Геометрия и топология

Солынин А. А.[1]

11.09.2023 - ...

[1] "Записал Сергей Киселев"

Оглавление

Лекция 2: Базис векторого пространства

18.09.2023

Пусть v - Это конечно мерно пространство

Определение 1. Набор $v_1, v_2, ..., v_n$ называется порождающим для V, если $\forall w \in V \exists \alpha_1, ..., \alpha_n : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Замечание. Если к порождающему набору прибавить вектор, то он останется порождающим. Если убрать векторы из непорождающего набора векторы, то набор останется непорождающим.

Определение 2. $v_1, v_2, ..., v_n$ называется базисом V, если этот набор ЛНЗ и порождающий.

Теорема 1 (О базисе)**.** Следующие определения базиса равносильны:

1. ЛНЗ и порождающий набор
2. Минимальный порождающий набор (минимальный по включениям)
3. Максимальный ЛНЗ набор (максимальный по включениям)
4. Порождающий набор $\forall w \in V \exists! \alpha_1, ..., \alpha_2 : w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$

Доказательство. Цепочка доказательств:

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr] & \\ 1 \arrow[ur] & & 4 \arrow[dl] \\ & 3 \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$1 \to 2$. Дан $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор. Доказать, что он минимальный порождающий.

Допустим, что v_i выкинули, оставшийся набор остался порождающим $\Rightarrow v_i$ – ЛК остальных $\Rightarrow$ ЛЗ.

$2 \to 4$. Дан $v_1, ..., v_n$ – минимальный порождающий набор. Доказать $v_1, ..., v_n$ – порождающий с единственностью коэффициентов.

Допустим противное: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$

$$\alpha_i \neq \beta_i$$
$$(\alpha_i - \beta_i)v_i = (\beta_1 - \alpha_1)v_1 + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + (\beta_n - \alpha_n)v_n$$
$$v_i = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_i - \beta_i} + ... \text{ (без } i\text{-ого)} + \frac{\beta_n - \alpha_n}{\alpha_i - \beta_i}$$

v_i – выкинем. В любой ЛК с v_i заменим v_i на выражение выше $\Rightarrow$ набор порождающий. Значит без единственности коэффициентов получаем противоречие с дано

$4 \to 3$. Дан $v_1, ..., v_n$ – порождающий набор с единственностью коэффициентов. Доказать: $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ (ЛНЗ уже доказана)

Допустим противное: $v_1, v_2, ..., v_n; u$ – ЛНЗ набор

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n (\alpha_1, ...\alpha_n \exists!) \Rightarrow v_1, ..., v_n, u - \text{ЛЗ}$$

$3 \to 1$. Дан $v_1, ..., v_n$ – максимальный ЛНЗ. Доказать $v_1, ..., v_n$ – ЛНЗ и порождающий набор.

$$\begin{aligned}
\forall w \in V \qquad & v_1, v_2, ..., v_n, w - \text{ЛЗ набор} \\
& \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n + \beta w = 0 \\
\text{Если } \beta = 0 \Rightarrow \qquad & \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0 \\
& \text{не все коэффициенты } = 0 (\alpha_i \neq 0) \\
& \Rightarrow v_1, ..., v_n - \text{ЛЗ} \\
\beta \neq 0 \Rightarrow \qquad & w = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} v_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta} v_n
\end{aligned}$$

Q.E.D. □

Замечание. (Следствия) Любую конечную порождающую систему можно сузить до базиса.

Если есть конечный порождающий набор, то любую ЛНЗ систему можно расширить до базиса.

Определение 3. Размерность пространства равна количеству элементов в базисе. (пока нет доказательств корректности)

Лемма 1. Система линейных уравнений: $(a_{ij} \in \mathbb{R}; x_i \in \mathbb{R}; 0 \in \mathbb{R})$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Имеет ненулевые решения, если $n > k$.

Доказательство. Индукция по k. База $k = 1$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\text{Пусть } a_{11} \neq 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - ... - -\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$
$$\forall x_2, ..., x_n : x_1 \text{ выражается через них}$$
$$a_{11} = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$$

Переход

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0$$
$$\exists i : a_{1i} \neq 0, \text{ иначе выкинем предыдущее уравнение}$$
$$x_i = -\frac{a_{11}}{a_{1i}}x_1 - ... \text{ (без } i\text{-ого)} - -\frac{a_{1n}}{a_{1i}}x_n$$

Подставим выраженное x_i во все остальные уравнения. Уравнений на 1 меньше, переменных на 1 меньше. Q.E.D. □

Теорема 2. Если $v_1, ..., v_k$ и $w_1, ..., w_n$ базисы $\in V$, то $k = n$.

