

单位代码	10475
学 号	104753101047
分 类 号	TP24

河南大學

硕士学位论文

倒立摆系统建模与控制方法研究

学 科、专 业：检测技术与自动化装置
研 究 方 向：自动化仪表与自动检测系统
申请学位类别：工学硕士
申 请 人：汤乐
指 导 教 师：张镭 副教授

二〇一三年五月

关于学位论文独创声明和学术诚信承诺

本人向河南大学提出硕士学位申请。本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立完成的，对所研究的课题有新的见解。据我所知，除文中特别加以说明、标注和致谢的地方外，论文中不包括其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包括其他人为获得任何教育、科研机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

在此本人郑重承诺：所呈交的学位论文不存在舞弊作伪行为，文责自负。

学位申请人（学位论文作者）签名： 汤乐

2013年5月15日

关于学位论文著作权使用授权书

本人经河南大学审核批准授予硕士学位。作为学位论文的作者，本人完全了解并同意河南大学有关保留、使用学位论文的要求，即河南大学有权向国家图书馆、科研信息机构、数据收集机构和本校图书馆等提供学位论文（纸质文本和电子文本）以供公众检索、查阅。本人授权河南大学出于宣扬、展览学校学术发展和进行学术交流等目的，可以采取影印、缩印、扫描和拷贝等复制手段保存、汇编学位论文（纸质文本和电子文本）。

（涉及保密内容的学位论文在解密后适用本授权书）

学位获得者（学位论文作者）签名： 汤乐

2013年5月15日

学位论文指导教师签名： 张镭

2013年5月15日

Research on modeling and control methods of inverted pendulum system

A Dissertation Submitted to
the Graduate School of Henan University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Engineering Science

By

Tang Le

Supervisor: Prof.Zhang Lei

May , 2013

摘要

倒立摆作为一个多变量、非线性、不稳定的典型系统，是控制领域重要的研究对象，是验证各种控制算法的理想模型；很多抽象的概念如系统的稳定性、可控性、可观性、鲁棒性和系统的抗干扰能力等，都可以通过对倒立摆的控制直观的表现出来。针对倒立摆控制方法的研究对两轮自平衡小车及其它相似实验设备的开发都具有重要的研究意义。

本文通过对直线一级和二级倒立摆物理模型的分析，介绍了拉格朗日建模方法并分别对其进行数学建模；然后提出了基于 MATLAB 软件的 SimMechanics 工具箱的建模方法，建立了直线一级和二级倒立摆的机构模型，经过对比分析，这种方法相比牛顿力学原理和拉格朗日方法更加方便、快捷、准确。

基于直线二级倒立摆的 SimMechanics 模型，本文在介绍了直线倒立摆的不同控制方法，提出了一种基于卡尔曼滤波的 LQR 控制算法，采用卡尔曼滤波器作为观测器来观测系统的实时状态，对系统输出作最优估计，从而达到抑制噪声的目的；经过实验对比，这种复合控制优于单独采用 LQR 时的控制效果，并能很大程度的降低系统噪声和测量噪声对倒立摆稳定性的影响。

在控制理论课程的教学中，可采用虚拟现实技术作为辅助手段来实现倒立摆的实时控制。利用 VRML 建立倒立摆系统的虚拟现实场景，并使动力学模型驱动虚拟现实场景；在与控制器进行集成后，利于 MATLAB/RTW 工具箱生成实时运行的仿真程序；生成系统运动的三维动画，将原来抽象、枯燥的学习内容，用图像、动画和声音等多种媒体表现形式展现在课堂上，提高了控制理论的教学质量，有利于促进教学的改革。

直线一级倒立摆系统与两轮自平衡小车十分相似，通过对直线倒立摆系统的研究，将其理论应用在两轮自平衡小车上，给出其硬件模块化设计方法和控制方案，并在实际实验中验证了此方案的可行性和有效性。

关键词：卡尔曼滤波；SimMechanics 建模；LQR；直线倒立摆；虚拟现实技术

ABSTRACT

Inverted pendulum is a typical system and an important research object in control areas as a multivariable, nonlinear and unstable system, and is also an ideal model to verify many kinds of control algorithm. A lot of abstract control theories can be demonstrated intuitively through the control process of inverted pendulum such as stability, controllability, robustness and anti-jamming of system, etc. Research of control methods for inverted pendulum is significant, especially for development of the two-wheeled self-balancing vehicle and other similar experiment equipment.

Fisrtly, based on analysis of the linear single and double inverted pendulum physical models, Lagrange mathematical modeling method is adopted to establish the inverted pendulums, and the pros and cons of this mathematical modeling methods are discussed; and then the another modeling method based on SimMechanics toolbox in MATLAB software is put forwards, and mechanism models of the linear single and double inverted pendulum successfully are established. Compared with the Newtonian mechanics principle and Lagrange method, the method is proved more convenient, accurate and faster..

Based on SimMechanics model of linear double inverted pendulum, after introduces the different control methodes, a LQR control algorithm based on kalman filtering, which adopts kalman filter as the state observer to observe the real-time status of system, and makes optimal estimation of the system outputs. Through experimental comparison, this compound control is better than LQR method, and can greatly reduce the impact of the system noise and measurement noise on the stability of the inverted pendulum.

In the control theory teaching process,the virtual reality technology can be used as auxiliary means to realized real-time control of inverted pendulum. The virtual reality scene of inverted pendulum system was established by VRML.And it adopts the dynamics model to drive the virtual reality scene. After integration with the controller, it generates real-time simulation program by MATLAB/RTW toolbox, 3D animation of system is generated , and the original abstract , boring learning content can be display with images , animation , sounds , and other media forms in class. In addition to , it improves the teaching quality of the control theory and promotes the reform of teaching.

The modeling and control methodes are very similar for the linear single inverted pendulum system

and two-wheeled self-balancing vehicle. we can apply the theory of linear inverted pendulum system on the two-wheeled self-balancing vehicle. A scheme of hardware modular design and control method is put forwards to verify the feasibility and validity in actual experiments.

KEY WORDS: linear inverted pendulum , kalman filtering , SimMechanics model , LQR , virtual reality technology

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 绪论.....	1
1.1 倒立摆系统发展历史与现状.....	1
1.2 倒立摆的控制原理.....	3
1.3 倒立摆的控制理论.....	4
1.4 课题研究的意义.....	4
1.5 本论文的主要研究工作.....	5
参考文献.....	7
第二章 倒立摆系统数学建模.....	9
2.1 一级倒立摆数学建模.....	9
2.2 二级倒立摆的数学建模.....	13
2.3 可观性分析.....	17
2.4 可控性分析.....	18
2.5 小结.....	18
参考文献.....	19
第三章 直线倒立摆 SimMechanics 模型的控制与研究.....	21
3.1 引言.....	21
3.2 基于 SimMechanics 的直线倒立摆系统建模.....	22
3.2.1 SimMechanics 模块组及机构建模过程.....	22
3.2.2 基于 SimMechanics 的直线一级倒立摆建模.....	23
3.2.3 基于 SimMechanics 的直线二级倒立摆建模.....	26
3.3 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制器设计.....	28
3.3.1 LQR 控制器的设计.....	28
3.3.2 卡尔曼状态观测器的设计.....	31
3.3.3 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制算法的实现.....	33
3.4 基于卡尔曼滤波的直线二级倒立摆 LQR 控制仿真.....	34
3.5 小结.....	37
参考文献.....	38
第四章 虚拟现实技术在倒立摆仿真中的应用.....	39
4.1 引言.....	39
4.2 基于 SimMechanics 的倒立摆仿真模型.....	39
4.2.1 倒立摆系统.....	39
4.2.2 基于 SimMechanics 的倒立摆模型.....	40

4.2.3 虚拟现实模型	41
4.3 控制器设计及实时仿真	42
4.4 教学效果	43
4.5 小结	43
参考文献	44
第五章 两轮自平衡小车硬件设计与控制	45
5.1 引言	45
5.2 系统设计总体思路	45
5.2.1 两轮自平衡小车的模块组成	46
5.2.2 系统工作原理	46
5.3 硬件设计	47
5.3.1 控制器模块	48
5.3.2 电源模块	49
5.3.3 电机驱动模块	49
5.3.4 姿态传感器模块	50
5.4 自平衡小车的硬件安装	53
5.5 自平衡小车的控制研究	53
5.6 小结	56
参考文献	57
第六章 结束语	59
攻读硕士期间主要科研成果	61
致 谢	63

第一章 绪论

自动控制技术的研究有利于将人类从复杂、危险、繁琐的劳动环境中解放出来并大大提高控制效率，它利用反馈原理来调节动态系统，以使得输出值接近期望值。古希腊人在公元前就懂得利用浮球的浮力来带动杠杆以达到调节水位的目的。而在 1769 年英国工程师詹姆斯瓦特发明的离心式调速器被认为是被应用于工业的第一个自动控制系统。自 20 世纪 60 年代开始，现代应用数学不断推出新的成果，电子计算机技术的应用也得到快速发展，为了适应火箭、航天技术的发展，自动控制理论进入了一个崭新的阶段——现代控制理论。他对研究具有高精度，高性能的变参数多变量的最优控制问题有独特的优势，以状态为基础来研究状态空间法。目前，自动控制理论正向以信息论，控制论，仿生学为基础的智能控制理论方向快速发展，新的控制方法也不断涌现。但是，在一些控制方法的研究过程中，科研人员往往因为没有合适的控制对象，而使得检验控制方法的工作停留在计算机仿真层面上，许多研究成果因此失去了继续完善和发展的机会，造成了科研资源的浪费。所以迫切需要一种具有稳定性、能控性、快速性和鲁棒性等特点的实验平台。倒立摆系统就是兼具上述各种特点的理想实验装置。它的结构简单，实验平台的搭建非常容易，价格相对比较低廉。各种物理参数调整方便。倒立摆系统自身具有的不稳定、高阶次、非线性、多变量以及强耦合等特性^[1-6]，是一个绝对的不稳定系统，为了使其稳定必须采用行之有效的控制方法。倒立摆系统是研究非线性控制，变结构控制，智能控制，目标定位控制等控制方法理想平台。因此，倒立摆系统的研究工作具有极其深远的实践意义。

