Stochastische Signale und Systeme

Zusammenfassung Formeln

Autor: Daniel Thiem - studium@daniel-thiem.de

Version 0.9.6 - 24.09.2012

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik & reine Stochastik **6**
1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 6
1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 6
1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen . . 6
1.2 Verteilungsfunktion 6
1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion 7
1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion 7
1.3 Verteilungen 7
1.3.1 Normalverteilung 7
1.3.2 Rechteckverteilung 8
1.3.3 Exponentialverteilung 8
1.4 Formel von Bayes 8
1.5 Erwartungswerte 8
1.5.1 Erwartungswertberechnung 8
1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte 9
1.6 Varianz 9
1.6.1 Berechnung der Varianz 9
1.6.2 Rechenregeln für Varianzen 9
1.7 Konvergenz 10
1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one) 10
1.7.2 Konvergenz im “Mean Square Sense” 10
1.7.3 Convergence in Pobability 10
1.7.4 Convergence in Distribution 10
1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen 10

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation **11**
2.1 Abtastung 11
2.1.1 Im Zeitbereich 11
2.1.2 Im Frequenzbereich 11
2.2 Transformation 11
2.2.1 Rücktransformation 11
2.2.2 Zusammenhang Ω und n 12

2.2.3 Dirac-Kamm 12
2.2.4 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall . 12

3 Prozesse **13**
3.1 Strikte Stationarität 13
3.2 Second order moment function(SOMF) 13
3.2.1 Stationär im weiteren Sinne 13
3.2.2 Eigenschaften der SOMF 13
3.3 Cross-SOMF 13
3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary) 14
3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF 14
3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF . . . 14
3.3.4 Orthogonalität 14
3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF) 14
3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz 15
3.4.2 Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion 15
3.4.3 Überführung der Central-SOMF in die Varianz 15
3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance) 15
3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz 15
3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz . 16
3.6 Komplexe Prozesse 16
3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess 16
3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess 16
3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse 16
3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess . . . 17
3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse 17
3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse 17

4 Spektraldichten (Power Spectral Density) **18**
4.1 Leistungsdichte 18
4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD) 18
4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses 19
4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density) 19
4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse 19
4.1.5 Wiener-Khinchine theorem 20
4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF 20
4.2 Kohärenz (coherence) 20
4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz 20
4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichsstrom (DC) Werte 21
4.3.1 DC-Values 21

4.3.2 Normalisierte DC-Leistung 21
4.3.3 RMS-Value 21
4.4 Spektrum 21
4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses 21
4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse 22

5 Filter 23
5.1 Lineare Filter 23
5.1.1 Stabilität 23
5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters 23
5.1.3 Instabiler linearer Filter 23
5.1.4 Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters 24
5.1.5 Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters 24
5.1.6 Kreukovarianz des Ausgangs des Filters 24
5.1.7 Kreukovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter 24
5.1.8 Kaskade linearer Filter 25
5.2 Matched Filter 25
5.2.1 Annahmen des Matched Filters 25
5.2.2 Ziel des Matched Filters 25
5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters 26
5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen 26
5.3 Wiener Filter 26
5.3.1 Ziel des Wiener Filters 26
5.3.2 Annahmen des Wiener Filters 27
5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters 27
5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters 28
5.3.5 Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen 28

6 Sonstiges 29
6.1 Spezielle Funktionen 29
6.1.1 Gaussian white noise process 29
6.1.2 Kronecker delta function 29
6.2 Mathematische nützliche Formeln 29
6.2.1 Ungleichung von Schwarz 29
6.2.2 Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen 30
6.2.3 Betragsquadrat komplexer Funktionen 30
6.2.4 Doppelte Faltungssumme 30

Vorwort

Fehler und Verbesserungen bitte an studium@daniel-thiem.de senden oder als Issue bei `https://github.com/Tyde/stosigsysfs/issues` melden. Der Quelltext dieser Formelsammlung ist auf `https://github.com/Tyde/stosigsysfs` und darf gerne erweitert werden.

