

C. $f_x(M) = -10$ D. $f_x(M) = 22$

Câu 6. Cho hàm $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Tìm $f_x(x, y)$?

A. $f_x(x, y) = x^2 + x$ B. $f_x(x, y) = 2xy + y^2$
 C. $f_x(x, y) = 2x + 1$ D. $f_x(x, y) = 2xy + xy^2$

Câu 7. Cho hàm $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Tìm $f_y(x, y)$?

A. $f_y(x, y) = 2xy$ B. $f_y(x, y) = 1 + 2y$
 C. $f_y(x, y) = x^2 + 2xy$ D. $f_y(x, y) = 2xy + y^2$

Câu 8. Cho hàm $f(x, y) = 2x^3 - 2x^2y^3 + 4y^5$. Tìm $f_y(x, y)$?

A. $f_y(x, y) = 6x^2 - 12xy^2 + 20y^4$ B. $f_y(x, y) = 8x^2 + 4xy^3$
 C. $f_y(x, y) = 6x^2 - 4xy^3$ D. $f_y(x, y) = -6x^2y^2 + 20y^4$

Câu 9. Cho hàm số $f(x, y) = x^2y^3 + x^4$, tính $f'_x(x, y)$?

A. $f'_x(x, y) = 2xy^3 + 4x^3$ B. $f'_x(x, y) = 2x^2y^3 + 4x^4$
 C. $f'_x(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3$ D. $f'_x(x, y) = 3x^2y^2$

Câu 10. Cho hàm số $f(x, y) = x^2y^3 + x^4$, tính $f'_y(x, y)$?

A. $f'_y(x, y) = 2xy^3 + 4x^3$ B. $f'_y(x, y) = 3x^2y^2$
 C. $f'_y(x, y) = 2x^2y^3 + 4x^4$ D. $f'_y(x, y) = 3x^2y^2 + 4x^3$

Câu 11. Cho hàm $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f_x(1, 1)$?

A. $f_x(1, 1) = 0$ B. $f_x(1, 1) = 2$
 C. $f_x(1, 1) = -2$ D. $f_x(1, 1) = 4$

Câu 12. Cho hàm $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Tìm $f_y(1, 1)$?

A. $f_y(1, 1) = 4$ B. $f_y(1, 1) = 1$
 C. $f_y(1, 1) = 3$ D. $f_y(1, 1) = -4$

Câu 13. Cho hàm $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$. Tìm $f_x(1, 2)$?

A. $f_x(1, 2) = \frac{2}{9}$ B. $f_x(1, 2) = \frac{1}{9}$
 C. $f_x(1, 2) = \frac{9}{2}$ D. $f_x(1, 2) = 1$

Câu 14. Cho hàm $f(x, y) = \ln(x^2 + 2y^2)$. Tìm $f_y(1, 2)$?

A. $f_y(1, 2) = \frac{2}{9}$ B. $f_y(1, 2) = \frac{8}{9}$
 C. $f_y(1, 2) = \frac{9}{8}$ D. $f_y(1, 2) = \frac{9}{2}$

Câu 15. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Tìm $f_x(1, 1)$?

A. $f_x(1, 1) = 2$ B. $f_x(1, 1) = 5$
 C. $f_x(1, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $f_x(1, 1) = \frac{1}{2}$

Câu 16. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$. Tìm $f_y(1, 1)$?

A. $f_y(1, 1) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ B. $f_y(1, 1) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\text{C. } f_y(1, 1) = \frac{3\sqrt{2}}{8} \qquad \text{D. } f_y(1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Câu 17. Cho hàm $f(x, y) = (2x - 3y)^3$. Tìm $f_x(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_x(x, y) = 6(2x - 3y)^2 & \text{B. } f_x(x, y) = 3(2x - 3y)^2 \\ \text{C. } f_x(x, y) = 2(2x - 3y)^2 & \text{D. } f_x(x, y) = 6(2x - 3y)^3 \end{array}$$

Câu 18. Cho hàm $f(x, y) = (2x - 3y)^3$. Tìm $f_y(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_y(x, y) = -3(2x - 3y)^3 & \text{B. } f_y(x, y) = -9(2x - 3y)^2 \\ \text{C. } f_y(x, y) = -3(2x - 3y)^2 & \text{D. } f_y(x, y) = -9(2x - 3y)^3 \end{array}$$

Câu 19. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm $f_x(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_x(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{B. } f_x(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{C. } f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{D. } f_x(x, y) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

Câu 20. Cho hàm $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tìm $f_y(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_y(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{B. } f_y(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \text{C. } f_y(x, y) = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{D. } f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

VẤN ĐỀ 3: ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 2

Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = 4x^3 - x^2y^3 + 6y^5 + 5$, tính $f_{xx}(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_{xx}(x, y) = 24x - 2y^3 & \text{B. } f_{xx}(x, y) = -24xy^2 \\ \text{C. } f_{xx}(x, y) = 24x - 4y^3 - 12xy^2 & \text{D. } f_{xx}(x, y) = 12x - 12xy^2 \end{array}$$

Câu 2. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^3 + 4y^5 + 6$, tính $f_{xy}(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_{xy}(x, y) = 12x - 4y^3 & \text{B. } f_{xy}(x, y) = -12xy^2 \\ \text{C. } f_{xy}(x, y) = 12x - 4y^3 - 12xy^2 & \text{D. } f_{xy}(x, y) = 12x - 12xy^2 \end{array}$$

Câu 3. Cho hàm số $f(x, y) = 10x^{10} - 2x^2y^3 + y^5$, tính $f_{yy}(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f_{yy}(x, y) = -12x^2y & \text{B. } f_{yy}(x, y) = 12x - 12xy^2 \\ \text{C. } f_{yy}(x, y) = -12x^2y + 20y^3 & \text{D. } f_{yy}(x, y) = 12x - 4y^3 \end{array}$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 9y^8 - 9$, tính $f'_{yx}(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f'_{yx}(x, y) = 6x + 6y & \text{B. } f'_{yx}(x, y) = 6x \\ \text{C. } f'_{yx}(x, y) = 3y^2 + 6x & \text{D. } f'_{yx}(x, y) = 6y \end{array}$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x, y) = 4x^3 + 3xy^2 + 2y^3$, tính $f'_{yy}(x, y)$?

$$\begin{array}{ll} \text{A. } f'_{yy}(x, y) = 6x + 12y & \text{B. } f'_{yy}(x, y) = 6x \\ \text{C. } f'_{yy}(x, y) = 12y & \text{D. } f'_{yy}(x, y) = 6y^2 \end{array}$$

VẤN ĐỀ 4: CỰC TRỊ KHÔNG ĐIỀU KIỆN VÀ CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài toán 1. Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$.

