Алгебра и теория чисел

Иванова Ольга Юрьевна[1]

08.09.2023 - ...

[1]"Записал Сергей Киселев, Гараев Тагир"

Оглавление

Глава 1

Множества

Лекция 1: Операции над множествами

08.09.2023

1.1 Операции над множествами

Обозначение. $x \in A$ означает, что элемент x принадлежит множеству A.

$x \notin A$ означает, что элемент x не принадлежит множеству A.

Определение 1. $\emptyset$, пустое множество - множество, не содержащее ни одного элемента.

Определение 2. Множество B называют подмножеством A, если любой элемент B принадлежит A.

Обозначение. $B \subset A$

Пример. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Операции.

1. Пересечение множеств A и B - это множество из элементов принадлежащих A и B.

   Обозначение. $A \cap B$

2. Объединение множеств A и B - множество из элементов A или B.

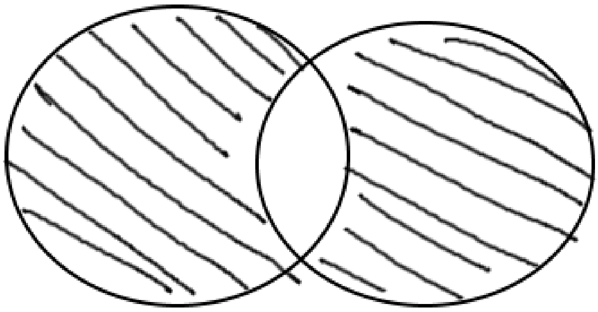
   Обозначение. $A \cup B$

3. Разность множеств A и B - множество элементов A, не принадлежащих B.

   Обозначение. $A \setminus B$

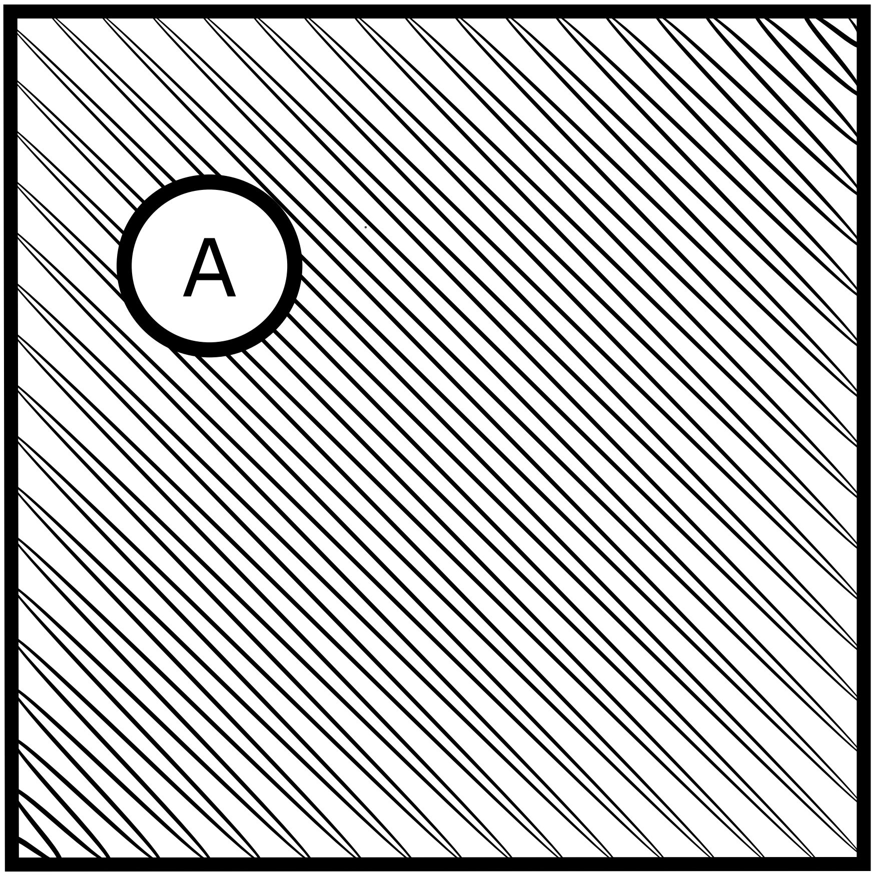
4. Симметрическая разность

Пример. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



5. Дополнение

Если предположить, что все множества являются поднмножествами некоторого универсального множества, дополнение множества A - это множество элементов U, не принадлежащих A.



Пример. $U = \mathbb{Z}$
A - множество чётных чисел
$\overline{A}$ - множество нечётных чисел

Порядок действий

1. Дополнение
2. Пересечение
3. Объединение, рахность, симметрическая разность

Приоритет слева направо.

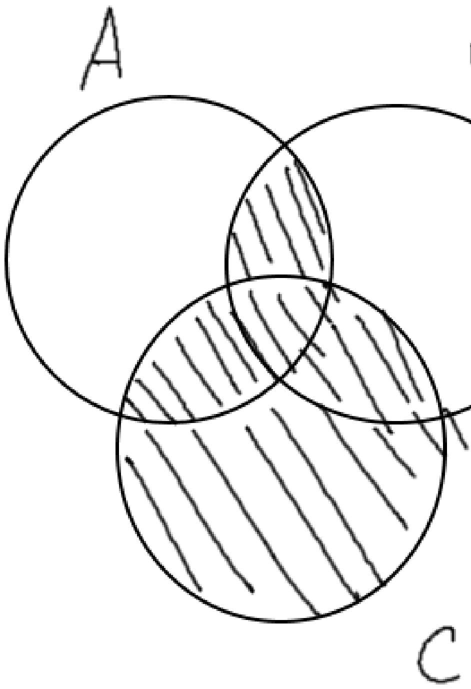
Пример. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{3, 4\}$ $C = \{4, 5\}$
$\overline{A \cup B \cap \overline{C} \setminus \overline{B}}$

1. $\overline{C} = \{1, 2, 3\}$
2. $\overline{B} = \{1, 2, 5\}$
3. $B \cap \overline{C} = \{3\}$