1.1 倒立摆系统发展历史与现状

倒立摆系统最初研究开始于二十世纪 50 年代，麻省理工学院（MIT）的控制论专家们根据火箭发射的原理设计出了一级倒立摆实验装置；20 世纪 60 年代，人们逐渐开展对倒立摆系统的研究；1966 年，Schacfer 和 Cannon 应用 Bang-Bang 控制理论，将一个曲轴稳定在一个倒致位置；20 世纪 60 年代后期，倒立摆作为一个典型不稳定、非线性的例证被提出，但当时主要集中在直线倒立摆系统的线性控制上面。

1976 年 Mori 等人发表的研究论文，利用状态空间的方法设计了比例微分控制器，

首先把倒立摆系统在平衡点附近线性化,并取得很好的控制效果;同年,Mori 最早实现了一级倒立摆的自动摆起控制;1978 年,Furuta 等人采用基于线性化的方法,成功的实现了二级线性倒立摆的稳定控制;1980 年,他们又在倾斜轨道上成功实现了二级倒立摆的稳定控制;1984 年,Furuta 等人首次实现双电机三级倒立摆实物控制;1984 年,Wattes 又做了 LQR(Linear Quadratic Regulator)方法控制倒立摆的研究。

八十年代后期开始,倒立摆系统的非线性这一特性也得到大量的研究,并且基于非线性分析提出了一系列相应的控制策略。之后,许多人提出了许多综合算法来改进控制性能.Dimeo 将 LQR 控制方法与高频振荡相结合提出了一种新的控制算法对倒立摆进行稳定控制^[7-9],取得了较好效果;Nelson 利用 LQR 方法并结合神经网络的方法来提高倒立摆的控制精度;Omatu 在 LQR 的基础上,采用神经网络控制器对反馈控制进行补偿,以提高倒立摆的稳定性;Deris 在 PID 控制器中结合了神经网络和遗传算法来进行参数 PID 调整;1992 年,Fuurta 等人将变结构控制方法应用于倒立摆系统;1995 年,Fradkov 等人提出了无源性控制策略;另外 Wiklund 等人利用李亚普诺夫方法成功的控制了一级环形倒立摆的道理;Yamakita 等人给出了二级环形倒立摆系统的实验结果。

随着对智能控制研究逐渐深入,模糊控制、神经网络、拟人智能控制、遗传算法等越来越多的智能控制^[10]方法应用于倒立摆系统的控制上:1993 年,Buoslmaa 利用神经网络对模糊控制器输出输入数据的学习,设计出了一种新型的控制器;1995 年,LitM 将两个模糊滑模并行来分别实现对小车和摆杆偏角的控制;Deris 将神经网络可以自学习能力应用于对整定 PID 控制器参数;Fer 等人采用逆系统方案实现了三级直线倒立摆系统的稳定控制;1997 年,T.H.Hung 等设计了 PI 模糊控制器,并将其应用于对一级倒立摆控制,它具有系统结构相对简单,对硬件依赖较小等特点。

我国在倒立摆控制的研究方面也取得了一定的成果:1994 年,北京航空航天大学张明廉教授提出了“拟人智能控制理论”,并成功的应用于用单电机对三级倒立摆的控制;2010 年 6 月 18 日,大连理工大学电子信息与电气工程学部控制科学与工程学院李洪兴教授领导的科研团队在世界上首次实现空间四级倒立摆实物系统控制,这是一项原创性的具有世界领先水平的标志性科研成果^[11]。

近年来在结合模糊控制与神经网络等方面也取得了很多成果。总之,倒立摆系统是一种能够有效检验控制理论和控制算法的实验设备。目前应用于倒立摆系统的算法主要有以下几类:经典控制(LMI, PDI)、现代控制(LQR 最优控制法,极点配置法)、变结构

控制、模糊逻辑控制、神经网络控制、拟人控制等。

发展到今天，倒立摆系统已经由原来的一级直线倒立摆衍生出了异常丰富的类别。按照倒立摆摆杆的数目可以分为一级倒立摆、二级倒立摆、三级倒立摆、四级倒立摆^[12]等，且控制难度也随着摆杆的级数增加而变大；按照倒立摆系统结构的不同，可以分为：直线倒立摆系统、旋转倒立摆系统、平面倒立摆系统、复合倒立摆系统等^[13]；按照倒立摆摆杆的不同还可以分为刚性倒立摆和柔性倒立摆。在检验不同的控制方法对各种复杂的、不稳定的、非线性系统的控制效果中得到广泛的应用，并且越来越受到世界各国科研工作者的重视。

1.2 倒立摆的控制原理

以一级直线倒立摆控制系统为例，其硬件部分包括计算机、运动控制卡、电控箱、伺服系统、倒立摆本体和旋转光电编码器、位移传感器等几大部分，它们构成一个闭环系统^[14-15]。伺服电机通过同步皮带与小车相连接，并带动小车同步运动，以此来控制小车在水平轨道上做直线运动。匀质刚体摆杆与小车相连，由小车的水平移动来控制摆杆的稳定竖直倒立。旋转光电编码器是一种角位移传感器，其输出的检测信号是数字信号，因此可以直接进入计算机进行处理，而不需放大和转换等过程，使用非常方便。可以用它准确的测出倒立摆摆杆的偏转角度。将旋转光电编码器、位移传感器、以及状态反馈信息输入运动控制器，而运动控制卡中采集的这些信号经一定的控制算法会得出控制信息并将被输入伺服电机。通过这样一个闭环系统就能达到倒立摆的稳定控制。其中计算机从运动控制卡实时读取数据，计算并确定控制决策，即根据倒立摆的实时状态不断地调用相应的函数程序如速度、加速度等，经过电控箱内的转换电路产生相应的控制量，由此驱动伺服电机转动的。其原理图如下：

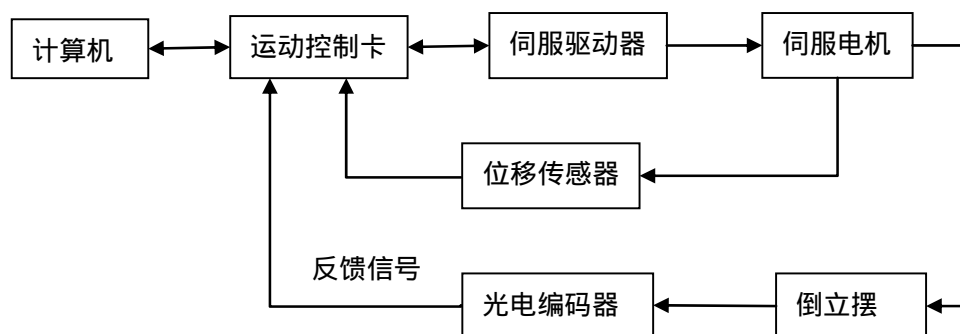


图 1-1 直线一级倒立摆系统工作原理图

其他种类的倒立摆系统大多都是基于此工作原理的。不同之处如：平面倒立摆系统的匀质摆杆运动轨迹不是一条直线，而是在二维平面内作自由运动，摆杆可沿垂直平面内的任一轴转动，其底部在二维平面内的运动轨迹不固定；旋转倒立摆的摆杆底部的运动轨迹在一个固定的圆周上；柔性倒立摆是在小车上加了一个弹性阻尼装置，这也就增大了控制难度^[16-19]。

1.3 倒立摆的控制理论

倒立摆控制理论的发展跟随着自动控制理论的发展。基本上可以分为两个阶段，即经典控制理论和现代控制理论。以 PID 控制和状态反馈控制为代表的经典控制理论是以频率响应法和根轨迹法为基础建立的。它的研究对象是单输入、单输出的自动控制系统，特别是线性定常系统。经典控制理论的特点是以拉普拉斯变换和反变换为数学基础，采用根轨迹法和频率响应法等图解的方法，分析系统性能和设计控制装置。频域分析方法占主导地位。经典控制理论主要研究系统运动的稳定性、时域和频域中系统的运动特性、控制系统的设计原理和校正方法^[20]。

随着科技的发展，经典控制难以实现对航天、火箭、卫星等复杂工程控制，现代控制理论逐步发展起来。它是建立在状态空间法基础上的一种控制理论。其代表控制方法有最优控制、自适应控制、模糊控制、鲁棒控制等。和单输入单输出的控制方法不同，将经典控制理论中的高阶常微分方程转化为一阶微分方程组，用以描述系统的动态过程，它可以有多个控制变量，可以处理的控制问题比经典控制理论要广泛得多，包括线性系统和非线性系统，定常系统和时变系统，单变量系统和多变量系统。它所采用的方法和算法也更适合于在数字计算机上进行。现代控制理论所包含的内容也十分广泛，主要的方面有：线性系统理论、非线性系统理论、最优控制理论、随机控制理论^[21]和适应控制理论。

1.4 课题研究的意义

倒立摆的控制模型与直立行走机器人的平衡控制、两轮小车的自平衡控制、导弹拦截控制、火箭发射时的垂直控制、卫星飞行中的姿态控制和航空对接控制等涉及平衡和角度的控制问题非常相似，所以在机器人、航天、军工等领域和一般的工业过程中都有着广泛的应用。倒立摆系统作为研究控制理论的一种典型的实验装置，具有较为简单的结构、可以有效地检验众多控制方法的有效性、参数和模型易于改变、相对低廉的成本

等优点，研究控制理论的很多科研人员一直将它们视为主要的研究对象，用它们来描述线性控制领域中不稳定系统的稳定性以及在非线性控制领域中的无源性控制、变结构控制、非线性观测器、自由行走、非线性模型降阶、摩擦补偿等控制思想^[21]，且从中不断开发出新的控制方法和控制理论，所以倒立摆系统是研究智能控制方法较为理想的实验装置。倒立摆系统自身是一个典型的多变量、非线性、高阶次、强耦合和绝对不稳定系统，许多抽象的控制概念如系统的可控性、稳定性、系统的抗干扰能力和系统的收敛速度等，都可以由倒立摆系统直观地展示出来。此外，通过倒立摆系统还可以研究非线性观测器、变结构控制、目标定位控制、摩擦补偿和混合系统^[22]等。

不仅如此，倒立摆系统也是进行控制理论教学的理想平台。传统的教学中，实验只是作为理论教学延伸，往往是理论知识的比重大于实验，即使有实验课程也只是学生完全按照实验指导书上的指导去完成实验，整个实验过程中学生们完全是消极的被动的接收知识，甚至学生对实验方法、内容完全没有兴趣。很显然，这种实验教学方法难以培养学生综合素质和实践能力。所以必须在实验环节的内容和形式上进行改革与创新，以培养学生的创新意识和实践动手能力。因此，进行设计性、开放性的综合实验具有极其重要的现实意义。