Phương pháp giải**Bước 1:**

Giải hệ phương trình $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$ để tìm nghiệm $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

Bước 2:

Tìm các đạo hàm riêng cấp 2:

$$f_{xx}(x, y) \quad ; \quad f_{xy}(x, y) \quad ; \quad f_{yy}(x, y)$$

Bước 3:

Đặt: $D(x, y) = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$.

Bước 4:

Tính giá trị $D(x_0, y_0)$

- Nếu $D(x_0, y_0) < 0$ thì kết luận $M(x_0, y_0)$ không phải là điểm cực trị (hoặc kết luận $M(x_0, y_0)$ là điểm yên ngựa).
- Nếu $D(x_0, y_0) > 0$ thì tính giá trị $f_{xx}(x_0, y_0)$
 - + Nếu $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ thì kết luận $M(x_0, y_0)$ là điểm cực tiểu, và $f(x_0, y_0)$ là giá trị cực tiểu.
 - + Nếu $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ thì kết luận $M(x_0, y_0)$ là điểm cực đại, và $f(x_0, y_0)$ là giá trị cực đại.

Bài toán 2. Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ thỏa điều kiện $g(x, y) = 0$.

Phương pháp giải**Bước 1:** Đặt hàm Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y).$$

Bước 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L_x(x, y, \lambda) = 0 \\ L_y(x, y, \lambda) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ để tìm nghiệm $X = (x_0, y_0, \lambda_0)$.

Bước 3: Kết luận $M(x_0, y_0)$ là điểm cực trị cần tìm.

Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- $M(0, 0)$ là điểm cực đại và $N(1, 1)$ là điểm cực tiểu
- $M(0, 0)$ là điểm yên ngựa và $N(1, 1)$ là điểm cực tiểu
- $M(0, 0)$ là điểm cực tiểu và $N(1, 1)$ là điểm cực đại
- $M(0, 0)$ là điểm cực đại và $N(1, 1)$ là điểm yên ngựa

Câu 2. Cho hàm $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$. Tìm các điểm cực trị của hàm số này?

- $N(2, 3)$ là điểm cực đại
- $N(2, 3)$ là điểm yên ngựa
- $N(2, 3)$ là điểm cực tiểu
- Không kết luận được

Câu 3. Cho hàm $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Tìm các điểm cực trị của hàm số?

- A. $N(0, 0)$ là điểm yên ngựa
- B. $M(1, 1)$ là điểm cực đại
- C. $P(-1, -1)$ là điểm cực tiểu
- D. Không kết luận được

Câu 4. Cho hàm số $f(x, y) = x^3 + y^3 - 15xy$. Tìm các điểm cực trị của hàm số?

- A. $N(0, 0)$ là điểm yên ngựa và $M(5, 5)$ là điểm cực tiểu
- B. $N(0, 0)$ là điểm yên ngựa và $M(5, 5)$ là điểm cực đại
- C. $N(0, 0)$ là điểm cực đại và $M(5, 5)$ là điểm cực tiểu
- D. $N(0, 0)$ là điểm cực đại và $M(5, 5)$ là điểm cực tiểu

Câu 5. Cho hàm số $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 12x - 8y$. Tìm các điểm cực trị của hàm số?

- A. $M(1, 3)$ là điểm cực đại
- B. $M(1, 3)$ là điểm cực tiểu
- C. $M(1, 3)$ là điểm yên ngựa
- D. Không kết luận được

Câu 6. Cho hàm $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $M(3, 1)$ là điểm cực đại và $N(-3, -1)$ là điểm cực tiểu
- B. $M(3, 1)$ và $N(-3, -1)$ là các điểm cực đại
- C. $M(3, 1)$ là điểm cực tiểu và $N(-3, -1)$ là điểm cực đại
- D. $M(3, 1)$ và $N(-3, -1)$ là các điểm cực tiểu

Câu 7. Cho hàm $f(x, y) = x^3 + y^2 + 12xy + 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $N(0, 0)$ là điểm cực tiểu
- B. $N(0, 0)$ là điểm cực đại
- C. $M(24, -144)$ là điểm cực đại
- D. $M(24, -144)$ là điểm cực tiểu

Câu 8. Cho hàm $f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 3x + y$ với điều kiện $-x^2 + y = 1$. Tìm cực trị của hàm số đã cho?

- A. $M(1, 2)$, $N(-3, 10)$ là các điểm cực trị
- B. $M(1, -2)$, $N(3, -10)$ là các điểm cực trị
- C. $M(-1, 2)$, $N(3, 10)$ là các điểm cực trị
- D. $M(-1, -2)$, $N(-3, -10)$ là các điểm cực trị

Câu 9. Cho hàm $f(x, y) = x + 3y + 2$ với điều kiện $10 - x^2 - y^2 = 0$. Tìm các điểm cực trị của hàm số đã cho?

- A. $M(1, 3)$ là điểm cực trị
- B. $M(1, 3)$, $N(-1, -3)$ là các điểm cực trị
- C. $N(-1, -3)$ là điểm cực trị
- D. Không có cực trị

Câu 10. Cho hàm $f(x, y) = 3x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 - 10 = 0$. Tìm các điểm cực trị của hàm số đã cho?

- A. $M(3, 1)$ là điểm cực trị
- B. $N(-3, -1)$ là điểm cực trị
- C. $M(3, 1), N(-3, -1)$ là các điểm cực trị
- D. Không có cực trị

VẤN ĐỀ 5: XÁC ĐỊNH KIỂU MIỀN

1. Miền hình chữ nhật trong hệ tọa độ (Oxy)

Miền R được gọi là **miền hình chữ nhật** nếu như R có dạng:

$$R = [a, b] \times [c, d] \\ = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d\}$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số.

2. Miền kiểu 1 trong hệ tọa độ (Oxy)

Miền D được gọi là **miền kiểu 1** nếu như D có dạng:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b ; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

trong đó a, b là các hằng số.

