

---

# Stochastische Signale und Systeme

---

**Zusammenfassung Formeln**

Autor: Daniel Thiem - [studium@daniel-thiem.de](mailto:studium@daniel-thiem.de)

Version 0.9.6.2 - 25.09.2012

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

---



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kombinatorik &amp; reine Stochastik</b>	<b>6</b>
1.1	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion . . . . .	6
1.1.1	Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion . . . . .	6
1.1.2	Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen . . . . .	6
1.2	Verteilungsfunktion . . . . .	6
1.2.1	Eigenschaften der Verteilungsfunktion . . . . .	7
1.2.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion . . . . .	7
1.3	Verteilungen . . . . .	7
1.3.1	Normalverteilung . . . . .	7
1.3.2	Rechteckverteilung . . . . .	8
1.3.3	Exponentialverteilung . . . . .	8
1.4	Formel von Bayes . . . . .	8
1.5	Erwartungswerte . . . . .	8
1.5.1	Erwartungswertberechnung . . . . .	8
1.5.2	Rechenregeln für Erwartungswerte . . . . .	9
1.6	Varianz . . . . .	9
1.6.1	Berechnung der Varianz . . . . .	9
1.6.2	Rechenregeln für Varianzen . . . . .	9
1.7	Konvergenz . . . . .	10
1.7.1	Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one) . . . . .	10
1.7.2	Konvergenz im “Mean Square Sense” . . . . .	10
1.7.3	Convergence in Probability . . . . .	10
1.7.4	Convergence in Distribution . . . . .	10
1.7.5	Gewichtung der Konvergenzen . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Discrete-Time-Fourier-Transformation</b>	<b>11</b>
2.1	Abtastung . . . . .	11
2.1.1	Im Zeitbereich . . . . .	11
2.1.2	Im Frequenzbereich . . . . .	11
2.2	Transformation . . . . .	11
2.2.1	Rücktransformation . . . . .	11
2.2.2	Zusammenhang $\Omega$ und $n$ . . . . .	12

2.2.3	Dirac-Kamm . . . . .	12
2.2.4	Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall . . . . .	12
2.3	Korrespondenzen, welche nicht auf der DSS-Formelsammlung enthalten sind . . . . .	12
2.3.1	Trigonometrische Funktionen im Frequenzbereich . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Prozesse</b>	<b>13</b>
3.1	Strikte Stationarität . . . . .	13
3.2	Second order moment function(SOMF) . . . . .	13
3.2.1	Stationär im weiteren Sinne . . . . .	13
3.2.2	Eigenschaften der SOMF . . . . .	13
3.3	Cross-SOMF . . . . .	13
3.3.1	Gemeinsame Statonarität (joint stationary) . . . . .	14
3.3.2	Eigenschaften der Cross-SOMF . . . . .	14
3.3.3	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF . . . . .	14
3.3.4	Orthogonalität . . . . .	14
3.4	Kovarianz (Covariance,Central-SOMF) . . . . .	14
3.4.1	Eigenschaften der Kovarianz . . . . .	15
3.4.2	Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion . . . . .	15
3.4.3	Überführung der Central-SOMF in die Varianz . . . . .	15
3.5	Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance) . . . . .	15
3.5.1	Eigenschaften der Kreuzkovarianz . . . . .	15
3.5.2	Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz . . . . .	16
3.6	Komplexe Prozesse . . . . .	16
3.6.1	Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess . . . . .	16
3.6.2	SOMF eines Komplexen Zufallsprozess . . . . .	16
3.6.3	cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse . . . . .	16
3.6.4	Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess . . . . .	17
3.6.5	Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse . . . . .	17
3.6.6	Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Spektraldichten (Power Spectral Density)</b>	<b>18</b>
4.1	Leistungsdichte . . . . .	18
4.1.1	Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density,PSD) . . . . .	18
4.1.2	Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses . . . . .	19
4.1.3	Kreuzleistungsdichte (cross-power density) . . . . .	19
4.1.4	Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse . . . . .	19
4.1.5	Wiener-Khinchine theorem . . . . .	20
4.1.6	Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF . . . . .	20

