09

$\varphi(t) = u(x_1^0 + a_1 t, x_2^0 + a_2 t, \ldots ???\, x_n^0 + a_n t)\ a \in \mathbb{R}$

$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} u_{x_k}(\vec{x}^0 + \vec{a}t) a_k = f(\vec{x_0} + \vec{a}t) - a u(\vec{x_0} + \vec{a}t) = f(\vec{x_0} + \vec{a}t) - a\varphi$

$\varphi'(t) + a\varphi(t) = f(\vec{x_0} + \vec{a}t)$

Очевидно, у такого диффура довольно много решений (1 константа интегрирования)



Пов-ть x_0 должна быть "правильной": на $\forall$ хар. прям. д.б. ровно 1 точка этой пов-ти.

Трансверсально???

* Вопросы по существу: можно прекратить существовать?

* Инф. распространяется вдоль хар. прямых.

*

*

$u\big|_{\vec{x} \in \vec{y}} = \psi(x)$

$\widehat{u_{x_k}} = \xi_k \hat{u}$

$(a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n + a)\hat{u} = \hat{f}$

символ ДО

Главный символ ДО: $a_1 \xi_1 + \ldots + a_n \xi_n = S(\xi)$
лин функ

Оч. важное опр.:

Пов-ть $\omega(x) = const$ назыв. <u>характеристической</u>
$\Longleftrightarrow$ $S(\nabla\omega) = 0$.

Пов-ть ω назыв. нехар. $\Longleftrightarrow$ $S(\nabla\omega) \neq 0$
Задачу Коши можно ставить только на нехар. пов.

$\boxed{\text{Элл, пар и гипер} \text{ ур-ния}}$

$$y_k = \sum_{m=1}^{n} b_{km} x_k; \qquad x_m = \sum_{k=1}^{n} B_{mk} y_k$$

какая-то замена   n-разм. простр-ва   обратная замена

$$u_{x_m} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} (y_k)_{x_m} = \sum_{k=1}^{n} u_{y_k} b_{km}$$

What is happening?

УЧП II порядка

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_i a_i(x) u_{x_i} + a(x) u = f$$

Полный символ: $S_n(x, \xi) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j + \sum_i a_i(x) \xi_i + a(x)$

Главный символ: $S(x, \xi) = a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$

Пов-ть $\omega(x) = C$ – не хар
$\forall x: S(x, \nabla\omega(x)) \neq 0$

Замена пер в УЧП II П

Спектральное разложени
Сигнатура – кол-во > 0 и < 0 с.з.

это не оно

Ур-ние Эйлера: $E[u] = \int_a^b F(x,u,u')\,dx \to \min;$ 28.09

$u(a) = A, \quad u(b) = B$

Приравнять 1-ую вариацию к нулю: $0 = DE[u]h = \left.\frac{d(E[u+th])}{dt}\right|_{t=0} =$

$= \left.\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} F(x, u+th, u'+th')\,dx\right|_{t=0} \; (=)$

аналогично приравниванию градиента к 0

$(=) \left.\int_a^b \left[F_u(x, u+th, u'+th')h + F_{u'}(x, u+th, u'+th')h'\right]dx\right|_{t=0} =$

$= \int_a^b \left[F_u(x,u,u')h + F_{u'}(x,u,u')h'\right]dx \; (=)$

Общий вид 1 вар., к которой применяем лемму Дюбуа (?) – инт. по частям?

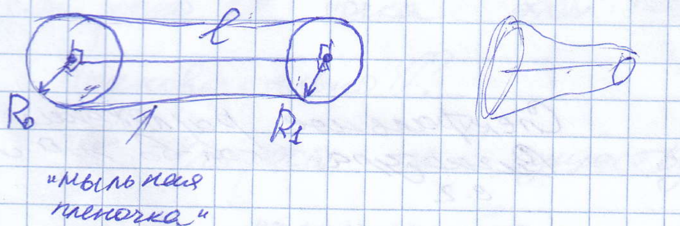
$(=) \int_a^b \left[F_u h - (F_{u'})'h\right]dx + (F_{u'}h)\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \left[F_u - (F_{u'})'\right]h\,dx$

л. Д-Р $\Longrightarrow \boxed{F_u - (F_{u'})' = 0} \leftarrow$ ур-ние Эйлера (?)

Хотим мин. функционал $\Longrightarrow$ нужно выписать ур. Эйлера и его решить

Функционалы в геометр. оптике

Минимиз. площади пов-ти вращ.



(1) Если у задачи есть симм., решение имеет смысл искать в классе с такой же симм.

Если задача переходит сама в себя при повороте, то и решение тоже.

Для пов-ти вращ. нам нужна завис. r от x.

$r(x)$: $r(0) = R_0$, $r(l) = R_1$, $S[r] = \int_0^l 2\pi r\sqrt{1+(r')^2}\,dx \to \min$

$F(x, r, r') = 2\pi r\sqrt{1+(r')^2}$

Считаем ур. Эйлера: $F_r - (F_{r'})' = 0$

$F_r = 2\pi\sqrt{1+(r')^2}$; $F_{r'} = 2\pi r \frac{2r'}{2\sqrt{1+(r')^2}}$ ← здесь r' – просто буква

$$(F_{r'})' = \frac{d}{dx}(F_{r'}) = 2\pi\left[\frac{(r')^2}{\sqrt{1+(r')^2}} + \frac{rr''}{\sqrt{1+(r')^2}} - \frac{rr'2r'r''}{2(1+(r')^2)^{3/2}}\right]$$

$$\underbrace{(1+(r')^2)^2 - (r')^2(1+(r')^2)}_{(1+(r')^2)\cdot 1} - \underbrace{rr''(1+(r')^2) + r(r')^2 r''}_{rr''} = 0$$

$$1+(r')^2 - rr'' = 0$$

автономных?
Понижение степени в каких-то диффуров.

$r' = z(r)$

$r'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dz}{dx} = \tilde{z}\cdot z$

$1 + z^2 - r\tilde{z}z = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{dr}{r} = \frac{dz}{1+z^2}}$

Филиппов
"Сб. задач по диффурам"

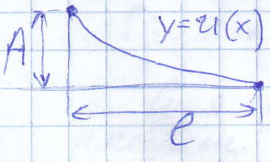
1) $r(x)$ – реш $\Rightarrow r(x-a)$ – реш

2) $r(x)$ – реш $\Rightarrow \underbrace{\lambda r\left(\frac{x}{\lambda}\right)}_{\rho(x)}$ – реш

$\rho'(x) = \lambda r'\left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot\frac{1}{\lambda}$

$\rho''(x) = r''\left(\frac{x}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}$

3) $r(x) = ch(x)$ – реш.



Кладем грузик, грузик соскальзывает.
Какая из кривых обесп. самый быстрый спуск.

1. Функционал по времени
2. Какую форму имеет кривая

Размениваем потенц. эн. на кинет. Скор. всегда напр. вдоль траектории.

Задача о брахистохроне?

Это д/з

$$T[u] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{v(x,u)}dx \qquad \int\sqrt{\frac{1+(u')^2}{u}}dx?$$

Как в этом сл. выглядит ур. Эйлера?

$$F_u = v_u(x,u)\cdot\left(-\frac{\sqrt{1+(u')^2}}{(v(x,u))^2}\right)$$

$$(F_{u'})' = \left(2u'\cdot\frac{1}{2}\left(1+(u')^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{v(x,u)}\right)' = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}v(x,u)}$$

Линейно-квадратичный функционал. ~~линн~~

Минимум ЛКФ приводит к линейным диффуран.

$$E_1[u] = \int_a^b \left[\frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu\right]dx \qquad u(a)=A,\ u(b)=B$$

$$DE[u]h = \frac{d}{dt}\int_a^b \left[\frac{(u'+th')^2}{2} + \frac{(u+th)^2}{2} - f(u+th)\right]dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[(u'+th')h' + (u+th)h - fh\right]dx\Big|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[u'h' + uh - fh\right]dx = \int_a^b \left[-u''h + uh - fh\right]dx + \underbrace{u'h\Big|_{x=a}^{x=b}}_{0} =$$

$$= \int_a^b \left[-u'' + u - f\right]h\,dx = 0 \quad \forall \text{ допуст. } h$$

$$\xrightarrow{\text{л. Д-Р}} \quad -u'' + u - f = 0$$

$F_u = u - f$

$F_{u'} = u'$

$F_u - (F_{u'})' = u - f - u'' = 0$

Какая формула консервов???

04.10 ЛЕК

$a_{ij} u_{x_i x_j} + a_i u_{x_i} + au = f$

$A = \{a_{ij}\} = A^T \leftarrow$ самосопр. (симм.) – квадр. форма

$y = Bx, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times n}; \; det(B) \neq 0$

~~$\tilde{a}_{ij}$~~ $\tilde{a}_{ln} u_{y_l y_n} + \ldots = f$, где $\{\tilde{a}_{ij}\} = BAB^T$

Что из этого следует?

Классификация PDE пор. 2

Кто такой гл. символ: берем старшие произв. и делаем замену как в преобр. Фурье $a_{ij}\xi_i\xi_j = S(x, \xi)$

Сигнатура квадр. формы

При замене пер. в квадр. форме не измен. 1) кол-во >0 с.з.; 2) кол-во <0 с.з.; 3) кол-во с.з. $=0$. — это сигнатура.

Какие м.б. сигнатуры при $n=2$:

$$\begin{array}{ccc} >0 & <0 & =0 \\ (2, & 0, & 0) \\ (0, & 2, & 0) \\ (1, & 0, & 1) \\ (0, & 1, & 1) \\ (1, & 1, & 0) \\ (0, & 0, & 2) \end{array}$$

$(2,0,0)$, $(0,2,0)$ ← эллиптические; можно умножить PDE на $-1 \Rightarrow$ множ-во реш. не изменится

$(1,0,1)$, $(0,1,1)$ ← параболические

$(1,1,0)$ ← гиперболические

~~$(0,0,2)$~~ ← это не PDE пор. 2

Э: $u_{xx} + u_{yy} = 0$ | $\xi^2 + \eta^2 = 1$ – эллипс

П: $u_{xx} + u_y = 0$ | $\xi^2 + \eta = 1$?

Г: $u_{xx} - u_{yy} = 0$ | $\xi^2 - \eta^2 = 1$ ← гипербола

все это работает только на плоскости

Судя по всему, мы просто применяем к ур-ниям алгебраич. преобраз.

PDE $^{\text{пор. 2}}$ эллипт., если все с.з. имеют один знак.

PDE гипербол., если $S(x, \xi)$ имеет сигнатуру $(n-1, 1, 0)$ или $(1, n-1, 0)$.

PDE парабол., если $S(x, \xi)$ имеет сигн. $(n-1, 0, 1)$ или $(0, n-1, 1)$

Но! уже в 3-мерии эта класс. неполна. Пример: $(1, 1, 1)$

$n = 2k$: $(k, k, 0)$ – ультрагиперболическое

Любое ур-ние можно привести к одной из стандартных форм.

① Ур-е Лапласа (Пуассона)

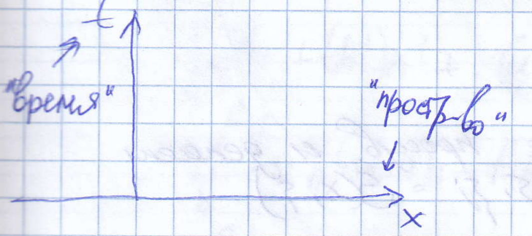
$-\Delta u = -u_{x_1x_1} - u_{x_2x_2} - \ldots - u_{x_nx_n} = f$ $\quad = 0$ — Л, $\neq 0$ — П

оператор Лапласа

$S = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 > 0$ — эллипт

② Волновое ур-е

$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = f$



$S = \tau^2 - c^2|\xi|^2$ — гиперб.

③ Ур. теплопроводности

$u_t - a\Delta_x u = f$

$S = a|\xi|^2$? — параб.

Пов-ть $\Omega(x) = const$ — хар $\Leftrightarrow S(x, \nabla\omega) = 0$

① Зачем нужны х-ки?

на хар. пов-ти нельзя ставить зад. Коши.

① Хар. ур. для Пуассона $|\nabla\omega|^2 = 0 \Rightarrow \nabla\omega = 0$???

их нет $\Rightarrow$ св-во локальности ??