1 Kombinatorik & reine Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Sei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{1.1}$$

1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0 \tag{1.2a}$$

$$f_X(x) = P(X = x) \tag{1.2b}$$

1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

Sei $Y = g(X)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y, $f_y(t)$, sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(t)$ gegeben ist,

$$f_y(t) = f_x(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| \tag{1.3}$$

1.2 Verteilungsfunktion

$f(t)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.4}$$

1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{1.5a}$$

$$F_X(\infty) = 1 \tag{1.5b}$$

$$F_X(-\infty) = 0 \tag{1.5c}$$

$F_X(x)$ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_X(x+\epsilon) = F_X(x) \tag{1.5d}$$

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \to 0} F_X(x-\epsilon) \tag{1.6a}$$

$$P(X=a) = F(a) - F(a-) \tag{1.6b}$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{1.6c}$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \tag{1.6d}$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \tag{1.6e}$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \tag{1.6f}$$

1.3 Verteilungen

1.3.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.7}$$

1.3.2 Rechteckverteilung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b] \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{1.9}$$

1.3.3 Exponentialverteilung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

1.4 Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cdot P(B|A_k))}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \tag{1.12}$$

1.5 Erwartungswerte

1.5.1 Erwartungswertberechnung

Allgemein

Sei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \tag{1.13}$$

Erweitert

Sei $Y = g(X)$ und $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \tag{1.14}$$

1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Sei A eine von B unabhängige Zufallsvariable

$$\mathrm{E}[A \cdot B] = \mathrm{E}[A] \cdot \mathrm{E}[B] \tag{1.15}$$

Sei X eine Zufallsvariable und a, b jeweils Konstanten

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b \tag{1.16}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}[X_i] \tag{1.17}$$

1.6 Varianz

1.6.1 Berechnung der Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \tag{1.18}$$

1.6.2 Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(x) \tag{1.19}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \tag{1.20}$$

1.7 Konvergenz

Es wird eine Konvergenz von Zufallsvariablen X_k mit $k = 0, 1, 2 \ldots$ betrachtet:

1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)

$$P\left(\lim_{k\to\infty} |X_k - X| = 0\right) = 1 \tag{1.21}$$

1.7.2 Konvergenz im "Mean Square Sense"

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\left[|X_k - X|^2\right] = 0 \tag{1.22}$$

1.7.3 Convergence in Pobability

$$\lim_{k\to\infty} P\left(|X_k - X| > \epsilon\right) = 0 \tag{1.23}$$

1.7.4 Convergence in Distribution

$$\lim_{k\to\infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \quad \text{Für alle stetigen punkte } x \text{ aus } F_X \tag{1.24}$$

1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen

- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in probability (1.7.3)
- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in the MSS (1.7.2), provided second order moments exist.
- Convergence in the MSS (1.7.2) implies convergence in probability (1.7.3).
- Convergence in probability (1.7.3) implies convergence in distribution (1.7.4).

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

2.1 Abtastung

2.1.1 Im Zeitbereich

Sei $x_c(t)$ das zu abtastende Signal und $T_s = \frac{1}{f_s}$ die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{2.1}$$

2.1.2 Im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \qquad (2.2) \\ & \qquad (2.3) \end{aligned}$$

2.2 Transformation

2.2.1 Rücktransformation

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{2.4}$$

2.2.2 Zusammenhang Ω und n

ACHTUNG: Dieser zusammenhang ist in SSS etwas anders im gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \tag{2.5}$$

2.2.3 Dirac-Kamm

$$\eta(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi l) \tag{2.6}$$

2.2.4 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

1. Zeitkontinuierliches $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um $H(j\Omega)$ zu erreichen

3 Prozesse

3.1 Strikte Stationarität

$$F_x(x_1,\dots,x_N;n_1,\dots,n_N) = F_x(x_1,\dots,x_N;n_1+n_0,\dots,n_N+n_0) \quad \text{mit } N\rightarrow\infty \tag{3.1}$$

3.2 Second order moment function(SOMF)

$$r_{XX}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)X(n_2)\right] \tag{3.2}$$

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

$$\mathrm{E}\left[X(n)\right] = \text{const.} \tag{3.3a}$$

$$r_{XX}(n_1,n_2) = r_{XX}(\kappa) = \mathrm{E}\left[X(n+\kappa)\cdot X(n)\right] \quad \text{mit} \quad \kappa = |n_2 - n_1| \tag{3.3b}$$