4.2	Kohärenz (coherence) . . . . .	20
4.2.1	Eigenschaften der Kohärenz . . . . .	20
4.3	Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte . . . . .	21
4.3.1	DC-Values . . . . .	21
4.3.2	Normalisierte DC-Leistung . . . . .	21
4.3.3	RMS-Value . . . . .	21
4.4	Spektrum . . . . .	21
4.4.1	Spektrum eines stationären Zufallsprozesses . . . . .	21
4.4.2	Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Filter</b>	<b>23</b>
5.1	Lineare Filter . . . . .	23
5.1.1	Stabilität . . . . .	23
5.1.2	Eigenschaften eines Linearen Filters . . . . .	23
5.1.3	Instabiler linearer Filter . . . . .	23
5.1.4	Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters . . . . .	24
5.1.5	Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters . . . . .	24
5.1.6	Kreukovarianz des Ausgangs des Filters . . . . .	24
5.1.7	Kreukovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter . . . . .	24
5.1.8	Kaskade linearer Filter . . . . .	25
5.2	Matched Filter . . . . .	25
5.2.1	Annahmen des Matched Filters . . . . .	25
5.2.2	Ziel des Matched Filters . . . . .	25
5.2.3	Übertragungsfunktion des Matched Filters . . . . .	26
5.2.4	Matched Filter für Weißes Rauschen . . . . .	26
5.3	Wiener Filter . . . . .	26
5.3.1	Ziel des Wiener Filters . . . . .	26
5.3.2	Annahmen des Wiener Filters . . . . .	27
5.3.3	Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters . . . . .	27
5.3.4	Mean Square Error des Wiener Filters . . . . .	28
5.3.5	Orthogonalitätsprinzip (Herleitung des Wiener Filters) . . . . .	28
5.3.6	Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Sonstiges</b>	<b>29</b>
6.1	Spezielle Funktionen . . . . .	29
6.1.1	Gaussian white noise process . . . . .	29
6.1.2	Kronecker delta function . . . . .	29
6.2	Mathematische nützliche Formeln . . . . .	29
6.2.1	Ungleichung von Schwarz . . . . .	29
6.2.2	Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen . . . . .	30

---

6.2.3	Betragsquadrat komplexer Funktionen . . . . .	30
6.2.4	Doppelte Faltungssumme . . . . .	30
6.2.5	Einzelne Faltungssumme ohne Differenz im argument . . . . .	31

---

## **Vorwort**

---

Fehler und Verbesserungen bitte an [studium@daniel-thiem.de](mailto:studium@daniel-thiem.de) senden oder als Issue bei <https://github.com/Tyde/stosigsysfs/issues> melden. Der Quelltext dieser Formelsammlung ist auf <https://github.com/Tyde/stosigsysfs> und darf gerne erweitert werden.

---

# 1 Kombinatorik & reine Stochastik

---

## 1.1 Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

---

Sei  $F_X(x)$  die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $X$

$$f(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.1)$$

---

### 1.1.1 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

---

$$f_X(x) \geq 0 \quad (1.2a)$$

$$f_X(x) = P(X = x) \quad (1.2b)$$

---

### 1.1.2 Berechnung bei Abhängigkeit zu anderer Zufallsvariablen

---

Sei  $Y = g(X)$  und die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $Y$ ,  $f_Y(t)$ , sei gesucht, während die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_X(t)$  gegeben ist,

$$f_Y(t) = f_X(g^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} g^{-1}(t) \right| \quad (1.3)$$

---

## 1.2 Verteilungsfunktion

---

$f(t)$  sei die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $X$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (1.4)$$

---

## 1.2.1 Eigenschaften der Verteilungsfunktion

---

$$0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad (1.5a)$$

$$F_X(\infty) = 1 \quad (1.5b)$$

$$F_X(-\infty) = 0 \quad (1.5c)$$

$F_X(x)$  ist rechtsstetig, d.h.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x + \epsilon) = F_X(x) \quad (1.5d)$$

---

## 1.2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels der Verteilungsfunktion

---

$$F(a-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_X(x - \epsilon) \quad (1.6a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) \quad (1.6b)$$

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) \quad (1.6c)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b-) - F(a-) \quad (1.6d)$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a-) \quad (1.6e)$$

$$P(X > a) = 1 - F(a) \quad (1.6f)$$

---

## 1.3 Verteilungen

---

---

### 1.3.1 Normalverteilung

---

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \quad (1.7)$$

---



---

### 1.3.2 Rechteckverteilung

---

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.8)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in (a, b] \\ 1 & x > b \end{cases} \quad (1.9)$$

---

### 1.3.3 Exponentialverteilung

---

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

---

## 1.4 Formel von Bayes

---

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \quad (1.12)$$

---

## 1.5 Erwartungswerte

---

---

### 1.5.1 Erwartungswertberechnung

---

---

#### Allgemein

---

Sei  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $X$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (1.13)$$