② Волновое — х-к дофига

1) $\omega(t,x) = ct - (a,x)$ — плоская волна $|a| = 1$

2) $\omega(t,x) = c^2(t-t_0)^2 - |x-x_0|^2$ — сферич. волна

③ Теплопров.

$|\nabla_x \omega|^2 = 0 \Rightarrow$ все х-ки имеют вид $t = const$

Зад. Коши будет иметь вид

$\begin{cases} \text{Ур.} \\ u|_{t=0} = \xi \end{cases}$

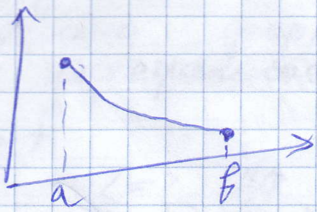
?

Мы работали с 1-мерными зад. 1 порядка с усл. Дирихле. 05.10 пр.

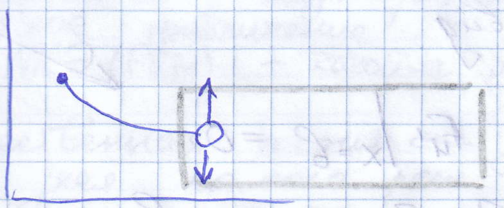
Одна из типичных зад – линеариз функц струны под нагрузкой

$$E[u]=\int_a^b \left[\frac{1}{2}(u')^2 - fu\right]dx \to \min \qquad u(a)=A,\ u(b)=B$$

Энергия



Иногда усл Дирихле не хватает: закреплен 1 конец, 2-ой конец свободен. (может ездить по вертикали)



Можем написать ур. Эйлера: $F_u - (F_{u'})'=0$

$-f \qquad (u')'=0 \iff -u''=f$

1 кр. усл. есть, а нужно 2 $\qquad u(a)=A$

~~Полезно~~ 1-ая вариация $DE[u]h$

∀ функции произв., у функционала вариация

$$0 = DE[u]h = \int_a^b [F_u h + F_{u'} h']dx = \int_a^b [u'h' - fh]dx =$$

усл min

[инт. по частям] ~~перекидыв~~ $= \int_a^b [-u''h - fh]dx + u'h\Big|_{x=a}^{x=b} =$

приращ. на концах отр. должно было равн. 0, а тут только на левом конце

$$= \int_a^b [-u''-f]h\,dx + u'(b)h(b)$$

Грызем слона по частям

1) ∀ приращ. h: $h(b)=0 \Rightarrow DE[u]h = \int_a^b [u''-f]h\,dx = 0$

$\Rightarrow$ (л. Д-Р.) $-u''-f=0$

(интегральное слаг. $=0$)

2) если вып. ур-ние Эйлера, то $DE[u]h = u'(b)h(b)=0$ ∀ допуст. h

$h(b)$ м.б. любым $\Rightarrow$ $u'(b)=0$ – естественное граничное усл.

Нужно, чтобы два куска отдельно $=0$.

h – это приращение. По $\forall$ напр. – произв. $=0$.

Производная Фреше???

$$\frac{d}{dt}E\left[u(x)+th(x)\right]\Big|_{t=0}$$

ЕГУ можно выводить из 1ой вар., а в простых сл. пользоваться домашней заготовкой.

Внеинт. слаг. получилось из инт по частям

$$\left(F_{u'}\cdot h\right)\Big|_{x=a}^{x=b} \ominus \longleftarrow \text{общий вид}$$

$$\ominus\ F_{u'}\Big|_{x=b}\cdot h(b)=0 \Rightarrow \boxed{F_{u'}\Big|_{x=b}=0}$$

Это без огр. на в.

Как только ситуация становится сложнее, нужно все делать сначала.

Гладкие финитные приращения?

Может бегать с двух концов $\Rightarrow$ нет никаких краевых усл.

На обоих концах будет естественное гр. усл. $\Rightarrow$ нужно 2 усл. найти.

$$u'h\Big|_{x=a}^{x=b}$$

① Δ $h(a)=0$, $h(b)=0$

② $u'(b)h(b)-u'(a)h(a)=0 \Rightarrow u'(b)=0,\ -u'(a)=0$

пн. ~~13:40~~ 13:40 ?

Д/з E – тот же (струна) $\leftarrow$ это 1 усл.

Усл: $u(a)=u(b)$ – период. гран. усл.

ЕГУ $=?$

$u'(b)h(b)-u'(a)h(a)=0$ $\qquad h(b)=h(a)$

1) Дифур
2) Область
3) Гранич. усл., нач. усл.

11.10 лек

Как ответить на вопрос о разрешимости:

- привести явную формулу — не всегда реально
  - "подвиг": интегральное предст

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f \\ u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases} \iff u(x) = \int_a^b \Gamma(x,y) f(y)\,dy$$

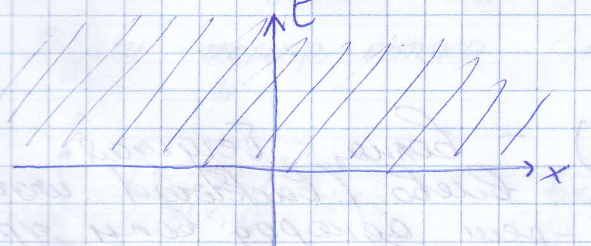
- послед-ть приближений
  - представл. в виде ряда
  - сеточное приближение
    - МКЭ (FEM) — какой-то метод
- качественная теория ⟵ доказ. к-л факт о решении, не зная самого реш.
  - Т. $\exists$ и! (сущ. и ед.)
  - априорные оценки реш.
    - принцип максимума
    - законы сохранения

Смирнов "Курс ВМ", т. 4 ч. 1, 2

Волновое ур.

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f$

на прямой: $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,+\infty) \iff (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty) =: Q$ ⟵ область



$\partial Q = \{(x,t) : t = 0\} = \underset{\text{ось}}{Ox}$
(граница)

На этой гр. нужно поставить условие

Нужны нач. коорд. и нач. скорость — в $\forall$ точке границы:

$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$
— усл. Коши (начальные усл.)

Задача Коши (гр. у.) для волнового ур. ⟵ ДУ на прямой (обл.)

Волн. ур. на прямой с усл. Коши.

Мы должны знать f (возмущ. сила), φ (нач. откл.) и ψ (нач. скор.)

1) Задача линейная (дифферур. лин. и усл. лин.) $\Rightarrow$ можно решать „по кускам"

2) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$, $u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = 0$?

$u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \psi$

3) $v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$ $\quad v|_{t=0} = 0$, $v_t|_{t=0} = \psi$

$u = v_t$ $\quad u|_{t=0} = v_t|_{t=0} = \psi$

$u_t|_{t=0} = v_{tt}|_{t=0} = c^2_{xx}|_{t=0} = 0_{xx} = 0$?

4) $w_{tt} - c^2 w_{xx} = f$, $\quad w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0$

принцип Дюамеля

5) Т. единственности (J-и сохр.)

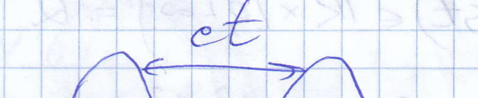
Пусть $u(x,t) = \alpha(x-ct)$, $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$

Тогда $u_{xx} = \alpha''(x-ct)$, $\begin{cases} u_t = -c\alpha'(x-ct) \\ u_{tt} = c^2\alpha''(x-ct) \end{cases}$

$\Downarrow$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

волна, бегущая вправо (forward wave)



$v(x,t) = \alpha(-x-ct) = \beta(x+ct)$ – волна, бегущая влево (backward wave)

$w(x,t) = \alpha(x-ct) + \beta(x+ct)$ – реш однород волн ур-я

$\xi = x - ct$
$\eta = x + ct$

$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = \cancel{u_\xi + u_\eta} \; -cu_\xi + cu_\eta$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$

$u_{xx} = (u_\xi + u_\eta)_\xi + (u_\xi + u_\eta)_\eta = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$u_{tt} = -c(-cu_\xi + cu_\eta)_\xi + c(-cu_\xi + cu_\eta)_\eta =$

$= c^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$

$c^2(-4u_{\xi\eta})=0$

$u_{\xi\eta}=0 \Rightarrow u_\xi = c(\xi) \Rightarrow u=\tilde{c}(\xi)+A(\eta)$

$\Rightarrow u(x,t)=\tilde{c}(x-ct)+A(x+ct)$

Типичная выкладка из качественной теории

$u(x,t)=\alpha(x-ct)+\beta(x+ct)$

$u(x,0)=0 \Leftrightarrow \alpha(x)+\beta(x)=0 \Rightarrow \beta(x)=-\alpha(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow u(x,t)=\alpha(x-ct)-\alpha(x+ct)$

$u_t(x,0)=\psi(x) \Leftrightarrow -c\alpha'(x) - c\alpha'(x) = \psi(x)$

$\Rightarrow \alpha'(x) = \alpha'(x) = -\frac{\psi(x)}{2c}$

Завтра (12.10) – 8382 пара по расписанию очно в 15:30 в 3311.

$\boxed{\text{12.10 пр}}$

Как получить оценку?

- Можно прийти и защитить д/з. (это пр.)
- Будет либо экз., либо зач. (рад. только деток) или?
- На 3 будет какая-то письменная работа. (д/з)
- На 4/5 устный экзамен.
- Тест + д/з ⇒ никаких формальных преимуществ, но может помочь на экзамене.

Может заменить экзамен курсовиком, но это неточно. (типа как у Павлова)

$\boxed{\text{Кажется, я умру.}}$

Пока не получается определить, в чем будет заключаться работа.

Задачи геометр. оптики – (пытаемся классифицировать брахистохрону)

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+(u')^2}}{v(x,u)}\,dx$$

вх. параметры: нач. усл. + $v(x,u)$

$v\equiv 1 \Rightarrow$ задача о прямой

$v\equiv\sqrt{H\cdot u} \Rightarrow$ брахистохрона

$v\equiv u \Rightarrow$ полуплоск. Пуанкаре?

$v = 1/u \Rightarrow$ мыльная пленка

~~Линия, кт~~ Прог, кот. строит экстремали геометр. оптики.

усл. трансверсальности

Д/Р
К/Р] → "3", допуск к устн. экз.

+

экз. → "4", "5"

Альтернатива: придумать курсач. → 3, 4, 5.

Сплайны

Кубический сплайн — ~~???~~ ?

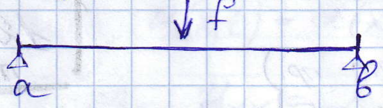
Условия стыковки - ? равенство произв.?

К этой штуковине есть вар. подход.

Задача о равновесии балки

Идеальная струна — сопр. растяжению, не сопр. изгибу.

Идеальная балка — сопр. изгибу, нерастяжима (совсем), не ломается.



При очень малых откл. целевой функционал выглядит так:

$$\boxed{\int_a^b \left[\frac{(u'')^2}{2} - fu\right] dx} \to \min$$

(пот. эн. деформ)?

$u(a) = A$ $\quad$ $u(b) = B$

Ее, получается, изгибают.

Свободно опёртая балка — фикс. только положение конца балки

Консольно-зажатая балка? ← это что-то другое.

$u'(a) = \tilde{A}$, $\quad u'(b) = \tilde{B}$ ← доп. усл.?

"Место + угол в каждой стене"

Считаем, что все 4 усл. заданы → балка зажата.

Форма изгиба — экстремаль.

1) Выписываем чертову вариацию

$$\Pi[u+th] = \int_a^b \left[\frac{(u''+th'')^2}{2} - f(u+th)\right] dx$$

$$D\Pi[u]h = \left(\frac{d}{dt}\Pi[u+th]\right)\Big|_{t=0} = \int_a^b \left[u''h'' - fh\right] dx = 0$$

Хочется применить О.Л. Д-Р, но нужно избавиться от произв. при h.

Раньше избавлялись $\int$ по частям. Тут придется $\int$ по частям дважды.

$$\int_a^b [u''h'' - fh]\,dx = \int_a^b [-u'''h' - fh]\,dx + \cancel{\underset{0}{u''h'}}\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$u + th$ д.б. допустимой, т.е. уд. краевым условиям.

Приращение не должно дать вклада в краевые усл.

