DOI:10.14018/j.cnki.cn13-1085/n.2010.13.049

关于几种不平衡指派问题的修正匈牙利解法

Fixed Hungaryalgorithm to Unbalanced Assignment Problems

杜金玲[①] Du Jinling;周杰[②] Zhou Jie

(①山东建筑大学管理工程学院,济南 250101;②济南铁道职业技术学院学生处,济南 250014)

(①School of Management and Engineering,Shandong Architectural University,Jinan 250101,China;

②Jinan Railway Polytechnic College Student Office,Jinan 250014,China)

摘要:本文利用实例验证了在用匈牙利算法求解指派问题时,不平衡的指派问题转化为平衡指派问题的必要性;总结对于几种不平衡的指派问题转化为平衡指派问题的方法,从理论上作出解释,并给出了相应的例题,特别对于任务数多于人数的指派问题,本文提出了新的更有针对性的转化方法,如"一人化成 p 人法"、"加边补小法"、"加边补零(M)法"等。

Abstract: In this paper, the necessity of the transformation of the unbalanced assignment problem to the balanced assignment problem is tested with examples. The methods of transformation are summarized and explained from theory; and gived an example of the problem, especially, the methods of the transformation are brought up. For example, the method of "one to p persons", the method of "the adding rows with zero or M", the method of "the adding rows with min" and so on.

关键词:指派问题;匈牙利算法;一人化成 p 人法;加边补小法;加边补零(M)法

Key words: assignment problem;the Hungaryalgorithm;the method of "one to p persons";the method of "the adding rows with min";the method of "the adding rows with zero or M"

中图分类号:TP301.6　　文献标识码:A　　文章编号:1006-4311(2010)13-0120-03

0 引言

在实际生活和生产安排中,经常遇到要指派不同的工作人员去完成不同的工作。由于每个人的专长不同,不同的人去完成各项任务的效率(或所花时间或成本等)一般地也不同。这样,就产生了指派何人去完成何任务,使总效率最高(或所花时间最少或成本最低等)的问题。这类问题称为指派问题(Assignment Problem),又称为分配问题。

1 平衡指派问题的数学模型

对于有 n 项任务且恰好有 n 个人去完成的指派问题(称为平衡指派问题),规定每人只完成一项任务,且每项任务只能由一个人去完成。已知 a_{ij} 表示第 i 个人完成第 j 项任务时的效率(所用时间或成本等),$[a_{ij}]$称为效率矩阵。设决策变量:

$$x_{ij}=\begin{cases}1,\text{第 i 个人完成第 j 项任务}\\0,\text{否则}(i,j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$,于是指派问题的数学模型为:

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=1,\cdots,n)\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=1,\cdots,n)\\ x_{ij}=0\text{ 或 }1\ (i,j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

2 平衡指派问题的匈牙利算法

关于平衡指派问题的算法有许多,如匈牙利法[1]、削高排除法[2]、缩阵分析法[3]和差额法[4]等,这些方法中匈牙利算法运用最为广泛。

3 非平衡指派问题的修正匈牙利算法

对于非平衡指派问题通常是先将其转化为平衡的指派问题(否则可能会得到错误的结论)然后再用匈牙利算法求解。本文利用实例验证总结对于几种不平衡的指派问题的解法。

3.1 不平衡的指派问题必须转化为平衡问题 例 1: 分配甲、乙、丙、丁四个人完成 A、B、C、D、E 五项任务,每个人完成各项任务的时间如下表 1 所示(单位:小时)。若四人可挑其任意四项任务完成,试确定最优指派方案。

解:如果不转化为平衡问题,直接用匈牙利的方法步骤进行求解。其中进行行检验时,如果此行只有一个没做标记的"零"元素,用括号括起来,并对所在列用"*"作标记,进行列检验时,如果此列只有一个没做标记的"零"元素,用括号括起来,并对所在行用"*"作标记;需要补充"零"元素时,未被做标记的最小元素用"Δ"标记。具体过程如下:

表 1

	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	33
丙	34	27	28	40	32
丁	24	42	36	23	45

$$\begin{array}{cc} & \text{min}\\ \begin{bmatrix}25&29&31&42&37\\39&38&26&20&33\\34&27&28&40&32\\24&42&36&23&45\end{bmatrix} & \begin{matrix}25\\20\\27\\23\end{matrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{c}\text{min}\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 5\\ \begin{bmatrix}0&4&6&17&12\\19&18&6&0&13\\7&0&1&13&5\\1&19&13&0&22\end{bmatrix}\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}(0)&4\Delta&5&17&7\\19&18&5&(0)&8\\7&(0)&0&13&0\\1&19&12&0&17\end{bmatrix}&\begin{matrix}\\ \\ \ast\\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\ast&\quad&\quad&\ast&\quad\end{matrix}&\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}(0)&0&1&17&3\\19&14&1\Delta&(0)&4\\11&(0)&0&17&0\\1&15&8&0&13\end{bmatrix}&\begin{matrix}\ast\\ \\ \ast\\ \\ \end{matrix}\\ \begin{matrix}\quad&\quad&\quad&\ast&\quad\end{matrix}&\end{array}\rightarrow\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0&(0)&1&18&3\\18&13&(0)&0&3\\11&0&0&18&(0)\\0&14&7&(0)&12\end{bmatrix}&\begin{matrix}\ast\\ \ast\\ \ast\\ \ast\end{matrix}\end{array}$$

