
Stochastische Signale und Systeme

Zusammenfassung Formeln

Autor: Daniel Thiem - studium@daniel-thiem.de

Version 1.0 - 27.09.2012



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Inhaltsverzeichnis

1	Kombinatorik & reine Stochastik	6
1.1	Mengenlehre	6
1.2	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	6
1.2.1	Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	6
1.2.2	Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen	7
1.3	Verteilungsfunktion	7
1.3.1	Eigenschaften der Verteilungsfunktion	7
1.3.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion	7
1.4	Verteilungen	8
1.4.1	Normalverteilung	8
1.4.2	Rechteckverteilung	8
1.4.3	Exponentialverteilung	8
1.5	Formel von Bayes	9
1.6	Erwartungswerte	9
1.6.1	Erwartungswertberechnung	9
1.6.2	Rechenregeln für Erwartungswerte	10
1.7	Varianz	10
1.7.1	Berechnung der Varianz	10
1.7.2	Rechenregeln für Varianzen	10
1.8	Konvergenz	10
1.8.1	Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)	11
1.8.2	Konvergenz im “Mean Square Sense”	11
1.8.3	Convergence in Probability	11
1.8.4	Convergence in Distribution	11
1.8.5	Gewichtung der Konvergenzen	11
2	Discrete-Time-Fourier-Transformation	12
2.1	Abtastung	12
2.1.1	Im Zeitbereich	12
2.1.2	Im Frequenzbereich	12
2.2	Transformation	12
2.2.1	Rücktransformation	12

2.2.2	Zusammenhang Ω und n	13
2.2.3	Dirac-Kamm	13
2.2.4	Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall	13
2.3	Korrespondenzen, welche nicht auf der DSS-Formelsammlung enthalten sind	13
2.3.1	Trigonometrische Funktionen im Frequenzbereich	13
3	Prozesse	14
3.1	Strikte Stationarität	14
3.2	Second order moment function(SOMF)	14
3.2.1	Stationär im weiteren Sinne	14
3.2.2	Eigenschaften der SOMF	14
3.3	Cross-SOMF	14
3.3.1	Gemeinsame Statonarität (joint stationary)	15
3.3.2	Eigenschaften der Cross-SOMF	15
3.3.3	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF	15
3.3.4	Orthogonalität	15
3.4	Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)	15
3.4.1	Eigenschaften der Kovarianz	16
3.4.2	Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion	16
3.4.3	Überführung der Central-SOMF in die Varianz	16
3.5	Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)	16
3.5.1	Eigenschaften der Kreuzkovarianz	16
3.5.2	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz	17
3.6	Komplexe Prozesse	17
3.6.1	Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess	17
3.6.2	SOMF eines Komplexen Zufallsprozess	17
3.6.3	cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse	17
3.6.4	Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess	18
3.6.5	Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse	18
3.6.6	Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse	18
4	Spektraldichten (Power Spectral Density)	19
4.1	Leistungsdichte	19
4.1.1	Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD)	19
4.1.2	Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses	20
4.1.3	Kreuzleistungsdichte (cross-power density)	20
4.1.4	Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse	20
4.1.5	Wiener-Khinchine theorem	21
4.1.6	Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF	21

4.2	Kohärenz (coherence)	21
4.2.1	Eigenschaften der Kohärenz	21
4.3	Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte	22
4.3.1	DC-Values	22
4.3.2	Normalisierte DC-Leistung	22
4.3.3	RMS-Value	22
4.4	Spektrum	22
4.4.1	Spektrum eines stationären Zufallsprozesses	22
4.4.2	Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse	23
5	Filter	24
5.1	Lineare Filter	24
5.1.1	Stabilität	24
5.1.2	Eigenschaften eines Linearen Filters	24
5.1.3	Instabiler linearer Filter	24
5.1.4	Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters	25
5.1.5	Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters	25
5.1.6	Kreuzkovarianz des Ausgangs des Filters	25
5.1.7	Kreuzkovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter	25
5.1.8	Kaskade linearer Filter	26
5.2	Matched Filter	26
5.2.1	Annahmen des Matched Filters	26
5.2.2	Ziel des Matched Filters	26
5.2.3	Übertragungsfunktion des Matched Filters	27
5.2.4	Matched Filter für Weißes Rauschen	27
5.3	Wiener Filter	27
5.3.1	Ziel des Wiener Filters	27
5.3.2	Annahmen des Wiener Filters	28
5.3.3	Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters	28
5.3.4	Mean Square Error des Wiener Filters	29
5.3.5	Orthogonalitätsprinzip (Herleitung des Wiener Filters)	29
5.3.6	Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen	29
6	Sonstiges	30
6.1	Spezielle Funktionen	30
6.1.1	Gaussian white noise process	30
6.1.2	Kronecker delta function	30
6.2	Mathematische nützliche Formeln	30
6.2.1	Ungleichung von Schwarz	30
6.2.2	Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen	31