$u'(a) = \tilde{A}, \quad u'(a) + th'(a) = \tilde{A} \implies h'(a) = 0$

Функ. уд. усл. $\implies$ приращ. уд. тому же усл., но однородному, т.е. с 0.

$$= \int_a^b [-u'''h' - fh]\,dx = \int_a^b [u''''h - fh]\,dx - \cancel{\underset{0}{u'''h}}\Big|_{x=a}^{x=b} =$$

$$= \int_a^b (u^{(4)} - f)\,h\,dx \overset{\text{ЛДР}}{\implies} u^{(4)} = f \leftarrow \text{ур. Эйлера}$$

4 константы $\int$, есть 4 кр. усл., равномерно распр. по (·) границы.

Уберем усл. на $u'(a)$, $u'(b)$

Получим: $0 = \int_a^b (u^{(4)} - f)\,h\,dx + u''(b)h'(b) - u''(a)h'(a)$

1) Допускаем, что $h'(a) = h'(b) = 0$

$\int_a^b (u^{(4)} - f)\,h\,dx = 0 \quad \forall h$ (даже те, кот. нет)

2) $u''(b) = 0, \; u''(a) = 0 \leftarrow$ **ЕГУ**

u'' – изгибающий момент

18.10 ЛЕК

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \in (0, +\infty)$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi, \quad u_t\big|_{t=0} = \psi$$

1) $f = 0 \Rightarrow u(x,t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct)$

2) $f = 0, \ \overset{?}{\varphi} = 0 \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2c} \int\limits_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy$?

3) $f = 0, \ \psi = 0$

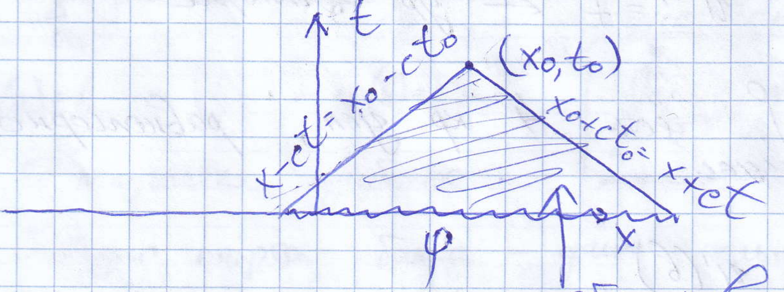
$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= \alpha(x+ct) + \beta(x-ct) \\ u_t(x,t) &= c\alpha'(x+ct) - c\beta'(x-ct) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\alpha(x) + \beta(x) = \varphi \\ &c\alpha'(x) - c\beta'(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\alpha' = \beta' \Rightarrow \alpha = \beta + A$$

$$\Rightarrow 2\beta = \varphi(x) + A \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}A \\ \alpha = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}A \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)}{2}$$

Есть еще 2-ой способ, но я совсем его не поняла.



Физический смысл

я ничего не поняла

обл. зависимости (·) (x_0, t_0)

Принцип Дюамеля

1) $\begin{cases} y' - ay = f \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\Big|$ $\overset{L}{\xi}$ отлаплассим

$$L(y) = Y, \quad L(f) = F, \quad L(y') = pY - y(0) = pY$$

$$(p - a)Y = F \Rightarrow Y = \frac{1}{p-a}F \ \Big|\ L^{-1} \xrightarrow{\text{т.о}} \text{свертке}$$

?

$$y\left(e^{ax}\right)^{?} * f = \int\limits_0^{x\ t} e^{aq} f(x - q)\,dq^{\,t} = \int\limits_0^{x\ t} e^{a(x - z)} f(z)\,dz$$

$z = e^{ax}$: $z' - az = 0, \ z(0) = 1$

② $(p^2+\omega^2)Y = F \Rightarrow Y = \frac{1}{p^2+\omega^2} F \Rightarrow y = z \overset{\text{свертка}}{*} f$,

где $z = L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$

$z'' + \omega^2 z = 0, \ z(0) = 0, \ z'(0) = 1$ ← очень важная единица

$y = z * f = \int_0^x z(x-\tau) f(\tau)\, d\tau$

z – фундаментальное реш.? – посмотреть опр.

Дифференциальный оператор?

Т! $Tz = 0, \ z^{(n-1)}(0) = 1$?? $z^{(n-k)}(0) = 0, \ k = 2, \dots, n$?

z – своб. эволюция сист. при стандартных нач. усл.

Пн 13:40 – ?

19.10 пр

К сплайнам есть подход алгебраический[1] и вариационный[2].

(1) $p_0 \quad x_1 \quad p_1 \quad x_2 \quad p_2 \quad x_3 \quad p_3$

сетка узлов, на $\forall$ отр. сплайн $= p(x^3)$

$$\begin{cases} p_0(x_1) = p_1(x_1) = f_1 \\ p_0'(x_1) = p_1'(x_1) \\ p_0''(x_1) = p_1''(x_1) \end{cases}$$

(2) $a \quad p_0(x) \quad b \quad p_1(x) \quad c$

$$\begin{cases} p_0(a) = p_1(b) = f_1 \\ p_0'(a) = p_1'(b) \\ p_0''(a) = p_1''(b) \end{cases}$$

КДФ Класс допуст. функций: $u(a) = A, \ u(b) = B, \ u(c) = C$

КДП Класс. допуст. прираш.: $h(a) = h(b) = h(c) = 0$

Функционал энергии:

$$E[u] = \frac{1}{2}\int_a^b (u'')^2\,dx + \frac{1}{2}\int_b^c (u'')^2\,dx$$

$u, h \in C^1(b)$ (линейка не переламывается в узлах)

$$0 = DE[u]h = \int_a^b u''h'' + \int_c^b u''h'' = \int_a^b -u'''h' + \int_b^c -u'''h' +$$

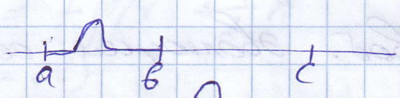
$$+ u''h'\Big|_{x=a}^{b\ \text{слева}} + u''h'\Big|_{x=b\ \text{справа}}^{c} = \int + \int + \underline{u''h'\Big|_{x=a}^{x=c}} +$$

$$\underbrace{+\left(u''(b-0) - u''(b+0)\right)h'(b)}_{S} \ominus$$

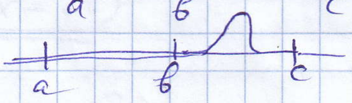
$$\ominus\ S + \int_a^b u^{(4)}h + \int_b^c u^{(4)}h - \overset{0}{u'''h}\Big|_{x=a}^{b} - \overset{0}{u'''h}\Big|_{x=b}^{c} =$$

$$= \int_a^b \cancel{u^{(4)}}h + \int_b^c \cancel{u^{(4)}}h + u''h'\Big|_{x=a}^{x=c} + \left(u''(b-0) - u''(b+0)\right)h'(b) =$$

1) $u^{(4)} = 0,\ x \in (a,b)$



2) $u^{(4)} = 0,\ x \in (b,c)$



ЕГУ: $\left[\begin{array}{l} u''(c) = 0,\ -u''(a) = 0 \longleftarrow * \\ u''(b-0) - u''(b+0) = 0 \end{array}\right.$

энергетические гр. усл. $\left[\begin{array}{l} u'(b-0) - u'(b+0) = 0 \\ u(a) = A,\ u(b) = B,\ u(c) = C \end{array}\right.$

7 усл, 8 констант $\int$, но $u(b) = B$ работает за 2 гр. усл.

Такие сплайны назыв. натуральными.

С усл. $*$ падает кач-во аппроксимации на краях.

Зато красиво + удобнее говорить об аппроксимационных сплайнах $\Longrightarrow$ вводится функционал штрафа.

$$+\beta\,\frac{1}{2}\left(u(b) - B\right)^2 \ ?$$

У плеча лука нет распр. нагрузки $\Rightarrow$ она вся на конце. Функционал будет интегральной.

1) Задача с неоднородной ср. и ЕГУ на границе раздела

2) Струна с бусиной

ЭТО НА ПОТОМ

Книжки по сплайнам: Завьялов
Карп? Practical Guide to Splines

не факт, что есть вариационка

М.б. в 5-томнике Смирнова

Well, fuck.

08.11 лек

Доказываем единственность волн. ур.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

$\exists\ u_1, u_2$ – решения зад.

$\Rightarrow\ w = u_1 - u_2$ – решение однородной задачи:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(0,x) = 0 \\ w_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Необх. доказать, что у однор. зад. нет нетрив. решений.

$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \quad \Big| \cdot w_t,\ \int\limits_{\Pi_T} dx\,dt$

Π_T:

$\Pi_T = [0,T]\times\mathbb{R}$

$$\iint\limits_{\Pi_T} w_{tt} w_t\,dx\,dt - \iint\limits_{\Pi_T} c^2 w_{xx} w_t\,dx\,dt = 0$$

1) $$\iint\limits_{\Pi_T} w_{tt} w_t\,dx\,dt = \iint\limits_{\Pi_T} \left(\frac{1}{2} w_t^2\right)_t dx\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} w_t^2(T,x) - \frac{1}{2} w_t^2(0,x)\right) dx$$

2) [инт. по частям] $-\iint_{\Pi_T} c^2 w_{xx} w_t \, dx\,dt = \iint_{\Pi_T} c^2 w_x w_{xt} \, dx\,dt \; -$

самая скользкая часть док-ва

$$-\int_0^T c^2 w_x w_t \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \quad (=)$$

что с ней делать?

Предполагаем, что вот эта вот хреновина равна 0.

Это правда, если волны финитные.

$$(=) \quad \iint_{\Pi_T} \left(\frac{1}{2} c^2 w_x^2\right)_t dx\,dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} c^2 w_x^2(T,x) - \frac{1}{2} c^2 w_x^2(0,x)\right) dx$$

это произв. по t

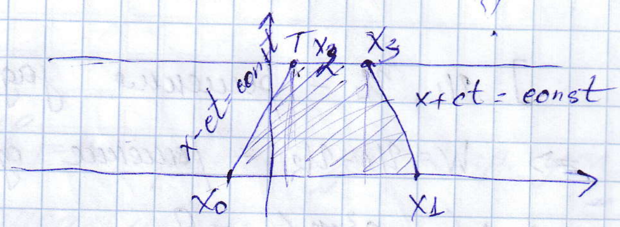
по сути кин. энергия — по сути пот. энергия

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} c^2 w_x^2\right) dx \Big|_{t=T} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} c^2 w_x^2\right) dx \Big|_{t=0}$$

T – произвольное, т.е. с течением времени у нас равенство не портится — получили, по сути, ЗСЭ

Как я буду в этом разбираться?

$$w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \;\Big|\cdot w_t; \quad \iint_{D_T} dx\,dt$$



1) $\iint_{D_T} w_{tt} w_t \, dx\,dt = \iint_{D_T} \left(\frac{1}{2} w_t^2\right)_t dx\,dt =$

$x_2 = x_0 + cT$

$x_3 = x_1 - cT$

$$= \int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=T} - \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=0}\right) dx \; +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=\frac{x-x_0}{c}} - \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=0}\right) dx + \int_{x_3}^{x_1} \left(\frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=\frac{x_1-x}{c}} - \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=0}\right) dx \quad (=)$$

Теперь пользуемся границ. усл.

$$(=) \quad \int_{x_2}^{x_3} \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=T} dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=\frac{x-x_0}{c}} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{w_t^2}{2}\Big|_{t=\frac{x_1-x}{c}} dx$$

2) $\iint\limits_{D_t} w_{xx} w_t \, dx\, dt = \iint\limits_{D_t} w_x w_{xt} \, dx\, dt - \cancel{\int_0^T \int_{x_0+ct}^{x_0-ct} w_x w_t \, dx\, dt} \quad \int_0^T \left(w_x w_t \Big|_{x=x_0+ct}^{x=x_1-ct} \right) dt$

$$= \int_{x_2}^{x_3} \frac{w_x^2}{2}\Big|_{t=T} dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{w_x^2}{2}\Big|_{t=\frac{x-x_0}{c}} dx + \int_{x_3}^{x_1} \frac{w_x^2}{2}\Big|_{t=\frac{x_1-x}{c}} dx$$

$$0 = \underbrace{\int_{x_2}^{x_3} \left(\frac{1}{2} w_t^2 + \frac{1}{2} c^2 w_x^2 \right) dx \Big|_{t=T}}_{} + \underbrace{\qquad\qquad}_{\geq 0}$$

why?