2. Miền kiểu 2 trong hệ tọa độ (Oxy)

Miền D được gọi là **miền kiểu 2** nếu như D có dạng:

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d ; h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

trong đó c, d là các hằng số.

Câu 1. Biểu thức nào sau đây thể hiện D là một hình chữ nhật trong hệ tọa độ vuông góc Oxy ?

- A. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, x - 1 \leq y \leq 5\}$
- B. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, x - 1 \leq y \leq x + 5\}$
- C. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq x + 5\}$
- D. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 5, 0 \leq x \leq y + 5\}$

Câu 2. Biểu thức nào sau đây thể hiện D là một miền kiểu 2 trong tích phân hai lớp?

- A. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 5, x - 1 \leq y \leq 5\}$
- B. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 3 - y\}$
- C. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$
- D. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq x + 1\}$

Câu 3. Biểu thức nào sau đây thể hiện D là một miền kiểu 1 trong tích phân hai lớp?

- A. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 3 - y\}$
- B. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq y + 1\}$

C. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3 - x\}$

D. $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$

VẤN ĐỀ 6. TÍCH PHÂN HAI LỚP TRÊN MIỀN HÌNH CHỮ NHẬT

Công thức tính (**Định lý Fubini**)

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Câu 1. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D 12x^2y^3 dA$ với $D = [0, 1] \times [1, 2]$ bằng

A. $I = 15$

B. $I = 14$

C. $I = 12$

D. $I = 16$

Câu 2. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (2xy + 1) dA$ với $D = [0, 1] \times [1, 2]$

bằng

A. $I = 4$

B. $I = \frac{5}{2}$

C. $I = 7$

D. $I = 5$

Câu 3. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D \cos x \sin y dA$ với $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

bằng

A. $I = 0$

B. $I = 1$

C. $I = 2$

D. $I = 7$

Câu 4. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (16 - x^2 - y^2) dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 1]$

bằng

A. $I = \frac{48}{3}$

B. $I = \frac{47}{3}$

C. $I = \frac{46}{3}$

D. $I = 7$

Câu 5. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x + 2y) dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 2]$ bằng

- A. $I = 8$ B. $I = 7$
 C. $I = 6$ D. $I = 5$

Câu 6. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D x^2(x - y)dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bằng

- A. $I = 5$ B. $I = \frac{-1}{12}$
 C. $I = 6$ D. $I = \frac{1}{12}$

Câu 7. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x^2y - 2xy)dA$ với $D = [0, 4] \times [-2, 0]$ bằng

- A. $I = \frac{-31}{3}$ B. $I = \frac{32}{3}$
 C. $I = \frac{-32}{3}$ D. $I = \frac{31}{3}$

Câu 8. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x + y)dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 2]$ bằng

- A. $I = 6$ B. $I = 5$
 C. $I = 4$ D. $I = 3$

Câu 9. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D e^{x+y}dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 1]$ bằng

- A. $I = (e - 1)^2$ B. $I = (e + 1)^2$
 C. $I = (e - 2)^2$ D. $I = (e + 2)^2$

Câu 10. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x^2 + y^2)dA$ với $D = [0, 1] \times [1, 3]$ bằng

- A. $I = \frac{31}{3}$ B. $I = \frac{28}{3}$
 C. $I = \frac{67}{3}$ D. $I = \frac{32}{3}$

Câu 11. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D \sin x \cos y dA$ với $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$ bằng

- A. $I = 1$ B. $I = 2$
 C. $I = 0$ D. $I = 4$

Câu 12. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (xy^2 + y)dA$ với $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq 2 - x\}$ bằng

- A. $I = \frac{31}{8}$ B. $I = \frac{-31}{8}$
 C. $I = \frac{63}{8}$ D. $I = \frac{-63}{8}$

Câu 13. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (xy + y)dA$ với $D = \{(x, y) \mid y \leq x \leq 2 - y; 0 \leq y \leq 1\}$ bằng

- A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{2}{5}$

C. $I = \frac{3}{2}$

D. $I = \frac{3}{4}$

Câu 14. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D e^{x^2} dA$ với $D = \{(x, y) \mid y \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ bằng

A. $I = \frac{e+1}{2}$

B. $I = \frac{e-1}{2}$

C. $I = \frac{e-2}{2}$

D. $I = \frac{e+2}{2}$

Câu 15. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D x e^{y^2} dA$ với $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; x^2 \leq y \leq 1\}$ bằng

A. $I = \frac{e+1}{4}$

B. $I = \frac{e-2}{4}$

C. $I = \frac{e-1}{4}$

D. $I = \frac{e+2}{4}$

VẤN ĐỀ 7. TÍCH PHÂN HAI LỚP TRÊN MIỀN BỊ CHẶN

1. Tích phân hai lớp trên miền kiểu 1

Công thức tính

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

2. Tích phân hai lớp trên miền kiểu 2

Công thức tính

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

$$= \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Câu 1. Kết quả của tích phân 2 lớp $I = \iint_D (4x + 2y) dA$ với $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1; x \leq y \leq 2x\}$ bằng

A. $I = \frac{7}{3}$

B. $I = \frac{28}{3}$

C. $I = \frac{67}{3}$ D. $I = \frac{32}{3}$

Câu 2. Kết quả tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x + 2y) dA$ với D là miền bị chặn bởi $y = 2x^2$ và $y = 1 + x^2$ bằng

A. $I = \frac{7}{15}$ B. $I = \frac{32}{15}$

C. $I = \frac{67}{15}$ D. $I = \frac{31}{15}$

Câu 3. Tính thể tích của khối trụ nằm dưới paraboloid $z = x^2 + y^2$ và nằm trên miền D ở trong mặt phẳng Oxy bị chặn bởi $y = 2x$ và $y = x^2$

A. $I = \frac{8}{35}$ B. $I = \frac{30}{35}$

C. $I = \frac{216}{35}$ D. $I = \frac{27}{35}$

Câu 4. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D xy dA$ với D là miền bị chặn bởi $y = x - 1$ và $y^2 = 2x + 6$.

A. $I = 1$ B. $I = 2$
C. $I = 35$ D. $I = 36$

Câu 5. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D x \cos y dA$ với D là miền bị giới hạn bởi $y = 0$, $y = x^2$ và $x = 1$.