3.2.2 Eigenschaften der SOMF

$$r_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(n)^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_x^2 \tag{3.4a}$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \tag{3.4b}$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad ,|\kappa| > 0 \tag{3.4c}$$

3.3 Cross-SOMF

$$r_{XY}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)\cdot Y(n_2)\right] \tag{3.5}$$

3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary)

Sei $X(n)$ und $Y(n)$ nach (3.2.1) *stationär*, dann sind die Prozesse gemeinsam stationär, wenn gilt:

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \tag{3.6}$$

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \tag{3.7a}$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \tag{3.7b}$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \tag{3.7c}$$

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = \mathrm{E}[X(n+\kappa)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.8}$$

3.3.4 Orthogonalität

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.9}$$

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}[X(n+\kappa)]) \cdot (X(n) - \mathrm{E}[X(n)])] \tag{3.10a}$$

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}[X(n+k)]\mathrm{E}[X(n)] \tag{3.10b}$$

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

Falls X zumindest *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (\mathrm{E}[X(n)])^2 \tag{3.11}$$

3.4.2 Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion

Falls $Y(n) = X(n) + V(n)$ und $X(n)$ ist von $V(n)$ statistisch unabhängig und einer der beiden Prozesse mittelwertfrei, dann gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) \tag{3.12a}$$

Ist $X(n)$ jedoch abhängig von $V(n)$, so gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) + C_{XV}(\kappa) + C_{VX}(\kappa) \tag{3.12b}$$

3.4.3 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

$$c_{XX}(0) = \mathrm{Var}(X) \tag{3.13}$$

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}[X(n+\kappa)]) \cdot (Y(n) - \mathrm{E}[Y(n)])] \tag{3.14a}$$
$$c_{XY}(n+\kappa, n) = r_{XY}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}[X(n+k)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.14b}$$

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

Falls X und Y zumindest *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - \mathrm{E}[X(n)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.15}$$

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.16}$$

3.6 Komplexe Prozesse

Seien $X(n)$ und $Y(n)$ reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \hat{=} X(n) + jY(n) \tag{3.17}$$

ein Komplexer Zufallsprozess

3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

$$\mathrm{E}[Z(n)] = \mathrm{E}[X(n)] + j\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.18}$$

3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \tag{3.19}$$

Besondere Eigenschaften

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \tag{3.20}$$

3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

$$r_{Z_1 Z_2}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \tag{3.21}$$

3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

$$c_{ZZ}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}\left[(Z(n+\kappa) - \mathrm{E}\left[Z(n+\kappa)\right]) \cdot (Z(n) - \mathrm{E}\left[Z(n)\right])^*\right] \tag{3.22}$$

3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

$$c_{Z_1 Z_2}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}\left[(Z_1(n+\kappa) - \mathrm{E}\left[Z_1(n+\kappa)\right]) \cdot (Z_2(n) - \mathrm{E}\left[Z_2(n)\right])^*\right] \tag{3.23}$$

3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

Unkorreliertheit verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

4.1 Leistungsdichte

4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD)

$$S_{XX}(e^{j\omega},\xi) = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)\right|^2\right]}{2M+1} \tag{4.1}$$

mit

$$X_N(e^{j\omega},\xi) = \sum_{n=-M}^{M} x_N(n,\xi)e^{-j\omega n} \tag{4.2}$$

Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{C} \tag{4.3a}$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{C} \tag{4.3b}$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{R} \tag{4.3c}$$

4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \tag{4.4a}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)\right|^2\right]}{2M+1} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.4b}$$

4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

$$S_{XY}(e^{j\omega},\xi) = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left[X_N\left(e^{j\omega},\xi\right) Y_N\left(e^{j\omega},\xi\right)^*\right]}{2M+1} \tag{4.5}$$

Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n), Y(n) \in \mathbb{C} \tag{4.6a}$$

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6b}$$

$$\Re\mathfrak{e}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Re\mathfrak{e}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind gerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6c}$$

$$\Im\mathfrak{m}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Im\mathfrak{m}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind ungerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6d}$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \qquad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal (3.3.4)} \tag{4.6e}$$