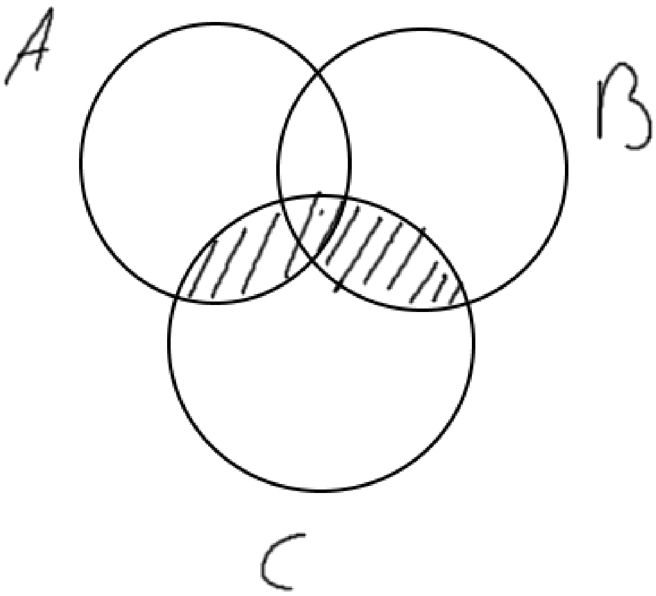
4. $A \cup B \cap \overline{C} = \{1, 2, 3\}$
5. $A \cup B \cap \overline{C} \setminus \overline{B} = \{3\}$
6. $\overline{...} = \{1, 2, 4, 5\}$

Свойства:

1. Дистрибутивность
   (a) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$



   (b) $(A \cup B) \cap = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



Доказательство. Положим $D = (A \cap B) \cup C$

$E = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Докажем, что $C \subset E$

Пусть $x \in D$, тогда выполняется

(a) $x \in A \cup B$ или
(b) $x \in C$

Если выполнено 1, то x $\in$ $A \cup B$ => $x \in A$ => $x \in A \cup C \in A \cap B$ => $A \in B$ => $x \in B \cup C$ => $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Если выполнено 2, то $x \in C$ => $x \in AcupC$ => $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$

$x \in C$ => $x \in B \cup c$

$x \in E$ => $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$

Случай 1. $x \notin C$

- $x \notin C$, $x \in A \cup C$ => $x \in A$

- $x \neq C$, $x \in B \cup C => x \in B$

$=> x \in A \cap B = .x \in B$
Случай 2. $x \in C$
$=> x \in (A \cap B) \cup C => x \in D$ □

2. Законы де Моргана
   (a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   (b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Прямым или декартовым произведеним множеств A и B называют множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$

Обозначение. $A \times B$

Пример. 1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{x, y\}$
$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y)\}$

2. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$
$A \times B = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$

3. $A = B = R$
$A \times B = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$

Св-во: между элементами множеств $(A \times B) \times C$ и $A \times (B\ timesC)$ есть взаимно однозначное соответствие.

Определение 3. $A \times B \times C$ - Это $(A \times B) \times C$
$A^n = A \times A \times ...A$

Пример. $0, 1^3$ элементов (0,0,0), (0,0,1), ..., (1,1,1)

1.2 Отображения

Определение 4. Отображением или функцией из множества X в множество Y называют правило, которое каждому элементу множества X сопоставляет ровно один элемент из множества Y.

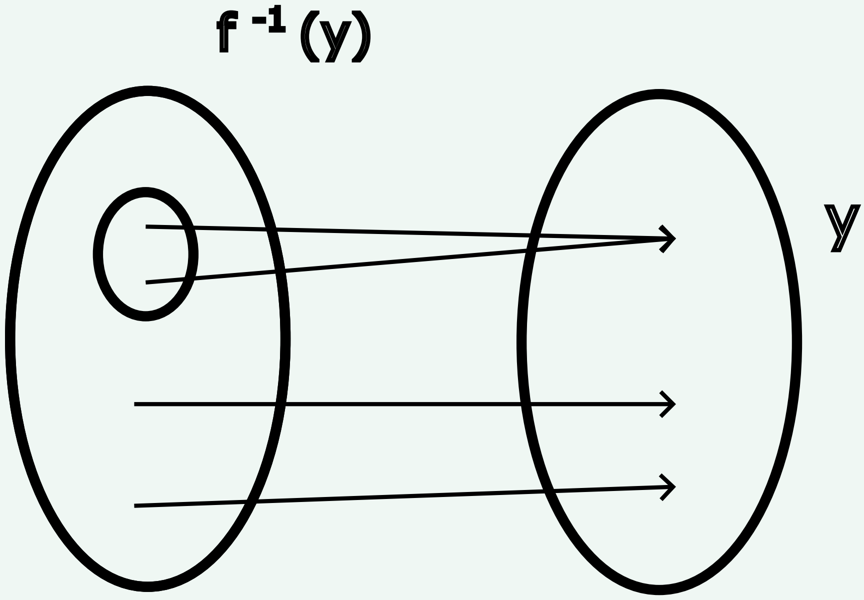
Пример. 1. $X = \{a, b, c, d\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$
$f(a) = 1$
$f(b) = 2$
$f(c) = 1$
$f(d) = 1$

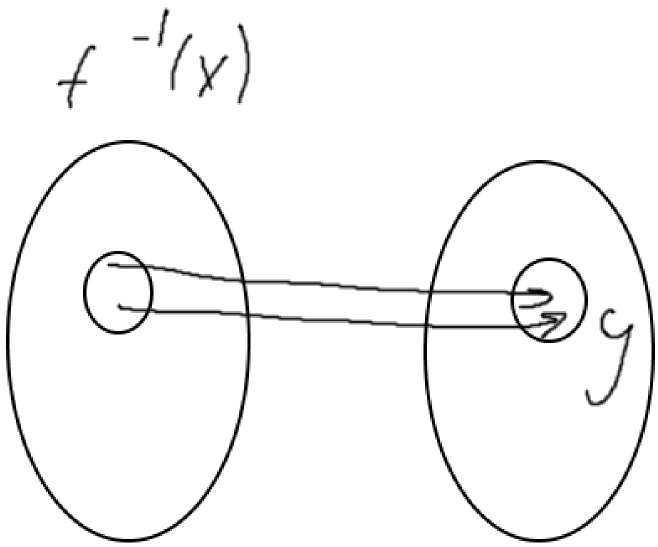
2. $X = Y = \mathbb{R}$
   $f(x) = x^2 =$

Определение 5. Образом отображения f называют множество элементов $f(x)$ т.к. $\{f(x) | x \in X\}$