полн. эн. в $t=0$ полн. эн. в $t=T$ эн., ког. "утекла"?

Хитрый ЗСЭ.

Каким-то образом это доказывает, что решение гл. б. только 0.

Теперь берем полуструну

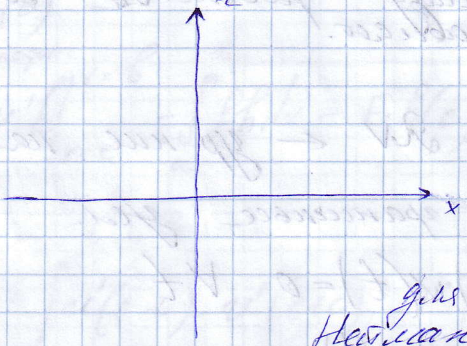
$x=0$

$u(t,0)=0$ ← закрепим конец

$$V(t,x) = \begin{cases} u(t,x), & x>0 \\ -u(t,-x), & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

это для усл. Дирихле нечетное продолжение

нечетная функ.



– решение задачи

$$\begin{cases} V_{tt} - c^2 V_{xx} = \tilde{f} \\ V(0,x) = \tilde{\varphi}(x) \\ V_t(0,x) = \tilde{\psi}(x) \end{cases}$$

для усл. Неймана – четное продолж.

$V_{tt}\big|_{x=0} = 0_{tt} = 0$

???

$v_{xx}\big|_{x=0} = 0$ в силу нечетности

Эту задачу мы уже решали.

Возьмем на отрезке

возникнет куча переотраж. волн

Волновое ур-ние на отрезке и стоячие волны

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = (f)\ 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \\ u_t(0,x) = \psi(x) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \end{cases}$$

неодн. реш. по принципу Дюамеля, знал реш. одн.

(отрезок произв. длины)

бегущей волны не будет

Собств. колеб. есть профиль ампл. меняется (умнож.), но он никуда не уходит

Это стоячие волны.

$u(t,x) = V(x)W(t)$

Это было у Котьчга в каком-то виде.

$$V \cdot W_{tt} - c^2 V_{xx} W = 0 \iff \underbrace{\frac{W_{tt}}{W}}_{\text{завис. только от } t} = c^2 \underbrace{\frac{V_{xx}}{V}}_{\text{завис. только от } x} = const$$

В силу равенства обе половины ни от чего не зависят.

$V_{xx} = \lambda V \leftarrow$ ур-ние на собств. функции

Учтем граничные усл. $\quad Tv = \lambda v$ - собств. вект.

$V(0)W(t) = 0 \quad \forall t$

$W(t) = 0 \Rightarrow$ у нас просто нас это не интересует

$$\Rightarrow \boxed{V(0) = 0} \quad \boxed{V(L) = 0}$$

$$\begin{cases} V_{xx} = \lambda V \\ V(0) = V(L) = 0 \end{cases}$$

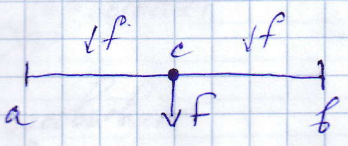
вот эту задачу будем решать

$$\int_0^L V_{xx} V dx = \int_0^L \lambda V^2 dx$$

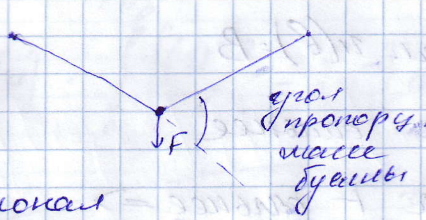
$$-\int_0^L V_x^2 dx + \underbrace{V_x V \Big|_{x=0}^{x=L}}_{0} = -\int_0^L V_x^2 dx \Rightarrow \lambda = -\frac{\overbrace{\int_0^L V_x^2 dx}^{>0}}{\underbrace{\int_0^L V^2 dx}_{>0}} < 0$$

1. Струна с бусиной

08.11 пр.



- струна с закреп. концами
- распределенная сила f
- концентрированная сила F, действ. в 1 точке



если струна невесомая, свободные участки – прямая (сокращаем длину струны)

Функционал энергии:

$$E[u] = \int_a^b \left[\frac{1}{2}(u')^2 - fu\right] dx - \underline{F\cdot u(c)}$$

это непрерывность

КДФ: $\{u : u(a) = A,\ u(b) = B,\ u \in C^1(a,c) \cap C^1(c,b) \cap C(\{c\})\}$

нужно допустить изломы, но не разрывы в т. c

Приращения наследуют гладкость, кр. усл. однородные

$$0 = DE[u]h = \int_a^b [u'h' - fu]dx - F\cdot h(c) =$$

$(u+th)c$ ‖ $u(c) + th(c)$ (дифф. по t)

$$= \int_a^c u'h'dx + \int_c^b u'h'dx - \int_a^b fh\,dx - F\cdot h(c) =$$

$b-0$ ← и тут пофиг

$$= -\int_a^c u''h\,dx + u'h\Big|_{x=a+0}^{x=c-0} - \int_{c+0}^{b} u''h\,dx + u'h\Big|_{x=c}^{x=b} - \int_a^b fh\,dx - F\cdot h(c) =$$

тут пофиг

$$= \int_a^c (-u''-f)h\,dx + \int_c^b (-u''-f)h\,dx + [u'(c-0) - u'(c+0) - F]\,h(c) \Rightarrow$$

$[h(c-0) = h(c+0)$ (ну непр.)$]$

$$\Rightarrow \begin{cases} -u'' = f, & x \in (a,c) \\ -u'' = f, & x \in (c,b) \\ u(a) = A, & u(b) = B \\ u'(c-0) - u'(c+0) = F \\ u(c-0) = u(c+0) \end{cases}$$

– натяжение слева + справа должны компенсировать точечную силу

4 кр. усл.

1(·) границы ⟶ 1 ГУ • порядок диффура

Забавное следствие:

$c = b$

$$E[u] = \int_a^b \left[\frac{1}{2}(u')^2 - fu\right]dx - F\cdot u(b)$$

$u \in C^1(a,b)$, исчезает усл. $u(b)=B$

Точка c не мешает $\int$ по частям

- либо опора сильнее
- либо сила F сильнее $\Rightarrow$ конец B уходит вниз, пока не уравновесится натяжением

$$0 = DE[u]h = \int_a^b [-u''-f]h\,dx + h(b)[-u'(b)-F]$$

$\boxed{-u'(b)=F}$ — неоднородное усл. Неймана (ЕГУ)

2. Неоднородная среда

Разные коэфф. жесткости

$a \;\; k_1 \;\; c \;\; k_2 \;\; b$

$$E[u] = \int_a^c \frac{k_1(u')^2}{2}dx + \int_c^b \frac{k_2(u')^2}{2} - \int_a^b fu\,dx$$

$$0 = DE[u]h = \int_a^c k_1u'h'dx + \int_c^b k_2u'h'dx - \int_a^b fh\,dx =$$

$$= -\int_a^c k_1u''h\,dx + k_1u'h\Big|_{x=a}^{x=c-0} - \int_c^b k_2u''h\,dx + k_2u'h\Big|_{x=c+0}^{x=b} - \int_a^b fh\,dx =$$

$$= \int_a^c(-k_1u''-f)h\,dx + \int_c^b(-k_2u''-f)h\,dx + [k_1u'(c-0) - k_2u'(c+0)]\,h(c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k_1u'' = f, & x\in(a,c) \\ -k_2u'' = f, & x\in(c,b) \\ u(a)=A, & u(b)=B \\ k_1u'(c-0) = k_2u'(c+0) \\ u(c-0) = u(c+0) \end{cases}$$

Усл. Робена: ~~[illegible]~~

усл. Д. засовывают в КДФ

усл. Н засовывают в целевой функ.

$$u'(a)+\alpha u(a)=A$$

$\alpha=0 \Rightarrow$ усл. Неймана

$\alpha=\infty \Rightarrow$ усл. Дирихле (в пределе)

$$E[u]=\int_a^b\left[\frac{(u')^2}{2}-fu\right]dx+\alpha\cdot\frac{u(b)^2}{2}-Fu(b)$$

это что за покемон?

в т. b пружина, кот. штрафует отклонения от 0

$$\alpha\frac{[u(b)-B]^2}{2}$$ — отклонения от B

$$0=DE[u]h=\int_a^b\left[u'h'-fh\right]dx+\alpha u(b)h(b)-Fh(b) \ (=)$$

сложение функций — поточечная операция

$$\frac{\alpha((u+th)(b))^2}{2}=\frac{\alpha}{2}\left[u(b)+th(b)\right]^2\Big|\frac{\partial}{\partial t}=$$

$$=\alpha\left[u(b)+th(b)\right]h(b)\Big|t=0=\alpha u(b)h(b)$$

Что такое вариация функционала:

$$DI[u]h=I[u+th]\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

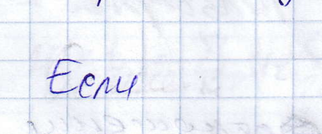
$$(=)\int_a^b\left[-u''h-fh\right]dx+u'h\Big|_{x=a}^{x=b}+\alpha uh\Big|_{x=b}-Fh\Big|_{x=b}=$$

$$=\int_a^b(-u''-f)h\,dx+\left(u'(b)+\alpha u(b)-F\right)h(b) \Rightarrow \begin{cases}-u''=f\\ u(a)=A\\ u'(b)+\alpha u(b)=F\end{cases}$$

при $x=a$ закрепл. концу.

Получилось условие Робена.

Если



$$\begin{cases}-u''=f\\ u(b)=B\\ -u'(a)+\alpha u(a)=F\end{cases}$$

Гладкая неоднородная среда

$$E[u] = \int_a^b \left[p(x)\, \frac{(u'(x))^2}{2} - f(x) u(x) \right] dx$$

$p \in C^1(a,b)$;

$$0 = DE[u]h = \int_a^b [p u' h' - f h]\, dx = \int_a^b [-(pu')' h - f h]\, dx + p u' h \Big|_a^b =$$

Ур. Эйлера: $-(pu')' = f$ — ур. Штурма–Лиувилля

Усл. Неймана: $p(b) u'(b) = 0$

$-p(a) u'(a) = 0$

В усл. Робена $p(x)$ тоже будет лезть:

$$p(b) u'(b) + \alpha u(b) = F$$

$$-p(a) u'(a) + \alpha u(a) = F$$

Вот такая вот история с таков вот перерывом.

Ко-нормальная производная??

Формальное док-во, что мы имеем лок. минимум:

$$D^2 E[u](h,h) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} E[u + th] \Big|_{t=0}$$

$\forall h:\ DE[u]h = 0$

$\forall h:\ D^2 E[u](h,h) \geq 0$

Можно найти ~~все~~ крит. точки и вычислить знач. функционала $\Rightarrow$ сразу найдем глоб. минимум.

Принцип Гильберта–Куранта

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} \geq \lambda_{min}, \quad A = A^T$$

релеевское отношение?

$\vec{x} = x_1 \vec{v_1} + \ldots + x_n \vec{v_n}$

$A\vec{x} = \lambda_1 x_1 \vec{v_1} + \ldots + \lambda_n x_n \vec{v_n}$

$\lambda_{min} = \min\limits_{|x|=1} (Ax, x)$

$(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$

Множители Лагранжа

$(A\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$

Метод разделения переменных для волнового ур-ния (продолжение)

15.11 лек.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = v(x)w(t)$

$v\ddot{w} = c^2 v'' w \iff \frac{\ddot{w}}{vc^2} = \frac{v''}{v} = \lambda$

($\cdot\cdot$ - произв. по t, $''$ - произв. по x)

$v(0) = v(L) = 0$

Решаем задачу:

$$\begin{cases} v'' = \lambda v \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases}$$ (задача на собств. функ. оператора взятия 2-ой произв.)

1) $\lambda = \frac{-\int (v')^2}{\int v^2} < 0 \Rightarrow \lambda = -\mu^2$?