---

## Erweitert

---

Sei  $Y = g(X)$  und  $f(x)$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von  $X$

$$E[Y] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x) dx \quad (1.14)$$

---

### 1.5.2 Rechenregeln für Erwartungswerte

---

Sei  $A$  eine von  $B$  unabhängige Zufallsvariable

$$E[A \cdot B] = E[A] \cdot E[B] \quad (1.15)$$

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $a, b$  jeweils Konstanten

$$E[aX + b] = aE[X] + b \quad (1.16)$$

Seien  $X_i$  Zufallsvariablen

$$E\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n E[X_i] \quad (1.17)$$

---

## 1.6 Varianz

---

---

### 1.6.1 Berechnung der Varianz

---

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (1.18)$$

---

### 1.6.2 Rechenregeln für Varianzen

---

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(x) \quad (1.19)$$

Seien  $X_i$  Zufallsvariablen

$$\text{Var}\left[\sum_{i=0}^n X_i\right] = \sum_{i=0}^n \text{Var}[X_i] \quad (1.20)$$

---

## 1.7 Konvergenz

---

Es wird eine Konvergenz von Zufallsvariablen  $X_k$  mit  $k = 0, 1, 2 \dots$  betrachtet:

---

### 1.7.1 Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit eins (Convergence with probability one)

---

$$P \left( \lim_{k \rightarrow \infty} |X_k - X| = 0 \right) = 1 \quad (1.21)$$

---

### 1.7.2 Konvergenz im "Mean Square Sense"

---

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E \left[ |X_k - X|^2 \right] = 0 \quad (1.22)$$

---

### 1.7.3 Convergence in Probability

---

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P \left( |X_k - X| > \epsilon \right) = 0 \quad (1.23)$$

---

### 1.7.4 Convergence in Distribution

---

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{X_k}(x) = F_X(x) \quad \text{Für alle stetigen punkte } x \text{ aus } F_X \quad (1.24)$$

---

### 1.7.5 Gewichtung der Konvergenzen

---

- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in probability (1.7.3)
- Convergence with probability 1 (1.7.1) implies convergence in the MSS (1.7.2), provided second order moments exist.
- Convergence in the MSS (1.7.2) implies convergence in probability (1.7.3).
- Convergence in probability (1.7.3) implies convergence in distribution (1.7.4).

---

## 2 Discrete-Time-Fourier-Transformation

---

### 2.1 Abtastung

---

---

#### 2.1.1 Im Zeitbereich

---

Sei  $x_c(t)$  das zu abtastende Signal und  $T_s = \frac{1}{f_s}$  die Abtastdauer bzw. Abtastfrequenz

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

---

#### 2.1.2 Im Frequenzbereich

---

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s})) \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j\Omega - k j\Omega_s) \quad \text{mit} \quad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

---

### 2.2 Transformation

---

---

#### 2.2.1 Rücktransformation

---

$$x[n] = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (2.4)$$

---

## 2.2.2 Zusammenhang $\Omega$ und $n$

---

ACHTUNG: Dieser Zusammenhang ist in SSS etwas anders im Gegensatz zu dem Hilfsblatt von DSS

$$\omega = \Omega T_s \quad (2.5)$$

---

## 2.2.3 Dirac-Kamm

---

$$\eta(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi l) \quad (2.6)$$

---

## 2.2.4 Berechnen einer Übertragungsfunktion im zeitdiskreten Fall

---

1. Zeitkontinuierliches  $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$  berechnen
2. Formel aus (2.2.2) einsetzen, um  $H(j\Omega)$  zu erreichen

---

## 2.3 Korrespondenzen, welche nicht auf der DSS-Formelsammlung enthalten sind

---

---

### 2.3.1 Trigonometrische Funktionen im Frequenzbereich

---

$$\cos(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{1}{2}(\delta(n-1) + \delta(n+1)) \quad (2.7a)$$

$$\sin(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad \frac{j}{2}(\delta(n-1) - \delta(n+1)) \quad (2.7b)$$

---

## 3 Prozesse

---

### 3.1 Strikte Stationarität

---

$$F_x(x_1, \dots, x_N; n_1, \dots, n_N) = F_x(x_1, \dots, x_N; n_1 + n_0, \dots, n_N + n_0) \quad \text{mit } N \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

---

### 3.2 Second order moment function(SOMF)

---

$$r_{XX}(n_1, n_2) = E[X(n_1)X(n_2)] \quad (3.2)$$

---

#### 3.2.1 Stationär im weiteren Sinne

---

$$E[X(n)] = \text{const.} \quad (3.3a)$$

$$r_{XX}(n_1, n_2) = r_{XX}(\kappa) = E[X(n + \kappa) \cdot X(n)] \quad \text{mit } \kappa = |n_2 - n_1| \quad (3.3b)$$