Доказательство. $v_1, ..., v_n$ – порождающая система.

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + ... + a_{k1}v_k$$
$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + ... + a_{k2}v_k$$
$$...$$
$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + ... + a_{kn}v_k$$

$$x_1w_1 + x_2w_2 + ... + x_nw_n = 0, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

т.к. $w_1, ..., w_n$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все $x_i = 0$

$$x_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{k1}v_k) + x_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{k2}v_k)$$
$$+ ... + x_n(a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{kn}v_k) = 0$$
$$v_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + v_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)$$
$$+ ... + v_k(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n) = 0$$

$v_1, v_2, ..., v_k$ – ЛНЗ $\Rightarrow$ все коэффициенты равны 0.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Если $n > k \Rightarrow \exists$ ненулевые решения $\Rightarrow$ противоречие с (1) и ЛНЗ $w_i \Rightarrow n \leq k$. Аналогично $k \leq n \Rightarrow n = k$. Q.E.D. $\square$

Лекция 2: Матрицы

25.09.2023

0.1 Матрицы

Пусть v - Это конечно мерно пространство

$v_1 ... v_2$ - базис v

$w \leq V => \exists! v_1, v_2, v_3$

$v = k_1 * v_1 + k_2 * v_2 + k_n * v_n$

Определение 4. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ - координаты

w в базисе $v_1 v_2$

$w \leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n)$

$u \leftrightarrow (\beta_1 ... \beta_n)$

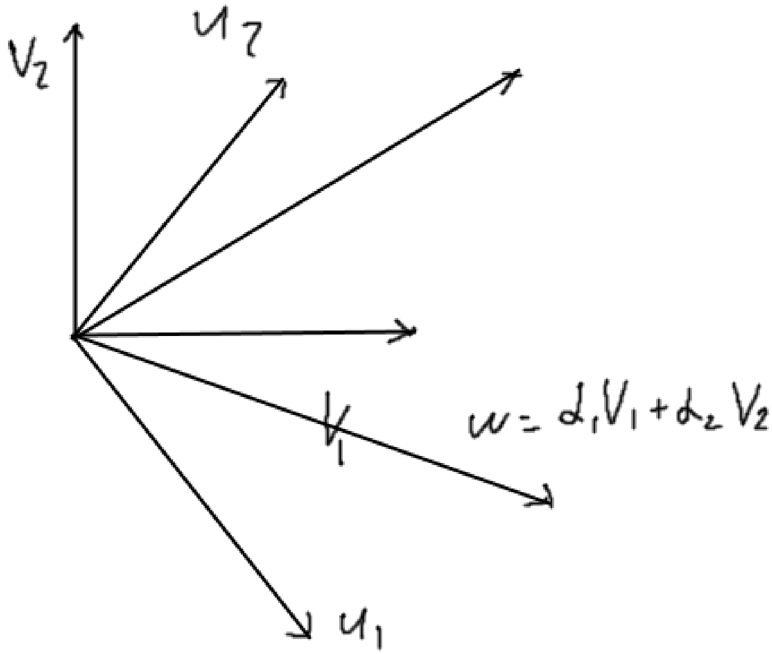
$u + w \leftrightarrow (\alpha_1 + \beta_1 * \alpha_2 + \beta_2 ... \alpha_n \beta_n)$

$f * w \leftrightarrow (f * \alpha_1, f * \alpha_2 ... f * \alpha_n)$

$v_1 ... v_n$ - Базис

$u_1, u_2, ... u_n$ - базис

$w = \alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2 + \alpha_n * v_n = \beta_1 * u_1 + ... + \beta_n * u_n$



Определение 5. (*)

$U_1 = a_1 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_n * v_n$
$U_2 = a_2 * v_1 + a_2 * v_2 + ... + a_{2n} * v_n$
$\dots$
$U_n = a_n * v_1 + a_{n2} * v_2 + ... + a_{nr} * vn$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$
матрица перехода от $(v_1...v_n) * k$
$u_1...u_n$

