Оглавление

Лекция 2: Матрицы

25.09.2023

0.1 Матрицы

Пусть v - Это конечно мерно пространство

$v_1 ... v_2$ - базис v

$w \leq V => \exists ! v_1, v_2, v_3$

$v = k_1 * v_1 + k_2 * v_2 + k_n * v_n$

Определение 1. $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ - координаты

w в базисе $v_1 v_2$

$w \to (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n)$

$u \to (\beta_1 ... \beta_n)$

$u + w \to (\alpha_1 + \beta_1 * \alpha_2 + \beta_2 ... \alpha_n \beta_n)$

$f * w \to (f * \alpha_1, f * \alpha_2 ... f * \alpha_n)$

$v_1 ... v_n$ - Базис

$u_1, u_2, ... u_n$ - базис

$w = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + \alpha_n * v_n = \beta_1 * u_1 + ... + \beta_n * u_n$

Определение 2. (*)

$U_1 = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_n * v_n$

$U_2 = a_2 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_2 n * v_n$

$\dots$

$U_n = a_n * v_1 + a_n 2 * v_2 + ... + a_n r * vn$

матрица перехода от $v_1 ... v_n) * k$

$u_1 ... u_n$

Определение 3. A $=$

Матрица N * R

B $=$

A $\cdot$ B $:=$

$c_1 1 = a_1 1 * b_1 1 + a_1 2 * b_2 1 + ... + a_1 k * b_k l$

$c_1 2 = a_1 1 * b_1 2 + a_1 2 * b_2 2 + ... + a_1 k * b_k 2$

$c_i j := a_i 1 * b_1 j + a_i 2 * b_1 y + ... + a_z k * b_k j$
(*)
$w_1 ... w_n$ - базис
$V_! = b_1 1 * w_1 + ... + b_1 n * w_n$
$\dots$
$v_n = b_n 1 * w_1 + \dots b_n n * w_n$
$u_q = a_1 1 * v_1 + a_1 2 v_2 + ... + a_1 n v_n = a_1 1(b_1 1 w_1 + ... + b_1 n w_n) + ... + a_1 n(b_n 1 w_1 + ... + b_n n w_n) = w_1(a_1 1 b_1 1 + a_1 2 b_2 1 + ... + a_1 n b_n 1) \dots$

Теорема 1. Если A - Это матрица перехода от $\{v_i\}\{u_i\}$
B - матрица перехода от $\{w_i\}\{v_i\}$
$=> A \cdot B$ - м. п. от $\{w_2\}\{u_i\}$

$A \setminus B : A \cdot B \neq B \cdot A!$

Теорема 2. A(BC) = (AB)C
Умножение матриц хоть и не коммутативно, но ассоциативно.

$w_1 ... w_n \to v_1 ... v_k \to u_1 ... u_e \to t_1 ... t_m$
$w_1 ... w_n \to w_1 ... w_n$
$u_1 ... u_n$ - базис
$v_1 ... v_n$ - базис
$A \cdot B = E$
$B \cdot A = E$
(A и B) - обратные матрицы

0.2 Скалярное произведение

Определение 4. V - векторное пространство
$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) $\geq$ 0 (u, u) = 0 <=> U = 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u_, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) = (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Для комплексных чисел 4L
$(u, v) = \overline{(v, u)}$
$(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$

Пример.
1. $V = \mathbb{R}^n$
   $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$
2. V - пространство функций (...) $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x) g(x) dx$

Определение 5. Пускай V - евклидово пространство
v - элемент V
$|v| := \sqrt{(v,v)}$
$cos@a(u,v) := \frac{(u,w)}{|u|\cdot|v|}$
(u, v + 0)

Теорема 3. (Неравенство КБШ)
$|(u,w)| \leq |u| \cdot |v|$

$0 \leq (\overline{u} + f\overline{v}; \overline{u} + f\overline{v}) = (\overline{u}, \overline{u}) + (\overline{u}, t\overline{v}) + (t\overline{v}, \overline{u}) + \forall t + (t\overline{v}, t\overline{u}) = t^2(v,v) + 2t(u;v) + (u,u)$
$D \leq 0$
$\frac{D}{u} = (u;v)^2 - (u.u)(v,v) \leq 0$
$(u,v)^2 \leq (u,u) \cdot v, v$

Определение 6.
1. $|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2}$
2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx)$

Определение 7. $u \perp v$, если $(u,b) = 0$

$v_1...v_n$ - ортогональная, если
$v_i \perp v_j (i \neq j)$

Теорема 4. $v_1...v_n$ - ортогональная система, нет нулевых векторов
$=>$ $v_1...v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство. $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$
$(v_1 v_i) = 0$ $\alpha_1(v_1 v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + ... + \alpha_i(v_1, v_i) + ... = 0$
$a_i(v_i)^2 = 0$
$\alpha_i = 0$ $\square$

Определение 8. u - нормированый или единичный если $|u| = 1$
$v_1...v_n$ - ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
$v_1..v_i$ - ОНБ ортонормированный базис