Обозначение. $Imf, f(X)$

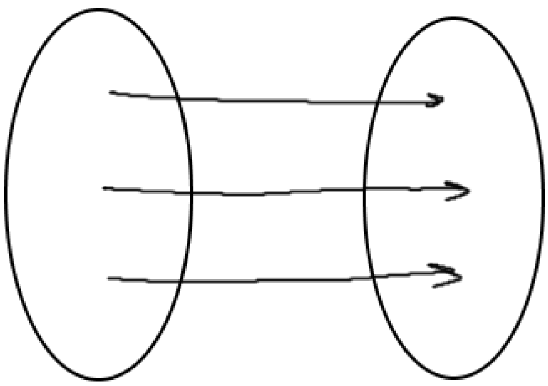
Определение 6. Прообразом элемента $y \in X$ называют множество элементов множества X, которые переходят в y, т.е.
$\{x \in X | f(x) = y\}$





Обозначение. $f^{-1}(y)$
Если $y_1 \subset y$, то
$f^{-1}(y_1) = \{x \in X | f(x) \in y_1\}$

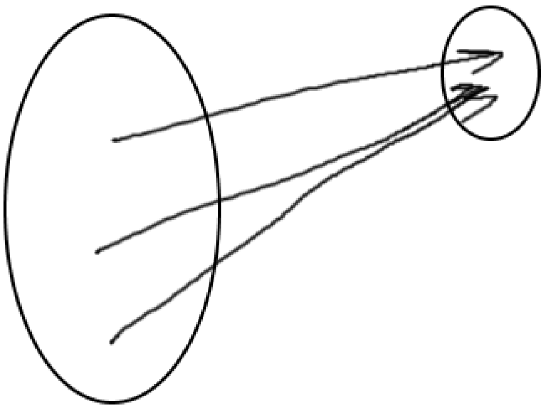
Определение 7. Отображением f называют иньективным, если прообраз любого элемента содержит не более одного элемента.



Др. названия:

- f - иньекция
- f является отображением в

Определение 8. Отображение f называется сюрьективным, если если прообраз любого элемента содержит хотя бы один элемент.



Др. названия:

- f - сюрьекция
- f является отображением на

Определение 9. Отображение f называется биективным, если прообраз любого элемента состоит ровно из одного элемента.
Др. названия:

- f - биекция
- f - взаимно однозначное отображение

Замечание. f биекция <=> f - инъекция и сюръекция.

Пример. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

1. $f(x) = x + 1$ - биекция
2. $f(x) = x^2$ - не иньекция, не биекция

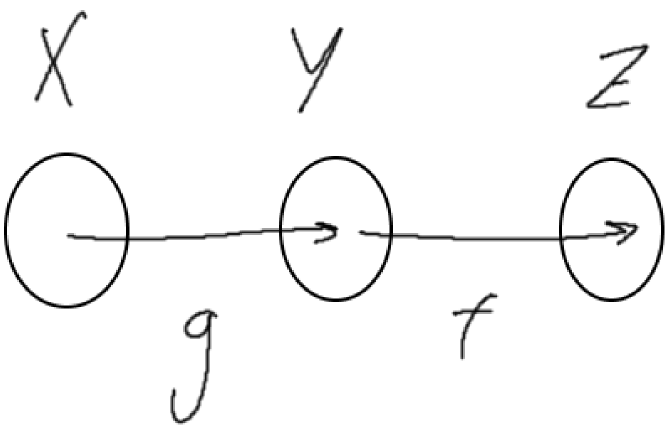
$f^{-1}(4) = \{2. -2\}$
$f^{-1}(5) = \emptyset$
$\alpha \subset 2$

3. $f(x) = 2x$ - инъекция, не сюръекция
$f^{-1} = \emptyset$
$x_1 \neq x_2 => 2x_1 \neq 2x_2$

4. $f(x) = [\frac{x}{2}]$ не иньекция
$[\frac{0}{2}] = [\frac{1}{2}]$
$2n \in f^{-1}(n)$
$=>$
$f^{-1}(n) \neq \emptyset$

Определение 10. Тождественное отображение $e_x : x \to x_1, e_x(x) = x$

Определение 11. Пусть $y : X - Y, f : X \to Z$



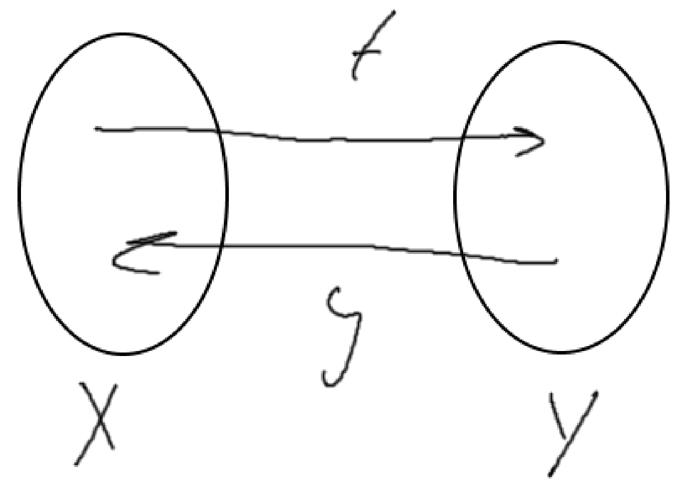
отображение композиция fog определяется как
$(fog)(x) = f(g(x))$

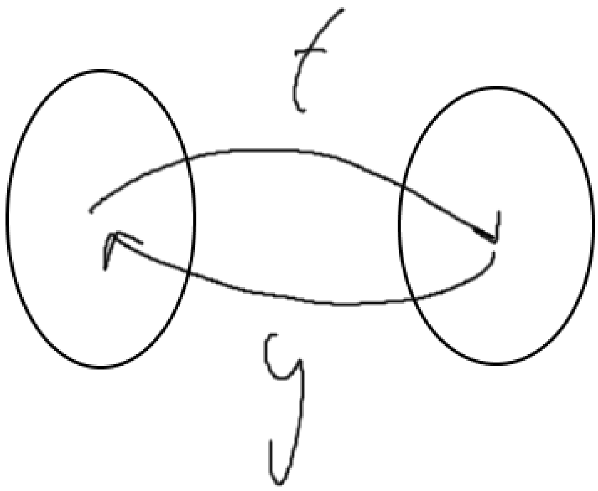
Пример. $X = Y = \mathbb{Z} = \mathbb{R}$
$f(x) = x + 1, y(x) = x$
$(fog)(x) = x^2 + 1$
$(gof)(x) = (x + 1)^2$