若在控制理论的教学中，如果构建一个高效的合理的倒立摆系统实验平台，就可以在深入理解控制理论知识的同时，还可以让学生们对硬件回路仿真技术的开发流程有一定的了解，并掌握基于 MATLAB 的实时仿真操作^[23]，这样就可以从理论和实践上提高学生对控制理论的兴趣和认识。将倒立摆系统研究应用于高校的控制理论教学和实验早已在欧美等教育发达地区流行多年。因此，倒立摆控制策略的研究在我国高校的控制理论教学和实验中具有广阔的前景。

1.5 本论文的主要研究工作

本文主要通过对倒立摆系统模型的分析并进行数学建模，研究了各种不同的控制方法，提出了一种基于卡尔曼滤波的控制算法，在计算机中利用 MATLAB 软件进行仿真，取得了良好的控制效果，并探讨了虚拟现实技术在教学过程中的应用。本文的主要工作和成果有以下几方面：

1. 第一章综述了倒立摆系统的发展历史与研究现状、工作原理及其控制方法，并阐述了倒立摆在实际应用中的重大意义。

2.第二章重点介绍了直线倒立摆的数学建模方法，分析了牛顿力学法与拉格朗日法数学建模的优劣。分别以直线一级和二级倒立摆系统为例，利用拉格朗日方法求得其状态空间模型。最后阐述了分析系统可控性和可观性的方法。

3.第三章提出了一种在实际实验中更加便捷的建模方法——基于 SimMechanics 工具箱建模。以直线二级倒立摆系统为例，设计出 LQR-卡尔曼滤波控制器，并进行仿真和实时控制实验，取得了比较理想的控制效果。

4.第四章探讨了虚拟现实技术在控制理论教学中的应用。采用 SimMechanics 建立倒立摆的非线性动力学模型，并使用此模型驱动 VRML 构建的虚拟倒立摆场景。利用虚拟现实技术作为辅助手段的控制理论教学方式，方便控制器的设计并进行实时仿真，不仅形式新颖，而且能生动形象。对促进课程教学及帮助学生演练实验过程都具有显著的优越性。

5.第五章在对倒立摆系统研究的基础上，设计了两轮自平衡小车。介绍了其硬件设计，主要包括控制器模块、电源模块、电机驱动模块、姿态传感器模块等部分的设计及硬件安装；采用卡尔曼滤波算法进行信息融合，成功实现了两轮自平衡小车的站立实验。

6.第六章是对本论文的工作进行总结并展望下一步的工作。

参考文献

- [1] 张飞舟.拟人智能控制三级倒立摆机理的研究[J].北京航空航天大学学报, 1999, 25(2):151-155.
- [2] 仇润鹤,方建安,唐明浩,等.建立培养创新能力的综合实验平台[J].实验室研究与探索, 2005, 24(增刊):252-254.
- [3] 李春文,冯元现.多变量非线性控制的逆系统方法[M].北京:清华大学出版社, 1991.18-87.
- [4] 郭钊,侠方,建安苗.倒立摆系统及其智能控制研究[J].东华大学学报, 2003, 29(2):122-126.
- [5] 田明,戴汝为.基于动态 BP 神经网络得系统辨识方法[J].自动化学报, 1993, 19(4):450-453.
- [6] 张丽娟,涂亚庆.小车一二级倒立摆系统的仿人智能控制策略和算法[J].自动化与仪器仪表, 2006, 5:1-5.
- [7] 张乃尧, ElbertC, BelsehheR, StrahH.倒立摆的双闭环模糊控制[J].控制与决策, 1996, 11(1):85-88.
- [8] 张明廉,郝健康,孙昌龄.拟人控制与三级倒立摆[J].航空学报, 1995, 16(6):654-661.
- [9] 张志涌.精通 Matlab6.5 版[M].北京:北京航空航大大学出版社, 2003.9-101.
- [10] Erdem E B, Alleyne A G. Design of a class of nonlinear controllers via State dependent Riccati equations[J].IEEE Trans. On Control Systems Technology, 2004, 12(1):133-137.
- [11] 侯样林,顾立忠,徐心和.圆轨单级倒立摆的摆起过程控制[J].控制与决策, 2003, 18(4):483-486.
- [12] 黄莞虹,慧冰.从倒立摆装的控制策略看控制理论的发展和应[J].广东工业大学学报, 2001.
- [13] 李磊,陈细军,候增广等.种室内轮式自主移动机器人的导航控制研究[J].自动化学报, 2003, 29(6): 893-899.
- [14] Lane S H, Stengel R F. Flight Control Design Using non linear Inverse Dynamics[J]. Automatica, 1988, 24(4):471-483.
- [15] 阮晓钢,刘江,狄海江等.两轮自平衡机器人系统设计、建模及 LQ 控制[J]. 现代电子技术, 2008, 281(18): 57-60.
- [16] 杨亚炜,张明廉三级倒立摆的数控稳定[J].北京航空航大入学学报, 2000, 26(3):311-314.
- [17] 王加银.基于变论域自适应模糊控制的倒立摆仿真与实物实现仁[D].北京:北京师范大学数学学院, 2002.
- [18] Zhang D J, Cshuang. The study of swing up and balan Ceeontrol of rotary parallel inverted pendulum[C]. Proceedings of Congresson Intelligent Control and Automation, Shanghai, China, 2002, 2370-2374.
- [19] 李祖枢,王育新,谭智.小车二级摆系统的摆起倒立控制与实践[C].第五届全球智能控制与自动化大会论文集, 杭州, 2004:2360-2364.

- [20] 曹海云, 李守巨, 刘迎曦.基于神经网络的岩土力学参数反演方法研究综述[J].测试技术学报, 2006, 20(增):9-12.
- [21] 张丹红, 王勤.单级倒立摆系统的神经网络逆模控制[J].武汉理工大学学报(信息与管理工程版), 2006, 28(5):28-31.
- [22] 刘小河.非线性系统分析与控制引论[M].北京:清华大学出版社, 2008.
- [23] 王轶卿, 赵英凯.切换控制在倒立摆系统摆起和镇定中的应用[J].控制理论与应用, 2004, 23(10):23-26.

第二章 倒立摆系统数学建模

倒立摆系统的数学建模一般有牛顿欧拉法和拉格朗日法两种。对于结构相对简单的一级直线倒立摆可以使用牛顿欧拉法，先对小车和摆杆进行受力分析，并分别求出他们的运动方程。将线性化后的两个运动方程进行拉普拉斯变换。最后整理后可以得到系统的状态空间方程^[1-9]。但在对二级、三级以上的倒立摆进行数学建模时，这种方法就显得有些复杂。牛顿运动定律来求解质点组的运动问题时，计算量会比较大。在许多实际的运算中，求解微分方程组会遇到较大的困难。有时，还需要确定各质点间的位移、相互作用力、速度、加速度等关系来解决质点组中存在约束情况，联立求解这些方程组就更为困难^[10-13]。为了简化倒立摆系统的数学建模过程，本章采用了分析力学中的拉格朗日方程推导直线倒立摆的数学模型，并对该系统的可控性进行了分析。

2.1 一级倒立摆数学建模

在各种摩擦和空气阻力等一些次要的因素忽略不计的条件下，直线一级倒立摆系统可简化为如图 2-1：

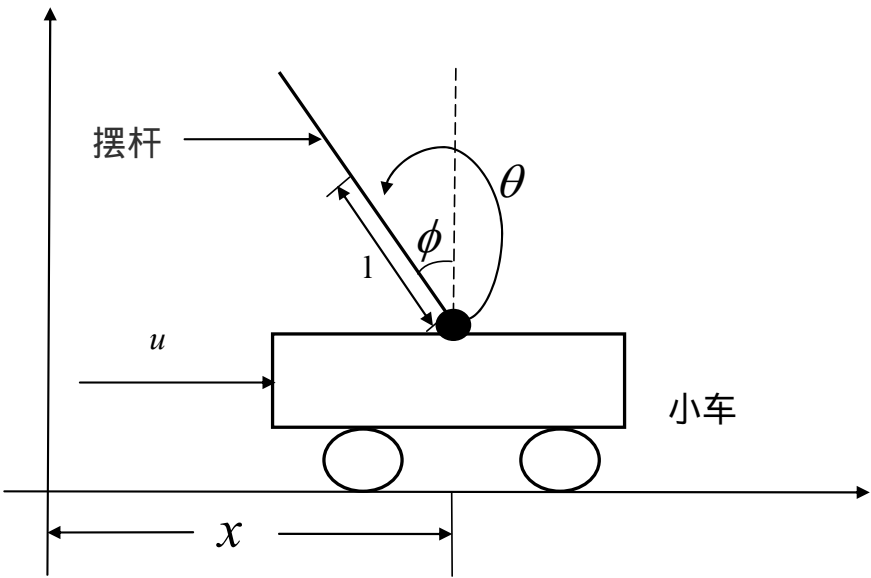


图 2-1 倒立摆系统模型

其参数意义如表 2-1 所示。

表 2-1 倒立摆物理参数及其意义

物理参数	意义
M	小车的质量
m	摆杆的质量
b	小车的摩擦系数
l	摆杆质心到转动轴心的长度
I	摆杆的惯量
F	施加在小车上的力
u	小车的加速度
x	小车的位置
ϕ	摆杆与其垂直向上方向的夹角
θ	摆杆与其垂直向下方向的夹角（考虑到摆杆初始位置为竖直向下）

其矢量方向定义如图 2-2 所示:

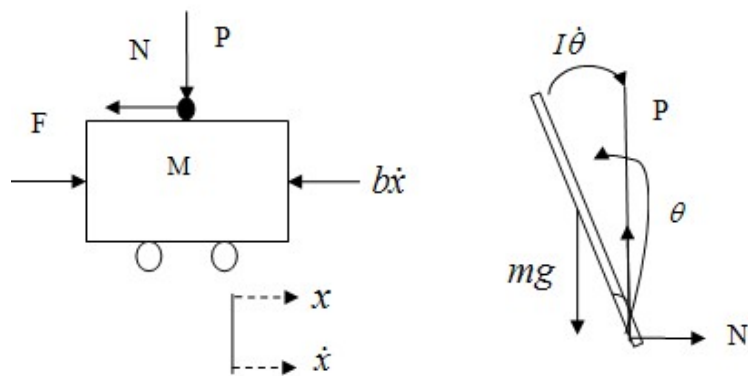


图 2-2 小车及摆杆受力分析

拉格朗日方程：

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q, \dot{q}) \quad (2-1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_i \quad (2-2)$$