---

#### 3.2.2 Eigenschaften der SOMF

---

$$r_{XX}(0) = E[X(n)^2] = \sigma_X^2 + \mu_X^2 \quad (3.4a)$$

$$r_{XX}(\kappa) = r_{XX}(-\kappa) \quad (3.4b)$$

$$r_{XX}(0) \geq |r_{XX}(\kappa)| \quad , |\kappa| > 0 \quad (3.4c)$$

---

### 3.3 Cross-SOMF

---

$$r_{XY}(n_1, n_2) = E[X(n_1) \cdot Y(n_2)] \quad (3.5)$$

---

---

### 3.3.1 Gemeinsame Stationarität (joint stationary)

---

Sei  $X(n)$  und  $Y(n)$  nach (3.2.1) *stationär*, dann sind die Prozesse gemeinsam stationär, wenn gilt:

$$r_{XY} = r_{XY}(n_1 - n_2) = r_{XY}(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = n_1 - n_2 \quad (3.6)$$

---

### 3.3.2 Eigenschaften der Cross-SOMF

---

$$r_{XY}(-\kappa) = r_{YX}(\kappa) \quad (3.7a)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \sqrt{r_{XX}(0) \cdot r_{YY}(0)} \quad (3.7b)$$

$$|r_{XY}(\kappa)| \leq \frac{1}{2}(r_{XX}(0) + r_{YY}(0)) \quad (3.7c)$$

---

### 3.3.3 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Cross-SOMF

---

$$r_{XY}(\kappa) = \mu_x \cdot \mu_y = E[X(n + \kappa)]E[Y(n)] \quad (3.8)$$

---

### 3.3.4 Orthogonalität

---

$$r_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.9)$$

---

## 3.4 Kovarianz (Covariance, Central-SOMF)

---

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = E[(X(n + \kappa) - E[X(n + \kappa)]) \cdot (X(n) - E[X(n)])] \quad (3.10a)$$

$$c_{XX}(n + \kappa, n) = r_{XX}(n + \kappa, n) - E[X(n + \kappa)]E[X(n)] \quad (3.10b)$$

---

### 3.4.1 Eigenschaften der Kovarianz

---

Falls  $X$  zumindest *stationär im weiteren Sinne*(3.2.1) ist, gilt

$$c_{XX}(\kappa) = r_{XX}(\kappa) - (E[X(n)])^2 \quad (3.11)$$

---

### 3.4.2 Kovarianz einer zusammengesetzten Funktion

---

Falls  $Y(n) = X(n) + V(n)$  und  $X(n)$  ist von  $V(n)$  statistisch unabhängig und einer der beiden Prozesse mittelwertfrei, dann gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) \quad (3.12a)$$

Ist  $X(n)$  jedoch abhängig von  $V(n)$ , so gilt:

$$c_{YY}(\kappa) = C_{XX}(\kappa) + C_{VV}(\kappa) + C_{XV}(\kappa) + C_{VX}(\kappa) \quad (3.12b)$$

---

### 3.4.3 Überführung der Central-SOMF in die Varianz

---

$$c_{XX}(0) = \text{Var}(X) \quad (3.13)$$

---

## 3.5 Kreuz-Kovarianz (Cross-covariance)

---

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = E[(X(n + \kappa) - E[X(n + \kappa)]) \cdot (Y(n) - E[Y(n)])] \quad (3.14a)$$

$$c_{XY}(n + \kappa, n) = r_{XY}(n + \kappa, n) - E[X(n + \kappa)]E[Y(n)] \quad (3.14b)$$

---

### 3.5.1 Eigenschaften der Kreuzkovarianz

---

Falls  $X$  und  $Y$  zumindest *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1) sind, gilt:

$$c_{XY}(\kappa) = r_{XY}(\kappa) - E[X(n)]E[Y(n)] \quad (3.15)$$



---

### 3.5.2 Unkorreliertheit (uncorrelated) anhand der Kreuzkovarianz

---

$$c_{XY}(\kappa) = 0 \quad (3.16)$$

---

## 3.6 Komplexe Prozesse

---

Seien  $X(n)$  und  $Y(n)$  reale Zufallsprozesse, so ist

$$Z(n) \triangleq X(n) + jY(n) \quad (3.17)$$

ein Komplexer Zufallsprozess

---

### 3.6.1 Erwartungswert eines Komplexen Zufallsprozess

---

$$E[Z(n)] = E[X(n)] + jE[Y(n)] \quad (3.18)$$

---

### 3.6.2 SOMF eines Komplexen Zufallsprozess

---

$$r_{ZZ}(n_1, n_2) = E[Z(n_1) \cdot Z(n_2)^*] \quad (3.19)$$

---

#### Besondere Eigenschaften

---

Für einen komplexen Zufallsprozess, welcher *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) ist, gilt

$$r_{ZZ}(-\kappa) = r_{ZZ}(\kappa)^* \quad (3.20)$$

---

### 3.6.3 cross-SOMF komplexer Zufallsprozesse

---

$$r_{Z_1 Z_2}(n_1, n_2) = E[Z_1(n_1) \cdot Z_2(n_2)^*] \quad (3.21)$$

---

### 3.6.4 Kovarianz (Covariance) eines komplexen Zufallsprozess

---

$$c_{ZZ}(n + \kappa, n) = E[(Z(n + \kappa) - E[Z(n + \kappa)]) \cdot (Z(n) - E[Z(n)])^*] \quad (3.22)$$

