

Оглавление

1	Алгоритмы	2
1.1	Продолжение	2
1.2	Число e	7

Глава 1

Алгоритмы

Лекция 3: Продолжение

27.09.2023

1.1 Продолжение

5. $x_n \neq c \forall n, x_n \rightarrow a, a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{a}$
 $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a| \geq |a + b| - |b|$
 $\varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} > 0$
 $\Rightarrow \exists N$ т.ч. $\forall n > N$ выполняется
 $|x_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{|a|}{2} \Rightarrow |x_n| \geq |a| - |x_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$
 $\forall \varepsilon \exists N_1$ т.ч. $\forall n > N_1$ (1)
 $|x_n - a| < \varepsilon$ (2)
 $N_0 = \max(N, N_1) n > N_0$
 $|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a - x_n}{x_n a}| = \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{|x_n|} \cdot |x_n - a| <$
(1, 2)
 $< \frac{1}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} \cdot \varepsilon$
6. $x_{n=1}^\infty$, как в 5., $y_n \rightarrow b \Rightarrow$
 $\frac{y_n}{x_n} \rightarrow \frac{b}{a}$
 $\frac{y_n}{x_n} = y_n \cdot \frac{1}{x_n}$ 4., 5
7. $x_n \leq y_n \forall n, x|n \rightarrow a, y_n b \Rightarrow a \leq b$

Доказательство. Предположим, что это не так.

Пусть $a \not\leq b$ (доказали что неверно) b (?)

$$\varepsilon_0 = \frac{1-b}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \exists N_1 \text{ т.ч. } \forall n > N_1$$

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \text{ (3)}$$

$$\text{и exists } N_2 \text{ т.ч. } \forall n > N_2$$

$$|y_n - b| < \varepsilon_0 \text{ (4)}$$

$$n = N_1 + N_2 + 1$$

$$|x_n - a| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0) \text{ (3')}$$

$$|y_n - b| < \varepsilon_0 \Leftrightarrow y_n \in (b - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0) \text{ (4')}$$

$$(3'), (4') \Rightarrow y_n < b + \varepsilon_0 = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a \frac{a-b}{2}$$

$$= a - \varepsilon_0 < x_n$$

$$y_n < x_n$$

□

$$a < b$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Расширенное множество вещественных чисел

$$\overline{\mathbb{R}}$$

$$+\infty, -\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < +\infty, x > -\infty$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$8. \xi_n \leq \psi_n \leq \zeta_n \forall n$$

$$\xi \rightarrow a, \zeta_n \rightarrow a \Rightarrow \psi_n \rightarrow a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \text{ т.ч. } \forall n > N_1$$

$$|x_n - 1| < \varepsilon \leftrightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (5)$$

$$\text{и } \exists N_2 \text{ т.ч. } \forall n > N_2$$

$$|\zeta_n - a| < \varepsilon \leftrightarrow \zeta_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (6)$$

$$(5), (6) \Rightarrow \forall n > N, N = \max(N_1, N_2)$$

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq \zeta_n < a + \varepsilon, \text{ т.е. } y_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \leftrightarrow |y_n - a| < \varepsilon$$

Определение 1. (Бесконечные пределы)

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$x_n \rightarrow \infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

$$\text{если } \forall L \in \mathbb{R} \exists N \text{ т.ч. } \forall n > N$$

$$\text{выполнено } x_n > L \quad (7)$$

$$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$y_n \rightarrow -\infty \quad n \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty,$$

$$\forall L_0 \in \mathbb{R}, \exists N_0 \text{ т.ч. } \forall n > N_0$$

$$y_n < L_0 \quad (8)$$

(возможно сокращение записи $n \rightarrow \infty$ далее.)

Единообразная запись определения пределов

$$a \in \mathbb{R}$$

$$w(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Окрестность $+\infty$

$$w(+\infty) = (L, \infty), L \in \mathbb{R}$$

Окрестность $-\infty$

$$w(-\infty) = (-\infty, L)$$

Пусть имеется некая $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$

Пусть имеется некая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$x_n \rightarrow \alpha \quad n \rightarrow \infty$$

если $\forall w(\alpha)$

$$\exists N \text{ т.ч. } \forall n > N \text{ выполнено } x_n \in w(\alpha)(q)$$