4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.7}$$

4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

Ist $X(n)$ ein *im weiteren Sinne stationärer*(3.2.1) Zufallsprozess, do kann die *Leistungsspektraldichte* (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der *Momentenfunktion zweiter Ordnung(SOMF)* (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa)e^{-k\omega\kappa} \tag{4.8a}$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathscr{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega})(e^{j\omega\kappa})\frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.8b}$$

4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa)e^{-k\omega\kappa} \tag{4.9}$$

4.2 Kohärenz (coherence)

$$\mathrm{Coh_{XY}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{\left|\mathrm{S_{XY}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right|^2}{\mathrm{S_{XX}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{S_{YY}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})} \tag{4.10}$$

4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen $X(n)$ und $Y(n)$ besagt, wie gut X zu Y bei einer gegebenen Frequenz ω korrespondiert.

$$0 \leq \mathrm{Coh_{XY}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \leq 1 \tag{4.11}$$

4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichsstrom (DC) Werte

4.3.1 DC-Values

$$X_{dc} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n) = \mathrm{E}\left[X(n)\right] = \mu_X \tag{4.12}$$

4.3.2 Normalisierte DC-Leistung

$$P_{dc} = \left[\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n)\right]^2 = \mathrm{E}\left[X(n)\right]^2 = X_{dc}^2 \tag{4.13}$$

4.3.3 RMS-Value

$$X_{RMS} = \sqrt{\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} X(n)^2} = \sqrt{r_{XX}(0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}} \tag{4.14}$$

4.4 Spektrum

4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses

Ist $X(n)$ ein *stationärer* (3.1) Zufallsprozess, so ist sein Spektrum die Fouriertransformierte der *Kovarianzfunktion* (3.4)

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) e^{-j\omega n} \tag{4.15}$$

Eigenschaften des Spektrums

1. Wenn $\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$, dann existiert C_{XX} und ist begrenzt und stetig
2. C_{XX} ist Real, 2π-Periodisch und $C_{XX} \geq 0$
3. $$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{4.16}$$

4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse

Ist $X(n)$ und $Y(n)$ *gemeinsam stationär* (3.3.1), dann ist das Kreuzspektrum definiert durch

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XY}(n) e^{-j\omega n} \tag{4.17}$$

Eigenschaften der Kreuzspektrums

Das Spektrum eines Realen Zufallsprozesses ist komplett im Intervall $[0, \pi]$ bestimmt

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \tag{4.18a}$$

$$c_{XY}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XY}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \tag{4.18b}$$

Wenn $X(n), Y(n) \in \mathbb{R}$ dann

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{-j\omega}) \tag{4.18c}$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{XY}(e^{-j\omega})^* = C_{YX}(e^{-j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \tag{4.18d}$$

5 Filter

5.1 Lineare Filter

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ *stationär* (3.1) sind, $h(n)$ eine Impulsantwort eines LTI-Systems ist und das Filter *stabil* (5.1.1) ist, existiert mit *Wahrscheinlichkeit eins* (1.7.1) das lineare Filter mit:

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)X(k) \tag{5.1}$$

5.1.1 Stabilität

Die Stabilität eines Filters ist gegeben, wenn:

$$\sum |h(n)| < \infty \tag{5.2}$$

Alternativ: Sei $H(z)$ die z-Transformation des Filters $h(n)$. Dann ist das Filter stabil, falls die Polstellen von $H(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen

5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters

Die folgenden Eigenschaften gelten nur, wenn das Filter *stabil* (5.1.1) ist

- Ist $X(n)$ *stationär* (3.1) und $\mathrm{E}\left[|X(n)|\right] < \infty$, dann ist $Y(n)$ *stationär*
- $Y(n)$ wird linearer Prozess genannt (linear process)

5.1.3 Instabiler linearer Filter

Ist das Filter nicht *stabil* (5.1.1), aber $\int |H(e^{j\omega}|d\omega < \infty)$ trifft zu und für $X(n)$ $\sum |c_{XX}(n) < \infty$, sodann existiert im *Mean-Square-Sense* (1.7.2) die Formel (5.1) und $Y(n)$ ist *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) mit

$$\mu_Y = \mathrm{E}\left[Y(n)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\mathrm{E}\left[X(n-k)\right] = \mu_X H(e^{j0}) \tag{5.3}$$