A. $I = \frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ B. $I = \frac{1}{2}(1 + \cos 1)$

C. $I = \frac{-1}{2}(1 - \cos 1)$ D. $I = \frac{-1}{2}(1 + \cos 1)$

Câu 6. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D x dA$ với D là miền bị giới hạn bởi $y = x$, $y = 0$ và $x = 1$.

A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{1}{3}$

C. $I = \frac{4}{3}$ D. $I = \frac{5}{3}$

Câu 7. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D y dA$ với D là miền bị giới hạn bởi $y = x - 2$ và $x = y^2$.

A. $I = \frac{2}{4}$ B. $I = \frac{1}{4}$

C. $I = \frac{9}{4}$ D. $I = \frac{5}{4}$

Câu 8. Kết quả của tích phân $I = \iint_D y^2 dA$ với $D = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1 ; -y - 2 \leq x \leq y\}$

A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{1}{3}$

C. $I = \frac{7}{3}$ D. $I = \frac{4}{3}$

Câu 9. Kết quả của tích phân $I = \iint_D x dA$ với $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi ; 0 \leq y \leq \sin x\}$

A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{1}{3}$

C. $I = \frac{7}{3}$ D. $I = \frac{4}{3}$

VẤN ĐỀ 8. TÍCH PHÂN HAI LỚP TRONG HỆ TỌA ĐỘ CỰC

1. Mối liên hệ giữa tọa độ vuông góc với tọa độ cực

Điểm $P(x, y)$ ở trong hệ tọa độ vuông góc với điểm $P(r, \theta)$ ở trong hệ tọa độ cực có mối liên hệ là

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \end{cases}$$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ và θ là góc lượng giác không quá 1 vòng lượng giác.

2. Tích phân 2 lớp trong hệ tọa độ cực

Giả sử ta có

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in (Oxy)\} \\ &= \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2 ; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\} \end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta.$$

Câu 1. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D (4x + 2y) dA$ với D là hình tròn tâm gốc tọa độ, bán kính bằng 2.

A. $I = 0$ B. $I = 5$
C. $I = 4$ D. $I = 3$

Câu 2. Tính thể tích của khối bị chặn bởi paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và mặt phẳng $z = 0$.

A. $I = \frac{\pi}{4}(\text{đvtt})$ B. $I = \frac{\pi}{2}(\text{đvtt})$

C. $I = \frac{3\pi}{4}(\text{đvtt})$ D. $I = \frac{5\pi}{4}(\text{đvtt})$

Câu 3. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x^2 + y^2) dA$ với D là hình tròn tâm gốc tọa độ, bán kính bằng 2.

A. $I = 7\pi$ B. $I = 5\pi$
C. $I = 8\pi$ D. $I = 3\pi$

Câu 4. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D (3x + 4y) dA$ với D là hình tròn tâm gốc tọa độ, bán kính bằng 3.

A. $I = 2\pi$ B. $I = 5\pi$
C. $I = 0.5\pi$ D. $I = 0$

Câu 5. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D (x + y) dA$ với D là miền trong giữa hai hình tròn $x^2 + y^2 = 1$ và $x^2 + y^2 = 4$.

A. $I = 0$ B. $I = 3\pi$
C. $I = 2\pi$ D. $I = \pi$

VẤN ĐỀ 9. TÍCH PHÂN BA LỚP TRONG KHỐI HỘP

Khối hộp là khối có dạng

$$E = [a, b] \times [c, d] \times [t, s] \\ = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b ; c \leq y \leq d ; t \leq z \leq s\}$$

trong đó a, b, c, d, t, s là các hằng số.

Công thức tính (**Định lý Fubini**)

$$\begin{aligned} \iiint_E f(x, y, z) dV &= \int_a^b \int_c^d \int_t^s f(x, y, z) dz dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d \left[\int_t^s f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx \\ &= \int_a^b \int_t^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_t^s f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_c^d \int_t^s \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_t^s \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_t^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Như vậy, chúng ta có 6 cách để tính tích phân trên một khối hộp.

Câu 1. Kết quả tích phân 3 lớp $I_1 = \iiint_E (2xy + 4z) dV$ với E là khối hộp $E = [1, 4] \times [2, 5] \times [3, 6]$ bằng

- A. $I = \frac{1917}{2}$ B. $I = \frac{1918}{2}$
 C. $I = \frac{1919}{2}$ D. $I = \frac{1920}{2}$

Câu 2. Kết quả tích phân 3 lớp $I_1 = \iiint_E (x + y + z) dV$ với E là khối hộp $E = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ bằng

- A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{3}{2}$
 C. $I = \frac{3}{4}$ D. $I = \frac{4}{3}$

Câu 3. Kết quả tích phân 3 lớp $I_1 = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV$ với E là khối hộp $E = [0, 3] \times [0, 3] \times [0, 3]$ bằng

- A. $I = 178$ B. $I = 187$
 C. $I = 243$ D. $I = 198$

Câu 4. Kết quả tích phân 3 lớp $I_1 = \iiint_E 5dV$ với E là khối hộp $E = [0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ bằng

- A. $I = 20$ B. $I = 50$
 C. $I = 30$ D. $I = 40$

Câu 5. Kết quả tích phân 3 lớp $I_1 = \iiint_E 12xy^2z dV$ với E là khối hộp $E = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 3]$ bằng

- A. $I = 63$ B. $I = \frac{63}{2}$
 C. $I = 21$ D. $I = 36$

VẤN ĐỀ 9. TÍCH PHÂN BA LỚP TRÊN KHỐI KIỂU 1, 2, 3

1. Tích phân 3 lớp trên khối kiểu 1

Khối E được gọi là **khối kiểu 1** nếu có dạng

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D ; u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$

Chú ý: D chính là hình chiếu vuông góc của Khối E xuống mặt phẳng Oxy .

Công thức tính

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x, y)}^{u_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$

2. Tích phân 3 lớp trên khối kiểu 2

Khối E được gọi là **khối kiểu 2** nếu có dạng

$$E = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D ; u_1(y, z) \leq x \leq u_2(y, z)\}.$$

Chú ý: D chính là hình chiếu vuông góc của Khối E xuống mặt phẳng Oyz .

3. Tích phân 3 lớp trên khối kiểu 3

Khối E được gọi là **khối kiểu 3** nếu có dạng

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, z) \in D ; u_1(x, z) \leq y \leq u_2(x, z)\}.$$

Chú ý: D chính là hình chiếu vuông góc của Khối E xuống mặt phẳng Oxz .