Замечание. $(fog)oh = fo(goh)$

Обозначение. $fogoh$

Определение 12. Пусть $f : X \to Y, y : Y \to V$
Отображение y называют образом к отображениб f, если
$fog = e$
$gof = e$





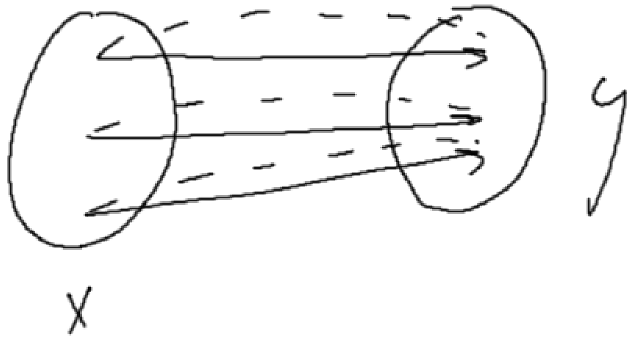
Пример. $X = Y = [0; +\infty]$
$f(x) = x^2, y(x) = \sqrt{x}$

Определение 13. Обратное отображение к f обозначается f^{-1}
(Корректность, т.е. единственность отображения обратных - ниже)

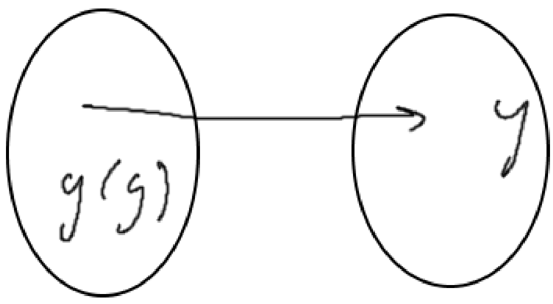
Теорема 1. (Существование обр. отображения)
Обратное отображение к f существует тогда и только тогда, когда f является биекцией.

Доказательство. 1. Доказать, что если f биекция, то существует y, обратное к f

Пусть $y \in X \exists! x$, такой, что $f(x) = y$



Положим $y(y) = x$



Теорема 2. (Единственности обратного отображения)
Пусть f - Биекция $X \to Y$. Тогда не существует различных отображений y_1, y_2 являющихся обратными к A.

Доказательство. Доказательство: Упражнение! $\square$

Лекция 2: Бинарные отношения

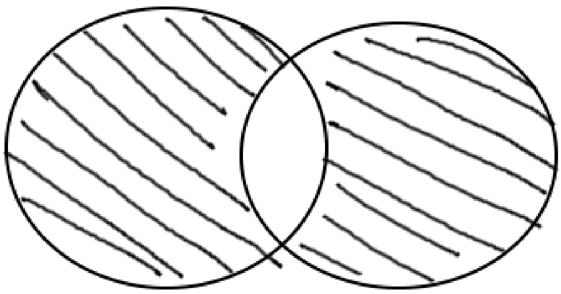
15.09.2023

1.3 Бинарные отношения

Определение 14. Бинарноным отношением между множествами X и Y называют подмножество $X \times Y$

Обозначение. Пусть задано $w \subset X \times Y$. Тогда, условие $(x, y) \in w$ записывается как XwY

Обозначение. Если X = Y, то говорят, что w - отношение на X.

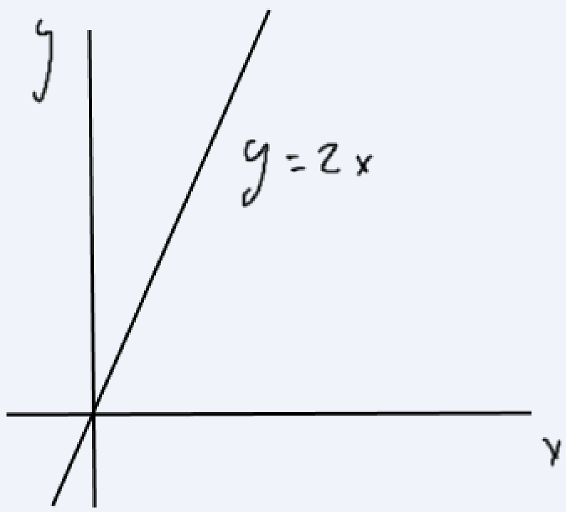


Доказательство. Пусть g_1, g_2 - отображения к R.

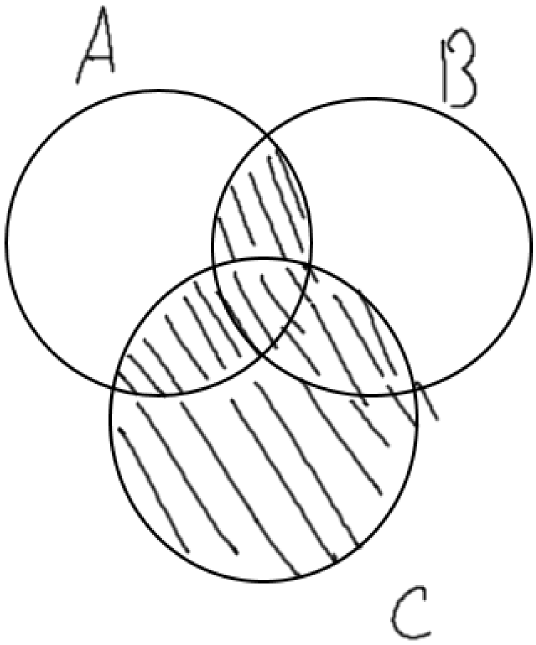
$q_1 \neq q_2$
$\exists g : g, (g) \neq g = (g)$
$x_i = y_1(y), x_2 := g_2(y)$
$f(x_1) = f(g_1(y)) = g = f(g_2(y)) = f(x_2)$
$f(x_1) = f(x_2)$
$x_1 \neq x_2$ □

Пример. 1. $f(x) = 2x$

xwy, если $g = f(x)$



2. xwy, если $x^2 = y$



Определение 15. Бинарное отношения w на X называется

1. Рефлексивным, если xwy и ywz
2. Симметричным, если из того что xwy и ywz следует, что xwf

Пример. 1. $=, \leq$ - рефлексивное
$<$, паралленьльно на множестве прямых - не рефлексивно

2. $=, ||$ - симметрично
$leq, <$ - не симметрично

3. $=, <, \vdots$ - транзитивно
$\perp$ - на множестве прямх - не транзитивно

Определение 16. Бинарное отношение на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначение. Обычно обозначается $\sim$.