5.1.4 Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters

Sei die Übertragungsfunktion des Filters $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$, und das Leistungsdicht-spektrum von $X(n)$ sei $S_{XX}(e^{j\omega})$, dann gilt:

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{XX}(e^{j\omega}) \tag{5.4}$$

5.1.5 Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters

Sei die Übertragungsfunktion des Filters $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$, und das Sepektrum von $X(n)$ sei $C_{XX}(e^{j\omega})$, dann gilt:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 C_{XX}(e^{j\omega}) \tag{5.5a}$$

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) \cdot c_{XX}(\kappa - k + 1) \tag{5.5b}$$

5.1.6 Kreukovarianz des Ausgangs des Filters

Sei $X(n)$ das Eingangssignal und $Y(n)$ das Ausgangssignal

$$c_{YX} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) c_{XX}(\kappa - k) \tag{5.6a}$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, C_{XX}(e^{j\omega}) \tag{5.6b}$$

$$c_{YX} = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})\, C_{XX}(e^{j\omega})\, e^{-j\omega\kappa} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{5.6c}$$

5.1.7 Kreukovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter

$$c_{Y_1Y_2}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(l) \cdot c_{X_1X_2}(\kappa - k + l) \tag{5.7a}$$

$$c_{Y_1Y_2}(\kappa) = h_1(\kappa) \star h_2(\kappa)^* \star c_{X_1X_2}(\kappa) \tag{5.7b}$$

$$C_{Y_1Y_2}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})^* C_{X_1X_2}(e^{j\omega}) \tag{5.7c}$$

5.1.8 Kaskade linearer Filter

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^{L} H_i(e^{j\omega}) \tag{5.8a}$$

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^{L} \left|H_i(e^{j\omega})\right|^2 \tag{5.8b}$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^{L} H_i(e^{j\omega}) \tag{5.8c}$$

5.2 Matched Filter

5.2.1 Annahmen des Matched Filters

- Das eingehende Signal $X(n)$ besteht entweder aus einem Signal mit Rauschen oder nur Rauschen:

$$X(n) = \begin{cases} s(n) + V(n) \\ V(n) \end{cases} \tag{5.9}$$

- Dabei ist $s(n)$ reelwertig, deterministisch und betrachtet in $n \in [0, N)$
- $E[V(n)] = 0$ und $C_{VV}(e^{j\omega})$ bekannt

5.2.2 Ziel des Matched Filters

Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \max \frac{|s_0(n_0)|^2}{\mathrm{E}\left[V_0(n_0)^2\right]} \tag{5.10}$$

5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters

Sei $S(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{s(n)\}$, C_{VV} das Spektrum des Rauschens, n_0 die Abtastungszeit, bei welcher (S/N) berechnet wird, und k eine reele Konstante

$$H(e^{j\omega}) = k \frac{S(e^{j\omega})^*}{C_{VV}(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0} \tag{5.11}$$

Dabei geht der Signalverlauf am Ende des Filters verloren und der Filter kann zur Signaldetektion genutzt werden

5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen

Bei weißem Rauschen wird die Impulsantwort des Filters zu

$$h(n) \equiv c \cdot s(n_0 - n) \tag{5.12}$$

⇒ Die Impulsantwort des Filters ist das bekannte Signal "rückwärts gespielt" und um n_0 verschoben
Der Signal zu Rausch Abstand ergibt sich dann zu:

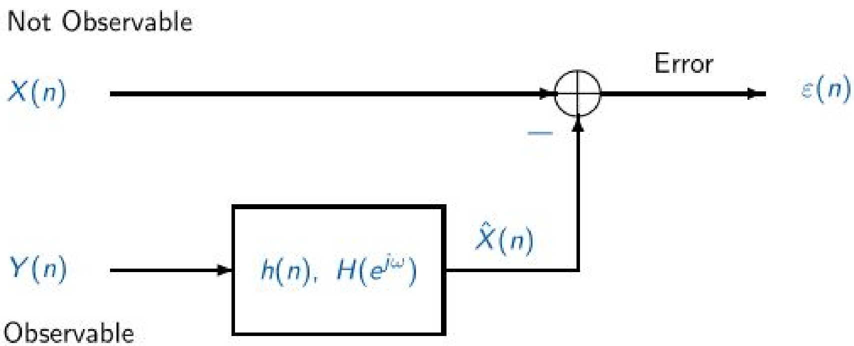
$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{E_s}{\sigma_V^2} \tag{5.13}$$