拉格朗日方程各参数意义如表 2-2 所示。

表 2-2 拉格朗日方程各参数意义

参数	意义
V	系统的势能
L	拉格朗日算子
q	倒立摆在广义坐标系下的坐标
f_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5 \dots n$)	系统在第 i 个广义坐标上所受的外力

首先计算系统的动能：

$$T = T_M - T_m \quad (2-3)$$

其中 T_M, T_m 分别为小车的动能、摆杆的动能。

小车的动能：

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2-4)$$

下面计算摆杆的动能：

$$T_m = T_m' + T_m'' \quad (2-5)$$

其中 T_m', T_m'' 分别为摆杆的平动动能和转动动能。

设以下变量：

xpend —— 摆杆质心横坐标；

ypend —— 摆杆质心纵坐标

则有：

$$\begin{aligned} xpend &= x - l \sin \phi \\ ypend &= l \cos \phi \end{aligned} \quad (2-6)$$

摆杆的动能为：

$$T_m' = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{d(xpend)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend)}{dt} \right)^2 \right] \quad (2-7)$$

$$T_m'' = \frac{1}{2} J_p \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{6} m l^6 \dot{\phi}^2 \quad (2-8)$$

于是有系统的总动能：

$$T_m = T_m' + T_m'' = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{d(xpend)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend)}{dt} \right)^2 \right] + \frac{1}{6}ml^6 \dot{\phi}^2 \quad (2-9)$$

系统的势能为：

$$V = V_m = m \times g \times ypend = mgl \cos \phi \quad (2-10)$$

由于系统在 ϕ 广义坐标下只有摩擦力作用，所以有：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = b \dot{x} \quad (2-11)$$

对于直线一级倒立摆系统，系统状态变量为： $\{x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}\}$ ；系统输入变量为 $u = \ddot{x}$ 。

为求解状态方程：

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases} \quad (2-12)$$

需要求解 $\ddot{\phi}$ ，因此设： $\ddot{\phi} = f(x, \phi, \dot{x}, \dot{\phi}, \ddot{x})$

将在平衡位置附近进行泰勒级数展开，并线性化，可以得到：

$$\ddot{\phi} = k_{11}x + k_{12}\phi + k_{13}\dot{x} + k_{14}\dot{\phi} + k_{15}\ddot{x} \quad (2-13)$$

其中

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0} & k_{12} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \phi} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0} \\ k_{13} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0} & k_{14} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0} \\ k_{15} &= \left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \right|_{x=0, \phi=0, \dot{x}=0, \dot{\phi}=0, \ddot{x}=0} \end{aligned}$$

在计算机中利用科学计算软件 Mathematica 进行方程式求解，很容易得到：

$$\begin{cases} k_{11} = 0 \\ k_{12} = \frac{3g}{4l} \\ k_{13} = 0 \\ k_{14} = 0 \\ k_{15} = \frac{3}{4l} \end{cases}$$

设 $X = \{x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}\}$, 系统状态空间方程为 :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases} \quad (2-14)$$

则有 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-15)$$

若将倒立摆的物理参数代入,便可得到倒立摆系统的实际模型。其计算结果和用牛顿力学方法相同,但求解过程中计算量将大大降低。特别是针对多级倒立摆,拉格朗日方法的优势将更加明显^[14]。

2.2 二级倒立摆的数学建模

直线两级倒立摆由直线运动模块和两级倒立摆组件组成,它的系统模型如图 2-3 :

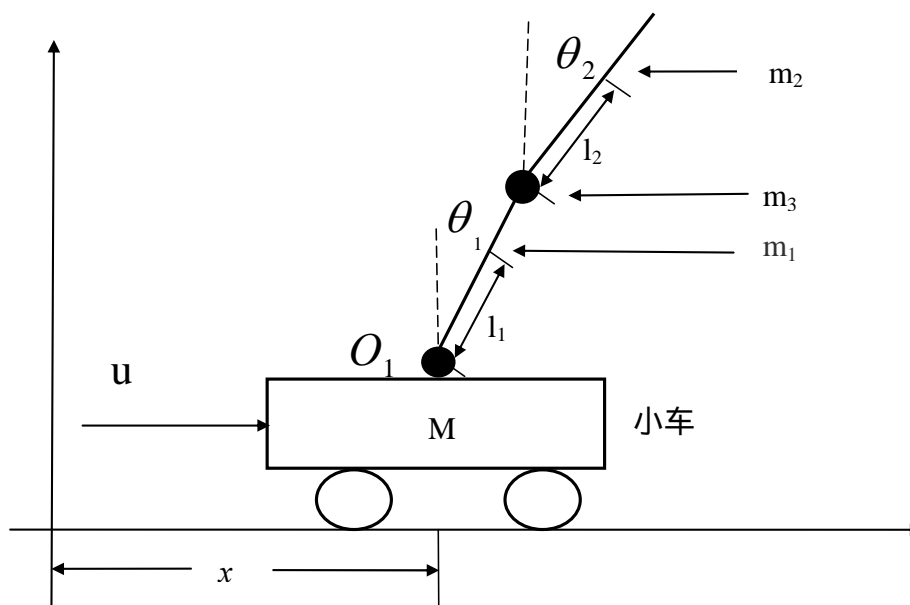


图 2-3 直线二级倒立摆示意图

倒立摆参数定义表 2-3 所示。

表 2-3 直线二级倒立摆模型参数及意义

参数	意义
M	小车质量
m_1	摆杆 1 的质量
m_2	摆杆 2 的质量
m_3	质量块的质量
l_1	摆杆 1 中心到转动中心的距离
l_2	摆杆 2 中心到转动中心的距离
θ_1	摆杆 1 与竖直方向上的夹角
θ_2	摆杆 2 与竖直方向上的夹角
u	小车的加速度

可利用拉格朗日方程 (2-1) \ (2-2) 推导出运动学方程。

在二级倒立摆系统中， f_i 是系统在第 i 个广义坐标系上所受到的外力，其中 $i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ ，系统存在三个广义坐标系，分别为 x, ϕ_1, ϕ_2 。

先计算系统的动能：

$$T = T_M + T_{m1} + T_{m2} + T_{m3} \quad (2-16)$$

其中 $T_M, T_{m1}, T_{m2}, T_{m3}$ 分别代表小车动能、摆杆 1 动能、摆杆 2 动能以及质量块动能。

小车的动能：

$$T_M = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \quad (2-17)$$

$$T_{m1} = T_{m1}' + T_{m1}'' \quad (2-18)$$

$$T_{m2} = T_{m2}' + T_{m2}'' \quad (2-19)$$

其中 T_{m1}', T_{m1}'' 分别表示摆杆 1 的平动动能与转动动能； T_{m2}', T_{m2}'' 分别表示摆杆 2 的平动动能与转动动能。

对于系统，设变量如表 2-4 所示。

表 2-4 变量及其物理意义

变量	物理意义
xpend1	摆杆 1 质心横坐标
ypend1	摆杆 1 质心纵坐标
xpend2	摆杆 2 质心横坐标
ypend2	摆杆 2 质心纵坐标
xmass	质量块质心横坐标
ymass	质量块质心纵坐标

又有：

$$\begin{cases} xpend1 = x - l_1 \sin \theta_1 \\ ypend1 = l_1 \cos \theta_1 \\ xpend2 = x - 2l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 \\ ypend2 = 2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \\ xmass = x - 2l_1 \sin \theta_1 \\ ymass = 2l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (2-20)$$

则有：

$$T_{m1}' = \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{d(xpend1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend1)}{dt} \right)^2 \right) \quad (2-21)$$

$$T_{m1}'' = \frac{1}{2} J_{p1} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \quad (2-22)$$

同理：

$$T_{m2}' = \frac{1}{2} m_2 \left(\left(\frac{d(xpend2)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend2)}{dt} \right)^2 \right) \quad (2-23)$$

$$T_{m2}'' = \frac{1}{2} J_{p2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \quad (2-24)$$

$$T_{m3} = \frac{1}{2} m_3 \left(\left(\frac{d(xmass)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ymass)}{dt} \right)^2 \right) \quad (2-25)$$

所以系统总动能为：

$$\begin{aligned}
T &= T_M + T_{m1} + T_{m2} + T_{m3} \\
&= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\left(\frac{d(xpend1)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend1)}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_2 \left(\left(\frac{d(xpend2)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ypend2)}{dt} \right)^2 \right) + \frac{1}{6} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} m_3 \left(\left(\frac{d(xmass)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d(ymass)}{dt} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{2-26}$$

系统势能为：

$$\begin{aligned}
V &= V + V + V = m_1 ypend1 + m_2 ypend2 + m_3 ymass \\
&= m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2 (2l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) + 2m_3 l_1 \cos \theta_1
\end{aligned} \tag{2-27}$$

系统在 θ_1, θ_2 广义坐标系下不受外力，因此：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \tag{2-28}$$

设直线二级倒立摆的状态变量： $\left\{ x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \right\}$

求解状态方程组：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = f_1(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \\ \ddot{\theta}_2 = f_2(x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ddot{x}) \end{cases} \tag{2-29}$$

在平衡位置展开其泰勒级数并线性化，可得：

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = k_{11}x + k_{12}\theta_1 + k_{13}\theta_2 + k_{14}\dot{x} + k_{15}\dot{\theta}_1 + k_{16}\dot{\theta}_2 + k_{17}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}_2 = k_{21}x + k_{22}\theta_1 + k_{23}\theta_2 + k_{24}\dot{x} + k_{25}\dot{\theta}_1 + k_{26}\dot{\theta}_2 + k_{27}\ddot{x} \end{cases} \tag{2-30}$$

其中：

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial \theta_1} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} \\
k_{13} &= \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{14} &= \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{15} &= \frac{\partial f_1}{\partial \dot{\theta}} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{16} &= \frac{\partial f_1}{\partial \ddot{\theta}_2} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} \\
k_{17} &= \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}_1} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} \\
k_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial \dot{\theta}_1} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{\theta}_2} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} \\
k_{24} &= \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{25} &= \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{\theta}_1} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} \\
k_{26} &= \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{\theta}_2} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0} & k_{27} &= \frac{\partial f_2}{\partial \ddot{x}} \bigg|_{x=0, \theta_1=0, \theta_2=0, \dot{x}=0, \dot{\theta}_1=0, \dot{\theta}_2=0, \ddot{x}=0}
\end{aligned}$$