6.2.3	Betragsquadrat komplexer Funktionen	31
6.2.4	Doppelte Faltungssumme	31
6.2.5	Einzelne Faltungssumme ohne Differenz im Argument	32

Vorwort

Fehler und Verbesserungen bitte an studium@daniel-thiem.de senden oder als Issue bei <https://github.com/Tyde/stosigsysfs/issues> melden. Der Quelltext dieser Formelsammlung ist auf <https://github.com/Tyde/stosigsysfs> und darf gerne erweitert werden.

1 Kombinatorik & reine Stochastik

1.1 Mengenlehre

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (1.1a)$$

$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) \quad (1.1b)$$

$$P(A \cup (A \cap B)) = P(A) \quad (1.1c)$$

$$P(A \cap (A \cup B)) = P(A) \quad (1.1d)$$

$$P(\bar{\bar{A}}) = P(A) \quad (1.1e)$$

Falls A und B stochastisch unabhängig:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.2)$$

1.2 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Sei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.3)$$

1.2.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0 \quad (1.4a)$$

$$f_X(x) = P(X = x) \quad (1.4b)$$

1.2.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

Sei $Y = g(X)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y , $f_y(t)$, sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(t)$ gegeben ist,

$$f_y(t) = f_x(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| \quad (1.5)$$

1.3 Verteilungsfunktion

$f(t)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.6)$$

1.3.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (1.7a)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad (1.7b)$$

$$F_X(-\infty) = 0 \quad (1.7c)$$

$F_X(x)$ ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \quad (1.7d)$$

1.3.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x - \epsilon) \quad (1.8a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) \quad (1.8b)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (1.8c)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \quad (1.8d)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \quad (1.8e)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \quad (1.8f)$$

1.4 Verteilungen

1.4.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.9)$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E[f(x)] = \mu \quad (1.10a)$$

$$\text{Var}[f(x)] = \sigma^2 \quad (1.10b)$$

1.4.2 Rechteckverteilung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.11)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b] \\ 1 & x > b \end{cases} \quad (1.12)$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E[f(x)] = \frac{a+b}{2} \quad (1.13a)$$

$$\text{Var}[f(x)] = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (1.13b)$$

1.4.3 Exponentialverteilung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Erwartungswert und Varianz:

$$E[f(x)] = \frac{1}{\lambda} \quad (1.16a)$$

$$\text{Var}[f(x)] = \frac{1}{\lambda^2} \quad (1.16b)$$

1.5 Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad (1.17)$$

1.6 Erwartungswerte

1.6.1 Erwartungswertberechnung

Allgemein

Sei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (1.18)$$

Erweitert

Sei $Y = g(X)$ und $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (1.19)$$

1.6.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Sei A eine von B unabhängige Zufallsvariable

$$E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B] \quad (1.20)$$

Sei X eine Zufallsvariable und a, b jeweils Konstanten

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad (1.21)$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$E\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n E[X_i] \quad (1.22)$$

1.7 Varianz

1.7.1 Berechnung der Varianz

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (1.23)$$

1.7.2 Rechenregeln für Varianzen

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(x) \quad (1.24)$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\text{Var}\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n \text{Var}[X_i] \quad (1.25)$$

1.8 Konvergenz

Es wird eine Konvergenz von Zufallsvariablen X_k mit $k = 0, 1, 2, \dots$ betrachtet:

1.8.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)

$$P\left(\lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - X| = 0\right) = 1 \quad (1.26)$$

1.8.2 Konvergenz im "Mean Square Sense"

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E\left[|X_k - X|^2\right] = 0 \quad (1.27)$$

1.8.3 Convergence in Probability

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|X_k - X| > \epsilon) = 0 \quad (1.28)$$

1.8.4 Convergence in Distribution

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \quad \text{Für alle stetigen punkte } x \text{ aus } F_X \quad (1.29)$$

1.8.5 Gewichtung der Konvergenzen

- Convergence with probability 1 (1.8.1) implies convergence in probability (1.8.3)
- Convergence with probability 1 (1.8.1) implies convergence in the MSS (1.8.2), provided second order moments exist.
- Convergence in the MSS (1.8.2) implies convergence in probability (1.8.3).
- Convergence in probability (1.8.3) implies convergence in distribution (1.8.4).