5.3 Wiener Filter

5.3.1 Ziel des Wiener Filters

Der Wiener Filter versucht die optimale Schätzung (nach (1.7.2)) eines Zufallsprozesses durch die Beobachtung eines anderen Prozesses

5.3.2 Annahmen des Wiener Filters



- $X(n)$ ist der zu schätzende Zufallsprozess
- $Y(n)$ ist der betrachtete Zufallsprozess
- $\epsilon(n)$ ist der Fehlerprozess
- $X(n)$ und $Y(n)$ sind reelwertig, mittelwertfrei und *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1)
- Aufgrund der *gemeinsamen Stationarität im weiteren Sinne* (3.3.1) der beiden Prozesse ist die Impulsantwort $h(n)$ stabil und der Fehlerprozess $\epsilon(n)$ *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1)

5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters

Enstehend aus den *Wiener-Hopf-Gleichungen*

$$c_{XY}(\kappa) = h_{opt}(\kappa) \star C_{YY}(\kappa) \qquad \kappa \in \mathbb{Z} \tag{5.14a}$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega})\, C_{YY}(e^{j\omega}) \qquad \omega \in \mathbb{R} \tag{5.14b}$$

erlangt man die optimale Übertragungsfunktion:

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})} \tag{5.15}$$

5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters

Der Mean Square Error ist als der Erwartungswert des quadrates der Fehlerfunktion definiert

$$q(h) = \mathrm{E}\left[\epsilon_X^2(n)\right] \tag{5.16}$$

$$h_{opt} = \arg\min_h q(h), n \in \mathbb{Z} \tag{5.17}$$

Daraus folgt:

$$q_{min} = C_{XX}(0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) C_{XY}(m) \tag{5.18a}$$

$$q_{min} = p(0) \quad \text{mit} \tag{5.18b}$$

$$p(\kappa) = C_{XX}(\kappa) - h_{opt}(\kappa) \star c_{YX}(\kappa)$$

5.3.5 Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XX}(e^{j\omega})}{C_{XX}(e^{j\omega}) + C_{VV}(e^{j\omega})} \tag{5.19}$$

6 Sonstiges

6.1 Spezielle Funktionen

6.1.1 Gaussian white noise process

GauSSsches weißes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$\mathrm{E}\left[W(n)\right] = 0 \tag{6.1a}$$

$$r_{WW}(\kappa) = c_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \tag{6.1b}$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \tag{6.1c}$$

6.1.2 Kronecker delta function

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

6.2 Mathematische nützliche Formeln

6.2.1 Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^b \varphi_1(\omega)\varphi_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left(\int_a^b |\varphi_1(\omega)|^2 d\omega \right) \cdot \left(\int_a^b |\varphi_2(\omega)|^2 d\omega \right) \tag{6.3}$$

6.2.2 Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

$$\int_0^{2\pi} cos(mt)cos(nt)dt = 0 \qquad \text{für } m \neq n \tag{6.4a}$$

$$\int_0^{2\pi} sin(mt)sin(nt)dt = 0 \qquad \text{für } m \neq n \tag{6.4b}$$

$$\int_0^{2\pi} cos(mt)sin(nt)dt = 0 \tag{6.4c}$$

$$\int_0^{2\pi} cos^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0 \end{cases} \tag{6.4d}$$

$$\int_0^{2\pi} sin^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \tag{6.4e}$$

$$\int_0^{2\pi} cos(k + nt)dt = 0 \qquad \text{mit } k = const \tag{6.4f}$$

$$\int_0^{2\pi} sin(k + nt)dt = 0 \qquad \text{mit } k = const \tag{6.4g}$$

6.2.3 Betragsquadrat komplexer Funktionen

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \tag{6.5}$$

6.2.4 Doppelte Faltungssumme

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m)h(k)f(k-m) = h(n) \star f(0) \star h(-n) \tag{6.6}$$