利用科学计算软件 Mathematics 求解上述方程组得 k_{11} 、 k_{12} 、 k_{13} 、 k_{14} k_{27}

所以系统的状态方程组为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{x} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ k_{17} \\ k_{27} \end{bmatrix} \\
y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x} \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-31)
\end{aligned}$$

2.3 可观性分析

可观性判据：对于 n 阶线性定常系统：

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases} \quad (2-32)$$

状态完全可观，当且仅当系统的可观矩阵： $V = [C \quad CA \quad \cdots \quad CA^{n-1}]^T$ 满秩，即 $\text{rank}(V) = n$ 。当输出量 $y(t)$ 为标量时，能观性矩阵 V 为方阵。 $\text{rank}(V) = n$ 等价于 V 的行

列式值 $\det(V) \neq 0$ 。

2.4 可控性分析

对于连续时间系统：

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX + Du \end{cases} \quad (2-33)$$

系统状态完全可控的条件是：当且仅当向量组 $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ 是线性无关的，或矩阵 $[B : AB : \dots : A^{n-1}B]$ 的秩为 n 。

系统的输出可控性的条件为：当且仅当矩阵 $[CB : CAB : CA^2B : \dots : CA^{n-1}B : D]$ 的秩等于输出量 y 的维数。

在 MATLAB 中计算被控对象状态空间模型是否可控和可观，可直接利用计算可控性矩阵的 `ctrb` 命令和计算可观性的矩阵命令 `obsv` 来计算^[15-18]。

2.5 小结

倒立摆是一个复杂的、不稳定的非线性系统，直接进行稳定控制的难度比较大，若建立其数学模型并进行线性化处理，利用现有的数学知识和控制理论来实现倒立摆的稳定控制就会简单许多^[19-22]。本章以拉格朗日方法为例分别直线一级和直线二级倒立摆系统进行数学建模，求得了倒立摆系统的状态方程。为了进一步了解系统的稳定特性，并基于状态方程进行了系统可观性和可控性分析。

参考文献

- [1] 胡寿松.自动控制原理[M].北京:科学出版社,2001.
- [2] 郑大钟[编].线性系统理论[M].清华大学出版社,2002.
- [3] (美) Kat suhio Ogata 著.现代控制工程[M].卢伯英等译,北京:电子工业出版社,2002.
- [4] 张东军,丛爽.倒立摆控制系统研究综述[J].控制工程,2003,7(10):9-12.
- [5] 丛爽,张冬军,魏衡华.单级倒立摆三种控制方法的对比研究[J].系统工程与电子技术,2001,23(11):47-49.
- [6] 李洪兴,王加银.n级倒立摆的建模[J].模糊系统与数学,2002,32:251-257.
- [7] 陈振峰,张鹏,蔡毓峰等.基于模糊控制的倒立摆控制[J].现代电子技术,2004,22(6):11-15.
- [8] Cloudier J R, Stanberry D T. The Capabilities and are of state-dependent RICeati equation- based design[C].American Control Conference, Proceedings of the 2002(1):86-91.
- [9] 罗忠,史志勇等,直线倒立摆系统控制特性的影响因素分析与实验[A].东北大学学报,2011.
- [10] 孙慧玲.基于人工神经网络的结构损伤识别和预测方法:(硕士学位论文).大连:大连理工大学,2004.
- [11] 干开峰,王俊,王庆龙.基于倒立摆系统的实验设计[J].合肥学院学报(自然科学版).2010,2:85-89.
- [12] 吴文进,葛锁良.基于 LQR 最优调节器的二级倒立摆控制系统[J].安庆师范学院学报:自然科学版,2007,13(2):32-35.
- [13] 史晓霞,张振东,李俊芳.二级倒立摆系统数学模型的建立及意义[J].河北工业大学学报,2001,30(5):49-51.
- [14] 朱江滨,易建强.二级倒立摆的摆起控制[J].系统仿真学报,2003,15(7):1043 — 1059.
- [15] 李祖枢.力矩受限单摆的摆起倒立控制—仿人智能控制在非线性系统中的应[J].控制理论与应用,1999,16(2):225-229.
- [16] 李守巨,刘迎曦,曹海云.基于改进 PID 神经网络的非线性动态系统识别方法.东北大学学报(自然科学版),2007,28(增 1):136 — 139.
- [17] 桑英军,范媛媛等.单级倒立摆的控制方法研究[J].控制工程.2010,6(17):743-746.
- [18] 孙培禄,曲尔光,孔素娟.一阶倒立摆控制的仿真研究[J].山西大同大学学报(自然科学版),2009,25(04):26-30.
- [19] 张葛祥,李众立,毕效辉.三级倒立摆系统非线性模型的建立[J].西南工学院学报:2002,16(4):6-11.
- [20] 杨慧中,张素贞.BFGS 修正算法在前馈神经网络学习中的应用[J].华东理工那个大学学报,2001,27(5):459 — 462.

- [21] 李国辉.基于 Simulink 的单级倒立摆仿真对比[J].大连交通大学学报.2008 , 29(01):68-72.
- [22] 干开峰 ,王俊 ,王庆龙.基于倒立摆系统的实验设计[J].合肥学院学报(自然科学版).2010,2:85-89.

第三章 直线倒立摆 SimMechanics 模型的控制与研究

本文通过对直线一级和二级倒立摆的物理模型分析，利用 MATLAB 软件下 SimMechanics 动态仿真工具，分别建立了直线一级和二级倒立摆的非线性模型。并结合基于卡尔曼滤波的 LQR 最优控制方法，有效的抑制了系统噪声和测量噪声，实现了对直线二级倒立摆的稳定控制。

3.1 引言

倒立摆系统涉及到控制理论、机器人技术、计算机控制等领域，并结合了多种技术，其系统本身又是一个高阶次、不稳定、强耦合、多变量的非线性系统，是控制学科研究的典型实验平台。

对于倒立摆系统，由于其本身是自不稳定的系统，实验建模存在一定的困难。通常是通过数学模型^[1]中的非线性项进行近似或忽略，倒立摆系统就可看作一个典型的运动的刚体系统，可以在惯性坐标系内应用经典力学理论建立系统的线性化动力学方程。但是这种方法会在复杂的数学运算上浪费大量的时间。本章采用 Mtlab 软件中 SimMechanics 工具箱对直线二级倒立摆系统进行非线性建模。SimMechanics 工具提供了大量对应实际系统的元件，如：刚体、约束、铰链、坐标系统、作动器以及传感器等。使用这些模块可以非常方便的建立复杂的机械系统图示化模型，可以进行机械系统的单独分析与任何利用 SimMechanics 设计的控制器及其它的动态系统相连进行综合仿真。SimMechanics 使用者可以很方便的修改系统中的物理参数，其中包括位移、角度、弹性系数、扭矩和机械元件运动参数等。在 SimMechanics 中可以用 Virtual Reality 工具箱或者是 MATLAB 图形工具生成系统运动的三维动画。这两种工具都可以用来显示机械系统的数值分析结果，但是 MATLAB 图形工具只能提供基本的动画显示，而 Virtual Reality 工具箱则能实现更加高级、真实的动画。使用 SimMechanics 变步长积分法可以得到较高的计算精度。这种利用 SimMechanics 建立起的非线性模型更加贴近实际系统。

卡尔曼滤波器是一种由鲁道夫.E.卡尔曼（Rudolph E.Kalman）提出的一种递归滤波器；它可以被用在时变线性系统中。用来描述这个系统的微分方程包含正交的状态变量，这种滤波器是将过去的测量估计误差合并到新的测量误差中来估计将来的误差。卡尔曼

滤波利用目标现有的动态信息，设法除去噪声的影响，得到一个关于目标状态的较好的估计。这个估计可以是对当前目标状态的估计，也可以是对将来状态的预测，也可以是对过去状态的估计。美国阿波罗宇宙飞船的导航电脑系统便采用了这一种滤波器。对于倒立摆系统噪声以及状态反馈过程中观测噪声对该系统稳定性的影响，可采用卡尔曼滤波器作为观测器^[2]对系统输出作最优估计，从而达到抑制噪声的效果，并结合 LQR 控制理论^[3,4]实现对系统的稳定控制。

3.2 基于 SimMechanics 的直线倒立摆系统建模

SimMechanics 是 MATLAB 软件下的一个机构仿真工具，它可以准确、方便、高效的得出系统受力、共振、阻尼等各种设计参数和图表，也可以对各种运动系统中的刚体进行建模与仿真，实现对机构系统进行动态性能分析与设计。在为设计和制造安全、经济的机械产品提供有效的数据支持和仿真平台中发挥巨大的作用。与利用牛顿 - 欧拉或拉格朗日方法相比，直接采用 SimMechanics 工具箱具有建模方便、仿真结果直观的特性，并且这种用图形结构建模的方式可以避免繁琐的运动学分析和动力学矩阵与方程，不需要建立数学模型和编程，即可实现实时分析和机构运动状态的模拟显示，大大减少了机构设计和研究员工的工作量和出错率。

3.2.1 SimMechanics 模块组及机构建模过程

SimMechanics 工具箱中包含了机构建模所常用的模块。其中包括刚体子模块组(Bodies)、约束与驱动模块组(Constraints & Drivers)、运动副模块组(Joints)、传感器与自动器模块组(Sensors & Actuators)、接口单元模块组(Interface Elements)、力单元模块组(Force Elements)以及辅助工具模块组(Utilities)。



图 3-1 SimMechanics 工具箱常用模块

其中每个模块之中又包含多个子模块 ,例 :转动关节符号及其相应的物理模型如图 :

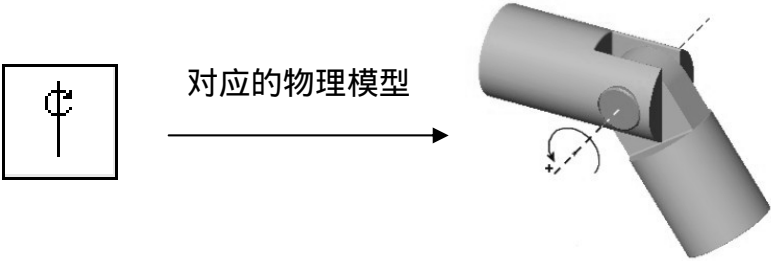


图 3-2 转动关节

这里不在逐一赘述。

在进行建模时根据所研究机构的结构组成，通过拖拉、连接、旋转 SimMechanics 各子模块组中的模块，就可以建立其机构模型。每个模块都可以单独设置其物理参数，在添加必要的驱动和检测模块后，就可以对机构进行运动分析与仿真。本章就将采用这种方法进行建模。