2) $v'' + \mu^2 v = 0 \Rightarrow v = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$, $v(0) = v(L) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} v = \sin(\mu x) \\ \sin(\mu L) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_k = \frac{\pi k}{L} \\ \lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{L^2} \qquad k \in \mathbb{N} \\ v_k = \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) \end{cases}$$

$\ddot{w} = \lambda c^2 w \iff \ddot{w} + \mu^2 c^2 w = 0 \iff w_k = A\cos(c\mu_k t) + B\sin(c\mu_k t)$

$u_k(x,t) = \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left[A_k \cos\left(\frac{c\pi k t}{L}\right) + B_k \sin\left(\frac{c\pi k t}{L}\right)\right]$

$u(x,t) = \sum_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)\left[\underline{A_k} \cos\left(\frac{c\pi k t}{L}\right) + \underline{B_k} \sin\left(\frac{c\pi k t}{L}\right)\right]$

нужно найти A_k, B_k

Подставляем $t=0$:

это что-то выдуманное Фурье

$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right) = \varphi(x) \ \Big| \cdot v_m, \int_0^L \Rightarrow A_m \int_0^L v_m^2 dx = \int_0^L \varphi(x) v_m(x)\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$

$$u_t\big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \frac{c\pi k}{L} \sin(\pi k x) = \psi(x)$$

$$\Rightarrow B_k = \frac{2}{c\pi k}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{L}\right)$$

Ур-ние Штурма-Лиувилля

$$-\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x), \qquad x\in[a,b]$$

$$\begin{cases} p(x)\ge\delta>0\\ q(x)\ge 0\end{cases}$$

Задача Ш.-Л.:

{ Ч. Ш.-Л.
Граничные усл. (м.б. всякие разные)

__Модельная зад. Ш.-Л.__

$$\begin{cases}-u''=f\\ u(0)=u'(\pi)=0\end{cases}$$

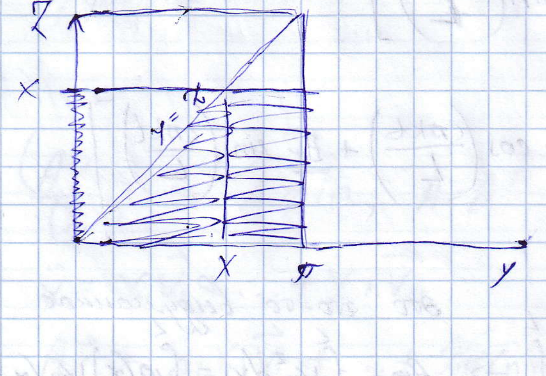
$x=0$ $\qquad$ $x=\pi$

$$\cancel{u'(x) = \int_0^x u''(y)\,dy + A = \int_0^x -f(y)\,dy + A \quad \Big| A = u'(0)}$$

$$u'(x)-u'(\pi) = \int_\pi^x u''(y)\,dy \Rightarrow u'(x) = 0 + \int_x^\pi f(y)\,dy$$

$$u(x)-u(0) = \int_0^x u'(z)\,dz \Rightarrow u(x) = \int_0^x u'(z)\,dz =$$

$$= \int_0^x\left(\int_z^\pi f(y)\,dy\right)dz \;=\; \cancel{\int_0^x\left(\int_0^y f(y)\,dz\right)dy = \int_0^x f(y)\cdot y\,dy}$$



Интегральное представление решения.

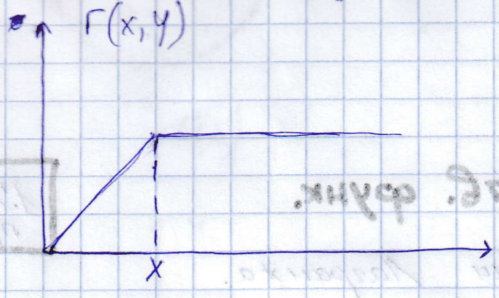
$$= \int_0^x\left(\int_0^y f(y)\,dz\right)dy + \int_x^\pi\left(\int_0^x f(y)\,dz\right)dy =$$

$$= \int_0^x f(y)\,y\,dy + \int_x^\pi f(y)\,x\,dy =$$

$$= \int_0^\pi f(y)\,\Gamma(x,y)\,dy, \text{ где } \Gamma(x,y) = \begin{cases} y, & y\le x\\ x, & y\ge x\end{cases}$$

$$u'(x) = \cancel{f(x)\cdot x} - \cancel{f(x)\cdot x} + \int_x f(y)\,dy$$

Волшебная функция $\Gamma(x,y)$:



Теперь то же самое, но с усл. Дирихле

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases} \quad ?$$

$$u'(x) - u'(\pi) = \int_\pi^x u''(y) \Rightarrow u'(x) = A + \int_x^\pi f(y)\,dy; \quad A = u'(\pi)$$

$$u(x) - u(0) = \int_0^x u'(z)\,dz = \int_0^x \Big(A + \int_z^\pi f(y)\,dy\Big)dz = Ax + \int_0^x\Big(\int_z^\pi f(y)\,dy\Big)dz$$

$$\Rightarrow u(x) = Ax + \int_0^x f(y)\,y\,dy + \int_x^\pi f(y)\,x\,dy$$

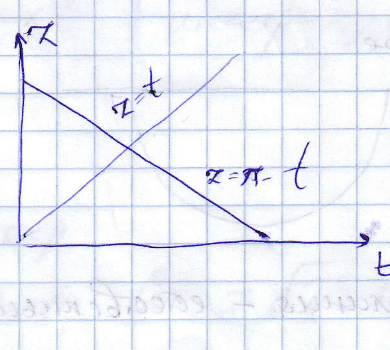
$$0 = u(\pi) = A\pi + \int_0^\pi f(y)\,y\,dy \quad A = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(y)\,y\,dy$$

$$u(x) = \int_0^x f(y)\,y\,dy + \int_x^\pi f(y)\,x\,dy - \int_0^\pi f(y)\frac{xy}{\pi}\,dy =$$

$$= \int_0^x f(y)\Big[y - \frac{xy}{\pi}\Big]dx + \int_x^\pi f(y)\Big[x - \frac{xy}{\pi}\Big]dy = \int_0^x f(y)\,\frac{y(\pi - x)}{\pi}\,dy +$$

$$+ \int_x^\pi f(y)\,\frac{x(\pi - y)}{\pi}\,dy$$

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(\pi - x)}{\pi}, & y < x \\ \dfrac{x(\pi - y)}{\pi}, & y > x \end{cases}$$



$$u(x) = \int_0^x \Gamma(x,y)\, f(y)\, dy$$

функция Грина

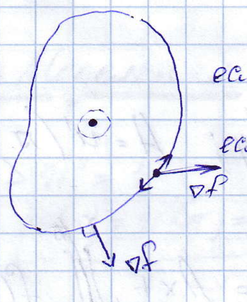
ог. чувствительна ко всем комп. краевой задачи

Выясняем, как искать собств. функ.

15.11 пр

Условные экстремумы и множители Лагранжа.

$$\left.\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_n) \to min \\ & g(x_1, \dots, x_n) = c \end{aligned}\right\} \sim \cancel{\vec\nabla f = 0} \quad \vec\nabla f - \lambda \vec\nabla g = 0 \qquad \nabla g \neq 0$$



если min достигается внутри, то $\vec\nabla f = 0$

если min на границе, то

если град. по отн. к границе напр. косо, то экстремума там быть не может

Я запуталась.

$$\nabla f \parallel \nabla g \iff \nabla f, \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\nabla g}} - \text{ЛЗ} \iff \nabla f - \lambda \nabla g = 0$$

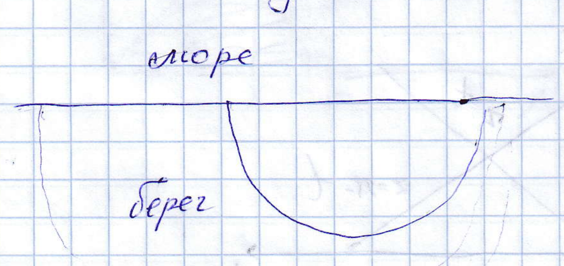
$$\left.\begin{aligned} & F[u] \to min \\ & G[u] = c \end{aligned}\right\} \sim \begin{cases} DF[u]h - \lambda DG[u]h = 0 \\ G[u] = c \end{cases}$$

Практическая задача

Задача Дидоны ← мифическая основательница Карфагена

Есть веревка длины L. Нужно огородить ей как можно большую площадь.

В степи у нас был бы круг, но у нас не степь.

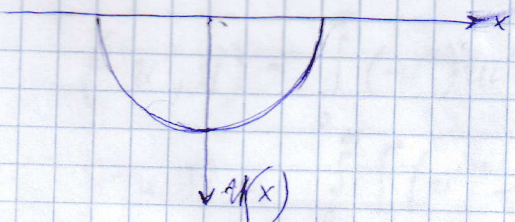


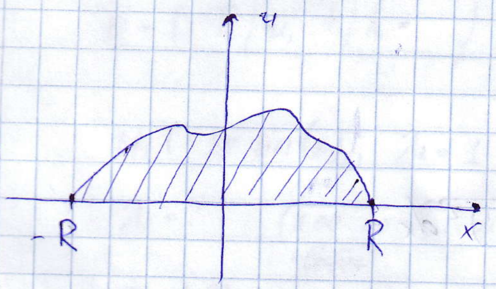
С прямым берегом будет полукруг.

Береговая линия – естественный забор.

Пожалуйста, ответьте кто-то другой. Спасибо.

Будем решать задачу с берегом.





$$u(-R) = u(R) = 0$$

$$S[u] = \int_{-R}^{R} u(x)\,dx \longrightarrow max$$

$$L[u] = \int_{-R}^{R} \sqrt{1+(u')^2}\,dx = L$$

$$\Phi[u,\lambda] = S[u] - \lambda L[u]$$

$$D\Phi[u,\lambda]h = 0$$

$$\Phi[u,\lambda] = \int_{-R}^{R} \left[u - \lambda\sqrt{1+(u')^2}\right] dx$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda]h = \int_{-R}^{R}\left[h - \lambda\frac{2u'h'}{2\sqrt{1+(u')^2}}\right]dx = \int_{-R}^{R}\left[h + \lambda h\left(\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}}\right)'\right]dx -$$

$$- \cancel{\left.\frac{u'h}{\sqrt{1+(u')^2}}\right|_{x=-R}^{x=R}}_{0}$$

$$1 + \lambda\frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = 0 \iff \frac{u'}{\sqrt{1+(u')^2}} = -\frac{x}{\lambda} + A = \frac{a-x}{\lambda}$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = B \iff z^2 = B^2(1+z^2) \iff (1-B^2)z^2 = B^2 \iff$$

$$\iff z = \pm\frac{B}{\sqrt{1-B^2}}$$

$$u' = \pm\frac{\frac{a-x}{\lambda}}{\sqrt{1-\left(\frac{a-x}{\lambda}\right)^2}} = \pm\frac{a-x}{\sqrt{\lambda^2-(a-x)^2}} \quad [\text{интегрируем}]$$

$$u = \pm\sqrt{\lambda^2-(x-a)^2} + C$$

Тут написано что u - кусок окр.

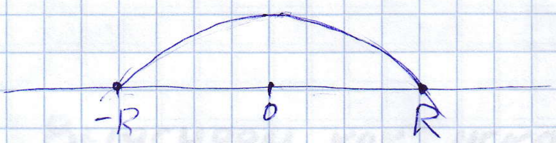
Подключаем усл. Дирихле: $a = 0$, $C = \mp\sqrt{\lambda^2 - R^2}$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\lambda^2-x^2} - \sqrt{\lambda^2-R^2}$$

Проблема: есть λ

Ищем ц/ сообр. $L[u] = L$

Что по факту получилось:



Задача о провисании цепи

$$L = L[u] = \int_a^b \sqrt{1+(u')^2}\,dx$$

$$\Pi[u]$$

масса равномерно распределена

По какой форме провиснет? (гиперсинус)

$Q(x) = (A\vec{x}, \vec{x})$, A – симм, т.е. $A = A^T$

$Q(x) \longrightarrow min = \lambda min$

$|\vec{x}|^2 = 1$

Минимум квадр. формы на ед. сфере

$$\Phi(\vec{x}, \lambda) = (A\vec{x}, \vec{x}) - \lambda|\vec{x}|^2$$

$$\nabla\Phi = A\vec{x} + A^T\vec{x} - 2\lambda\vec{x} = 2(A\vec{x} - \lambda\vec{x})$$

arg min — собств. вектор матрицы A

Пусть $A\vec{x_0} = \lambda\vec{x_0}$, $|\vec{x_0}| = 1$

Тогда $(A\vec{x_0}, \vec{x_0}) = (\lambda\vec{x_0}, \vec{x_0}) = \lambda|\vec{x_0}|^2 = \lambda$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(-u'', u) = \int_0^{\pi} (-u'') u\,dx = \int_0^{\pi} (u')^2 dx \longrightarrow \min, \quad \int_0^{\pi} u^2 dx = 1$$

$$\Phi[u,\lambda] = \int_0^{\pi} \left[(u')^2 - \lambda u^2 \right] dx;$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda]h = \int_0^{\pi} \left[2u'h' - 2\lambda u h \right] dx = 2\int_0^{\pi} \left[(-u'')h - 2\lambda u h \right] dx.$$

$u_1(x) = \sin(x)$; $\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = ?$ (2-ое по величине) ~~вера~~

Я ничего не поняла.

