

Hvorfor skjer det fusjon på innsiden av stjerner?

Vi kan finne andelen av partiklene som har den nødvendige farten ved å integrere Maxwell-Boltzmannfordelingen, fra kritisk hastighet til uendelig.

Den kritiske hastigheten til partiklene ved $2.3 \times 10^9 K$ finner vi ved formelen $v_{kritisk} = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}}$

Andelen P som er over den kritiske hastigheten $v_{kritisk}$ er gitt ved integralet av sannsynlighetsfordelingen, ved temperatur $T = 1.5 \times 10^7 K$

$$P_{kritisk} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{k_b T} \right)^{3/2} \int_{v_{kritisk}}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2k_b T}} dv$$

Vi kan nå prøve å finne fusjonsraten i solens kjerne ved å finne antallet partikler som har den nødvendige hastigheten, og multiplisere dette med kollisjonsfrekvensen. Finner først nødvendig informasjon (tall er hentet fra internett)

- masse til solen: $2 \times 10^{30} kg$
- tetthet i kjernen: $160 \times 10^3 kg/m^3$
- radius til kjernen: $1.38 \times 10^8 m$
- diameter til proton: $0.85 \times 10^{-15} m$
- masse til proton: $1.67 \times 10^{-27} kg$

Fusjonsraten er da gitt ved produktet av sannsynligheten for at en partikkel har kritisk hastighet, antall partikler og kollisjonsfrekvensen.

$$\frac{dN_{fusjon}}{dt} = P_{kritisk} N_{protoner} r_{kollisjon}$$

Protonetettheten er gitt ved tettheten i kjernen, og massen til protonet.

$$n_v = \frac{\rho_{kjerne}}{m_{proton}}$$

Antall protoner finner vi ved å multiplisere proton-tettheten med volumet til kjernen.

$$N_{protoner} = n_v \frac{4}{3} \pi r_{kjerne}^3$$

Først finner vi gjennomsnittlig fri tid, og deretter kollisjonsfrekvensen.

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2} n_v d^2 v_{kritisk}}$$

$$r_{kollisjon} = \frac{N_{protoner}}{\tau}$$

Vi kan nå finne fusjonsraten i solens kjerne:

```
[49]: import numpy as np
kB = 1.38064852e-23
T = 1.5e7 # temperaturen i solkjernen
m = 1.67e-27 # massen til protonet
rho_core = 160e3 # tetthet til solkjernen
r = 1.38e8 # radius av solkjernen
d = 1e-15 # proton diameter

def v_rms(T):
    return np.sqrt(3 * kB * T / m)

def hastighets_fordeling(v):
    return 4 / np.sqrt(np.pi) * (m / (2 * kB * T)) ** (3 / 2) * v ** 2 * np.
    ↪exp(-m * v ** 2 / (2 * kB * T))

kritisk_hastighet = v_rms(2.3e9) # kritisk temperatur er 2.3e9 K

integrasjons_område = np.
    ↪linspace(kritisk_hastighet, 1e6*kritisk_hastighet, int(1e8))
P_kritisk = np.
    ↪trapz(hastighets_fordeling(integrasjons_område), integrasjons_område)

nv = rho_core / m # protoner per m3
N = nv * 4 / 3 * np.pi * r ** 3 # antall protoner i solkjernen

kollisjons_rate = N * v_rms(T) * np.pi * d ** 2 * nv * np.sqrt(2) *
    ↪kritisk_hastighet

fusjons_rate = P_kritisk * N * kollisjons_rate

print(f"Fusjonsraten er {fusjons_rate:.2e} protoner per sekund")
```

Fusjonsraten er 1.13×10^{31} protoner per sekund

Feilkilder

Den reelle fusjonsraten er omtrent 3.7×10^{38} protoner/s

Det kan være flere forskjellige årsaker til denne feilen, men den største er nok at $P_{kritisk}$ er basert på Maxwell-Boltzmann fordelingen, en fordeling som antar at gassen er ideell. Under de ekstreme trykkene vi finner på innsiden av stjerner, begynner kvanteeffekter å spille en rolle, og vi kan ikke lenger anta at gassen er ideell. Dette er nok årsaken til at vi får en så stor feil.

Konklusjon

Det er en kombinasjon av trykk og temperatur som lar fusjon skje. Temperaturen må være høy nok til at en andel av partiklene har den nødvendige hastigheten, og trykket må være høyt nok til at partiklene kolliderer ofte nok til at fusjon kan skje.