Stochastische Signale und Systeme

Zusammenfassung Formeln

Autor: Daniel Thiem - studium@daniel-thiem.de

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1 Kombinatorik & reine Stochastik **3**

1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 3

1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 3

1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen 3

1.2 Verteilungsfunktion 3

1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion 3

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion 4

1.3 Verteilungen 4

1.3.1 Normalverteilung 4

1.3.2 Rechteckverteilung 4

1.3.3 Exponentialverteilung 4

1.4 Formel von Bayes 4

1.5 Erwartungswerte 5

1.5.1 Erwartungswertberechnung 5

1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte 5

1.6 Varianz 5

1.6.1 Berechnung der Varianz 5

1.6.2 Rechenregeln für Varianzen 5

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation **6**

2.1 Abtastung 6

2.1.1 Im Zeitbereich 6

2.1.2 Im Frequenzbereich 6

2.2 Transformation 6

2.2.1 Rücktransformation 6

2.2.2 Zusammenhang Ω und n 6

2.2.3 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall 6

3 Prozesse **7**

3.1 Strikte Stationarität 7

3.2 Second order moment function(SOMF) 7

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne 7

3.2.2 Eigenschaften der SOMF 7

3.3 Cross-SOMF 7

3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary) 7

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF 8

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF 8

3.3.4 Orthogonalität 8

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF) 8

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz 8

3.4.2 Überführung der Central-SOMF in die Varianz 8

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance) 8

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz 9

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz 9

3.6 Komplexe Prozesse 9
3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess 9
3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess 9
3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse 9
3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess 9
3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse 10
3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse 10

4 Spektraldichten (Power Spectral Density) 11
4.1 Leistungsdichte 11
4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD) 11
4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses 11
4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density) 11
4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse 12
4.1.5 Wiener-Khinchine theorem 12
4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF 12
4.2 Kohärenz (coherence) 12
4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz 12

5 Sonstiges 13
5.1 Spezielle Funktionen 13
5.1.1 Gaussian white noise process 13
5.1.2 Kronecker delta function 13

Vorwort

Fehler und Verbesserungen bitte an studium@daniel-thiem.de senden.

1 Kombinatorik & reine Stochastik

1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

Sei $F_X(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{1.1}$$

1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_X(x) \geq 0 \tag{1.2a}$$

$$f_X(x) = P(X = x) \tag{1.2b}$$

1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

Sei $Y = g(X)$ und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von Y, $f_y(t)$, sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(t)$ gegeben ist,

$$f_y(t) = f_x(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1} \right| \tag{1.3}$$

1.2 Verteilungsfunktion

$f(t)$ sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen X

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{1.4}$$

1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \tag{1.5a}$$

$$F_X(\infty) = 1 \tag{1.5b}$$

$$F_X(-\infty) = 0 \tag{1.5c}$$

$F_X(x)$ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \tag{1.5d}$$

1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \to 0} F_X(x - \epsilon) \tag{1.6a}$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) \tag{1.6b}$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{1.6c}$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \tag{1.6d}$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \tag{1.6e}$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \tag{1.6f}$$

1.3 Verteilungen

1.3.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1.7}$$

1.3.2 Rechteckverteilung

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1.8}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b] \\ 1 & x > b \end{cases} \tag{1.9}$$

1.3.3 Exponentialverteilung

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & x \geq 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

1.4 Formel von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cdot P(B|A_k))}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \tag{1.12}$$

1.5 Erwartungswerte

1.5.1 Erwartungswertberechnung

Allgemein

Sei $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \tag{1.13}$$

Erweitert

Sei $Y = g(X)$ und $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von X

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \tag{1.14}$$

1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

Sei A eine von B unabhängige Zufallsvariable

$$\mathrm{E}[A \cdot B] = \mathrm{E}[A] \cdot \mathrm{E}[B] \tag{1.15}$$

Sei X eine Zufallsvariable und a, b jeweils Konstanten

$$\mathrm{E}[aX + b] = a\mathrm{E}[X] + b \tag{1.16}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}[X_i] \tag{1.17}$$

1.6 Varianz

1.6.1 Berechnung der Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 \tag{1.18}$$

1.6.2 Rechenregeln für Varianzen

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(x) \tag{1.19}$$

Seien X_i Zufallsvariablen

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=0}^{n} X_i\right] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \tag{1.20}$$

2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

2.1 Abtastung

2.1.1 Im Zeitbereich

Sei $x_c(t)$ das zu abtastende Signal und $T_s = \frac{1}{f_s}$ die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \tag{2.1}$$

2.1.2 Im Frequenzbereich

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - kj\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \end{aligned} \tag{2.2}$$

(2.3)

2.2 Transformation

2.2.1 Rücktransformation

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \tag{2.4}$$

2.2.2 Zusammenhang Ω und n

ACHTUNG: Dieser zusammenhang ist in SSS etwas anders im gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \tag{2.5}$$

2.2.3 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

1. Zeitkontinuierliches $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um $H(j\Omega)$ zu erreichen

3 Prozesse

3.1 Strikte Stationarität

$$F_x(x_1,\dots,x_N;n_1,\dots,n_N) = F_x(x_1,\dots,x_N;n_1+n_0,\dots,n_N+n_0) \quad \text{mit } N \to \infty \tag{3.1}$$

3.2 Second order moment function(SOMF)

$$r_{XX}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)X(n_2)\right] \tag{3.2}$$

3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

$$\mathrm{E}\left[X(n)\right] = \text{const.} \tag{3.3a}$$

$$r_{XX}(n_1,n_2) = r_{XX}(\kappa) = \mathrm{E}\left[X(n+\kappa)\cdot X(n)\right] \quad \text{mit} \quad \kappa = |n_2 - n_1| \tag{3.3b}$$