$u_2 \perp u_1$

$$\int_0^{\pi} (u')^2 \longrightarrow \min; \quad \int_0^{\pi} u^2 dx = 1; \quad \int_0^{\pi} u \sin(x)\,dx = 0$$

$$\Phi[u,\lambda,\mu] = \int_0^{\pi} \left[(u')^2 - \lambda u^2 - \mu u \sin(x) \right] dx;$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda,\mu]h = \int_0^{\pi} \left[2u'h' - \lambda u h - \mu h \sin(x) \right] = 0$$

$h = u_1$: $\cancel{0 = \int_0^{\pi} (u_2')^2 - \lambda u_2^2}$ $\quad 0 = \int_0^{\pi} \Big[\underbrace{2u'\cos(x)}_{0} - \underbrace{\lambda u \sin(x)}_{0} - \mu \underbrace{\sin^2(x)}_{>0} \Big] dx$

$\Rightarrow \mu = 0$ $\qquad$ λ, μ - множители Лагранжа (?)

Все еще решаем:

$-u'' = \lambda u$

Общий принцип Гильберта-Куранта

Пусть T - самосопр. оп., $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ - с.ч. оп. T

Тогда $\lambda_1 = \min \dfrac{(Tu,u)}{(u,u)}$ ⟵ отношение Рэлея

$$\lambda_2 = \max_{v} \min_{u \perp v} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}$$

$$\lambda_3 = \max_{v_1, v_2} \min_{\substack{u \perp v_1 \\ u \perp v_2}} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}$$

$$\lambda_{k+1} = \max_{\{v_1,\ldots,v_k\}} \min_{\substack{u \perp v_j \\ j=1,\ldots,k}} \frac{(Tu,u)}{(u,u)}$$

В прошлый раз...

22.11 лек.

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \iff u(x) = \int_0^\pi \Gamma(x,y) f(y)\,dy,$$

где

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \frac{x(\pi-y)}{\pi}, & x \le y \\ \frac{y(\pi-x)}{\pi}, & x > y \end{cases}$$

разрешающий оператор

Почему это работает:

- $\Gamma(0,y) = 0$
- $\Gamma(\pi,y) = 0$ } попадаем в краевые усл.
- Γ непрерывна на $[0,\pi] \times [0,\pi]$
- $-\Gamma_{xx} = 0$, если $x \ne y$
- $[\Gamma_x(x,y)]|_{y=x} = 1$

$$u' = \int_0^x \frac{(\pi-y)f(y)}{\pi}dy + \frac{x(\pi-x)f(x)}{\pi} - \int_x^\pi \frac{y f(y)}{\pi}dy - \frac{x(\pi-x)f(x)}{\pi} =$$

$$= \int_0^x \frac{(\pi-y)f(y)}{\pi}dy - \int_x^\pi \frac{yf(y)}{\pi}dy$$

$$u'' = \frac{(\pi-x)f(x)}{\pi} + \frac{xf(x)}{\pi} = f(x)$$

Когда берем произв. от $\int$, есть вклад от пределов.

$$\sigma(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,y)\,dy \Rightarrow \sigma'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{d\varphi}{dx}(x,y)\,dy +$$
$$+ \varphi(x,\beta(x))\beta'(x) - \varphi(x,\alpha(x))\alpha'(x)$$

Кажется, мы перепутали знаки в $\Gamma(x,y)$. ?

Ну, почти

$$u(x) = \int_0^x \frac{y(\pi-x)}{\pi} f(y)\,dy + \int_x^\pi \frac{x(\pi-y)}{\pi} f(y)\,dy$$

$$u'(x) = \int_0^x \frac{-y}{\pi} f(y)\,dy + \cancel{\frac{x(\pi-x)}{\pi}f(x)} + \int_x^\pi \frac{\pi-y}{\pi} f(y)\,dy - \cancel{\frac{x(\pi-x)}{\pi}f(x)}$$

$$u''(x) = -\frac{x}{\pi}f(x) - \frac{\pi-x}{\pi}f(x) = -f(x)$$

еее!

$$\Rightarrow \boxed{-u'' = f}$$

Сделаем это все для $\Gamma(x,y)$ в общем виде

$$u(x) = \int_0^x \Gamma(x,y) f(y)\,dy + \int_x^\pi \Gamma(x,y) f(y)\,dy$$

$$u'(x) = \int_0^x \Gamma_x f(y)\,dy + \Gamma(x,x) f(x) + \int_x^\pi \Gamma_x(x,y) f(y)\,dy - \Gamma(x,x) f(x)$$

$$= \int_0^x \Gamma_x(x,y) f(y)\,dy + \int_x^\pi \Gamma_x(x,y) f(y)\,dy$$

Здесь вне-$\int$ слаг. сокращаются, т.к. Γ непрерывна. А вот Γ' разрывна, там все будет плохо.

$$u''(x) = \int_0^x \Gamma_{xx}(x,y) f(y)\,dy + \Gamma_x(x, x-0) f(x) + \int_x^\pi \Gamma_{xx}(x,y) f(y)\,dy -$$
$$- \Gamma_x(x, x+0) f(x)$$

$$-u'' = f(x)\left(\Gamma_x(x, x+0) - \Gamma_x(x, x-0)\right) \quad \cancel{\text{скачок}}$$
$$= f(x)\cdot \underbrace{\left[\Gamma_x(x,y)\right]\Big|_{y=x}}_{\text{скачок функции}}$$

<u>Общее ур. Ш.-Л.</u>

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f$$

$L(u) = -(pu')' + qu$ ← оператор Ш.-Л.

$L_x(\Gamma) = 0$, если $x \neq y$??? ??

$$(pu')' = \int_0^x (p\Gamma_x)_x (x,y) f(y)\,dy + p(x)\Gamma_x(x, x-0) f(x) +$$
$$+ \int_x^\pi (p\Gamma_x)_x (x,y) f(y)\,dy - p(x)\Gamma_x(x, x+0) f(x)$$

такая вот штуковина

$$-(pu')' + qu = f(x)p(x)\cdot\left(\Gamma_x(x, x+0) - \Gamma_x(x, x-0)\right) =$$
$$= f(x)p(x)\left[\Gamma_x(x,y)\right]\Big|_{y=x} \Rightarrow \left[p(x)\Gamma_x(x,y)\right]\Big|_{y=x}$$

$v_1(x): \; Lv_1 = 0, \;\; v_1(0) = 0$

$v_2(x): \; Lv_2 = 0, \;\; v_2(\pi) = 0$

$$A(x,y) = \begin{cases} v_1(x)\, v_2(y), & x \le y \\ v_2(x)\, v_1(y), & x \ge y \end{cases}$$

$$A(0,y) = v_1(0)\, v_2(y) = 0 \;;\;\; A(\pi,y) = v_2(\pi)\, v_1(y) = 0$$

Что с 5 условием:

$$A_x(x,y) = \begin{cases} v_1'(x)\, v_2(y), & x \le y \\ v_2'(x)\, v_1(y), & x \ge y \end{cases}$$

$$\left[A_x(x,y) \right]\Big|_{y=x} = v_2'(x)\, v_1(x) - v_1'(x)\, v_2(x) = v_2' v_1 - v_1' v_2 =$$

$$= \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} \text{ — определитель Вронского}$$

$$\overset{\parallel}{W}$$

$$(pW)' = (pv_2'v_1 - pv_1'v_2)' = (pv_2')' v_1 + pv_2'v_1' - (pv_1')' v_2 -$$

$$- pv_1'v_2' = qv_2v_1 - qv_1v_2 = 0 \Rightarrow pW = \text{const}$$

~~$P(x,y) = \frac{1}{pW}$~~ What is happening?

Разложение на собств. ф. (метод Фурье)

Утв.: L — самосопряжен $\Leftrightarrow \forall u, v \;\; (Lu, v) = (u, Lv)$

Д-во: $(Lu, v) = \int\limits_a^b \left[-(pu')'v + quv \right] dx = \int\limits_a^b \left[pu'v' + quv \right] dx -$

$u(a) = u(b) = 0$

$$- pu'v \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \int\limits_a^b \left[pu'v' + quv \right] dx = \int\limits_a^b \left[-(pv')'u + quv \right] dx = (u, Lv)$$

Следствие: $\exists \{u_k\}_{k=1}^{\infty}, \; \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$

1. $Lu_k = \lambda_k u_k, \;\; u_k(a) = u_k(b) = 0$
2. $(u_k, u_j) = \delta_{ij}$ ортонорм система
3. $\lambda_k \in \mathbb{R}$
4. $\{u_k\}$ — ортонорм базис в $L_2(a,b)$

~~Замето~~ Энергетическое скалярное произведение:

$$[u,v] \doteq \int_a^b \left[p u' v' + q u v\right] dx \longleftarrow (p \geq \delta > 0,\ q \geq 0)$$

$$[u,v] = (Lu, v) = (u, Lv) \Rightarrow [u_k, u_j] = \lambda_k \delta_{kj}$$

Следствие: $\lambda_k > 0$ (энергетические скалярные квадраты)

Пусть
$$\left.\begin{aligned} u(x) &= \sum_k \alpha_k u_k(x) \\ f(x) &= \sum_k \varphi_k u_k(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_k \lambda_k \alpha_k u_k(x) = \sum_k \varphi_k u_k(x)$$

$$\Rightarrow \lambda_k \alpha_k = \varphi_k \ \forall k$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{\varphi_k}{\lambda_k} \Rightarrow u = \sum_k \frac{\varphi_k}{\lambda_k} u_k(x)$$

$$\varphi_k = \int_a^b f(x) u_k(x) dx = \int_a^b f(y) u_k(y) dy$$

$$u(x) = \sum_k \frac{u_k(x)}{\lambda_k} \int_a^b f(y) u_k(y) dy = \int_a^b \sum_k \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k} f(y) dy$$

$$\Longrightarrow \Gamma(x,y) = \sum_k \frac{u_k(x) u_k(y)}{\lambda_k}$$

На след. раз: оставшееся обсуждение собств. ф.

$\boxed{\begin{matrix}22.11 \\ \text{пр}\end{matrix}}$

$$J[u] \frac{\int (u')^2}{\int u^2} \longrightarrow \min,\ u(0) = u(\pi) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_k = \sin(kx),\ k = 1,2,\ldots \\ \lambda_k = k^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$J[u] = \frac{\int (u')^2}{\int u^2} \longrightarrow \min, \text{ без КУ}$$

Хотим видеть крит. точки.

$$\Updownarrow$$

$$\int (u') \longrightarrow \min,\ \int u^2 = 1$$

$$\Phi[u,\lambda] = \int_0^\pi \left((u')^2 - \lambda u^2\right) dx$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda]h = \left(\frac{d}{dt} \Pi[u+th]\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(\int_0^\pi \left(\underline{u' + th}\right)^2 - \lambda(u^2 + th)\right.$$

$$= \int_0^\pi (2u'h' - 2\lambda h u) dx = 2\int_0^\pi (u'h' - \lambda h u) dx \ \textcircled{=}$$

$$= 2\int_0^\pi u'h'dx - 2\int_0^\pi \lambda h u\, dx = -2\int_0^\pi u''h\,dx + 2u'h\Big|_{x=0}^{x=\pi} -$$

$$-2\int_0^\pi \lambda h u\,dx = 2\int_0^\pi h(-u''-\lambda u)dx + 2u'(x)h(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$+2u'(\pi)h(\pi) - 2u'(0)h(0)$$

$$\boxed{-u'' = \lambda u}$$

? вроде да

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u'(\pi) = u'(0) = 0 \\ \int u^2 = 1 \end{cases}$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda]u = \int_0^\pi 2(u')^2 - 2\lambda\int_0^\pi u^2 \Rightarrow \lambda = \int_0^\pi (u')^2 dx \geq 0$$

$\triangle$ $\lambda = 0$: $-u'' = 0 \Rightarrow \begin{cases} u' = const = A \\ u'(0) = u'(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = Ax + B \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u_0 = B_0 \\ \int_0^\pi u_0^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

собств. функ.