得到方案为甲完成 B 任务,乙完成 C 任务,丙完成 E 任务,丁完成 D 任务,总共所用时间 110h,通过例 3 知道,此方案不是最优方案。由此可知,对于非平衡指派问题用匈牙利方法求解一定要将其转化为平衡的指派问题。

3.2 人数多于任务数的指派问题 对于人数多于任务数的指派问题,规定每人最多只完成一项任务,且每项任务只能由一个人去完成。

例 2: 已知下列五名运动员各种姿势的游泳成绩(50m)如下表 2 所示。试问如何从中选拔一个 4×50m 混合泳的接力队,使预期的比赛成绩为最好。(单位:s)

表 2

	赵	钱	张	王	周
仰泳	37.7	32.9	38.8	37.0	35.4
蛙泳	43.4	33.1	42.2	34.7	41.8
蝶泳	33.3	28.5	38.9	30.4	33.6
自由泳	29.2	26.4	29.6	28.5	31.1

解:这是一个人数多于任务数的不平衡指派问题,通常都用"加

作者简介:杜金玲(1978-),女,山东沂南人,硕士,讲师,主要从事运筹与管理方法的研究与应用。

边补零法”[1],即可以采用添加虚拟任务的方法,使之转化为平衡指派问题。最优指派方案中,完成虚设的任务的那个人就不指派给任务,虚拟任务不会增加目标函数的值,所以,在上面转化为平衡指派问题时每个人完成虚拟任务的效率设为 0 即可。添加虚拟任务后的新的平衡指派问题的匈牙利求解如下:

$$\begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 37.7 & 32.9 & 38.8 & 37.0 & 35.4 \\ 43.4 & 33.1 & 42.2 & 34.7 & 41.8 \\ 33.3 & 28.5 & 38.9 & 30.4 & 33.6 \\ 29.2 & 26.4 & 29.6 & 28.5 & 31.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array} \begin{array}{c} \text{min} \\ 32.9 \\ 33.1 \\ 28.5 \\ 26.4 \\ 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \text{min}\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0 \\ \begin{bmatrix} 4.8 & 0 & 5.9 & 4.1 & 2.5 \\ 10.3 & 0 & 9.1 & 1.6 & 8.7 \\ 4.8 & 0 & 10.4 & 1.9 & 5.1 \\ 2.8 & 0 & 3.2 & 2.1 & 4.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4.8 & (0) & 5.9 & 4.1 & 2.5 \\ 10.3 & 0 & 9.1 & 1.6\Delta & 8.7 \\ 4.8 & 0 & 10.4 & 1.9 & 5.1 \\ 2.8 & 0 & 3.2 & 2.1 & 4.7 \\ (0) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{*} \rightarrow \begin{bmatrix} 3.2 & (0) & 4.3 & 2.5 & 0.9\Delta \\ 8.7 & 0 & 7.5 & (0) & 7.1 \\ 3.2 & 0 & 8.8 & 0.3 & 3.5 \\ 1.2 & 0 & 1.6 & 0.5 & 3.1 \\ (0) & 1.6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{*} \rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2.3 & 0 & 3.4 & 2.5 & (0) \\ 7.8 & 0 & 6.6 & (0) & 6.2 \\ 2.3 & (0) & 7.9 & 0.3 & 2.6 \\ 0.3\Delta & 0 & 0.7 & 0.5 & 2.2 \\ (0) & 2.5 & 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \\ \quad * \end{array} \begin{array}{c} * \\ * \\ \\ \\ * \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2.3 & 0.3 & 3.4 & 2.5 & (0) \\ 7.8 & 0.3 & 6.6 & (0) & 6.2 \\ 2 & (0) & 7.6 & 0 & 2.3 \\ (0) & 0 & 0.4 & 0.0 & 1.9 \\ 0 & 2.8 & (0) & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \\ * \quad * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

$[x_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,故赵→自由泳,钱→蝶泳,王→蛙泳,周→仰泳,预期的比赛成绩最好为 29.2+28.5+34.7+35.4=127.8s。

3.3 任务数多于人数的指派问题 对于任务数多于人数的指派问题,规定每项任务只能由一个人去完成。文献[1]、[5]、[6]中给出了一些情况的解法,但分析的不全面,对于方法的适用范围没有进步一步分析。