---

### 3.6.5 Kreuzkovarianz(cross-covariance) komplexer Zufallsprozesse

---

$$c_{Z_1 Z_2}(n + \kappa, n) = E[(Z_1(n + \kappa) - E[Z_1(n + \kappa)]) \cdot (Z_2(n) - E[Z_2(n)])^*] \quad (3.23)$$

---

### 3.6.6 Eigenschaften komplexer Zufallsprozesse

---

*Unkorreliertheit* verhält sich wie (3.5.2), genauso wie *Orthogonalität* (3.3.4)

---

## 4 Spektraldichten (Power Spectral Density)

---

### 4.1 Leistungsdichte

---

---

#### 4.1.1 Leistungsspektraldichte (Power Spectral Density, PSD)

---

$$S_{XX}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[ \left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M + 1} \quad (4.1)$$

mit

$$X_N(e^{j\omega}, \xi) = \sum_{n=-M}^M x_N(n, \xi) e^{-j\omega n} \quad (4.2)$$

---

#### Eigenschaften der Leistungsspektraldichte

---

$$S_{XX}(e^{j\omega})^* = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3a)$$

$$S_{XX}(e^{j\omega}) \geq 0 \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{C} \quad (4.3b)$$

$$S_{XX}(e^{-j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n) \in \mathbb{R} \quad (4.3c)$$

---

## 4.1.2 Durchschnittliche Leistung eines Zufallsprozesses

---

$$P_{XX} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} = r_{XX}(0) \quad (4.4a)$$

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbb{E} \left[ \left| X_N(e^{j\omega}, \xi) \right|^2 \right]}{2M+1} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.4b)$$

---

## 4.1.3 Kreuzleistungsdichte (cross-power density)

---

$$S_{XY}(e^{j\omega}, \xi) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[ X_N(e^{j\omega}, \xi) Y_N(e^{j\omega}, \xi)^* \right]}{2M+1} \quad (4.5)$$

---

### Eigenschaften der Kreuzleistungsdichte

---

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{C} \quad (4.6a)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega})^* = S_{YX}(-e^{j\omega}) \quad \text{mit } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6b)$$

$$\Re\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Re\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind gerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6c)$$

$$\Im\{S_{XY}(e^{j\omega})\} \text{ und } \Im\{S_{YX}(e^{j\omega})\} \quad \text{sind ungerade, wenn } X(n), Y(n) \in \mathbb{R} \quad (4.6d)$$

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = S_{YX}(e^{j\omega}) = 0 \quad \text{wenn } X(n) \text{ und } Y(n) \text{ orthogonal (3.3.4)} \quad (4.6e)$$

---

## 4.1.4 Durchschnittliche Kreuzleistung zweier Zufallsprozesse

---

$$P_{XY} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XY}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.7)$$

---

### 4.1.5 Wiener-Khinchine theorem

---

Ist  $X(n)$  ein *im weiteren Sinne stationärer* (3.2.1) Zufallsprozess, so kann die *Leistungsspektraldichte* (4.1.1) aus der Fourier-Transformation der *Momentenfunktion zweiter Ordnung* (SOMF) (3.2) gewonnen werden:

$$S_{XX}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XX}(\kappa)\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{XX}(\kappa) e^{-j\omega\kappa} \quad (4.8a)$$

und invers

$$r_{XX}(\kappa) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{XX}(e^{j\omega})\} = \int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) (e^{j\omega\kappa}) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.8b)$$

---

### 4.1.6 Kreuzleistungsdichte durch Cross-SOMF

---

$$S_{XY}(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{r_{XY}(\kappa)\} = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{XY}(\kappa) e^{-j\omega\kappa} \quad (4.9)$$

---

## 4.2 Kohärenz (coherence)

---

$$\text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) = \frac{|S_{XY}(e^{j\omega})|^2}{S_{XX}(e^{j\omega}) S_{YY}(e^{j\omega})} \quad (4.10)$$

---

### 4.2.1 Eigenschaften der Kohärenz

---

Die Kohärenz zwischen den Zufallsprozessen  $X(n)$  und  $Y(n)$  besagt, wie gut  $X$  zu  $Y$  bei einer gegebenen Frequenz  $\omega$  korrespondiert.