Пример. 1. $=$ на $\mathbb{R}$

2. Множество $\mathbb{Z}$ $a \sim b$, если $a - b \vdots 5$

   Обозначение. $\overset{\equiv}{5}$

3. Множество проямых на плоскости $l_1 \sim l_2$, если $l_2 || l_2'$, если $L_1 = l_2$

4. Пусть множество - это множество направленных отрезков $\overline{AB} \sim \overline{CD}$, если $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $AB || CD$.

5. $f(x), g(x)$ - функции $f \sim g$, если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{f(y)} = 1$

Определение 17. Пусть на X задано отношение эквивалентности. Классом эквивалентности x называется множество элементов $\{y \in X | y \sim X\}$.

Обозначение. $\overline{x}$, $[x]$, $((x)$

Примечание. Черта над x должна быть немного загнута вниз слева. Также первый вариант обозначения является основным.

Пример. $R, x \sim y, x - y \in \mathbb{Z}$
$x = 0,1$
0,1; 1,1;$-0.9 \in \overline{x}$
$\overline{x} = \{y | \{y\} = \{x\}\}$

Пример. $1,1 \in \overline{0,1}$
$0,1 \in \overline{1,1}$
{y} = 0, 1

5 классов эквивалентности:
5k
5k + 1
5k + 2
5k + 3
5k + 4

Теорема 3. (Разбиение на классы жкивалентности) На множестве X задано отношение эквивалентности . Тогда, множество X разбивается на классы эквивалентности, т.е. X является обьединением не пересекающихся подмножеств, каждое из которых является классом эквивалентности некоторого элемента.

Пример. 1. $\overline{\overline{\overline{5}}}$

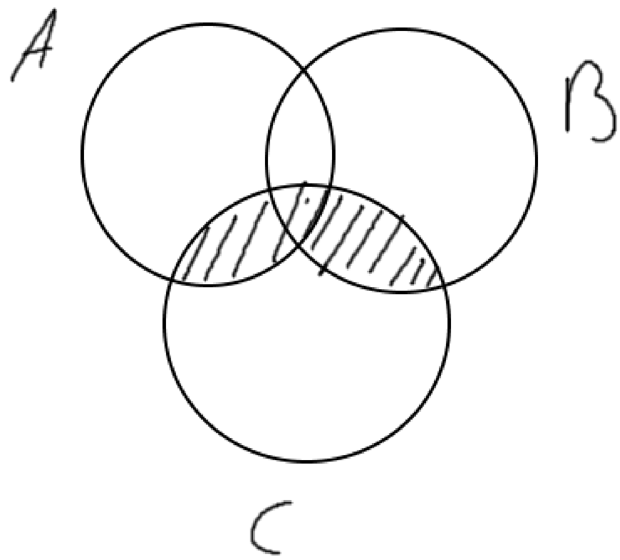
$a \sim b$, если $a - b \vdots 5$

2. $=$ в каждом классе 1 элемент

3. Направленные отрезки $overlineAB \sim \overline{CD}$, если $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$, $AB \uparrow\uparrow CD$

   Класс эквивалентности - вектор.

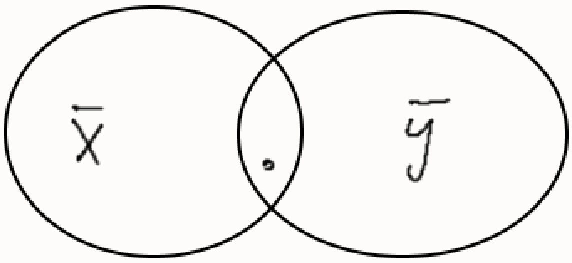
4. R $a \sim b$, если $\alpha - \beta = 2\pi\kappa$



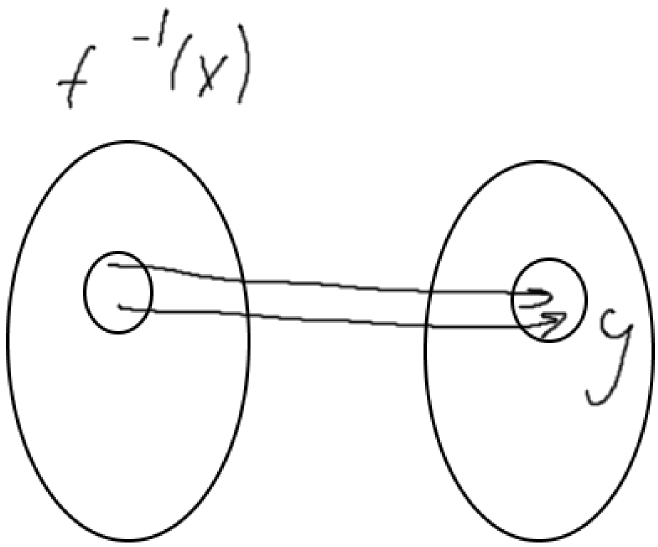
Доказательство. 1. Докажем, что любой элемент X принадлежит некоторому классу эквивалентности.