Công thức tính

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{u_1(x, z)}^{u_2(x, z)} f(x, y, z) dy \right) dA.$$

Câu 1. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 12xyz dV$ với E là khối hộp $E =$

$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq y\}$ bằng

- A. $I = 8$ B. $I = 2$
C. $I = 4$ D. $I = 6$

Câu 2. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 3x dV$ với

$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 2y\}$ bằng

- A. $I = 8$ B. $I = 2$
C. $I = 4$ D. $I = 6$

Câu 3. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 12y dV$ với

$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq y\}$ bằng

- A. $I = 3$ B. $I = 2$
C. $I = 4$ D. $I = 1$

Câu 4. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 2y dV$ với

$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq x, x - y \leq z \leq x + y\}$ bằng

A. $I = \frac{1}{27}$ B. $I = \frac{2}{27}$
 C. $I = \frac{27}{2}$ D. $I = 27$

Câu 5. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 2 \sin y dV$ với

$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi - x, 0 \leq z \leq x\}$ bằng

A. $I = 2(\pi^2 + 4)$ B. $I = \pi^2 + 4$
 C. $I = 2(\pi^2 - 4)$ D. $I = \pi^2 - 4$

VẤN ĐỀ 10. TÍCH PHÂN BA LỚP TRONG HỆ TỌA ĐỘ TRỤ

1. Mối liên hệ giữa toạ độ vuông góc với toạ độ trụ

Điểm $P(x, y, z)$ ở trong hệ toạ độ vuông góc với điểm $P(r, \theta, z)$ ở trong hệ toạ độ trụ có mối liên hệ là:

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

trong đó $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ là khoảng cách từ O đến P và θ là góc lượng giác hợp bởi giữa trục dương Ox với vectơ hình chiếu vuông góc của vectơ \overrightarrow{OP} xuống mặt phẳng (Oxy) .

2. Tích phân 3 lớp trong hệ toạ độ trụ

Giả sử ta có E là khối kiểu I, tức là

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D; z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$$

và miền D ở trong hệ toạ độ cực có dạng

$$D = \{(r, \theta) \mid r_1 \leq r \leq r_2; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}.$$

Khi đó ta có

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1(r \cos \theta, r \sin \theta)}^{z_2(r \cos \theta, r \sin \theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \cdot r \, dz dr d\theta.$$

Câu 1. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 5\sqrt{x^2 + y^2} dV$ với E là khối nằm dưới

mặt phẳng $z = 4$, nằm trên mặt Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ bằng

- A. $I = 12\pi$ B. $I = 10\pi$
 C. $I = 8\pi$ D. $I = 14\pi$

Câu 2. Kết quả tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 6z dV$ với E là khối nằm dưới mặt phẳng $z = 4$, nằm trên mặt $z = 0$ và nằm bên trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$ bằng

A. $I = 6\pi$ B. $I = 48\pi$
 C. $I = 10\pi$ D. $I = 12\pi$

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 2z dV$ với E là khối nằm dưới mặt phẳng $z = 4$, nằm trên mặt Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

- A. $I = \frac{46}{3}\pi$ B. $I = 8\pi$
 C. $I = \frac{47}{3}\pi$ D. $I = 12\pi$

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp $I = \iiint_E 6z\sqrt{x^2 + y^2} dV$ với E là khối nằm dưới mặt phẳng $z = 2$, nằm trên mặt $z = 0$ và nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$.

A. $I = 6\pi$ B. $I = 8\pi$
 C. $I = 7\pi$ D. $I = 5\pi$

VẤN ĐỀ 11. TÍCH PHÂN BA LỚP TRONG HỆ TỌA ĐỘ CẦU

1. Mối liên hệ giữa tọa độ vuông góc với tọa độ cầu

Điểm $M(x, y, z)$ ở trong hệ tọa độ vuông góc với điểm $M(\rho, \theta, \phi)$ ở trong hệ tọa độ cầu có mối liên hệ là

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \\ z = \rho \cdot \cos \phi \end{cases}$$

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ là khoảng cách từ O đến M .
- ϕ là góc hợp bởi trục dương Oz với vectơ \overrightarrow{OM} , có nghĩa là $\phi \in [0, \pi]$.
- θ là góc lượng giác hợp bởi giữa trục dương Ox với vectơ \overrightarrow{OH} (là hình chiếu vuông góc của vectơ \overrightarrow{OM} xuống mặt phẳng (Oxy)).
- $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cdot \sin \phi$ là khoảng cách từ O đến H .

2. Tích phân 3 lớp trong hệ tọa độ cầu

Giả sử ta có

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y, z) \in (Oxyz)\} \\ &= \{(\rho, \theta, \phi) \mid \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 ; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 ; \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}. \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \iiint_E f(x, y, z) dV \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \cdot \rho^2 \cdot \sin \phi d\rho d\phi d\theta. \end{aligned}$$

Câu 1. Tính tích phân 3 lớp $I = \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dV$ với E là quả cầu có tâm là gốc toạ độ, bán kính bằng 2.

- A. $I = \frac{128}{5}\pi$ B. $I = 8\pi$
 C. $I = \frac{47}{5}\pi$ D. $I = 12\pi$

Câu 2. Tính tích phân 3 lớp $I = \iiint_E z dV$ với E là quả cầu có tâm là gốc toạ độ, bán kính bằng 1.

- A. $I = 2\pi$ B. $I = 0$
 C. $I = 5\pi$ D. $I = 12\pi$

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp $I = \iiint_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dV$ với E là quả cầu có tâm là gốc toạ độ, bán kính bằng 3.