3.2.2 Eigenschaften der SOMF

$$r_{XX}(0) = \mathrm{E}\left[X(n)^2\right] = \sigma_X^2 + \mu_x^2 \tag{3.4a}$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \tag{3.4b}$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad ,|\kappa| > 0 \tag{3.4c}$$

3.3 Cross-SOMF

$$r_{XY}(n_1,n_2) = \mathrm{E}\left[X(n_1)\cdot Y(n_2)\right] \tag{3.5}$$

3.3.1 Gemeinsame Statonarität (joint stationary)

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \tag{3.6}$$

3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \tag{3.7a}$$
$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \tag{3.7b}$$
$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \tag{3.7c}$$

3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = \mathrm{E}[X(n+\kappa)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.8}$$

3.3.4 Orthogonalität

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.9}$$

3.4 Kovarianz (Covariance,Central-SOMF)

$$c_{XX}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}[X(n+\kappa)]) \cdot (X(n) - \mathrm{E}[X(n)])] \tag{3.10a}$$
$$c_{XX}(n+\kappa, n) = r_{XX}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}[X(n+k)]\mathrm{E}[X(n)] \tag{3.10b}$$

3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

Falls X zumindest *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (\mathrm{E}[X(n)])^2 \tag{3.11}$$

3.4.2 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

$$c_{XX}(0) = \mathrm{Var}(X) \tag{3.12}$$

3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

$$c_{XY}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(X(n+\kappa) - \mathrm{E}[X(n+\kappa)]) \cdot (Y(n) - \mathrm{E}[Y(n)])] \tag{3.13a}$$
$$c_{XY}(n+\kappa, n) = r_{XY}(n+\kappa, n) - \mathrm{E}[X(n+k)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.13b}$$

3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

Falls X und Y zumindest *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - \mathrm{E}[X(n)]\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.14}$$

3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \tag{3.15}$$

3.6 Komplexe Prozesse

Seien $X(n)$ und $Y(n)$ reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \mathrel{\hat{=}} X(n) + jY(n) \tag{3.16}$$

ein Komplexer Zufallsprozess

3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

$$\mathrm{E}[Z(n)] = \mathrm{E}[X(n)] + j\mathrm{E}[Y(n)] \tag{3.17}$$

3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \tag{3.18}$$

Besondere Eigenschaften

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \tag{3.19}$$

3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

$$r_{Z_1Z_2}(n_1, n_2) = \mathrm{E}[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \tag{3.20}$$

3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

$$c_{ZZ}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}[(Z(n+\kappa) - \mathrm{E}[Z(n+\kappa)]) \cdot (Z(n) - \mathrm{E}[Z(n)])^*] \tag{3.21}$$

3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

$$c_{Z_1Z_2}(n+\kappa, n) = \mathrm{E}\left[(Z_1(n+\kappa) - \mathrm{E}\left[Z_1(n+\kappa)\right]) \cdot (Z_2(n) - \mathrm{E}\left[Z_2(n)\right])^*\right] \tag{3.22}$$

3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

Unkorreliertheit verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

4.1 Leistungsdichte

4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD)

$$S_{XX}(e^{j\omega},\xi) = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)\right|^2\right]}{2M+1} \tag{4.1}$$

mit

$$X_N(e^{j\omega},\xi) = \sum_{n=-M}^{M} x_N(n,\xi)e^{-j\omega n} \tag{4.2}$$

Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{C} \tag{4.3a}$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{C} \tag{4.3b}$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit} \quad X(n)\in\mathbb{R} \tag{4.3c}$$

4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega})\frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \tag{4.4a}$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{E}\left[\left|X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)\right|^2\right]}{2M+1}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.4b}$$

4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

$$S_{XY}(e^{j\omega},\xi) = \lim_{M\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left[X_N\left(e^{j\omega},\xi\right)Y_N\left(e^{j\omega},\xi\right)^*\right]}{2M+1} \tag{4.5}$$

Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n), Y(n) \in \mathbb{C} \tag{4.6a}$$
$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \qquad \text{mit} \quad X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6b}$$
$$\mathfrak{Re}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \mathfrak{Re}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind gerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6c}$$
$$\mathfrak{Im}\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \mathfrak{Im}\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \qquad \text{sind ungerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \tag{4.6d}$$
$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \qquad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal (3.3.4)} \tag{4.6e}$$

4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.7}$$

4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

Ist $X(n)$ ein *im weiteren Sinne stationärer*(3.2.1) Zufallsprozess, do kann die *Leistungsspektraldichte* (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der *Momentenfunktion zweiter Ordnung(SOMF)* (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa) e^{-k\omega\kappa} \tag{4.8a}$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathscr{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega\kappa}) \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4.8b}$$

4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathscr{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa) e^{-k\omega\kappa} \tag{4.9}$$

4.2 Kohärenz (coherence)

$$\mathrm{Coh_{XY}(e^{j\omega})} = \frac{\left|\mathrm{S_{XY}(e^{j\omega})}\right|^2}{\mathrm{S_{XX}(e^{j\omega}) S_{YY}(e^{j\omega})}} \tag{4.10}$$

4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen $X(n)$ und $Y(n)$ besagt, wie gut X zu Y bei einer gegebenen Frequenz ω korrespondiert.

$$0 \leq \mathrm{Coh_{XY}(e^{j\omega})} \leq 1 \tag{4.11}$$

5 Sonstiges

5.1 Spezielle Funktionen

5.1.1 Gaussian white noise process

GauSSsches weiSSes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$r_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \tag{5.1a}$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \tag{5.1b}$$

5.1.2 Kronecker delta function

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \tag{5.2}$$