3.2.2 基于 SimMechanics 的直线一级倒立摆建模

直线一级倒立摆系统物理模型如第二章图 2-1 所示。其实际物理参数如表 3-1 所示。

表 3-1 一级倒立摆物理参数

参数	物理意义	实际数值
M	小车质量	1.096 kg
m	摆杆质量	0.109 kg
b	小车摩擦力	0.1 N/m/sec
I	摆杆转动惯量	0.034 kg·m ²
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.25 m
x	小车位置	m
φ	摆杆角度	rad
u	小车加速度	m/s ²

设系统状态变量 $X = \{x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}\}$ ，将上述实际参数代入式 (2-15)，可得到线性化后直线一级倒立摆系统的状态方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u \quad (3-1)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

根据可控性判定原理，容易验证式（3-1）所表示的状态方程是完全可控的。利用 SimMechanics 工具箱建立直线一级倒立摆系统机构模型，如图 3-1 所示。

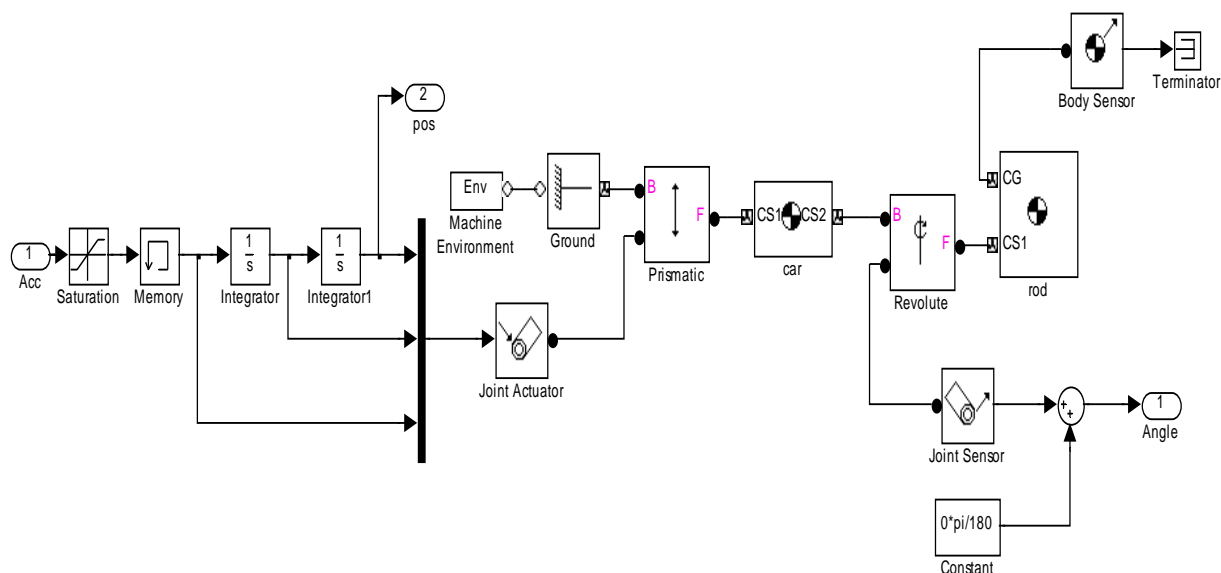


图 3-3 基于 SimMechanics 直线一级倒立摆模型

直线一级倒立摆是一个单输入二输出的四阶系统，其内部的 4 个状态变量分别是小车的位移、小车的速度、摆杆的角度、摆杆的角速度。如图 3-3 所示，系统的输入信号为 Acc，即小车加速度；系统输出的输出量分别为 pos、Angle。其中 pos 为小车的位移 x ，Angle 为摆杆的角度 θ 。

Mass properties

Mass: 1.096 kg

Inertia: eye(3) kg*m^2

* with respect to the CG (Center of Gravity) Body coordinate system

Body coordinate systems

Position | Orientation

Show port	Port side	Name	Origin position vector [x y z]	Units	Translated from origin of	Components in axes of
<input type="checkbox"/>	Left	CG	[0 0 0]	m	WORLD	WORLD
<input checked="" type="checkbox"/>	Left	CS1	[0 0 0]	m	CG	CG
<input checked="" type="checkbox"/>	Right	CS2	[0 0 0]	m	CG	CG

图 3-4 小车模型参数设置

Mass properties

Mass: 0.109 kg

Inertia: eye(3)*0.0034 kg*m^2

* with respect to the CG (Center of Gravity) Body coordinate system

Body coordinate systems

Position | Orientation

Show port	Port side	Name	Orientation vector	Units	Relative to coordinate system	Specified using convention
<input checked="" type="checkbox"/>	Left	CG	[0 0 0]	deg	WORLD	Euler X-Y-Z
<input checked="" type="checkbox"/>	Left	CS1	[0 0 0]	deg	Adjoining	Euler X-Y-Z
<input type="checkbox"/>	Right	CS2	[0 0 0]	deg	WORLD	Euler X-Y-Z

图 3-5 摆杆模型参数设置

如图 3-4 和 3-5 所示,采用这种基于 SimMechanics 工具箱建模的方法可以方便的修改坐标空间和各个传感器的的参数设置,摆杆参数框图和小车类似,都可以方便的选改变其位置和方向,尤其对于摆杆来说,可以方便的在 Orientation 选项里修改其初始角度,这给初始角度对系统的稳定性研究提供了良好的实验平台。

在 MATLAB 命令窗口可以使用“linmod”命令,将以上所建立的非线性模型线性化,得到的状态空间如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 26.1760 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2.6683 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (3-2)$$

所得的线性化模型和通过数学建模所得的模型极为接近，而且容易验证其完全可控，因此在做仿真实验时，可采用此模型作为被控对象。

3.2.3 基于 SimMechanics 的直线二级倒立摆建模

直线二级倒立摆系统建模时忽略了空气阻力和各种摩擦，并认为摆杆为刚体，其系统结构如图 2-3 所示，物理参数如表 3-2 所示。

表 3-2 直线二级倒立摆物理参数

参数	物理意义	实际数值
M	小车质量	1.096 kg
m1	摆杆 1 质量	0.13 kg
m2	摆杆 2 质量	0.109 kg
b	小车摩擦力	0.1 N/m/sec
I	摆杆转动惯量	0.034 kg·m ²
L1	摆杆 1 转动轴心到杆 1 质心的长度	0.08 m
L2	摆杆 2 转动轴心到杆 2 质心的长度	0.25 m
x	小车位置	
θ_1	摆杆 1 的角度	
θ_2	摆杆 2 的角度	