- A. $I = 32\pi$ B. $I = 0$
 C. $I = 18\pi$ D. $I = 12\pi$

VẤN ĐỀ 12. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG TRONG MẶT PHẪNG

1. Tích phân đường trong mặt phẳng

Với (C) là đường cong ở trong mặt phẳng, ta có các ký hiệu tích phân đường trong mặt phẳng như sau:

Loại 1: $\int_{(C)} f(x, y) ds$ hoặc $\int_{(C)} f(x, y) dl$

Loại 2: $\int_{(C)} f(x, y) dx$; $\int_{(C)} f(x, y) dy$

2. Công thức tính tích phân đường trong mặt phẳng

(1) Khi đường cong (C) cho ở dạng tham số $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ với $a \leq t \leq b$ thì ta có

(a) $\int_{(C)} f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \cdot \sqrt{[g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$

$$(b) \quad \int_{(C)} f(x, y) dx = \int_a^b f(g(t), h(t)) \cdot g'(t) dt$$

$$(c) \quad \int_{(C)} f(x, y) dy = \int_a^b f(g(t), h(t)) \cdot h'(t) dt$$

(2) Khi đường cong (C) cho ở dạng giải tích $\begin{cases} y = g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$ thì ta có

$$(a) \quad \int_{(C)} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx$$

$$(b) \quad \int_{(C)} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, g(x)) dx$$

$$(c) \quad \int_{(C)} f(x, y) dy = \int_a^b f(x, g(x)) \cdot g'(x) dx$$

(3) Khi đường cong (C) cho ở dạng giải tích $\begin{cases} x = h(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$ thì ta có

$$(a) \quad \int_{(C)} f(x, y) ds = \int_c^d f(h(y), y) \cdot \sqrt{[h'(y)]^2 + 1} dy$$

$$(b) \quad \int_{(C)} f(x, y) dx = \int_c^d f(h(y), y) \cdot h'(y) dy$$

$$(c) \quad \int_{(C)} f(x, y) dy = \int_c^d f(h(y), y) dy$$

Chú ý 1. Khi đường cong (C) cho ở dạng vectơ $\begin{cases} r(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \\ a \leq t \leq b \end{cases}$ thì dạng tham số của đường cong (C) sẽ là

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ a \leq t \leq b \end{cases}$$

Chú ý 2. Khi (C) là đoạn thẳng từ điểm A đến điểm B thì dạng vectơ (hay dạng

tham số) của (C) sẽ là

$$\begin{cases} r(t) = (1-t) \cdot \langle A \rangle + t \cdot \langle B \rangle \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = (1-t) \cdot x_A + t \cdot x_B \\ y(t) = (1-t) \cdot y_A + t \cdot y_B \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Câu 1. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} y ds$ với (C) là đoạn thẳng đi từ $(0,0)$ đến $(3,4)$ bằng

- A. $I = 10$ B. $I = 11$
C. $I = 12$ D. $I = 13$

Câu 2. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x^2 + y^2) ds$ với (C) là đoạn thẳng đi từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ bằng

- A. $I = \frac{2}{3}$ B. $I = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
C. $I = \frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $I = \frac{1}{3}$

Câu 3. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} xy ds$ với $(C) : x = \cos t, y = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ bằng

- A. $I = \frac{1}{5}$ B. $I = \frac{1}{3}$
C. $I = \frac{1}{2}$ D. $I = \frac{1}{4}$

Câu 4. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} y dx + x dy$ với (C) là đoạn thẳng đi từ $(0,0)$ đến $(1,1)$ bằng

- A. $I = 5$ B. $I = 2$
C. $I = 3$ D. $I = 1$

Câu 5. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x+y) dx + (x-y) dy$ với $(C) : x = t, y = t^2, t \in [0, 1]$ bằng

- A. $I = 1$ B. $I = 2$
C. $I = 3$ D. $I = 4$

Câu 6. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} 2xdx + 2ydy$ với (C) là đoạn thẳng đi từ $(1,1)$ đến $(3,2)$ bằng

A. $I = 12$ B. $I = 11$
 C. $I = 13$ D. $I = 14$

Câu 7. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x^2 - y)dx + xydy$ với $(C) : x = t, y = t^2, t \in [0, 1]$ bằng

A. $I = \frac{4}{5}$ B. $I = \frac{3}{5}$
 C. $I = \frac{2}{5}$ D. $I = \frac{6}{5}$

Câu 8. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} xydy$ với $(C) : x = t^2, y = 2t, t \in [0, 1]$ bằng

A. $I = 2$ B. $I = 5$
 C. $I = 0.5$ D. $I = 1$

Câu 9. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x - 2y)dx$ với $(C) : x = 2 + 6t, y = 3 - 8t, t \in [0, 1]$ bằng

A. $I = 42$ B. $I = 43$
 C. $I = 44$ D. $I = 45$

Câu 10. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x - 2y)ds$ với $(C) : x = 2 + 6t, y = 3 - 8t, t \in [0, 1]$ bằng

A. $I = 62$ B. $I = \frac{70}{32}$
 C. $I = 83$ D. $I = \frac{3}{3}$

Câu 11. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (3x + y)ds$ với $(C) : x = 2 + t, y = 3 - 2t, t \in [0, 2]$ bằng

A. $I = \frac{1350}{3}$ B. $I = 2\sqrt{5}$
 C. $I = 20\sqrt{5}$ D. $I = 4$

Câu 12. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} y^3 ds$ với $(C) : x = t^3, y = t, t \in [0, 1]$ bằng

A. $I = \frac{\sqrt{10} + 1}{54}$

B. $I = \frac{10\sqrt{10} + 1}{54}$

C. $I = \frac{\sqrt{10} - 1}{54}$

D. $I = \frac{10\sqrt{10} - 1}{54}$

Câu 13. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} xy ds$ với (C) là đoạn thẳng nối từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(4,3)$ bằng

A. $I = 20$

B. $I = \frac{2}{5}$

C. $I = 2$

D. $I = 40$

Câu 14. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} 2(x - y) ds$ với (C) là đoạn thẳng nối từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(4,3)$ bằng

A. $I = 6$

B. $I = 5$

C. $I = 4$

D. $I = 3$

Câu 15. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x^2 y^3 - x) dy$ với $(C) : y = x, 1 \leq x \leq 2$ bằng

A. $I = 7$

B. $I = 3$

C. $I = 9$

D. $I = 4$

Câu 16. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (2x + 3y^2) ds$ với $(C) : y = x, 1 \leq x \leq 2$ bằng

A. $I = 7$

B. $I = 3$

C. $I = \sqrt{19}$

D. $I = 10\sqrt{2}$

Câu 17. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} \sqrt{2}(x - 2) ds$ với $(C) : x = y + 5, 0 \leq x \leq 1$ bằng

A. $I = 7$

B. $I = 3$

C. $I = 9$

D. $I = 10$

Câu 18. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} y ds$ với $(C) : y = 2x + 1, 0 \leq x \leq 1$ bằng