   $X \in \overline{X}$, т.к. $\sim$???, X x

2. Докажем, что классы не пересекаются



т.е. докажем, что если $\exists z \in \overline{x} \cap \overline{y}$, то $\overline{x} = \overline{y}$

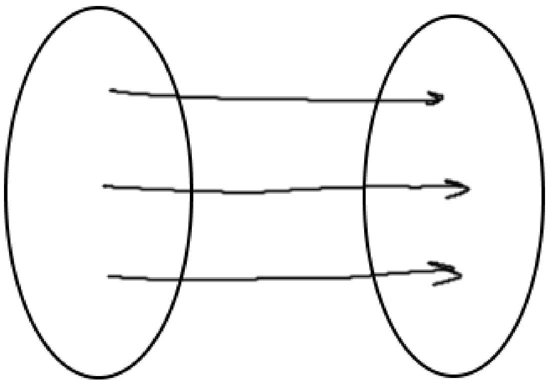


$z \in x$ => $z \sim x$ => (симм) $x \sim z$

$z \in \overline{y}$ => z   Y

x   z, z   y => (тр) x   y => $x \in y$ => $x \in \overline{y}$

аналогично $y \in \overline{x}$



$x = \overline{y}$
Докажем, что $\overline{x} \subset y$
Пусть $\exists f \in \overline{x} => f \sim x$
$f \sim x, x = y => f \sim y$
Аналогично $\overline{y} \subset \overline{x}$
$\overline{x} = \overline{y}$ □

1.4 Множество с алгебраическими операциями

Определение 18. X - множество бинарныой алгебраической операции на X Назвается отображением $X \times X \to X$

Обозначение. 1. Буква, например $f : X \times X \to X$ пишут $f(x, y)$ или xfy

2. Спец. символ: $+$, $\cdot$, 0, * Пишут x + y, x * y

   часто вместо $x \cdot y$, x * y пишут xy

Пример. 1. $X = \mathbb{Z}$

Определить $+$, $\cdot$, -

2. X - множество отображений $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$,

операция - композиция.

3. X - множество векторов

Обозначение. Множество X с операцией V обозначается (V, *)

Определение 19. Бинарная операция * на X Назвается

1. Ассоциативной, если $(x * y * z) = x * (y * z) \forall x, y, z$
2. Коммутативной, если $x * y = y * x \forall x, y$

Пример. 1. $+$, $\cdot$ - коммутативные, ассоциативные

X : y на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ не ассоциативно, не коммутативно

x - y на $\mathbb{R}$

x - векторное произведение

2. ассоциативны, не коммутативны o - композиция для отображения $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Обозначение. Пусть * - ассоциативно
Тогда пишут a * b * c, a * b * c * d
Используют обозначение степени, например a^4 = a * a * a * a
Если операция обозначается $+$, пишут
$4a = a + a + a + a$

Пример. 1. (Z, $\cdot$) e $=$ 1

2. (Z, $+$) e $=$ 0

3. (2Z, $\cdot$) нет ? элемента, множества четных чисел

Замечание. Если операция обозначается $+$, то нейтральный элемент обозначается 0.

Свойство. (единственности единичного элемента)
На x Задана операция *. Тогда существует не более одного единичного элемента.

Доказательство. Пусть e_1, e_2 - единичные, т.е.
$\forall_x\ e_1 + x = x, x + e_1 = x\ e_2 * x = x, x * e_2 = x$

$e_2 =$(ед. эл.)$e_1 * e_2 =$(ед.эл.)$e_1 => e_1 = e_2$

□

Определение 20. Полугруппой называется множество с заданной на нем бинарной ассоциативной операцией.

Определение 21. Моноидом называется полугруппа, в которой есть нейтральный элемент

Пример.
1. ($\mathbb{Z}$, +) - моноид
2. (Z, $\cdot$) - моноид
3. (2$\mathbb{Z}$, $\cdot$) - полугруппа, не моноид
4. ($\mathbb{Z}$, -) - вектор $\subset x$ - не полугруппа

1.5 Группы

Определение 22. Множество G с бинарной операцией * называется группой, если выполнены следующие условия.

1. Операция * ассоциативна, т.е. (a * e) * c = a * (b * c) $\forall a, b, c$
2. $\exists$ единица $e : a * e = e * a = a \forall a$
3. $\forall a \exists$ Обратный элемент a' $\in G$ такой, что $a * a^-1 = a^-1 * a = e$

Обозначение. Если операция обозначается -1, то единичные жлементы обозначаются о, а обратный элемент а обозначается -а.

Определение 23. Пусть (G, *) - группа, если * коммутативна, то группа G называется коммутативной или абелевой.

Лекция 3: Группы, кольца, поля и теория чисел

22.09.2023

1.6 Группы

Пример.
1. $\mathbb{R}^* = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ - абелева группа

   аналогично с $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}_+^*, \mathbb{R}_+^*$
2. $(\mathbb{R}, +)$ - абелева
3. пусть X - множество, G - множество биекций $X \Rightarrow X, \circ$ - композиция, тогда G - группа

4. Группа движений плоскости, операция - $\circ$
5. пусть X - множество, тогда $(2^X, \triangle)$ - группа (доказать)

Свойство. (сокращение), G - группа, $a, b, c \in G$

1. если $ac = bc \Rightarrow a = b$
2. если $ca = cb \Rightarrow a = b$

Доказательство. $ac = bc \overset{\exists c^{-1}}{\Rightarrow} (ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \overset{\text{ассоц.}}{\Rightarrow} a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \Rightarrow ae = be \Rightarrow a = b$ Q.E.D. □

Определение 24. Группы G и H - изоморфны, если $\exists$ биекция из G в H, т.ч. $\forall x, y \in G : f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ где $\cdot$ - операция G, $*$ - операция H

Обозначение. $G \cong H$, f - изоморфизм

Пример. G$(\mathbb{R}, +)$ H$(\mathbb{R}^*_+, \cdot)$ $f(x) = 2^x$ - изоморфизм:

$$f(x+y) = 2^{x+y}$$
$$f(x)f(y) = 2^x \cdot 2^y$$

1.7 Кольца и поля

Замечание. в теории чисел все числа по умолчанию целые

Определение 25. число a делится на b, если: $\exists c : a = bc$

Свойство.

1. $a \vdots c, b \vdots c \Rightarrow a + b \vdots c, a - b \vdots c$

   Доказательство. $a \vdots c \Rightarrow a = kc \wedge b \vdots c \Rightarrow b = mc$

   $$a = kc \wedge b = mc \Rightarrow \begin{cases} a + b = (m+k)c \vdots c \\ a - b = (m-k)c \vdots c \end{cases} \quad \text{Q.E.D.}$$ □

2. $\forall k : a \vdots b \Rightarrow ak \vdots b$
3. $a \vdots b \wedge b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$
4. $a \vdots b \Rightarrow |a| \geq |b| \vee a = 0$

   Доказательство. $a = bc \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0, \text{значит } a = 0 \\ c \neq 0, \text{значит } |c| \geq 1 \end{array}\right.$

   значит, $|a| = |c||b| \geq |b|$ Q.E.D. □

5. $\forall a : a \vdots 1$

6. $\forall a : 0 \vdots a$

Определение 26. НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ - наибольшее число, на которое делятся $a_1, a_2, \ldots, a_k$

Обозначается как: $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$

Определение 27. НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ - наименьшее число, которое делится на $a_1, a_2, \ldots, a_k$

Обозначается как: $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$

Теорема 4. Если не все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равны нулю, но НОД существует.