利用 SimMechanics 工具箱建立直线二级倒立摆系统机构模型，如图 3-6 示。

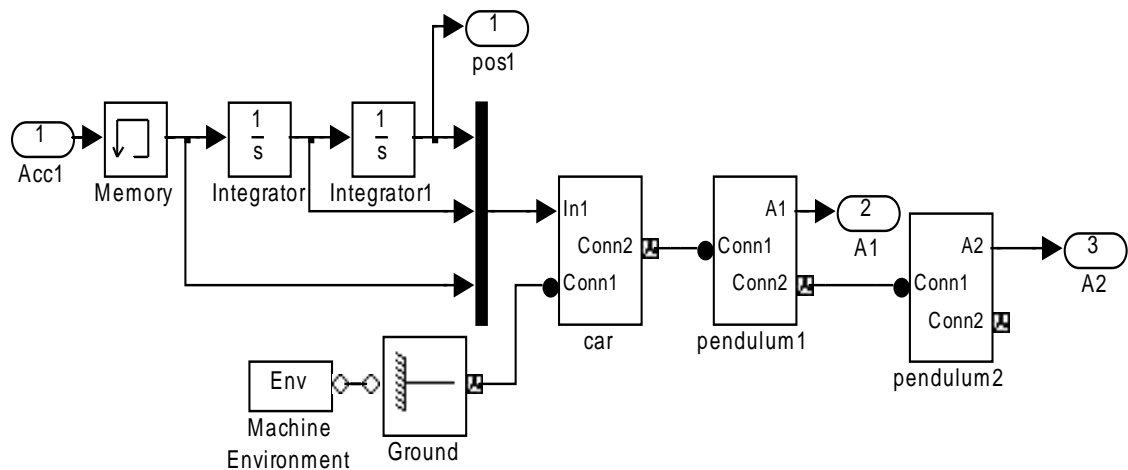


图 3-6 基于 SimMechanics 直线二级倒立摆模型

其中：

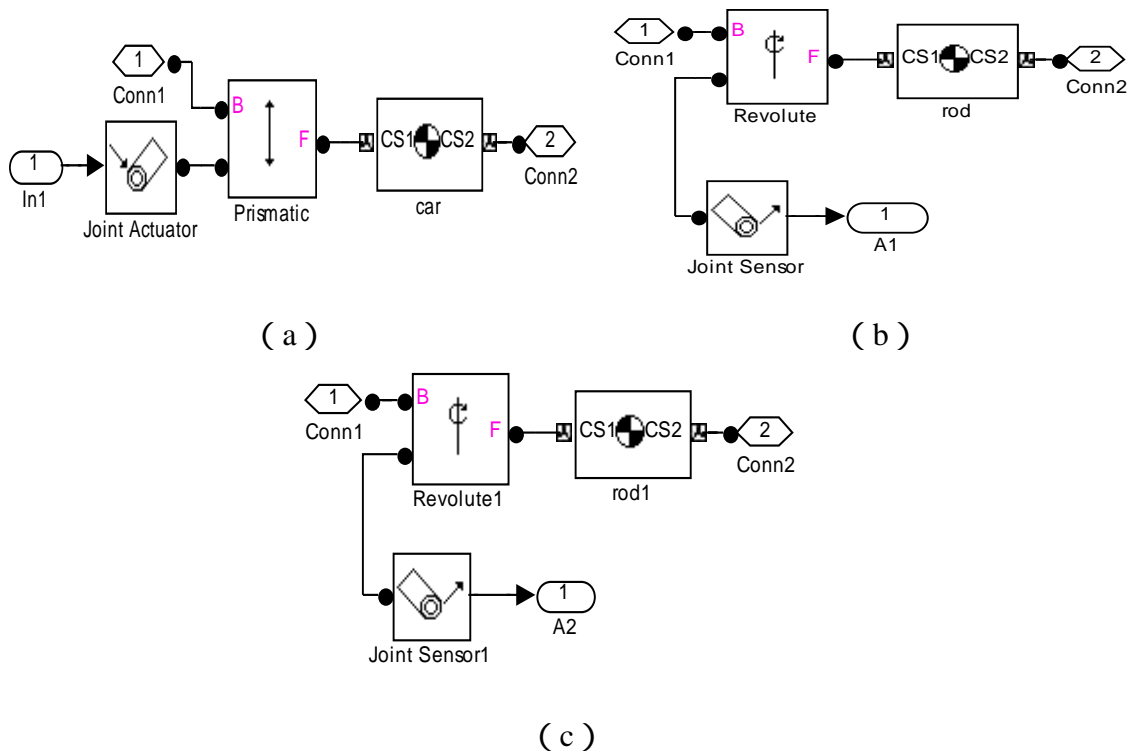


图 3-7 (a) 小车模型 (b) 摆杆 1 模型 (c) 摆杆 2 模型

直线二级倒立摆是一个单输入三输出的 6 阶系统，其内部的 6 个状态变量分别是小车的位移、小车的速度、摆杆 1 的角度、摆杆 1 的角速度、摆杆 2 的角度、摆杆 2 的角速度。如图 3-6 所示，系统的输入信号为 $Acc1$ ，即小车加速度；系统输出的观测量分别为 $pos1$ 、 $A1$ 、 $A2$ 。其中 $pos1$ 为小车的位移 x 、 $A1$ 为摆杆 1 的角度 θ_1 。 $A2$ 为摆杆 2 的角度 θ_2 。

设 $X = \{x, \dot{x}, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2\}$ ，将以上实际参数在 SimMechanics 模型中设置成功后，并在平衡位置线性化后得到线性化后倒立摆系统的状态方程，在 MATLAB 命令窗口线性化以上模型后，所得的线性状态空间如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ x \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 28.1508 & 21.6597 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6274 & 3.7218 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2.2079 \\ 0.3794 \end{bmatrix} u \quad (3-3)$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ x \\ \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

和一级倒立摆类似，其实际数学模型和 SimMechanics 线性化后的模型极为相似，而且容易验证式（3-3）所表示的状态方程是完全可控的。

3.3 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制器设计

3.3.1 LQR 控制器的设计

稳定性是控制系统的一个重要指标，还要考虑诸如调节时间、超调、振荡等动态特性以及控制器所消耗的能量等因素。通过极点配置可使系统具有期望的稳定性和动态性能，然而并没有考虑控制的能量代价。用 Lyapunov 稳定性理论解决“参数优化问题”，通过选取一个适当的参数，可以在保证系统稳定的前提下，使二次型性能指标最小化，从而使系统的过渡过程具有较好的性能，有必要将这种方法推广到控制器设计。

对于直线二级倒立摆这样一个不稳定、非线性、强耦合的快速系统，LQR 最优控制是其典型的线性控制方法。如果该系统受到外界干扰而偏离零状态，应对其施加控制 u ，使得系统回到零状态附近，并使 J 达到最小，此时的 u 就是最优控制。

对于系统性能和控制能量的要求可以由如下二次型性能的指标函数来描述：

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)) dt \quad (3-4)$$

其中： Q 是对称正定（半正定）的加权矩阵， R 为对称正定的加权矩阵， R 和 Q 是两组加权的矩阵，输入向量和状态向量的比重可以通过它们来调节；它们所反映出的设计出的控制器对于状态 x 和控制 u 中各个分量重要性的重视程度。第一项反映了控制性能，这一项越小，状态衰减到0是所用的是时间越少，振荡幅度也越小，控制性能越好；第二项反映对控制能量的限制。通常状态 x 衰减速度越快，控制能量也越大，这是一个相对矛盾，最优控制的目的就是寻找最合适 Q 、 R ，调和上述的矛盾，问题归结为，在给定系统式（2-33）和保证一定性能指标式（3-4）的前提下，设计出一个控制器 u ，使 J 最小。

如果系统的状态是可以直接测量的，且考虑的控制器是状态反馈控制器，则可以证明，使性能指标（3-4）最小化的最优控制器具有以下线性状态反馈形式：

$$u = -Kx \quad (3-5)$$

其中： K 是线性最优反馈增益矩阵。

将控制器（3-5）代入系统方程（2-33）可得：

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (3-6)$$

若系统是渐近趋于稳定的，矩阵 $A - BK$ 所有的特征值都具有负实部，根据线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理，式（3-6）一定存在一个正定对称矩阵 P 的二次型李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T P x$ ，可以利用系统的稳定性可得：

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \left[x^T Q x + u^T R u + \frac{d}{dt} V(x) \right] dt - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} V(x) \cdot dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ x^T Q x + u^T R u + x^T \left[P(A - BK) + (A - BK)^T P \right] x \right\} dt - V[x(t)] \Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \int_0^{\infty} x^T \left[\underline{Q + K^T R K} + PA + A^T P - \underline{PBK - K^T B^T P} \right] x dt + x_0^T P x_0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

对上式“下划线”部分“+”“-” $PBR^{-1}B^T P$ 进行配平方得到：

$$\begin{aligned} &\underline{K^T R K - PBK - K^T B^T P} + PBR^{-1}B^T P - PBR^{-1}B^T P \\ &= (K - R^{-1}B^T P)^T R (K - R^{-1}B^T P) - PBR^{-1}B^T P \end{aligned} \quad (3-8)$$

可得：

$$J = \int_0^{\infty} x^T [Q + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P] x dt + x_0^T P x_0 + \int_0^{\infty} x^T (K - R^{-1}B^T P)^T R (K - R^{-1}B^T P) x dt \quad (3-9)$$

求解最优控制的问题,就是选取一个适当的增益矩阵 K ,是性能指标 J 最小化。由 (3-9) 只有第三项依赖于矩阵 K ,而且是非负的,只有当第三项等于零 J 才能最小,当且仅当:

$$K = R^{-1}B^T P \quad (3-10)$$

矩阵 K 依赖于正定对称矩阵 P , 如果可以找到一个 P , 满足 Riccati 方程:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3-11)$$

此时:

$$J = x_0^T P x_0 \quad (3-12)$$

闭环系统方程为:

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x \quad (3-13)$$

最优状态反馈控制器为:

$$u = -R^{-1}B^T P x \quad (3-14)$$

可以证明,确实有:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T [P(A - BR^{-1}B^T P) \\ &+ (A - BR^{-1}B^T P)^T P] x \\ &= x^T [PA - PBR^{-1}B^T P + A^T P - PBR^{-1}B^T P] x \\ &= -x^T [Q + PBR^{-1}B^T P] x < 0 \end{aligned} \quad (3-15)$$

这样就可以证明最优状态反馈控制器式 (3-14) 是稳定的。

LQR 调节器在本质上实现了对控制系统的最优极点配置,因而在最优控制设计中有广泛的应用。但是在 LQR 调节器的实现过程中,由于受到系统噪声与状态反馈过程中观测噪声的影响,使所测得到状态变量 x 、 θ_1 、 θ_2 必然存在一定误差,计算 \dot{x} 、 $\dot{\theta}_1$ 、 $\dot{\theta}_2$ 时经过微分环节又将这种误差放大,即状态向量 x 常常是不准确的,因此控制量 $u = -Kx$ 很难实现对系统的最优控制。若所有状态变量都通过传感器来测量又不现实,因此需要设计一种状态观测器来估计系统的最优状态值。

状态观测器 (state observer) 是根据系统的外部变量(输入变量和输出变量)的实测

值得出状态变量估计值的一类动态系统，也称作状态重构器，它可以通过重构的途径解决系统运行时不能直接测量的状态问题，这不但为状态反馈技术的实现提供了实际可能性，而且在控制工程中得到了实际应用。

3.3.2 卡尔曼状态观测器的设计

卡尔曼滤波器的算法涉及到概率 (Probability)、随即变量 (Random Variable)、高斯或正态分配 (Gaussian Distribution) 还有状态空间模型等一些基本的概念知识。卡尔曼滤波器可以对系统的状态向量作最优估计，并且使估计量与实际状态量尽量接近，还可以有效抑制系统噪声和测量噪声^[5]。因此卡尔曼滤波器可作为系统状态观测器的理想选择。基于卡尔曼滤波的状态观测器通过控制输入 u 和测量输出 y ，可以观测到系统最优状态的估计量 \hat{X} ，使状态反馈为 $u = -K \hat{X}$ ，从而达到对系统的最优控制。

此时系统的状态方程为：

$$X(k) = AX(k-1) + BU(k) + W(k) \tag{3-16}$$

此时系统的观测值为：

$$Z(k) = HX(k) + V(k) \tag{3-17}$$

方程中参数的意义如表 3-1 所示。

表 3-3 系统状态方程中参数的意义

参数	意义
$A、B$	系统模型的物理参数，对于多维模型系统，它们则是矩阵
$X(k)$	k 时刻的系统状态
$U(k)$	k 时刻对系统的控制量
$Z(k)$	k 时刻系统的测量值
H	测量系统的物理参数
$W(k)$	系统噪声
$V(k)$	测量噪声（被看成高斯白噪声）

若卡尔曼滤波器满足测量与过程都是高斯白噪声，且是线性随机微分系统，此时就是其最佳信息处理状态。系统的最优输出就可以利用协方差来估算出来。

利用系统的模型，我们可以预测出系统的下一个状态。假设现在系统的当前状态为

k ，它可以依据系统的上一状态预测出来：

$$X(k|k-1) = AX(k-1|k-1) + BU(k) \quad (3-18)$$

式(3-18)中，由上一状态我们可以预测出下一个状态为 $X(k|k-1)$ ，其最优的状态为 $X(k-1|k-1)$ ，系统当前的状态控制量为 $U(k)$ ，若无控制量，其值为 0。此时，我们已经更新一次系统状态。但 $X(k|k-1)$ 的协方差还未更新。因此，设协方差为 P ：