Определение 6. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}$

Матрица N * R

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \dots & b_{nl} \end{pmatrix}$$
$k \times l$
$$A \cdot B := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & \dots & c_{nl} \end{pmatrix}$$
$c_{11} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + ... + a_{1k} * b_{kl}$
$c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + ... + a_{1k} * b_{k2}$

$c_i j := a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{1y} + ... + a_{zk} b_{kj}$
$$(*) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & a \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$
$w_1 ... w_n$ - базис
$V_! = b_{11} * w_1 + ... + b_{1n} * w_n$
$\dots$
$v_n = b_{n1} * w_1 + \dots b_{nn} * w_n$
$u_q = a_{11} * v_1 + a_{12} v_2 + ... + a_{1n} v_n = a_{11}(b_{11} w_1 + ... + b_{1n} w_n) + ... + a_1 n(b_{n1} w_1 + ... + b_{nn} w_n) = w_1(a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + ... + a_{1n} b_{n1}) \dots$

Теорема 3. Если A - Это матрица перехода от $\{v_i\}\{u_i\}$
B - матрица перехода от $\{w_i\}\{v_i\}$
$=> A \cdot B$ - м. п. от $\{w_2\}\{u_i\}$

$A \setminus B : A \cdot B \neq B \cdot A!$

Теорема 4. A(BC) = (AB)C
Умножение матриц хоть и не коммутативно, но ассоциативно.

$w_1 ... w_n \to v_1 ... v_k \to u_1 ... u_e \to t_1 ... t_m$
$w_1 ... w_n \to w_1 ... w_n$
$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица
$u_1 ... u_n$ - базис
$v_1 ... v_n$ - базис
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$
$A \cdot B = E$
$B \cdot A = E$

(A и B) - обратные матрицы

0.2 Скалярное произведение

Определение 7. V - векторное пространство
$(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$

1. (u, u) ≥ 0 (u, u) = 0 <=> U = 0
2. $(u_1 + u_2; v) = (u_1, v_1) + (u_2, v)$ $(u, v_1 + v_2) = (u_, v_1) + (u_1 v_2)$
3. $\alpha(u, v) = (\alpha u, v) = (u, \alpha v)$
4. (u, v) = (v, u)

V - евклидово пространство $(\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение

Для комплексных чисел 4L
$(u, v) = \overline{(v, u)}$
$(u, \alpha v) = \overline{\alpha}(u, v)$

Пример. 1. $V = \mathbb{R}^n$

$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

2. V - пространство функций (...) $(f(x), g(x)) := \int_a^b f(x)g(x)dx$

Определение 8. Пускай V - евклидово пространство
v - элемент V
$|v| := \sqrt{(v, v)}$
$cos@a(u, v) := \frac{(u,w)}{|u| \cdot |v|}$
(u, v + 0)

Теорема 5. (Неравенство КБШ)
$|(u, w)| \leq |u| \cdot |v|$

$0 \leq (\overline{u} + f\overline{v}; \overline{u} + f\overline{v}) = (\overline{u}, \overline{u}) + (\overline{u}, t\overline{v}) + (t\overline{v}, \overline{u}) + \forall t + (t\overline{v}, t\overline{u}) = t^2(v, v) + 2t(u; v) + (u, u)$
$D \leq 0$
$\frac{D}{u} = (u; v)^2 - (u.u)(v, v) \leq 0$
$(u, v)^2 \leq (u, u) \cdot v, v$

Определение 9. 1. $|a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2}$

2. $(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2 \leq (\int_a^b g(x)dx)$

Определение 10. $u \perp v$, если $(u, b) = 0$

$v_1 ... v_n$ - ортогональная, если
$v_i \perp v_j (i \neq j)$

Теорема 6. $v_1 ... v_n$ - ортогональная система, нет нулевых векторов
$=>$ $v_1 ... v_n$ линейно не зависимы.

Доказательство. $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$
$(v_1 v_i) = 0$ $\alpha_1(v_1 v_i) + \alpha_2(v_2, v_i) + ... + \alpha_i(v_1, v_i) + ... = 0$
$a_i(v_i)^2 = 0$
$\alpha_i = 0$ □

Определение 11. u - нормированый или единичный если $|u| = 1$
$v_1 ... v_n$ - ортонормированные системы, если $v_i \perp v_j$ и $|v_i| = 1$
$v_1 .. v_i$ - ОНБ ортонормированный базис