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \omega^2 \Rightarrow -u'' = \omega^2 u \Rightarrow u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

$$\begin{cases} u' = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x) \\ u'(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$B\omega = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow -A\omega\sin(\omega\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \sin(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \cancel{\omega \in \mathbb{N}}$$

$\omega_k = k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\left[\begin{matrix} u_k = A_k\cos(kx) \\ \lambda_k = k^2 \end{matrix}\right.$$

С.ч. с усл. Неймана всегда меньше с.ч. с усл. Дирихле, потому что принцип Гильберта–Куранта.

Д/з: 1 $\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0)=0 \\ u'(\pi)=0 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u'(0)=0 \\ u(\pi)=0 \end{cases}$ 3 $\lambda_k^N < \lambda_k < \lambda_k^D$

$\lambda_k = ?$ $u_k = ?$

$$J[u] = \frac{\int (u')^2 + u^2(\pi)}{\int u^2} \longrightarrow \min, \quad u(0)=0$$

$$\int (u')^2 + u^2(\pi); \quad \int u^2 = 1, \quad u(0)=0$$

$$\Phi[u,\lambda] = \int_0^\pi \left((u')^2 - \lambda u^2\right) dx + u^2(\pi)$$

$$0 = D\Phi[u,\lambda]h = \int_0^\pi \left[2u'h' - 2\lambda u h\right] dx + 2u(\pi)h(\pi) =$$

$$= \int_0^\pi (-2u''h - 2\lambda u h)\,dx + 2u'(\pi)h(\pi) - \cancel{2u'(0)\underbrace{h(0)}_{0}} + 2u(\pi)h(\pi)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0)=0 \\ u'(\pi)+u(\pi)=0 \end{cases}$$

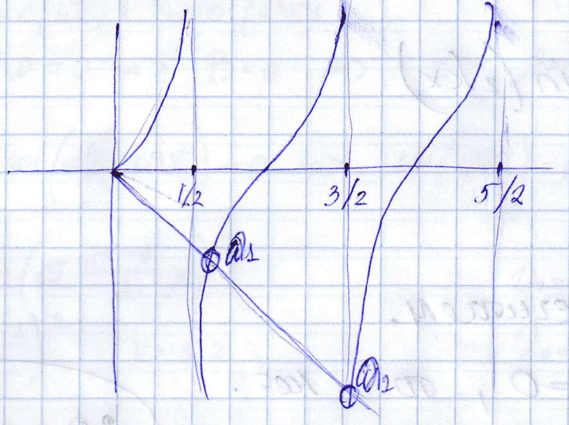
исследование по поводу знака λ?

$\lambda = \omega^2 > 0:$ $\quad -u'' = \omega^2 u \Rightarrow u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

$u(0)=0 \Rightarrow A=0 \Rightarrow u = B\sin(\omega x)$

игнорируем

$\omega\cos(\omega\pi) + \sin(\omega\pi) = 0 \iff tg(\omega\pi) = -\omega$



$\forall\, k \geq 1\ \exists\, \omega_k \in \left(k - \frac{1}{2}, k\right):\ tg(\omega_k\pi) = -\omega_k$

$\omega_k - k - \frac{1}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Какая-то новая штука

$$J[u] = \frac{\int (u')^2}{\int u^2} \to \min, \quad u(0) = u(\pi)$$

$$\int (u')^2 \to \min, \quad \int u^2 = 1, \quad u(0) = u(\pi)$$

$$2u'(\pi)h(\pi) - 2u'(0)\underbrace{h(0)}_{=h(\pi)} = 0$$

$$u'(\pi) = u'(0)$$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) \\ u'(0) = u'(\pi) \end{cases} \qquad \lambda \geq 0$$

$$\lambda = 0: \quad -u'' = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} u = Ax + B \\ u(0) = u(\pi) \\ u'(0) = u'(\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A\pi + B = B \\ A = A \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_0 = B_0 \\ \lambda_0 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = \omega^2 > 0: \quad -u'' = \omega^2 u \Rightarrow u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

$$\begin{cases} A = A\cos(\omega\pi) + B\sin(\omega\pi) \\ \omega B = -A\omega \sin(\omega\pi) + B\omega\cos(\omega\pi) \end{cases}$$

СЛАУ

$$0 = \det \begin{pmatrix} \cos(\omega\pi) - 1 & \sin(\omega\pi) \\ -\sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) - 1 \end{pmatrix} = (\cos(\omega\pi) - 1)^2 + \sin^2(\omega\pi) =$$

$$= 2 - 2\cos(\omega\pi) \Rightarrow \cos(\omega\pi) = 1 \Rightarrow \omega_k = 2k$$

$$\lambda_k = (2k)^2$$

$$u_k = A_k \cos(2kx) + B_k \sin(2kx)$$

Кто такой обертон?

$\lambda \overset{?}{=} 0$ — тупо считаем.

если $\lambda = 0 \Rightarrow u_0 = 0$, то нет.

---

20 - консультация

КР: 27 декабря ? или 28 декабря
(дист.) (очно)

он еще не решил

список вопросов будет не позднее 13 декабря

теория + практика

Кулачкова 8382

1. $\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0)=0 \\ u'(\pi)=0 \\ \int u^2 = 1 \end{cases}$

$\lambda = 0: \quad -u''=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} u' = const = A_0 \\ u'(\pi)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u = A_0 x + B_0 \\ A_0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_0 = B_0$

$\left.\begin{matrix} u_0 = B_0 \\ \int_0^\pi u_0^2 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$?

$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \omega^2 \Rightarrow -u'' = \omega^2 u \Rightarrow u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

$u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) \qquad u(0) = A = 0 \Rightarrow A\cos(\omega x) = 0$

$u' = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x) \qquad \cancel{u'(\pi) = B\omega \neq 0}$

$u'(\pi) = B\omega\cos(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \omega_k = \frac{2k-1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

$\begin{cases} u_0 = B_0 \\ \lambda_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_k = B_k\sin(\omega_k x) = B_k\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right) \\ \lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

2. $\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(\pi)=0 \\ u'(0)=0 \\ \int u^2 = 1 \end{cases} \qquad \lambda = 0: \quad -u''=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} u' = const = A_0 \\ u'(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} u = A_0 x + B_0 \\ A_0 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} u_0 = B_0 \\ \lambda_0 = 0 \end{cases}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda = \omega^2 \Rightarrow -u'' = \omega^2 u \Rightarrow u = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$

$u' = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x)$

$u'(0) = B\omega = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow u = A\cos(\omega x)$

$u(\pi) = A\cos(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \cos(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \omega_k = \frac{2k-1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$

$\begin{cases} u_k = A_k\cos\left(\frac{2k-1}{2}x\right) \\ \lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = B_0 \\ \lambda_0 = 0 \end{cases}$

29.11 лек.

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_k = k^2 \\ u_k = \sin(kx) \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 \\ u_k = \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

(отр. произв. длины)

С.ф. образуют ортогональный собств. базис, т.е.

$\int_0^L u_k u_m dx = 0$, если $k \neq m$

Значение при $k = m$ зависит от нормировки. ($\int_0^L u_k^2 dx = 1$ – как вариант)

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi k}{L}x\right) dx = \int_0^L \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{L}x\right)}{2} dx = \frac{L}{2}$$

u_k – базис в L_2

Пусть $T = -u''$, $Dom(T) = \{u \in C^2, u(0) = u(L) = 0\}$

Тогда $\forall u, v \in Dom(T)$: $(Tu, v) = (u, Tv) \Rightarrow T$ – самосопряженный (немножко грешит против истины, потому что в ∞-мерном простр-ве сопр. оператор определяется иначе)

$\Rightarrow$ спектр T – вещественный (?)

В ∞-мерном простр-ве бывают непрерывные спектры (там собств. числа не числа)

Тут работает принцип Гильберта-Куранта:

$$\lambda_{k+1} = \max_{v_1, \dots, v_k} \min_{\substack{u \perp v_j \\ j = 1, \dots, k}} \frac{(Tu, u)}{(u, u)} \qquad \begin{aligned} (Tu, u) &= \int_0^L (u')^2 dx \\ (u, u) &= \int_0^L u^2 dx \end{aligned}$$

Встают 2 вопроса:

1) Почему min конечен? Что-то про положительную квадр. форму

2) Почему min достигается? Вопрос требует аккуратного функционального анализа.

$H = \{u \in C^1(0, L) : u(0) = u(L) = 0\}$ – энергетическое простр-во?

Т. Реллиха: H – компактно вложено в $L_2(0, L)$

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

надо искать $\min\limits_{\substack{x \perp v_j \\ |x|=1}} (Ax, x)$

Возьми ед. сферу и ее пересеч. с набором гиперплоскостей.

получится сфера меньшей размерности

Конечномерная сфера замкнута, ограничена и конечномерна $\Rightarrow$ компактна.

Эта компактность нужна, чтобы прокрутить т. Вейерштрасса: непр. функ. на замк. инт. достигает своего max и min.

Слабая сходимость — покоординатная сходимость. В конечномерном простр-ве это аналогично сходимости по норме. В ∞-мерном простр-ве происх. какая-то дичь.

$[\quad]$ — компактная послед-ть

$(\quad)$ — некомпактная послед-ть

Можно из ~~п~~ послед-ти выбрать сходящуюся подпослед-ть.

У нас тут все простр-ва ∞-мерные, поэтому т. Вейерштрасса не работает.

Но тут пригождается т. Реллиха.

Пусть $[v_n, v_n] \leq C$ — ограниченная норма в энерг. простр-ве

Тогда $\exists$ ~~v_{n_k}~~ $v_{n_k}, v^* : (v_{n_k} - v^*, v_{n_k} - v^*) \longrightarrow 0,$

т.е. $v_{n_k} \xrightarrow[L_2(0,L)]{} v^*$

Эквив. переформулировка

$v_n \xrightarrow[H]{} v^* \Rightarrow v_n \xrightarrow[L_2]{} v^*, \quad [v^*, v^*] \leq \liminf [v_n, v_n]$

стандартное обознач. слабой сх.

Дальше пошли непонятные рассуждения про min, max, и ∞-мерные простр-ва.

теперь $T = -(pu')' + qu, \quad p \geq \delta > 0 \quad q \geq 0$

Разница: $(Tu, u) = [u, u] = \int\limits_0^L (p(u')^2 + qu^2)\,dx \geq \delta \int\limits_0^L (u')^2 dx$

А дальше можно крутить всю ту же самую шарманку.

Довольно ироничный момент: для т. Реллиха важно, что I — замкнутый ограниченный отрезок.

$\boxed{\text{Щас}}$ напишем многомерную ф. Грина для произв. самосопр. эллипт. оператора.

$\boxed{\text{Пусть}}$ Ω - огр. обл. в $\mathbb{R}^n$ ($\Leftrightarrow \overline{\Omega}$ компактно)

Пусть $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ - симм.; $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $\nu|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \nu^{-1}|\xi|^2$

(равномерная положит. определенность, ограниченность сверху — УСЛОВИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ)

+ Усл. Дир.: $u|_{\partial\Omega} = 0$

$a(x) \geq 0$

Тогда $Lu = -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_i})_{x_j} + au$ ← эллиптический самосопр. оператор

$(Lu, v) = (u, Lv)$

$$(Lu,v)_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega Lu \cdot v\,dx = \int_\Omega \Big(\underbrace{-\sum_{i,j}(a_{ij}u_{x_i})_{x_j} v}_{\text{будет ли это самосопр.?}} + \underbrace{auv}_{\text{тут все хорошо}}\Big)dx \ominus$$

$$\ominus \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + auv\Big)dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}\underset{0}{\overset{?}{v}}\, n_j\, dS(x) =$$

$$= \int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + auv\Big)dx = (u, Lv) = [u,v]$$

энергетическое скалярное произв.?

$$\nu\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le [u,u] \le (\nu^{-1} + C\cdot\max|a|)\int_\Omega|\nabla u|^2 dx$$

Усл. эллиптичности зажимает $[u,u]$ между инт. Дирихле.