Доказательство. Пусть А - множество всех общих делителей, тогда $1 \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$

А ограничено сверху, т.к. $\forall$делитель $\leq |a_i|$, где a_i - любое ненулевое число, значит, в множестве А есть наибольший элемент Q.E.D. □

Теорема 5. Если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ не равны нулю, но НОК существует.

Доказательство. Пусть А - множество всех общих кратных, тогда $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$

А ограничено снизу числом 0, значит, в множестве А есть наименьший элемент Q.E.D. □

Глава 2

Теория чисел

2.1 Алгоритм Евклида

Теорема 6. (деление с остатком) Пусть $b \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$, тогда $\exists! q, r$: $\begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \le r \le b - 1 \end{cases}$

Доказательство. 1. Пусть $A = \{a - bx : x \in \mathbb{Z}\}$

Среди элементов A есть хотя бы один неотрицательный:

- если $a \ge 0$, то $a \in A$
- если $a < 0$, то $a - ab = a(1 - b) \in A$

Пусть r - наименьший неотрицательный элемент в A. Проверим, что он подходит.

$r = a - bx \Rightarrow a = bx + r$, x можно взять в качестве q

Преположим, что $r \ge b$, тогда:

$r - b = a - b(x+1) \in A \Rightarrow$ r - не наименьший элемент в A $\Rightarrow r \le b - 1$

2. Докажем единственностью Пусть $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$;

$0 \le r_1, r_2 \le b - 1$

$b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \Rightarrow (r_2 - r_1) \vdots b \Rightarrow \left[\begin{array}{r} r_2 - r_1 = 0 \\ |r_2 - r_1| \ge b - \text{противоречие: } r_1; r_2 \le b - 1 \end{array}\right.$

Значит, $r_1 = r_2 \Rightarrow q_1 = q_2$ Q.E.D.

$\square$

Определение 28. (Алгоритм Евклида) даны числа $a, b \in \mathbb{N}, a \ge b$

1. если $a \vdots b$ - конец алгоритма, результат = b
2. если же не делится, то алгоритм применяется к паре (b, r), где r - остаток от деления a на b

Пример. a = 22, b = 6

1. $22 = 3 \cdot 6 + 4 : (22, 6) \to (6, 4)$
2. $6 = 1 \cdot 4 + 2 : (22, 6) \to (4, 2)$
3. $4 = 2 \cdot 2$ - конец, ответ: 2

Замечание. (Запись с формулами:)

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_0 + r_1 & 0 \le r_1 < b \\
b = r_1 q_1 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2 q_2 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \\
r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k & 0 \le r_k < r_{k-1} \\
\vdots \quad \vdots & \vdots \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n & 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n q_n, \text{ ответ: } r_n &
\end{array}
$$

Лекция 4

29.09.2023

2.2 Алгоритм Евклида

Лемма 1. $\forall a, b, k$НОД(a, b) = НОД(a + kb, b)

Доказательство. M_1 - мнодество общих делителей a, b
M_2 - множество общих делителей a + kb, b
докажем, что $M_1 = M_2$

1. $M_1 \subset M_2$
   $\exists d \in M_1 \Rightarrow a \,\vdots\, d, b \,\vdots\, d \Rightarrow kb \,\vdots\, d \Rightarrow a + kb \,\vdots\, d \Rightarrow d -$ общий делитель
2. $M_2 \subset M_1$
   $\exists d \in M_2 \Rightarrow a + kb \,\vdots\, d, b \,\vdots\, d \Rightarrow a = (a + kb) - kb \,\vdots\, d \Rightarrow d \in M_1$

□

Теорема 7. (Алгоритм Евклида) для любых a, b алг. Евклида заканчивается за конечное число шагов, и его результат равен НОД(a, b)

Доказательство.

1. Алгоритм заканвивается:
   $a \ge b > r_1 > r_2 > \ldots > 0, \text{где} r_i -$ остаток
2. Результат равен НОД(a, b)
   если $a \,\vdots\, b$, то НОД(a, b) = b
   если $a \not\vdots\, b$, то итог алгоритма не меняет НОД:

НОД(a, b) = НОД(a, - bq, b)

□

2.3 Линейное представление НОД

Теорема 8. (Линейное представление НОД) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$

1. $\exists x, y \in \mathbb{Z} : ax + by = (a, b)$
2. Пусть k - общий делитель a, b. Тогда $(a, b) \vdots k$

Доказательство. Положим $M = \{au + bv : u, v \in \mathbb{Z}\}$

Обозначним через d наименьший положительный элемент M через x, y - такие числа, что $d = ax + by$

Докажем:

1. d - общий делитель a и b
2. если k - общий делитель a и b, то $k \vdots d$

Докажем, что $a, b \vdots d$
Пусть $a \not\vdots d$. Делим a на d с остатком:
$a = dq + r, 0 < r < d$
$r = a - dq = a - (ax + by)q = a(1 - qx) + b(-qy) \in M$
$0 < r < d, r \in M \Rightarrow d-$не наименьший положительный, противоречие
аналогично, $b \vdots d$
Докажем, что если k - общий делитель a и b, то $k \vdots d$:
$d = ax + by$
$a \vdots k \Rightarrow ax \vdots k \wedge b \vdots k \Rightarrow by \vdots k \Rightarrow ax + by \vdots k$

□

Замечание. Линейное представление можно найти с помощью алгоритма Евклида

Замечание. Уравнение $ax + by = c$ имеет решения $\Leftrightarrow c \vdots (a, b)$

2.4 Простые числа

Определение 29. числа a и b - взаимно простые, если $(a, b) = 1$

Определение 30. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются взаимно простыми в совокупности, если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$

Определение 31. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называются попарно взаимно промтыми, если любые два из них - взаимно простые