$$0 \leq \text{Coh}_{XY}(e^{j\omega}) \leq 1 \quad (4.11)$$

---

## 4.3 Root Mean Square (RMS) und Gleichstrom (DC) Werte

---

---

### 4.3.1 DC-Values

---

$$X_{dc} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) = E[X(n)] = \mu_X \quad (4.12)$$

---

### 4.3.2 Normalisierte DC-Leistung

---

$$P_{dc} = \left[ \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n) \right]^2 = E[X(n)]^2 = X_{dc}^2 \quad (4.13)$$

---

### 4.3.3 RMS-Value

---

$$X_{RMS} = \sqrt{\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M X(n)^2} = \sqrt{r_{XX}(0)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega}) \frac{d\omega}{2\pi}} \quad (4.14)$$

---

## 4.4 Spektrum

---

---

### 4.4.1 Spektrum eines stationären Zufallsprozesses

---

Ist  $X(n)$  ein *stationärer* (3.1) Zufallsprozess, so ist sein Spektrum die Fouriertransformierte der *Kovarianzfunktion* (3.4)

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.15)$$

---

## Eigenschaften des Spektrums

---

1. Wenn  $\sum_n |c_{XX}(n)| < \infty$ , dann existiert  $C_{XX}$  und ist begrenzt und stetig
2.  $C_{XX}$  ist Real,  $2\pi$ -Periodisch und  $C_{XX} \geq 0$
- 3.

$$c_{XX}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XX}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.16)$$

---

### 4.4.2 Kreuzspektrum zweier gemeinsam stationärer Zufallsprozesse

---

Ist  $X(n)$  und  $Y(n)$  *gemeinsam stationär* (3.3.1), dann ist das Kreuzspektrum definiert durch

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{XY}(n) e^{-j\omega n} \quad (4.17)$$

---

### Eigenschaften der Kreuzspektrums

---

Das Spektrum eines Realen Zufallsprozesses ist komplett im Intervall  $[0, \pi]$  bestimmt

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18a)$$

$$c_{XY}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} C_{XY}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.18b)$$

Wenn  $X(n), Y(n) \in \mathbb{R}$  dann

$$C_{XX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{-j\omega}) \quad (4.18c)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = C_{XY}(e^{-j\omega})^* = C_{YX}(e^{-j\omega}) = C_{YX}(e^{j\omega})^* \quad (4.18d)$$

---

# 5 Filter

---

## 5.1 Lineare Filter

---

Wenn  $X(n)$  und  $Y(n)$  *stationär* (3.1) sind,  $h(n)$  eine Impulsantwort eines LTI-Systems ist und das Filter *stabil* (5.1.1) ist, existiert mit *Wahrscheinlichkeit eins* (1.7.1) das lineare Filter mit:

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)X(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)X(k) \quad (5.1)$$

---

### 5.1.1 Stabilität

---

Die Stabilität eines Filters ist gegeben, wenn:

$$\sum |h(n)| < \infty \quad (5.2)$$

*Alternativ:* Sei  $H(z)$  die z-Transformation des Filters  $h(n)$ . Dann ist das Filter stabil, falls die Polstellen von  $H(z)$  innerhalb des Einheitskreises liegen

---

### 5.1.2 Eigenschaften eines Linearen Filters

---

Die folgenden Eigenschaften gelten nur, wenn das Filter *stabil* (5.1.1) ist

- Ist  $X(n)$  *stationär* (3.1) und  $E[|X(n)|] < \infty$ , dann ist  $Y(n)$  *stationär*
- $Y(n)$  wird linearer Prozess genannt (linear process)

---

### 5.1.3 Instabiler linearer Filter

---

Ist das Filter nicht *stabil* (5.1.1), aber  $\int |H(e^{j\omega})| d\omega < \infty$  trifft zu und für  $X(n)$   $\sum |c_{XX}(n)| < \infty$ , sodann existiert im *Mean-Square-Sense* (1.7.2) die Formel (5.1) und  $Y(n)$  ist *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1) mit

$$\mu_Y = E[Y(n)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)E[X(n-k)] = \mu_X H(e^{j0}) \quad (5.3)$$



---

### 5.1.4 Leistungsdichtespektrum des Ausgangs eines Filters

---

Sei die Übertragungsfunktion des Filters  $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ , und das Leistungsdichtespektrum von  $X(n)$  sei  $S_{XX}(e^{j\omega})$ , dann gilt:

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.4)$$

---

### 5.1.5 Spektrum/Kovarianz des Ausgangs eines Filters

---

Sei die Übertragungsfunktion des Filters  $H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ , und das Spektrum von  $X(n)$  sei  $C_{XX}(e^{j\omega})$ , dann gilt:

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 C_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.5a)$$

$$c_{YY}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(k)h(l) \cdot c_{XX}(\kappa - k + l) \quad (5.5b)$$