3.3.1 m 个人 n 项任务(其中 n>m),要求完成其中 m 项任务的指派问题。

3.3.1.1 如果可挑其中任意 m 项任务完成,其它任务不用完成,如何指派使得完成 m 项任务的总时间最少。

例 3: 问题同例 1。

解:这是一个任务数多于人数的不平衡指派问题,通常都用“加边补零法”[1],即可以采用添加虚拟人的方法,使之转化为平衡指派问题。最优指派方案中,虚拟的人完成的任务实际不用去完成,不会增加目标函数的值,所以,在上面转化为平衡指派问题时虚拟的人完成各项任务的时间设为 0 即可。添加虚拟的人之后的新的平衡指派问题效率矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\ 39 & 38 & 26 & 20 & 33 \\ 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\ 24 & 42 & 36 & 23 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由匈牙利方法得到最优方案为甲完成 A 任务,乙完成 C 任务,丙完成 B 任务,丁完成 D 任务,总共所用最少时间 101h。

3.3.1.2 如果某项任务必须完成,其余 n-1 可挑其中任意 m-1 项任务完成,其它任务不用完成,如何指派使得完成 m 项任务的总时间最少。

例 4: 例 1 的问题中,若任务 E 必须完成,其它四项任务挑其中任意三项完成,试确定最优指派方案。

解:这个问题再用简单的“加边补零法”就不能得到最优的指派方案了。最优指派方案中,虚拟的人若完成的是除 E 以外的其它任务,实际中就不用去完成,不会增加目标函数的值;但虚拟的那个人若完成的是任务 E 而实际不去完成的话,跟题目要求不符,所以虚拟的那个人完成任务 E 用的时间可以设为任意大的正数 M,这样一旦在指派方案中,任务 E 由虚拟的人完成,则会使得完成四项任务的总时间任意大,跟目标不符。所以用匈牙利算法得到的指派最优方案中就不会出现虚拟的人完成任务 E 的情况。添加虚拟的人之后的新的平衡指派问题效率矩阵为:$\begin{bmatrix} 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\ 39 & 38 & 26 & 20 & 33 \\ 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\ 24 & 42 & 36 & 23 & 45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix}$ 由匈牙利方法得到最优方案为甲完成 B 任务,乙完成 D 任务,丙完成 E 任务,丁完成 A 任务,总共所用最少时间 105h。

3.2.2 m 个人 n 项任务(其中 n=pm+q,0<q<m),所有 n 任务都必须完成的指派问题。

3.2.2.1 要求每个人至少完成 p 项任务,对于这种任务数多于人数的不平衡指派问题,通常都用“一人化成 p 人法”[6]和“加边补小法”。最优指派方案中,除了“一人化成 p 人法”完成的 pm 项任务之外,剩下的 q 项任务实际是交给完成此项任务用时间最少得人去完成,所以,在转化为平衡指派问题时,除了“一人化成 p 人法”虚拟的(p-1)m 个人外,另外虚拟的 q 个人完成各项任务的时间都设为 m 个人中完成此项任务的最少时间即可。化为平衡问题的效率矩阵为矩阵 1:

矩阵 1

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ 1\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array}\right. \\ 2\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array}\right. \\ \vdots \quad \vdots \\ p\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ m \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ q \end{array}\right. \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \\ a_{i1}^{min} & a_{i2}^{min} & \cdots & \cdots & a_{in}^{min} \\ a_{i1}^{min} & a_{i2}^{min} & \cdots & \cdots & a_{in}^{min} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1}^{min} & a_{i2}^{min} & \cdots & \cdots & a_{in}^{min} \end{bmatrix} \end{array}$$

其中,$a_{ij}^{min}=\min\limits_{i=1\sim m}\{a_{ij}\},j=1\sim n$。

例 5: 分配甲、乙、丙三个人完成 A、B、C、D、E 五项任务,每个人完成各项任务的时间如下表 3 所示(单位:小时)。若五项任务都必须完成,试确定最优指派方案。

表 3

	A	B	C	D	E
甲	25	29	31	42	37
乙	39	38	26	20	18
丙	34	27	28	40	32

解:转化后的新问题的效率矩阵为:$\begin{bmatrix} 25 & 29 & 31 & 42 & 37 \\ 39 & 38 & 26 & 20 & 18 \\ 34 & 27 & 28 & 40 & 32 \\ 25 & 27 & 26 & 20 & 18 \\ 25 & 27 & 26 & 20 & 18 \end{bmatrix}$ 由匈牙利方法得到最优方案为甲完成 A 任务,乙完成 C、D、E 三项任务,丙完成 B 任务,总共所用最少时间 116h。

3.2.2.2 要求每个人至少完成 p 项任务,至多完成 p+1 项任务,即每个人最多只能完成一项虚拟的任务。对于这种任务数多于人数的不平衡指派问题,通常都用“一人化成 p+1 人法”和“加边补零(M)法”。最优指派方案中,“一人化成 p+1 人法”要完成(p+1)m 项任务之外,所以还要虚拟 m-q 项任务,化为平衡问题的效率矩阵为:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & M & \cdots & M \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & M & \cdots & M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & M & \cdots & M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & M & \cdots & M \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & M & \cdots & M \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & M & \cdots & M \end{bmatrix}$$