A. $I = 7\sqrt{2}$

B. $I = 17\sqrt{2}$

C. $I = 9\sqrt{2}$

D. $I = 10\sqrt{2}$

Câu 19. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} 12x^2 y ds$ với $(C) : y = x - 1, 1 \leq x \leq 2$

bằng

- A. $I = 7\sqrt{2}$ B. $I = 18\sqrt{2}$
 C. $I = 17\sqrt{2}$ D. $I = 19\sqrt{2}$

Câu 20. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} 3x^2 y ds$ với $(C) : y = x - 1, 0 \leq x \leq 2$

bằng

- A. $I = 7\sqrt{2}$ B. $I = 18\sqrt{2}$
 C. $I = 17\sqrt{2}$ D. $I = 4\sqrt{2}$

VẤN ĐỀ 13. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Tích phân đường trong không gian

Với (C) là đường cong ở trong không gian, ta có các ký hiệu tích phân đường trong không gian như sau:

Loại 1: $\int_{(C)} f(x, y, z) ds$ hoặc $\int_{(C)} f(x, y, z) dl$

Loại 2:

$$\int_{(C)} f(x, y, z) dx \quad ; \quad \int_{(C)} f(x, y, z) dy \quad ; \quad \int_{(C)} f(x, y, z) dz$$

2. Công thức tính tích phân đường trong không gian

Giả sử đường cong (C) cho ở dạng tham số $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ với $a \leq t \leq b$. Khi đó,

ta có

$$(a) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

$$(b) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) dx = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) dt$$

$$(c) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) dy = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) dt$$

$$(d) \quad \int_{(C)} f(x, y, z) dz = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t) dt$$

Câu 1. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} y \sin z ds$ với $(C) : x = \cos t, y =$

$\sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ bằng

- A. $I = \pi\sqrt{2}$ B. $I = 18\pi\sqrt{2}$
 C. $I = 17\pi\sqrt{2}$ D. $I = 4\pi\sqrt{2}$

Câu 2. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} ydx + zdy + xdz$ với (C) là đoạn thẳng đi từ điểm $(2,0,0)$ đến điểm $(3,4,5)$ bằng

A. $I = 24.5$ B. $I = 25$
 C. $I = 25.5$ D. $I = 26$

Câu 3. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} ydx + zdy + xdz$ với (C) là đoạn thẳng đi từ điểm $(3,4,5)$ đến điểm $(3,4,0)$ bằng

A. $I = -15$ B. $I = -25$
 C. $I = 25.5$ D. $I = -26$

Câu 4. Kết quả của tích phân đường $I = \int_{(C)} (x + y + z)ds$ với (C) là đoạn thẳng đi từ điểm $(0,0,0)$ đến điểm $(1,2,3)$ bằng

A. $I = \sqrt{14}$ B. $I = 3\sqrt{14}$
 C. $I = 6\sqrt{14}$ D. $I = 7\sqrt{14}$

Câu 5. Công thức của tích phân đường $I = \int_{(C)} xyzds$ với (C) có phương trình tham số $x = t, y = t^2, z = t^3, t \in [0, 1]$ là

- A. $I = \int_0^1 t^6 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} dt$
 B. $I = \int_0^1 t^6 dt$
 C. $I = \int_0^1 t^5 \sqrt{1 + 4t + 9t^2} dt$
 D. $I = \int_0^1 t^5 dt$

VẤN ĐỀ 14. TRƯỜNG VECTOR BẢO TOÀN

Một trường vectơ F được gọi là **trường vectơ bảo toàn** nếu như tồn tại một hàm nhiều biến f sao cho $\nabla f = F$.

Nếu $F(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y) \rangle$ là trường vectơ thì ta có

$$F \text{ là bảo toàn} \iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Câu 1. Trường vector nào sau đây là bảo toàn trên \mathbb{R}^2 ?

- A. $F(x, y) = (y, x)$ B. $F(x, y) = (2x, 2y)$
 C. $F(x, y) = (-y, x)$ D. $F(x, y) = (x^2 - y, y^2 - x)$

Câu 2. Trường vector nào sau đây là bảo toàn?

- A. $F(x, y) = (x + y \cos x)\mathbf{i} + \sin y\mathbf{j}$ B. $F(x, y) = (x - y \cos x)\mathbf{i} + \sin x\mathbf{j}$
 C. $F(x, y) = (x + y \cos x)\mathbf{i} + (-\sin x)\mathbf{j}$ D. $F(x, y) = (x - y \cos x)\mathbf{i} + (-\sin x)\mathbf{j}$

Câu 3. Trường vector nào sau đây là bảo toàn?

- A. $F(x, y) = (x - \cos y)\mathbf{i} + (x \cos y + y)\mathbf{j}$ B. $F(x, y) = (x - \cos y)\mathbf{i} + (-x \sin y + y)\mathbf{j}$
 C. $F(x, y) = (x + \cos y)\mathbf{i} + (x \sin y + y)\mathbf{j}$ D. $F(x, y) = (x - \cos y)\mathbf{i} + (x \sin y + y)\mathbf{j}$

Câu 4. Trường vector nào sau đây là bảo toàn?

- A. $F(x, y) = (7x^2 - y, x + 3y^2)$ B. $F(x, y) = (7x^2 - 7y, 7x + 2y^2)$
 C. $F(x, y) = (7x^2 + 7y, 3x + 2y^2)$ D. $F(x, y) = (7x^2 - 4y, 7y^2 - 4x)$

Câu 5. Trường vector nào sau đây là bảo toàn?

- A. $F(x, y) = (1 + 5y, 1 + 6x)$ B. $F(x, y) = (1 + 6y, 1 - 6x)$
 C. $F(x, y) = (1 - 6y, 1 + 6x)$ D. $F(x, y) = (1 + 6y, 1 + 6x)$

VẤN ĐỀ 15. ĐỊNH LÝ GREEN

Giả sử D là một miền liên thông, bị chặn, có biên là đường cong (C) gồm một hay nhiều đường cong kín trơn từng khúc, rời nhau từng đôi một.

Nếu các hàm số $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong miền D thì ta có

$$\oint_{(C)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(Q_x(x, y) - P_y(x, y) \right) dA.$$

Ký hiệu dấu $\oint_{(C)}$ chính là tích phân được lấy theo chiều dương của đường cong (C) .