---

### 5.1.6 Kreuzkovarianz des Ausgangs des Filters

---

Sei  $X(n)$  das Eingangssignal und  $Y(n)$  das Ausgangssignal

$$c_{YX} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)c_{XX}(\kappa - k) \quad (5.6a)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) \quad (5.6b)$$

$$c_{YX} = \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) C_{XX}(e^{j\omega}) e^{-j\omega\kappa} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (5.6c)$$

---

### 5.1.7 Kreuzkovarianz des Ausgangs zweier paralleler Filter

---

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_1(k)h_2(l) \cdot c_{X_1 X_2}(\kappa - k + l) \quad (5.7a)$$

$$c_{Y_1 Y_2}(\kappa) = h_1(\kappa) \star h_2(\kappa)^* \star c_{X_1 X_2}(\kappa) \quad (5.7b)$$

$$C_{Y_1 Y_2}(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})^* C_{X_1 X_2}(e^{j\omega}) \quad (5.7c)$$

---

## 5.1.8 Kaskade linearer Filter

---

$$H(e^{j\omega}) = \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.8a)$$

$$C_{YY}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L |H_i(e^{j\omega})|^2 \quad (5.8b)$$

$$C_{YX}(e^{j\omega}) = C_{XX}(e^{j\omega}) \prod_{i=1}^L H_i(e^{j\omega}) \quad (5.8c)$$

---

## 5.2 Matched Filter

---

---

### 5.2.1 Annahmen des Matched Filters

---

- Das eingehende Signal  $X(n)$  besteht entweder aus einem Signal mit Rauschen oder nur Rauschen:

$$X(n) = \begin{cases} s(n) + V(n) \\ V(n) \end{cases} \quad (5.9)$$

- Dabei ist  $s(n)$  reellwertig, deterministisch und betrachtet in  $n \in [0, N)$
- $E[V(n)] = 0$  und  $C_{VV}(e^{j\omega})$  bekannt

---

### 5.2.2 Ziel des Matched Filters

---

Maximierung des Signal-Rausch-Verhältnis:

$$\left( \frac{S}{N} \right) = \max \frac{|s_0(n_0)|^2}{E[V_0(n_0)^2]} \quad (5.10)$$

---

### 5.2.3 Übertragungsfunktion des Matched Filters

---

Sei  $S(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{s(n)\}$ ,  $C_{VV}$  das Spektrum des Rauschens,  $n_0$  die Abtastungszeit, bei welcher  $(S/N)$  berechnet wird, und  $k$  eine reelle Konstante

$$H(e^{j\omega}) = k \frac{S(e^{j\omega})^*}{C_{VV}(e^{j\omega})} e^{-j\omega n_0} \quad (5.11)$$

Dabei geht der Signalverlauf am Ende des Filters verloren und der Filter kann zur Signaldetektion genutzt werden

---

### 5.2.4 Matched Filter für Weißes Rauschen

---

Bei weißem Rauschen wird die Impulsantwort des Filters zu

$$h(n) \equiv c \cdot s(n_0 - n) \quad (5.12)$$

⇒ Die Impulsantwort des Filters ist das bekannte Signal "rückwärts gespielt" und um  $n_0$  verschoben

Der Signal zu Rausch Abstand ergibt sich dann zu:

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{out} = \frac{E_s}{\sigma_V^2} \quad (5.13)$$

---

## 5.3 Wiener Filter

---

---

### 5.3.1 Ziel des Wiener Filters

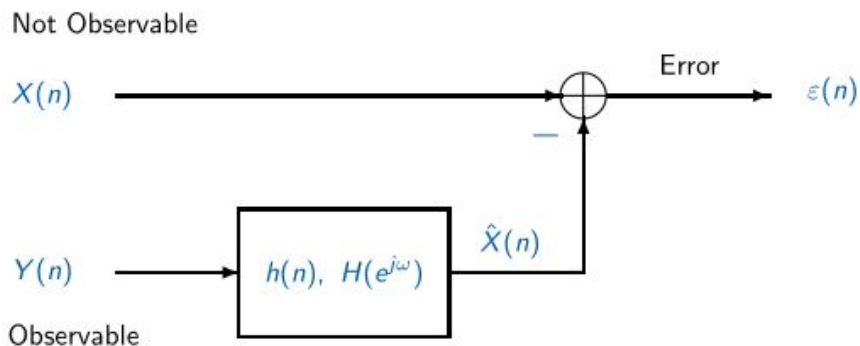
---

Der Wiener Filter versucht die optimale Schätzung (nach (1.7.2)) eines Zufallsprozesses durch die Beobachtung eines anderen Prozesses