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

2.1 Abtastung

2.1.1 Im Zeitbereich

Sei $x_c(t)$ das zu abtastende Signal und $T_s = \frac{1}{f_s}$ die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

2.1.2 Im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_s(e^{j\omega}) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - k j\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (2.2)$$

2.2 Transformation

2.2.1 Rücktransformation

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.3)$$

2.2.2 Zusammenhang Ω und n

ACHTUNG: Dieser Zusammenhang ist in SSS etwas anders im Gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \quad (2.4)$$

2.2.3 Dirac-Kamm

$$\eta(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi l) \quad (2.5)$$

2.2.4 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

1. Zeitkontinuierliches $H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)}$ berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um $H(e^{j\omega})$ zu erreichen

2.3 Korrespondenzen, welche nicht auf der DSS-Formelsammlung enthalten sind

2.3.1 Trigonometrische Funktionen im Frequenzbereich

$$\cos(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{2}(\delta(n-1) + \delta(n+1)) \quad (2.6a)$$

$$\sin(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{j}{2}(\delta(n-1) - \delta(n+1)) \quad (2.6b)$$

3 Prozesse

3.1 Strikte Stationarität

$$F_x(x_1, \dots, x_N; n_1, \dots, n_N) = F_x(x_1, \dots, x_N; n_1 + n_0, \dots, n_N + n_0) \quad \text{mit } N \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

3.2 Second order moment function(SOMF)

$$r_{XX}(n_1, n_2) = E[X(n_1)X(n_2)] \quad (3.2)$$

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

$$E[X(n)] = \text{const.} \quad (3.3a)$$

$$r_{XX}(n_1, n_2) = r_{XX}(\kappa) = E[X(n + \kappa) \cdot X(n)] \quad \text{mit } \kappa = |n_2 - n_1| \quad (3.3b)$$

3.2.2 Eigenschaften der SOMF

$$r_{XX}(0) = E[X(n)^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2 \quad (3.4a)$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \quad (3.4b)$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad , |\kappa| > 0 \quad (3.4c)$$

3.3 Cross-SOMF

$$r_{XY}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot Y(n_2)] \quad (3.5)$$

3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary)

Sei $X(n)$ und $Y(n)$ nach (3.2.1) *stationär*, dann sind die Prozesse gemeinsam stationär, wenn gilt:

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \quad (3.6)$$

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \quad (3.7a)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \quad (3.7b)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \quad (3.7c)$$

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = E[X(n + \kappa)]E[Y(n)] \quad (3.8)$$

3.3.4 Orthogonalität

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.9)$$

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = E[(X(n + \kappa) - E[X(n + \kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])] \quad (3.10a)$$

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = r_{XX}(n + \kappa, n) - E[X(n + k)]E[X(n)] \quad (3.10b)$$

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

Falls X zumindest *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (E[X(n)])^2 \quad (3.11)$$

3.4.2 Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion

Falls $Y(n) = X(n) + V(n)$ und $X(n)$ ist von $V(n)$ statistisch unabhängig und einer der beiden Prozesse mittelwertfrei, dann gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) \quad (3.12a)$$

Ist $X(n)$ jedoch abhängig von $V(n)$, so gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) + C_{XV}(\kappa) + C_{VX}(\kappa) \quad (3.12b)$$

3.4.3 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

$$c_{XX}(0) = \text{Var}(X) \quad (3.13)$$

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = E[(X(n + \kappa) - E[X(n + \kappa)]) \cdot (Y(n) - E[Y(n)])] \quad (3.14a)$$

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = r_{XY}(n + \kappa, n) - E[X(n + \kappa)]E[Y(n)] \quad (3.14b)$$

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

Falls X und Y zumindest *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - E[X(n)]E[Y(n)] \quad (3.15)$$

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.16)$$

3.6 Komplexe Prozesse

Seien $X(n)$ und $Y(n)$ reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \triangleq X(n) + jY(n) \quad (3.17)$$

ein Komplexer Zufallsprozess

3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

$$E[Z(n)] = E[X(n)] + jE[Y(n)] \quad (3.18)$$

3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = E[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \quad (3.19)$$