В этой сит. можем завести принцип Гильберта-Куранта.

$$\lambda_{k+1} = \max_{v_1\ldots v_k}\min_{u\perp v_j}\frac{[u,u]}{(u,u)}$$

Получили собств. базис. Теперь можем крутить м. Фурье.

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} u = \sum \alpha_k u_k, & \alpha_k = (u, u_k) \\ f = \sum f_k u_k, & f_k = (f, u_k)\end{matrix} \Rightarrow \lambda_k\alpha_k = f_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{f_k}{\lambda_k} \Rightarrow u(x) = \int_\Omega \underbrace{\sum_k \frac{u_k(x)u_k(y)}{\lambda_k}}_{\Gamma(x,y)} f(y)\,dy$$

~~28.11 пр.~~

$\boxed{\text{06.12 лек.}}$

① Ф Грина удовл КУ: $\Gamma(x,y)=0,\ x\in\partial\Omega$

② $L_x(\Gamma(x,y))=0,\ x\neq y$

③ $L_x(\Gamma(x,y))=\delta(x-y)$

$\Omega=[a,b]\subset\mathbb{R}^1 \Rightarrow \Gamma\in C(\Omega\times\Omega),\quad \Gamma(x,\cdot),\ \Gamma(\cdot,y)\in C^{1,\text{кус}}(\Omega)$

типичные особенности 1-мерия

В многомерии:

$\Omega\subset\mathbb{R}^n,\ n\geq 2 \Rightarrow \Gamma\in C(\Omega\times\Omega\setminus\text{Диагональ }(x=y))$

$\lim\limits_{y\to x}\Gamma(x,y)=+\infty$ (для эллипт. ур.)

Гравит. потенц. (·) массы

$\vec{F}=GM_1M_2\dfrac{1}{|\vec{r}|^2}\dfrac{-\vec{r}}{|\vec{r}|}=GM_1M_2\dfrac{-\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

$\exists\, u:\nabla u=\vec{F},\quad u=\dfrac{GM_1M_2}{|\vec{r}|}\qquad |\vec{r}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

Лаплас вне 0

$$\Delta\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}\right)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2^2+x_3^2+x_1^2}^3}\right)'_{x}$$

$$=-\frac{x_2^2+x_3^2-2x_1^2+x_1^2+x_3^2-2x_2^2+x_2^2+x_1^2-2x_3^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^{\,?}}=0$$

u-гармоническая везде, кроме 0

Щас будем вспоминать формулу Грина для многомерного ∫-ия по частям.

$$\int_\Omega f g_{x_i}\,dx=-\int_\Omega f_{x_i}g\,dx+\int_{\partial\Omega} fgn\,dS$$

n ← компонент нормали (внешней)

$f=u_{x_i};\ g=v$

$$\int_\Omega u_{x_i}v_{x_i}\,dx=-\int_\Omega f_{x_ix_i}v\,dx+\int_{\partial\Omega}u_{x_i}v\,n_i\,dS\ \Big|\sum_{i=1}^n$$

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\,dx = -\int_\Omega \Delta u\, v\,dx + \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dn}\, v\,dS \quad \leftarrow \text{1-ая формула Грина}$$

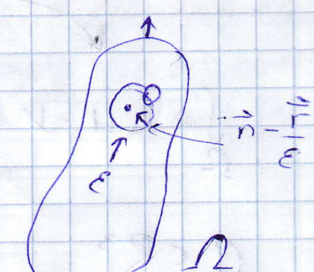
Какая-то штука связ. самосопр. оператором.

$$\text{— } u \text{ —} = -\int u\cdot\Delta v\,dx + \int_{\partial\Omega} u\,\frac{dx}{dn}\,dS \quad \leftarrow \text{2-ая формула Грина?}$$

Положим $u = \frac{1}{|\vec r|}$, пусть $v \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow v|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} u(-\Delta v)\,dx =$$

несобств?



Применяем формулу Грина

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)} (-\Delta u)\,v\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{du}{dn}v - u\frac{dv}{dn}\right)dS\right] =$$

Что к чему?

это 0 (потому что $\Delta u = 0$ не в 0)

особенность в окрестности 0

$$= 0 + \int_{\partial B_\varepsilon}\left[-\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{(\vec\nabla v, -\vec r)}{\varepsilon} + \frac{v}{\varepsilon^2}\right] \longrightarrow 4\pi v(0)$$

$$\frac{du}{dn} = \left(\vec\nabla u, -\frac{\vec r}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{-\vec r}{|\vec r|^3}, \frac{-\vec r}{\varepsilon}\right) = \frac{|\vec r|^2}{|\vec r|^3\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{(-\vec\nabla v, \vec r)}{\varepsilon^2}\,dS = \cancel{\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon}}$$

$$= \sum_i \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{-1}{\varepsilon^2}\, v_{x_i} x_i\,dS = \sum_i \frac{-1}{\varepsilon^2}\left(\int_\Omega v_{x_i x_i} x_i\,dx + \int_\Omega v_{x_i}\cdot 1\,dx\right)$$

$$\begin{cases} -\Delta v = f \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \int_\Omega f(y)/4\pi|x-y|\,dy$$

Т. Грина???

что-то вроде не то формулы, не то функции Грина

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ $\Gamma(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \tilde\Gamma(x,y)$,

где $\Delta_x \tilde\Gamma = 0\ \forall x,y \in \Omega$; $\Gamma(x,y) = 0\ \forall x \in \partial\Omega$

Оператор Лапласа в координатах курильщика

$v \in C_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \int\limits_\Omega \Delta u \cdot v\, dx = \int\limits_\Omega (\vec\nabla u, \vec\nabla v)\, dx$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$dx = dx_1 dx_2 = r\,dr\,d\varphi$ полярные координаты

$\vec\nabla u = u_{x_1} \vec e_{x_1} + u_{x_2} \vec e_{x_2}$ – дек.

$= u_r \vec e_r + \frac{u_\varphi}{r} \vec e_\varphi$ – пол.

$\int\limits_\Omega \Delta u \cdot v\, r\,dr\,d\varphi$

$\int\limits_\Omega \left(u_r v_r + \frac{1}{r^2} u_\varphi v_\varphi\right) r\,dr\,d\varphi$

у вас эрка торчит

$\int\limits_\Omega \left[(r u_r)_r v + \frac{1}{r} u_{\varphi\varphi} v\right] dr\,d\varphi$

$\int\limits_\Omega \left[\frac{1}{r}(r u_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}\right] v\ r\,dr\,d\varphi$

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$dx = dx_1 dx_2 dx_3 =$
$= r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$\vec\nabla u = u_r \vec e_r + \frac{u_\theta}{r} \vec e_\theta + \frac{u_\varphi}{r \sin(\theta)} \vec e_\varphi$

Очень хитрый трюк
(лемма Дюбуа – Реймона)

$\Delta u = \frac{1}{r}(r u_r)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$

~~Опер~~ Оператор Лап. допускает разделение переменных следств. того, что ПСК – ортогональна (но это не точно).

Цил СК: $\Delta u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz}$

Сф. СК: $\int\limits_\Omega \left[u_r v_r + \frac{1}{r^2} u_\theta v_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} u_\varphi v_\varphi\right] r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int \left[(r^2 u_r)_r v \sin(\theta) + (u_\theta \sin(\theta))_\theta v + \frac{1}{\sin(\theta)} u_{\varphi\varphi} v\right] dr\, d\theta\, d\varphi =$

$= \int v \left[\frac{(r^2 u_r)_r}{r^2} + \frac{(\sin(\theta) u_\theta)_\theta}{r^2 \sin(\theta)} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2(\theta)}\right] r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$

$\Delta u = \underbrace{u_{rr} + \frac{2}{r} u_r}_{} + \underbrace{\frac{u_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg}(\theta)}{r^2}}_{} + \underbrace{\frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2(\theta)}}_{}$ тоже разделение переменных оп. Лапл - Бельтрами?

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\vec{x} \to r > 0$, $\omega \in S^{n-1}$

$\Delta u = u_{rr} + \frac{n-1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} \tilde{\Delta}_\omega u$

Ищем $u = u(r)$: $\Delta u = 0$, $r \neq 0$

$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} (u_r r^{n-1})_r + \frac{1}{r^2}$

$\Downarrow$

$u_r r^{n-1} = A \Rightarrow u_r = \frac{A}{r^{n-1}} = \begin{cases} u = A \ln(r) + B, & n = 2 \\ u = \frac{-A}{(n-2) r^{n-2}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{const}}}{B}, & n \geq 3 \end{cases}$

Конст. A подбирают так, чтобы

$-\Delta u = \delta$

$n = 2$: $u = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$

$n \geq 3$: $\frac{|S^{n-1}|}{(n-2) r^{n-2}}$, где $|S^{n-1}|$ - площ. сферы в $\mathbb{R}^n$

Что-то про фундаментального Лапласа

фунд реш. оп. Лап.?

$v = u * f \Rightarrow -\Delta v = f$

Свертка???

$\Delta u + a^2 u = f$ ур. Гельмгольца

Перейдем к вариационке

$\boxed{\text{06.12 пр.}}$

Простые функционалы: $E[u] = \int\limits_a^b F(x, u, u')\, dx$ - (одномерный)

Вот у нас был этакий зоопарк такого рода функционалов.

$u|_{x=a} = A$, $u|_{x=b} = B$

$E[u] = \int\limits_\Omega F(\vec{x}, u, \vec{\nabla} u)\, d\vec{x}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Простой, но очень важный частный случай:

$\int\limits_a^b \left[\frac{1}{2}(u')^2 - fu\right] dx \xrightarrow{\text{идем в } \mathbb{R}^n} E[u] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu\right) dx \longrightarrow \min,$

$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x)$ $\leftarrow$ усл. Дирихле

Считаем 1ую вар., применяем л. Д-Р, смотрим на ур. Эйлера

КДП: $h \in C^1(\Omega)$; $h|_{\partial\Omega} = 0$

$0 = DE[u]h = \frac{d}{dt} E[u + th]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u + t\nabla h|^2 - f(u + th)\right] dx \Big|_{t=0} =$

$\frac{d}{dt} \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|t\nabla h|^2 + (\nabla u, t\nabla h) - fu - tfh\right) dx \Big|_{t=0} =$

$$= \int\limits_\Omega \left[(\nabla u, \nabla h) - fh \right] dx \xrightarrow{\text{1-ая фор. Грина}} \int\limits_\Omega (-\Delta u\, h - fh)\, dx +$$

$$+ \underbrace{\int\limits_{\partial\Omega} \frac{du}{dn} h\, dS}_{0} = \int\limits_\Omega (-\Delta u - f)\, h\, dx = \begin{cases} -\Delta u = f & \text{— ур. Пуассона!} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Можем говорить о реш. ур. Пу. как о крит. тк. этого функ.

Что-то про выпуклость ур. Пу.

Метод Ритца

$Dom(E) \supset \{ u \in C^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \varphi \}$

$\dim(Dom(E)) = +\infty$

Что-то про прибл. поиск на сетке

Ищем N-мерное подпрост.

Пусть $u_0 \in Dom(E)$

$v_1, \ldots, v_N \in C^1(\Omega);\ v_k|_{\partial\Omega} = 0$

$D_N = \{ u_0 + \sum\limits_{k=1}^N \alpha_k v_k;\ \alpha \in \mathbb{R} \}$

$$E[\tilde u] = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla \tilde u|^2 - f \tilde u \right) dx = \frac{1}{2} \sum_{k,m=1}^N \alpha_k \alpha_m \int\limits_\Omega (\nabla v_k, \nabla v_m)\, dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \alpha_k \int\limits_\Omega \nabla v_k \cdot \nabla u\, dx + \sum_{k=1}^N \alpha_k \int\limits_\Omega f v_k\, dx + \ldots \text{ (еще 2 слаг)}$$

квадратичный функ. конечного кол-ва переменных

$\cancel{E[u] = \int\limits_\Omega}$ nope, cannot do this

Функции v_k будем обсуждать в след. раз.