Пример. 6, 10, 15 - взаимно простые в совокупности, но не попарно

Лемма 2. Числа a и b взаимно просты $\Leftrightarrow \exists x, y : ax + by = 1$

Доказательство. $\Rightarrow$: по теореме о линейном представлении НОД
$\Leftarrow$: Пусть $d = (a, b), d \neq 1$. Тогда $ax + by \,\vdots\, d, 1 \not\vdots\, d$. противоречие, □

Свойство. (взаимная простота с произведением) Если каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ взаимно просты с b, то $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ тоже взаимно просто с b

Доказательство. (Индукция) База k = 2. Докажем, что если a_1, a_2 взаимно просты с b, то $a_1 a_2$ взаимно просты с b. По лемме (2): $\exists x_1, y_1, x_2, y_2 :$ $a_1 x_1 + b y_1 = 1, a_2 x_2 + b y_2 = 1$. Перемножим:
$(a_1 a_2)(x_1 x_2) + b(a_1 x_1 y_2 + y_1 a_2 x_2 + b y_1 y_2) = 1$
Получили линейное представление 1 через $a_1 a_2$ и b $\Rightarrow a_1 a_2, b$ - взаимно просты
Переход $k \to k + 1$
$\underline{a_1, a_2, \ldots, a_k}, a_{k+1}$ взаимно просты с b
$a_1, a_2, \ldots, a_k$ взаимно просты с b $\overset{\text{ИП для k}}{\Rightarrow} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ □

Свойство.
1. Пусть $ab \,\vdots\, c$, a и c взаимно просты. Тогда $b \,\vdots\, c$
2. Пусть $a \,\vdots\, b, a \,\vdots\, c$, b и c взаимно просты. Тогда $a \,\vdots\, bc$

Доказательство.
1. $\exists x, y : ax + cy = 1$. Умножим на b:
$\underset{\vdots c}{(ab)}x + bcy = b$
$ab \,\vdots\, c$ – по условию $\Rightarrow abx \,\vdots\, c \wedge bcy \,\vdots\, c \Rightarrow b \,\vdots\, c$
2. $a = bk, a = cm, \exists x, y : bx + cy = 1$. Умножим на k:
$k = \underset{a}{bk}x + cyk = ax + cyk = cmx + cyk \,\vdots\, c \Rightarrow k \,\vdots\, c$
$k = cz, a = bk = (bc)z \,\vdots\, bc$

□

Определение 32. Число p называется простым, если $p > 1$ и у p нет натуральных делителей, кроме 1 и p

Определение 33. Число n называется составным, если n > 1 и n - не простое

Обозначение. множество простых чисел - P

Свойство. число a составное $\Leftrightarrow \exists b, c : a = bd, 1 < b, c < a$

Доказательство.
1. $\Rightarrow$: $a \notin P$, тогда у a есть делитель $b : b \neq 1, b \neq a \Rightarrow 1 < b < a$

$\exists c : a = bc, c = \frac{a}{b}, \frac{a}{a} < c < \frac{a}{1}$

2. $\Leftarrow$: $a = bc, 1 < b < a \Rightarrow$ у а есть делитель $\neq 1, \neq a \Rightarrow a \notin P$

□

Лемма 3. У любого натурального числа, большего 1, есть хотя бы один протой делитель

Доказательство. (Индукция)

1. База n = 2, делителя 2
2. Переход. Предположим, что $n > 2, \forall k : 1 < k < n$ у k есть простой делитель. Докажем, что у n есть простой делитель
   (a) случай 1: n - простое $\Rightarrow n -$ простой делитель n
   (b) случай 2: n - составное $\Rightarrow$ у n есть делитель, $n = km, 1 < k, m < n$

   По индукции: $\exists p \in P : k \vdots p \Rightarrow n \vdots p$

□

Теорема 9. (Евклида) Множество простых чисел бесконечно

Доказательство. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - все простые числа

Положим $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$, Тогда по лемме у N есть некий простой делитель, $Np_1, p_2, \ldots, p_k$, т.к. $\Rightarrow 1 \vdots p_i$ - невозможно

Значит N - простое. Противоречие.

□

Теорема 10. (Дирихле) Пусть (a, m) = 1. Тогда $\exists$ бесконечно много простых чисел вида $a + km$ (Доказательство слишком сложное)

2.5 Основная теорема арифметики

Теорема 11. Любое натуральное число, большее 1 можно представить в виде произведения простых чисел. С точностью представления до порядка сравнения.

Доказательство. 1. Существование: Индукция

(a) База n = 2, 2 = 2 - разложение
(b) Переход: Предположим, что все числа, меньшие n, раскладываются в произведение простых. Докажем для n.
    i. случай 1: n - простое, n = n - разложение
    ii. случай 2: n - составное, тогда $\exists p : p \in P, n \vdots p, 1 < p < n$

$1 < \frac{n}{p} < n$ По инд. предположению $\frac{n}{p}$ можно разложить: $\frac{n}{p} = p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \Rightarrow n = p \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_k \Rightarrow$ существование доказано.

2. Единственность.

   Пусть n - наименьшее число, которое можно разложить двумя способами: $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k, n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$ Если $p_i = q_j$ для неких i, j, то $\frac{n}{p_i} = \frac{n}{q_j}$ - тоже раскладывается двумя способами, n - не минимальное, противоречие $\Rightarrow \forall i, j : p_i \neq q_j \Rightarrow p_i, q_j$ - взаимно простые

   Далее: $q_1 \neq p_1, q_2 \neq p_1, \ldots, q_m \neq p_1 \Rightarrow q_1, p_1$ – взаимно просты,

   q_2, p_1 – взаимно просты,

   $\vdots$

   q_m, p_1 – взаимно просты,

   Значит, $n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m \not\vdots\, p_1$, при этом $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k \,\vdots\, p_1$ - противоречие, единственность доказана.

$\square$

Свойство. Пусть $p \in P, a_1, \ldots a_k \,\vdots\, p$, тогда для некотрого $a_i \,\vdots\, p$

Доказательство. Пусть не делится, тогда:
$a_1 = p_{11} \cdot p_{12} \cdot \ldots$
$a_2 = p_{21} \cdot p_{22} \cdot \ldots$
$\vdots$
Получаем: $\underbrace{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_k}_{\text{делится на p}} = \underbrace{p_{11} \cdot p_{12} \ldots}_{\text{не делится на p}} \Rightarrow$ противоречие. $\square$