Besondere Eigenschaften

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \quad (3.20)$$

3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

$$r_{Z_1 Z_2}(n_1, n_2) = E[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \quad (3.21)$$

3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

$$c_{ZZ}(n + \kappa, n) = E[(Z(n + \kappa) - E[Z(n + \kappa)]) \cdot (Z(n) - E[Z(n)])^*] \quad (3.22)$$

3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

$$c_{Z_1 Z_2}(n + \kappa, n) = E[(Z_1(n + \kappa) - E[Z_1(n + \kappa)]) \cdot (Z_2(n) - E[Z_2(n)])^*] \quad (3.23)$$

3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

Unkorreliertheit verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

4.1 Leistungsdichte

4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density, PSD)

$$S_{XX}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[\left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M + 1} \quad (4.1)$$

mit

$$X_N(e^{j\omega}, \xi) = \sum_{n=-M}^M x_N(n, \xi) e^{-j\omega n} \quad (4.2)$$

Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3a)$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3b)$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{R} \quad (4.3c)$$

4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \quad (4.4a)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbb{E} \left[\left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M+1} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.4b)$$

4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

$$S_{XY}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[X_N(e^{j\omega}, \xi) Y_N(e^{j\omega}, \xi)^* \right]}{2M+1} \quad (4.5)$$

Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{C} \quad (4.6a)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6b)$$

$$\Re\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Re\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind gerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6c)$$

$$\Im\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Im\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind ungerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6d)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal (3.3.4)} \quad (4.6e)$$

4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.7)$$

4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

Ist $X(n)$ ein *im weiteren Sinne stationärer* (3.2.1) Zufallsprozess, so kann die *Leistungsspektraldichte* (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der *Momentenfunktion zweiter Ordnung* (SOMF) (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa) e^{-j\omega\kappa} \quad (4.8a)$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) (e^{j\omega\kappa}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.8b)$$

4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa) e^{-j\omega\kappa} \quad (4.9)$$

4.2 Kohärenz (coherence)

$$\text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) = \frac{|S_{XY}(e^{j\omega})|^2}{S_{XX}(e^{j\omega}) S_{YY}(e^{j\omega})} \quad (4.10)$$

4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen $X(n)$ und $Y(n)$ besagt, wie gut X zu Y bei einer gegebenen Frequenz ω korrespondiert.

$$0 \leq \text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) \leq 1 \quad (4.11)$$

4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte

4.3.1 DC-Values

$$X_{dc} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) = E[X(n)] = \mu_X \quad (4.12)$$

4.3.2 Normalisierte DC-Leistung

$$P_{dc} = \left[\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) \right]^2 = E[X(n)]^2 = X_{dc}^2 \quad (4.13)$$

4.3.3 RMS-Value

$$X_{RMS} = \sqrt{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n)^2} = \sqrt{r_{XX}(0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}} \quad (4.14)$$

4.4 Spektrum

4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses

Ist $X(n)$ ein *stationärer* (3.1) Zufallsprozess, so ist sein Spektrum die Fouriertransformierte der *Kovarianzfunktion* (3.4)

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.15)$$

Eigenschaften des Spektrums

1. Wenn $\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$, dann existiert C_{XX} und ist begrenzt und stetig
2. C_{XX} ist Real, 2π -Periodisch und $C_{XX} \geq 0$
- 3.

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.16)$$

4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse

Ist $X(n)$ und $Y(n)$ *gemeinsam stationär* (3.3.1), dann ist das Kreuzspektrum definiert durch

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XY}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.17)$$

Eigenschaften der Kreuzspektrums

Das Spektrum eines Realen Zufallsprozesses ist komplett im Intervall $[0, \pi]$ bestimmt

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18a)$$

$$c_{XY}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XY}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.18b)$$

Wenn $X(n), Y(n) \in \mathbb{R}$ dann

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{-j\omega}) \quad (4.18c)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{XY}(e^{-j\omega})^* = C_{YX}(e^{-j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18d)$$

5 Filter

5.1 Lineare Filter

Wenn $X(n)$ und $Y(n)$ *stationär* (3.1) sind, $h(n)$ eine Impulsantwort eines LTI-Systems ist und das Filter *stabil* (5.1.1) ist, existiert mit *Wahrscheinlichkeit eins* (1.8.1) das lineare Filter mit:

