Геометрия и топология

Солынин А. А.[1]

11.09.2023 - ...

[1] "Записал Сергей Киселев"

Оглавление

Лекция 2: Матрицы

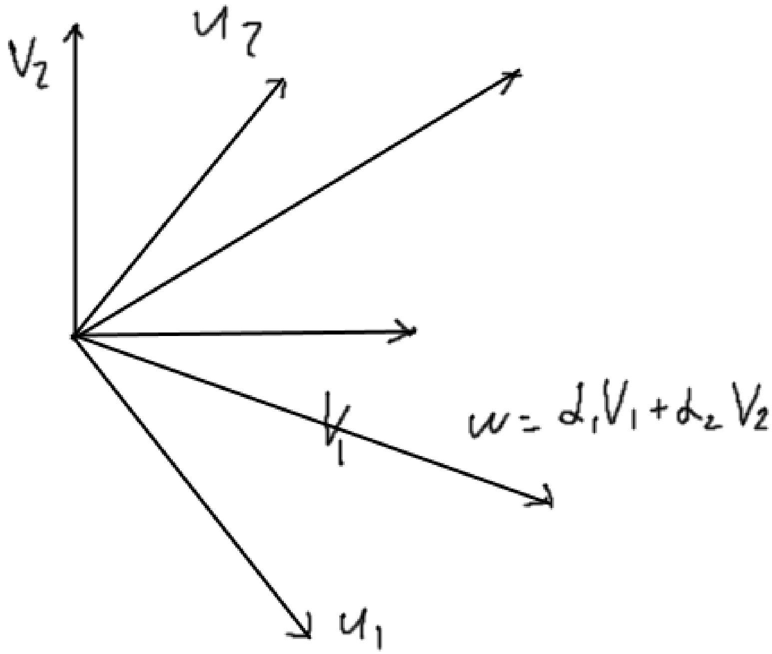
25.09.2023

0.1 Матрицы

Пусть v - Это конечно мерно пространство
$v_1 ... v_2$ - базис v
$w \leq V => \exists! v_1, v_2, v_3$
$v = k_1 * v_1 + k_2 * v_2 + k_n * v_n$

Определение 1. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ - координаты
w в базисе $v_1 v_2$

$w \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n)$
$u \leftrightarrow (\beta_1 ... \beta_n)$
$u + w \leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 * \alpha_2 + \beta_2 ... \alpha_n \beta_n)$
$f * w \leftrightarrow (f * \alpha_1, f * \alpha_2 ... f * \alpha_n)$
$v_1 ... v_n$ - Базис
$u_1, u_2, ... u_n$ - базис
$w = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + \alpha_n * v_n = \beta_1 * u_1 + ... + \beta_n * u_n$



Определение 2. (*)
$U_1 = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_n * v_n$
$U_2 = a_2 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_{2n} * v_n$
$\dots$
$U_n = a_n * v_1 + a_{n2} * v_2 + ... + a_{nr} * vn$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

матрица перехода от $(v_1...v_n) * k$
$u_1...u_n$

Определение 3. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & vddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$

Матрица N * R

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$

$k \times l$

$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & c_{nl} \end{pmatrix}$$

$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + ... + a_{1k} * b_{kl}$

$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + ... + a_{1k} * b_{k2}$

$c_ij := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{1y} + ... + a_{zk}b_{kj}$

$$(*) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$w_1 ... w_n$ - базис

$V_! = b_{11} * w_1 + ... + b_{1n} * w_n$

$\dots$

$v_n = b_{n1} * w_1 + \dots b_{nn} * w_n$

$u_q = a_{11} * v_1 + a_{12} v_2 + ... + a_{1n} v_n = a_{11}(b_{11} w_1 + ... + b_{1n} w_n) + ... + a_1 n(b_{n1} w_1 + ... + b_{nn} w_n) = w_1(a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + ... + a_{1n} b_{n1}) \dots$

Теорема 1. Если A - Это матрица перехода от $\{v_i\}\{u_i\}$
B - матрица перехода от $\{w_i\}\{v_i\}$
$=> A \cdot B$ - м. п. от $\{w_2\}\{u_i\}$

$A \setminus B : A \cdot B \neq B \cdot A!$

Теорема 2. A(BC) = (AB)C
Умножение матриц хоть и не коммутативно, но ассоциативно.

$w_1 ... w_n \to v_1 ... v_k \to u_1 ... u_e \to t_1 ... t_m$

$w_1 ... w_n \to w_1 ... w_n$

$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица

$u_1 ... u_n$ - базис

$v_1 ... v_n$ - базис

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$A \cdot B = E$

$B \cdot A = E$

(A и B) - обратные матрицы

0.2 Скалярное произведение

Определение 4. V - векторное пространство
$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) $\geq$ 0 (u, u) = 0 <=> U = 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u_, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) = (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Для комплексных чисел 4L
$(u, v) = \overline{(v, u)}$
$(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^n$

$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций (...) $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x) g(x) dx$

Определение 5. Пускай V - евклидово пространство
v - элемент V
$|v| := \sqrt{(v, v)}$
$cos@a(u, v) := \frac{(u, w)}{|u| \cdot |v|}$
(u, v + 0)

Теорема 3. (Неравенство КБШ)
$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$

$0 \leq (\overline{u} + f\overline{v}; \overline{u} + f\overline{v}) = (\overline{u}, \overline{u}) + (\overline{u}, t\overline{v}) + (t\overline{v}, \overline{u}) + \forall t + (t\overline{v}, t\overline{u}) = t^2(v, v) + 2t(u; v) + (u, u)$
$D \leq 0$
$\frac{D}{u} = (u; v)^2 - (u.u)(v, v) \leq 0$
$(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot v, v$

Определение 6. 1. $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$

2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx)$

Определение 7. $u \perp v$, если $(u, b) = 0$

$v_1 ... v_n$ - ортогональная, если
$v_i \perp v_j (i \neq j)$

Теорема 4. $v_1 ... v_n$ - ортогональная система, нет нулевых векторов
$=>$ $v_1 ... v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство. $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$
$(v_1 v_i) = 0$ $\alpha_1(v_1 v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + ... + \alpha_i(v_1, v_i) + ... = 0$
$a_i(v_i)^2 = 0$
$\alpha_i = 0$ □

Определение 8. u - нормированый или единичный если $|u| = 1$
$v_1 ... v_n$ - ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
$v_1 .. v_i$ - ОНБ ортонормированный базис