---

### 5.3.2 Annahmen des Wiener Filters

---



- $X(n)$  ist der zu schätzende Zufallsprozess
- $Y(n)$  ist der betrachtete Zufallsprozess
- $\epsilon(n)$  ist der Fehlerprozess
- $X(n)$  und  $Y(n)$  sind reelwertig, mittelwertfrei und *gemeinsam stationär im weiteren Sinne* (3.3.1)
- Aufgrund der *gemeinsamen Stationarität im weiteren Sinne* (3.3.1) der beiden Prozesse ist die Impulsantwort  $h(n)$  stabil und der Fehlerprozess  $\epsilon(n)$  *stationär im weiteren Sinne* (3.2.1)

---

### 5.3.3 Die Übertragungsfunktion des Wiener Filters

---

Entstehend aus den *Wiener-Hopf-Gleichungen*

$$c_{XY}(\kappa) = h_{opt}(\kappa) \star C_{YY}(\kappa) \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad (5.14a)$$

$$C_{XY}(e^{j\omega}) = H_{opt}(e^{j\omega}) C_{YY}(e^{j\omega}) \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (5.14b)$$

erlangt man die optimale Übertragungsfunktion:

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XY}(e^{j\omega})}{C_{YY}(e^{j\omega})} \quad (5.15)$$

---

### 5.3.4 Mean Square Error des Wiener Filters

---

Der Mean Square Error ist als der Erwartungswert des quadrates der Fehlerfunktion definiert

$$q(h) = E[\epsilon_X^2(n)] \quad (5.16)$$

$$h_{opt} = \arg \min_h q(h), n \in \mathbb{Z} \quad (5.17)$$

Daraus folgt:

$$q_{min} = C_{XX}(0) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{opt}(m) C_{XY}(m) \quad (5.18a)$$

$$q_{min} = p(0) \quad \text{mit} \quad (5.18b)$$

$$p(\kappa) = C_{XX}(\kappa) - h_{opt}(\kappa) \star c_{YX}(\kappa)$$

---

### 5.3.5 Orthogonalitätsprinzip (Herleitung des Wiener Filters)

---

Zur minimierung des MSE setzt man das Fehlersignal  $\epsilon_X(n)$  als unkorreliert mit dem beobachteten Eingangssignal  $Y(n)$

$$C_{\epsilon_X Y}(\kappa) = E[\epsilon_X(n + \kappa) Y(n)] = 0 \quad (5.19)$$

---

### 5.3.6 Der Wiener Filter mit additivem Rasuchen

---

$$H_{opt}(e^{j\omega}) = \frac{C_{XX}(e^{j\omega})}{C_{XX}(e^{j\omega}) + C_{VV}(e^{j\omega})} \quad (5.20)$$

---

## 6 Sonstiges

---

### 6.1 Spezielle Funktionen

---

---

#### 6.1.1 Gaussian white noise process

---

GauSSsches weißes Rauschen ist immer *stationär* (3.1)

$$E[W(n)] = 0 \quad (6.1a)$$

$$r_{WW}(\kappa) = c_{WW}(\kappa) = \sigma_W^2 \delta(\kappa) \quad (6.1b)$$

$$S_{WW}(e^{j\omega}) = \sigma_W^2 \quad (6.1c)$$

---

#### 6.1.2 Kronecker delta function

---

$$\delta(\kappa) = \begin{cases} 1 & \kappa = 0 \\ 0 & \kappa \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

---

### 6.2 Mathematische nützliche Formeln

---

---

#### 6.2.1 Ungleichung von Schwarz

---

$$\left| \int_a^b \varphi_1(\omega) \varphi_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \left( \int_a^b |\varphi_1(\omega)|^2 d\omega \right) \cdot \left( \int_a^b |\varphi_2(\omega)|^2 d\omega \right) \quad (6.3)$$

---

## 6.2.2 Orthogonalitäts- und Normierungsbeziehungen

---

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4a)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mt)\sin(nt)dt = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad (6.4b)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt)\sin(nt)dt = 0 \quad (6.4c)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 2\pi & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4d)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(nt) = \begin{cases} \pi & \text{für } n \geq 1 \\ 0 & \text{für } n = 0 \end{cases} \quad (6.4e)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(k+t)dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4f)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(k+t)dt = 0 \quad \text{mit } k = \text{const} \quad (6.4g)$$

---

## 6.2.3 Betragsquadrat komplexer Funktionen

---

$$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \quad (6.5)$$

---

## 6.2.4 Doppelte Faltungssumme

---

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m)h(k)f(k-m) = h(n) \star f(0) \star h(-n) \quad (6.6)$$

---

## 6.2.5 Einzelne Faltungssumme ohne Differenz im Argument

---

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)f(m) = h(-n) \star f(0) \quad (6.7)$$