Оглавление

Лекция 2: Базис векторого пространства

18.09.2023

Пусть v - Это конечно мерно пространство

Определение 1. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ называется порождающим для V, если $\forall w \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

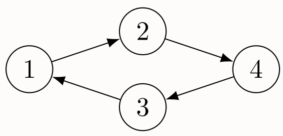
Замечание. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 2. $v_1, v_2, ..., v_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 1 (О базисе)**.** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)
4. Порождающий набор $\forall w \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:



$1 \to 2$. Дан $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ.

$2 \to 4$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $v_1, ..., v_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$
$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$
$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше $\Rightarrow$ набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

$4 \to 3$. Дан $v_1, ..., v_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, ..., v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n (\alpha_1, ... \alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, ..., v_n, u - \text{ЛЗ}$$

$3 \to 1$. Дан $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ. Доказать $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{aligned}
\forall w \in V \qquad & v_1, v_2, ..., v_n, w - \text{ЛЗ набор} \\
& \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\
\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow \qquad & \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \\
& \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
& \Rightarrow v_1, ..., v_n - \text{ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \Rightarrow \qquad & w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n
\end{aligned}$$

Q.E.D. □

Замечание. (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 3. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$\forall x_2, \ldots, x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$
$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$
$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - \ldots \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. Q.E.D. □

Теорема 2. Если $v_1, \ldots, v_k$ и $w_1, \ldots, w_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. $v_1, \ldots, v_n$ – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{k1}v_k$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{k2}v_k$$
$$\ldots$$
$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + \ldots + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

т.к. $w_1, \ldots, w_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все $x_i = 0$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{k2}v_k) + \ldots + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{kn}v_k) = 0$$
$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \ldots + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n) = 0$$

$v_1, v_2, ..., v_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \Rightarrow \exists$ ненулевые решения $\Rightarrow$ противоречие с (1) и ЛНЗ $w_i \Rightarrow n \leq k$. Аналогично $k \leq n \Rightarrow n = k$. Q.E.D. $\square$