Свойства бесконечных пределов

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, a \rightarrow +\infty$$

$$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, b \rightarrow -\infty$$

1. $c \neq 0$, а) $ca_n \rightarrow +\infty, cb_n \rightarrow -\infty$
 б) $c < 0 \Rightarrow ca_n \rightarrow -\infty, cb_n \rightarrow +\infty$
2. $x_n \rightarrow x, x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow a_n + x_n \rightarrow +\infty$
 $y_n \rightarrow y, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \Rightarrow b_n + y_n \rightarrow -\infty$
3. a_n, b_n, x_n, y_n, u_n
 $x > 0 \Rightarrow a_n x_n \rightarrow +\infty, b_n x_n \rightarrow -\infty$
 $y < 0 \Rightarrow a_n y_n \rightarrow -\infty, b_n y_n \rightarrow +\infty$
4. если $a_n \neq 0, a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0, \frac{1}{b_n} \rightarrow 0$ Если $x_n > 0, x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$
 если $y_n < 0, y_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{y_n} \rightarrow -\infty$
5. $x_n \leq y_n \forall n, x \rightarrow \alpha, y_n \rightarrow \beta, \alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$
 $\Rightarrow \alpha \leq \beta$
 $+\infty = +\infty$
 $-\infty = -\infty$
 $-\infty < +\infty$
 $\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow y_n \rightarrow \alpha$
 (док-ть всё)

Доказательство. $x \in \mathbb{R}$

если последовательность имеет предел, то она ограничена (было)
 нужно сформулировать с дополнительными словами

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел

$\exists M$ т.ч. $|x_n - x| < M \forall n$

$\Rightarrow x_n > x - M \forall n$ (10)

$\forall L \in \mathbb{R}$

$\exists N$ т.ч. $\forall n > N$ будет выполнено $a_n > L$ (11)

(10), (11) $\Rightarrow a_n + x_n > L + x - M$

Остальные свойства доказываются аналогично □

Дополнительно о терминологии и обозначениях

если $x_n \rightarrow 0$, то говорят что x_n - бесконечно малая последовательность

если $|a_n| \rightarrow +\infty$, то говорят что a_n - бесконечно большая последовательность

Обозначение. o - о малое

O - O Большое

след. читать только слева направо.

Обозначение. $x_n = o(1)$, если $x_n \rightarrow 0$

если $\exists M > 0$ т.ч. $|y_n| \leq M \forall n$,

$y_n = O(1)$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty, b_n \neq 0 \forall n$
 $a_n = o(b_n)$, если $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$
 $\{c_n\}, \{d_n\}$
 $c_n = O(d_n)$, если $\exists M_1$ т.ч. $|C_n| \leq M_1 |d_n|$
 предположим \Rightarrow , что $a_n = \lambda_n b_n, \lambda_n \rightarrow 0$
 Тогда пишут, что $a = o(b)n$
 $\frac{a_n}{b_n} = \lambda_n$

Определение 2. (монотонные последовательности) $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ монотонно возрастает, если $a_n \leq a_{n+1} \forall n$

Будем говорить, что строго возрастает, если $a_n < a_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ монотонно убывает, если $b_n \geq b_{n+1}$

$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ строго монотонно убывает, если $b_n > b_{n+1}$

$\{n\}_{n=1}^\infty$

Если есть некоторая последовательность c_n говорят что монотонна если либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает.

Последовательность c_n называется строго монотонной, если она строго монотонно возрастает либо строго монотонно убывает.

Теорема 1. Теорема о пределе монотонной последовательности $\{C_n\}_{n=1}^\infty$

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \in \mathbb{R}$

Для того чтобы монотонно возрастающая последовательность имела конечный предел необходимо и достаточно чтобы последовательность была ограничена снизу

Для того чтобы монотонно убывающая последовательность имела конечный предел.

$C_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \forall m$

$C_m < \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

$C_M \geq \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

$C_M \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

Доказательство. Рассмотрим ситуация, когда C_m монотонно возрастает. Предположим вначале, что последовательность C_m не ограничена сверху.

$\{C_n\}_{n=1}^\infty$ не огр. сверху $\forall L \in \mathbb{R}$

Поскольку мы предполагаем что последовательность не ограничена сверху значит найдется такой элемент последовательности больший чем L

$\exists N$ т.ч. $C_N > L$

Потому что в противоположном случае L была бы верхней границей

$\forall n > N$ тогда, справедливо следующее неравенство $C_n \geq C_{n-1} \geq$

$C_{n-2} \geq \dots \geq C_N + 1 \geq C_N > L$

т.е. $C_n > L$

мы взяли любое L и по нему нашли такое N большое, что при любом $n > N$ получается что с номером n больше чем L это означает что по определению предела предел $\lim C_n = +\infty$

Если последовательность возрастает и не ограничена сверху у нее есть предел и этот предел равен $+\infty$

другой вариант: последовательность возрастает и ограничена сверху

Пусть $C_n \leq C_{n+1} \forall n$

рассмотрим множество всех элементов последовательности

$E = \{ \alpha \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N} \text{ т.ч. } \alpha = C_n \}$

Это предположение означает что E ограничено сверху

$c = \sup E$

в таком случае мы имеем неравенство $C_n \leq c \forall n$ (12)

Теперь возьмем $\forall \varepsilon > 0$

$c - \varepsilon$ - это не верхняя граница

$\exists N$ т.ч. $C_N > c - \varepsilon$ (13)

Воспользуемся монотонностью последовательности C

Давайте возьмем $\forall n > N$

(13) $\Rightarrow C_n \geq C_{n-1} \geq \dots \geq C_N \geq c - \varepsilon$ (14)

Посмотрим на соотношение 12, 14

$c - \varepsilon < C_n \leq c < c + \varepsilon \Rightarrow |C_n - c| < \varepsilon$ (15)

Это соотношение означает что

(15) $\Rightarrow c = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$

Предел существует, являющийся вещественным числом.