Câu 1. Kết quả của tích phân đường $I = \oint_{(C)} xdy + ydx$ với (C) là các cạnh của

tam giác có các đỉnh $(0, 0)$, $(1, 0)$ và $(0, 1)$ bằng

- A. $I = 0$ B. $I = 1$
 C. $I = 2$ D. $I = 3$

Câu 2. Kết quả của tích phân đường $I = \oint_{(C)} x^2 dy + xy dx$ với (C) đường tròn tâm

O, bán kính 1 bằng

- A. $I = 0$ B. $I = 1$
 C. $I = 2$ D. $I = 3$

- Nếu mặt (S) cho bởi dạng vectơ có phương trình:

$$\begin{cases} r(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle \\ (u, v) \in D \end{cases}$$

thì ta có:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) \cdot |r_u \times r_v| dA$$

- **Nhắc lại phép toán tích có hướng:**

Với $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ và $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ ta có:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2, a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3, a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \rangle$$

$$= \left\langle \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Câu 1. Kết quả tích phân mặt $I = \iint_{(S)} x^2 y z dS$ với (S) là mặt được cho bởi

$$\begin{cases} z = 1 + 2x + 3y \\ 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2 \end{cases} \quad \text{bằng}$$

A. $I = \sqrt{14}$
C. $I = 11\sqrt{14}$

B. $I = 17\sqrt{14}$
D. $I = 171\sqrt{14}$

Câu 2. Kết quả tích phân mặt $I = \iint_{(S)} y dS$ với (S) là mặt được cho bởi $\begin{cases} z = x + y^2 \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

bằng

A. $I = \frac{12\sqrt{2}}{3}$
C. $I = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

B. $I = \frac{11\sqrt{2}}{3}$
D. $I = \frac{13\sqrt{2}}{3}$

Câu 3. Kết quả tích phân mặt $I = \iint_{(S)} 6xy(y + z) dS$ với (S) là mặt được cho bởi

$$\begin{cases} z = 1 + 2x - y \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \text{bằng}$$

A. $I = 22\sqrt{5}$
C. $I = 22$

B. $I = 6\sqrt{22}$
D. $I = 22\sqrt{6}$

Câu 4. Kết quả tích phân mặt $I = \iint_{(S)} x dS$ với (S) là mặt được cho bởi $\begin{cases} z = x + 2y \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

bằng

- A. $I = 4\sqrt{6}$ B. $I = 3\sqrt{6}$
 C. $I = 2\sqrt{6}$ D. $I = \sqrt{6}$

Câu 5. Kết quả tích phân mặt $I = \iint_{(S)} y dS$ với (S) là mặt được cho bởi $\begin{cases} z = x + 2y \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$ bằng

- A. $I = 4\sqrt{6}$ B. $I = 3\sqrt{6}$
 C. $I = 2\sqrt{6}$ D. $I = \sqrt{6}$

MỘT SỐ BỘ CÂU HỎI TRẢ LỜI NGẮN THAM KHẢO

BỘ CÂU HỎI 1

Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = e^{xy}$. Tính $f_{xx}(0, 1)$?

Câu 2. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D x^2 y dA$ với $D = [0, 1] \times [0, 2]$?

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp: $I = \iiint_E xyz dV$ với $E = [0, 2] \times [0, 3] \times [0, 4]$?

Câu 4. Sử dụng Định lý Green để tính tích phân đường $I = \oint_{(C)} (\sin(x^2) + 2y)dx + (10x + \sqrt{y^2 + 1})dy$ với (C) là đường tròn tâm gốc tọa độ và bán kính bằng 1.

Câu 5. Tính tích phân đường: $I = \int_{(C)} xy ds$ với (C) cho bởi $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Câu 6. Tính tích phân mặt $I = \iint_{(S)} (xy + y^2 + yz) dS$ với (S) là mặt được cho bởi

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

BỘ CÂU HỎI 2

Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = (y^2 + 1) \cos x$. Tính $f_{xy}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$?

Câu 2. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D x dA$ với D là miền tam giác có ba đỉnh $(0, 0)$, $(0, 2)$ và $(2, 2)$?

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp: $I = \iiint_E xy^2 z^3 dV$ với $E = [-1, 2] \times [0, 2] \times [0, 1]$?

Câu 4. Sử dụng Định lý Green để tính tích phân đường $I = \oint_{(C)} (e^x + 3y)dx + (4x + \sin(y^2))dy$ với (C) là biên của tam giác có các đỉnh $(0,0)$, $(2,0)$ và $(1,2)$.

Câu 5. Tính tích phân đường: $I = \int_{(C)} (x^2y - 1)ds$ với (C) là đoạn thẳng nối từ điểm $(0,0)$ đến điểm $(6,8)$.

Câu 6. Tính tích phân mặt $I = \iint_{(S)} (x + y + z)dS$ với (S) là mặt được cho bởi

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

BỘ CÂU HỎI 3

Câu 1. Cho hàm số $f(x, y) = 3x^2y - 5y^2$. Tính $f_{yy}(1, 1)$?

Câu 2. Tính tích phân 2 lớp $I = \iint_D xy^2dA$ với D là miền tam giác có ba đỉnh $(0,0)$, $(2,0)$ và $(2,2)$?

Câu 3. Tính tích phân 3 lớp: $I = \iiint_E (x + 2y)dV$ với $E = [-1, 2] \times [0, 2] \times [0, 1]$?

Câu 4. Sử dụng Định lý Green để tính tích phân đường $I = \oint_{(C)} ye^x dx + (4 + 2e^x)dy$ với (C) là biên của hình chữ nhật có các đỉnh $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$ và $(0,4)$.

Câu 5. Tính tích phân đường: $I = \int_{(C)} xds$ với (C) là đường cong cho bởi $y = x^2 + 1$, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Câu 6. Tính tích phân mặt $I = \iint_{(S)} (2x - 2y + z)dS$ với (S) là mặt được cho bởi

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 2 \\ 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

MỘT SỐ CÂU TỰ LUẬN THAM KHẢO

Câu 1. Tìm cực trị địa phương và điểm yên ngựa (nếu có) của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13.$$

Câu 2. Tìm cực trị địa phương và điểm yên ngựa (nếu có) của hàm số

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y + 2025.$$

Câu 2. Tìm cực trị địa phương và điểm yên ngựa (nếu có) của hàm số

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z.$$