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)X(k) \quad (5.1)$$

5.1.1 Stabilität

Die Stabilität eines Filters ist gegeben, wenn:

$$\sum |h(n)| < \infty \quad (5.2)$$

Alternativ: Sei $H(z)$ die z-Transformation des Filters $h(n)$. Dann ist das Filter stabil, falls die Polstellen von $H(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen

5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters

Die folgenden Eigenschaften gelten nur, wenn das Filter *stabil* (5.1.1) ist

- Ist $X(n)$ *stationär* (3.1) und $E[|X(n)|] < \infty$, dann ist $Y(n)$ *stationär*
- $Y(n)$ wird linearer Prozess genannt (linear process)

5.1.3 Instabiler linearer Filter

Ist das Filter nicht *stabil* (5.1.1), aber $\int |H(e^{j\omega})| d\omega < \infty$ trifft zu und für $X(n)$ $\sum |c_{XX}(n)| < \infty$, sodann existiert im *Mean-Square-Sense* (1.8.2) die Formel (5.1) und $Y(n)$ ist *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) mit

$$\mu_Y = E[Y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[X(n-k)] = \mu_X H(e^{j0}) \quad (5.3)$$

5.1.4 Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters

Sei die Übertragungsfunktion des Filters $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$, und das Leistungsdichtespektrum von $X(n)$ sei $S_{XX}(e^{j\omega})$, dann gilt:

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.4)$$

5.1.5 Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters

Sei die Übertragungsfunktion des Filters $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$, und das Sepektrum von $X(n)$ sei $C_{XX}(e^{j\omega})$, dann gilt:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 C_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.5a)$$

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) \cdot c_{XX}(\kappa - k + l) \quad (5.5b)$$

5.1.6 Kreuzkovarianz des Ausgangs des Filters

Sei $X(n)$ das Eingangssignal und $Y(n)$ das Ausgangssignal

$$c_{YX} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)c_{XX}(\kappa - k) \quad (5.6a)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.6b)$$

$$c_{YX} = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) e^{-j\omega\kappa} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5.6c)$$

5.1.7 Kreuzkovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(l) \cdot c_{X_1 X_2}(\kappa - k + l) \quad (5.7a)$$

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = h_1(\kappa) \star h_2(\kappa)^* \star c_{X_1 X_2}(\kappa) \quad (5.7b)$$

$$C_{Y_1 Y_2}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})^* C_{X_1 X_2}(e^{j\omega}) \quad (5.7c)$$

5.1.8 Kaskade linearer Filter

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.8a)$$

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L |H_i(e^{j\omega})|^2 \quad (5.8b)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.8c)$$

5.2 Matched Filter

5.2.1 Annahmen des Matched Filters

- Das eingehende Signal $X(n)$ besteht entweder aus einem Signal mit Rauschen oder nur Rauschen:

$$X(n) = \begin{cases} s(n) + V(n) \\ V(n) \end{cases} \quad (5.9)$$

- Dabei ist $s(n)$ reellwertig, deterministisch und betrachtet in $n \in [0, N)$
- $E[V(n)] = 0$ und $C_{VV}(e^{j\omega})$ bekannt

5.2.2 Ziel des Matched Filters

Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \max \frac{|s_0(n_0)|^2}{E[V_0(n_0)^2]} \quad (5.10)$$

5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters

Sei $S(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{s(n)\}$, C_{VV} das Spektrum des Rauschens, n_0 die Abtastungszeit, bei welcher (S/N) berechnet wird, und k eine reelle Konstante

$$H(e^{j\omega}) = k \frac{S(e^{j\omega})^*}{C_{VV}(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0} \quad (5.11)$$

Dabei geht der Signalverlauf am Ende des Filters verloren und der Filter kann zur Signaldetektion genutzt werden

5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen

Bei weißem Rauschen wird die Impulsantwort des Filters zu

$$h(n) \equiv c \cdot s(n_0 - n) \quad (5.12)$$

⇒ Die Impulsantwort des Filters ist das bekannte Signal "rückwärts gespielt" und um n_0 verschoben

Der Signal zu Rausch Abstand ergibt sich dann zu:

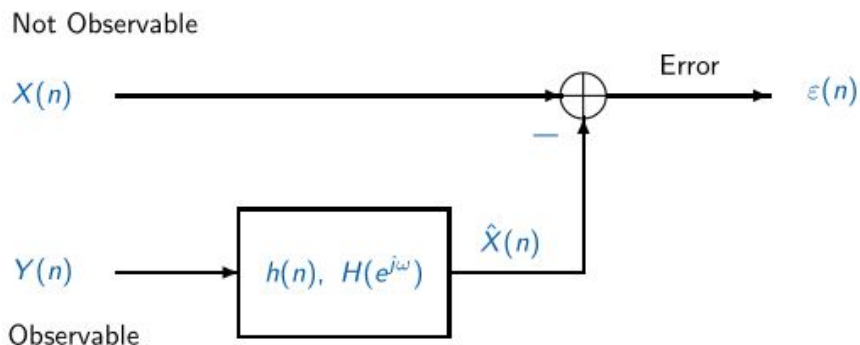
$$\left(\frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{E_s}{\sigma_V^2} \quad (5.13)$$

5.3 Wiener Filter

5.3.1 Ziel des Wiener Filters

Der Wiener Filter versucht die optimale Schätzung (nach (1.8.2)) eines Zufallsprozesses durch die Beobachtung eines anderen Prozesses

5.3.2 Annahmen des Wiener Filters



- $X(n)$ ist der zu schätzende Zufallsprozess
- $Y(n)$ ist der betrachtete Zufallsprozess
- $\epsilon(n)$ ist der Fehlerprozess
- $X(n)$ und $Y(n)$ sind reelwertig, mittelwertfrei und *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1)
- Aufgrund der *gemeinsamen Stationarität im weiteren Sinne* (3.3.1) der beiden Prozesse ist die Impulsantwort $h(n)$ stabil und der Fehlerprozess $\epsilon(n)$ *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1)

5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters

Entstehend aus den *Wiener-Hopf-Gleichungen*

$$c_{XY}(\kappa) = h_{opt}(\kappa) \star C_{YY}(\kappa) \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (5.14a)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) C_{YY}(e^{j\omega}) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.14b)$$

erlangt man die optimale Übertragungsfunktion:

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})} \quad (5.15)$$

5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters

Der Mean Square Error ist als der Erwartungswert des quadrates der Fehlerfunktion definiert

$$q(h) = E[\epsilon_X^2(n)] \quad (5.16)$$

$$h_{opt} = \arg \min_h q(h), n \in \mathbb{Z} \quad (5.17)$$

Daraus folgt:

$$q_{min} = C_{XX}(0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) C_{XY}(m) \quad (5.18a)$$

$$q_{min} = p(0) \quad \text{mit} \quad (5.18b)$$

$$p(\kappa) = C_{XX}(\kappa) - h_{opt}(\kappa) \star c_{YX}(\kappa)$$

5.3.5 Orthogonalitätsprinzip (Herleitung des Wiener Filters)

Zur minimierung des MSE setzt man das Fehlersignal $\epsilon_X(n)$ als unkorreliert mit dem beobachteten Eingangssignal $Y(n)$

$$C_{\epsilon_X Y}(\kappa) = E[\epsilon_X(n + \kappa) Y(n)] = 0 \quad (5.19)$$

5.3.6 Der Wiener Filter mit additivem Rasuschen

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XX}(e^{j\omega})}{C_{XX}(e^{j\omega}) + C_{VV}(e^{j\omega})} \quad (5.20)$$

6 Sonstiges

6.1 Spezielle Funktionen

6.1.1 Gaussian white noise process

GauSSsches weißes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$E[W(n)] = 0 \quad (6.1a)$$

$$r_{WW}(\kappa) = c_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \quad (6.1b)$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \quad (6.1c)$$

6.1.2 Kronecker delta function

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

6.2 Mathematische nützliche Formeln

6.2.1 Ungleichung von Schwarz

$$\left| \int_a^b \varphi_1(\omega) \varphi_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left(\int_a^b |\varphi_1(\omega)|^2 d\omega \right) \cdot \left(\int_a^b |\varphi_2(\omega)|^2 d\omega \right) \quad (6.3)$$

6.2.2 Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4b)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0 \quad (6.4c)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4d)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4e)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k+t)dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4f)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k+t)dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4g)$$

6.2.3 Betragsquadrat komplexer Funktionen

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \quad (6.5)$$

6.2.4 Doppelte Faltungssumme

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m)h(k)f(k-m) = h(n) \star f(0) \star h(-n) \quad (6.6)$$

6.2.5 Einzelne Faltungssumme ohne Differenz im Argument

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)f(m) = h(-n) \star f(0) \quad (6.7)$$