мы доказали что если последовательность ограничена сверху, то существует предел и выполнено такое неравенство.

□

Если последовательность строго монотонна, то неравенство будет строгим

Доказательство. $C_{n_0} < C_{n_0+1} \leq c \Rightarrow C_{n_0} < c$

□

Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = c \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M$

т.ч. $|C_n - c| \leq M \Rightarrow C_n \leq c + M \forall n$

для убывающих доказывается аналогично.

Теорема 2. (Теорема о ложных промежутках) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \forall n$ (16)

Предположим, что $b_n - a_n \rightarrow 0$ (17) $n \rightarrow \infty$

Промежутки замкнутые

$\Rightarrow \exists! c \in [a_n, b_n], \forall n$ (18)

Доказательство. $a_n \leq a_{n+1}, b_n \geq b_{n+1} \forall n$ (19)

$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ (19)

$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1 \forall n$

т.е. $a_n < b_1, b_n > a_1$, (20)

(19), (20) $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$ (21)

$a_n < b_n$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (22)

(21), (22) $\Rightarrow a \leq b$ (23)

$a_n \leq a \forall n, b_n \geq b \forall n$

(24)

$\Rightarrow b - a \leq b_n - a_n \forall n$
 (25)
 $0 \leq b - a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (b - a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ (26)
 (23), (26) $\Rightarrow a = b = \text{def } c$
 (24), (27) $\Rightarrow a_n \leq c \leq b_n \forall n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ (27')
 Пусть $\exists c_1 \neq c$ т.ч. $c_1 \in [a_n, b_n] \forall n$ (28)
 $c < c_1$
 Тогда, 27' и 28 \Rightarrow что $a_n \leq c < c_1 \leq b_n \forall n$ (29)
 (29) $\Rightarrow c_1 - c \leq b_n - a_n \forall n$ (30)
 (30) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 - c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ $0 < c_1 - c =$ Предположение
 о том что найдется ещё какой-то c_1 неверно теорема доказана.

□

Замечание. В этой теореме рассматриваются замкнутые Промежутки

Пример. $a_n = 0 \forall n, b_n = \frac{1}{n}$
 $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (0, \frac{1}{n+1}) \subset (0, \frac{1}{n}) = (a_n, b_n)$
 $b_n - a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$
 $\nexists C \in \mathbb{R}$ т.ч. $c \in (0, \frac{1}{n}) \forall n$

в каком месте доказательства предыдущей теоремы мы пользовались тем что промежутки замкнуты?

1.2 Число e

e

$x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ $x_n < y_n \forall n$ (1)
 x_n строго возрастает (2)
 y_n строго убывает (3)
 $x_n \rightarrow e, y_n \rightarrow e$
 $2 < e < 3$
 $y_n = (1 + \frac{1}{n})x_n > x_n$
 Рассмотрим $\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(\frac{n}{n-1})^n}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}$
 $= (\frac{n}{n-1})^n \cdot (\frac{n}{n+1})^n + 1$
 $= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{1}{n-1})^n \cdot (\frac{1}{n+1})^n$
 $= \frac{n}{n+1} \cdot (\frac{n^2}{n^2-1})^n$
 $= \frac{n}{n+1} (\frac{n^2-1+1}{n^2-1})^n = \frac{n}{n+1} \cdot (1 + \frac{1}{n^2-1})^n >$
 $(n^2 - 1 = x)$
 $x > 0, n \geq 2$ $(1 + x)^n > 1 + nx$ (неравенство бернулли)
 $> \frac{n}{n+1} (1 + \frac{n}{n^2-1})$
 $= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n^2-1+n}{n^2-1} =$
 $= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1$
 $\frac{y_{n-1}}{y_n} > 1$
 $y_{n-1} > y_n$
 $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

$$\begin{aligned}
 C_n^k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 C_n^0 &= C_n^n = 1 \\
 C_n^1 &= C_n^{n-1} = n \\
 x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 \cdot 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{n^k} \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
 &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad (5) \\
 \frac{n-k+1}{n} &= 1 - \frac{k-1}{n} \\
 \frac{n-k+2}{n} &= 1 - \frac{k-2}{n} \\
 &\dots \\
 \frac{n-k+k}{n} &= 1 - \frac{k-k}{n} = 1 \\
 \frac{n!}{(n-k)!} &= \frac{(n-k)!(n-k+1) \cdot \dots \cdot n}{(n-k)!} = (n-k+1) \cdot \dots \cdot n \\
 n &\geq 3 \\
 a &= 1, b = \frac{1}{n} \\
 1^{n-k} &= 1
 \end{aligned}$$