噪声协方差为：

$$P(k|k-1) = AP(k-1|k-1)A' + Q \quad (3-19)$$

式(3-19)中， $X(k|k-1)$ 的协方差是 $P(k|k-1)$ ， $X(k-1|k-1)$ 的协方差是 $P(k-1|k-1)$ ， A 的转置矩阵为 A' ，系统的协方差用 Q 表示。卡尔曼滤波器的五个公式包含式子(3-18)、(3-19)，可以预测系统的未来时刻状态。根据预测当前状态的结果，而后我们再收集现在状态的测量值。我们可以结合预测值和测量值得到目前(k)最优的化估算值 $X(k|k)$ ：

$$X(k|k) = X(k|k-1) + K_g(k)(Z(k) - HX(k|k-1)) \quad (3-20)$$

其中卡尔曼的增益为 K_g ：

$$K_g(k) = P(k|k-1)H' / (HP(k|k-1)H' + R) \quad (3-21)$$

此时， k 状态最优的估计值 $X(k|k)$ 已得到。但是，在系统运行结束之前，要使卡尔曼滤波器如此不断进行下去， k 状态下 $X(k|k)$ 的协方差还需要进一步更新：

$$P(k|k) = (I - K_g(k)H)P(k|k-1) \quad (3-22)$$

其中， I 是单位矩阵，对于单模型的单测量时， $I=1$ 。当系统进入 $k+1$ 状态时， $P(k|k)$ 就是式子(3-19)的 $P(k-1|k-1)$ 。这样，算法就可以自动的运算下去。这便是卡尔曼滤波器的基本原理，式(3-18)、(3-19)、(3-20)、(3-21)、(3-22)就是它的 5 个基本公式。根据这 5 个公式，在计算机软件的帮助下可以很容易的实现运算。卡尔曼滤波算法的流程如图 3-8 所示。

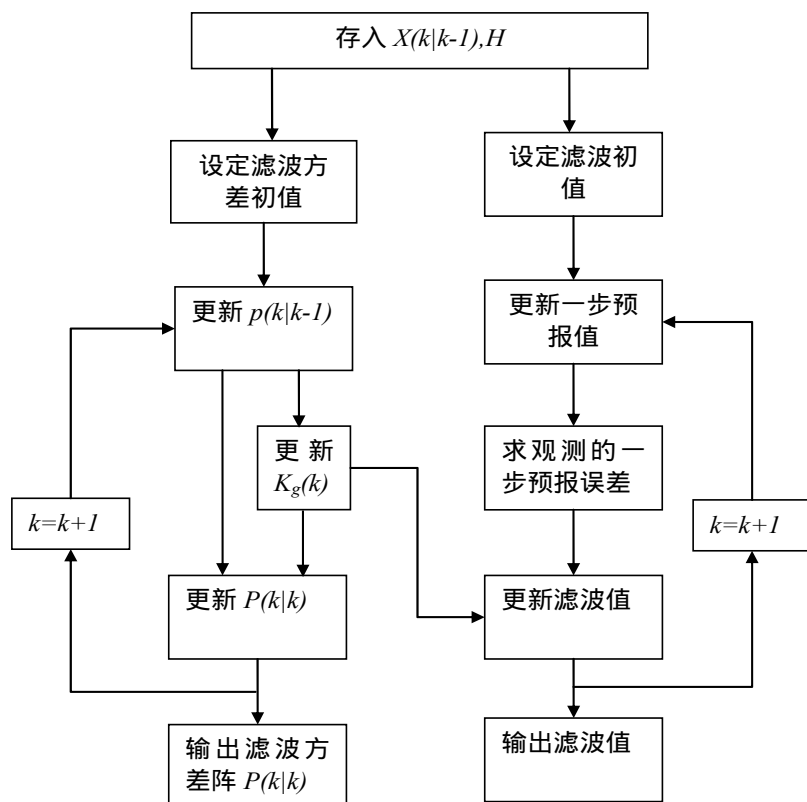


图 3-8 卡尔曼滤波算法流程图

3.3.3 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制算法的实现

本文采用 LQG(Linear-quadratic-Gaussian)的设计方法^[6]将最优控制和卡尔曼状态估计结合起来,构成完整的控制系统,实现系统的稳定控制。LQG 控制是一种设计最优动态调节器的现代状态空间技术,它需要被控对象的状态空间模型。当系统存在外部干扰和测量噪声时,它能够权衡调节性能和控制量。其控制原理如图 3-9 所示。

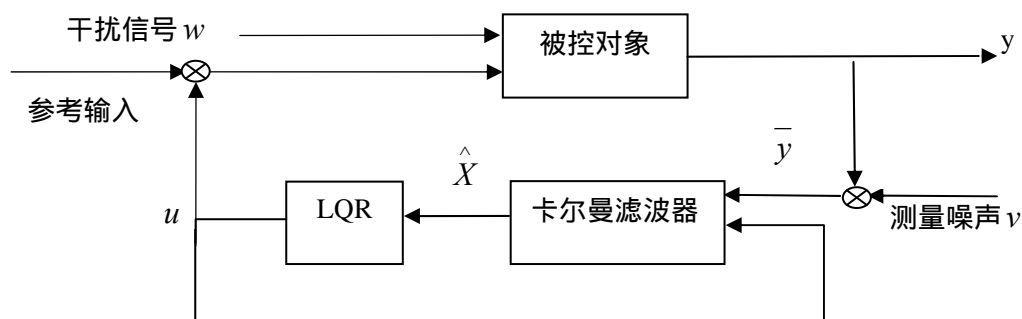


图 3-9 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制系统

3.4 基于卡尔曼滤波的直线二级倒立摆 LQR 控制仿真

根据上述原理，在 Simulink 环境下建立控制系统如图 3-10 所示。

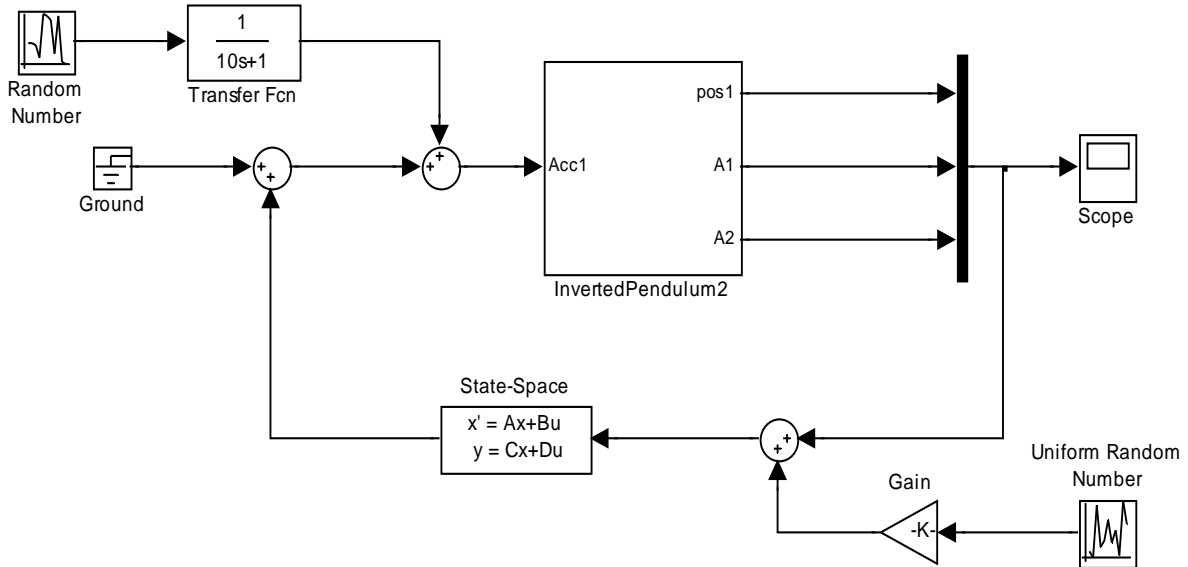


图 3-10 直线二级倒立摆控制系统

如图 3-9 所示，在随机噪声信号后增加一阶惯性环节来模拟产生符合正态分布的噪声信号。该惯性环节选择的时间常数为 10，可在 MATLAB 中绘制该环节的伯德图，其命令如下：

```
clear;  
num=[1];  
den=[10 1];  
a=tf(num , den)  
  
bode(a)
```

其中：tf 是系统的传递函数。可以得到系统的伯德图如图 3-11 所示。

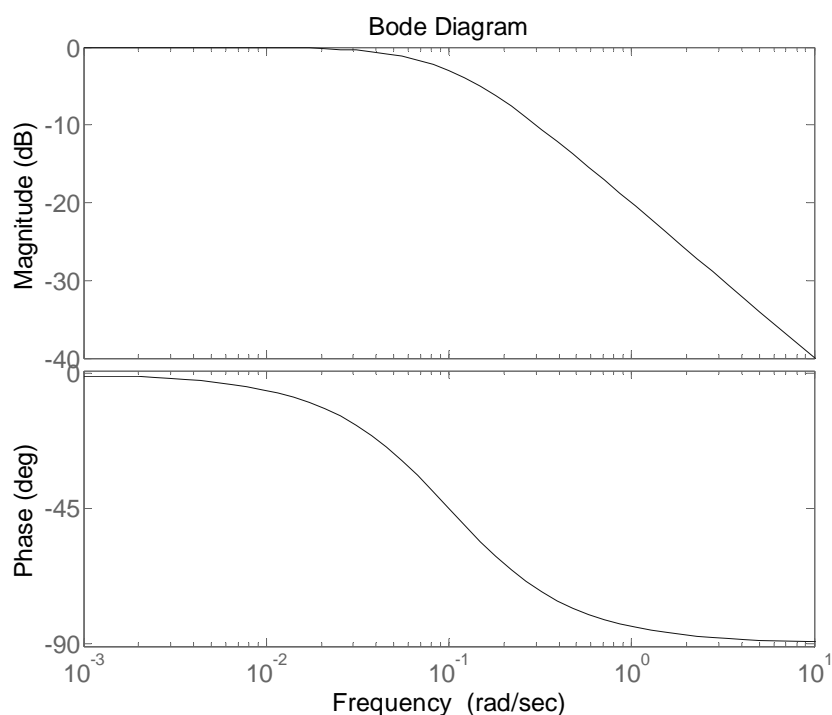


图 3-11 伯德图

由图 3-11 可知，惯性环节 $\frac{1}{10s+1}$ 输出滞后于输入，相位滞后范围为 0° 至 -90° ，该环节可以作为低通滤波器。

在相同的初始条件下，当采用 LQR 最优控制时在 MATLAB 中输入指令：

```
[A , B , C , D]=linmod('pend_ss')
```

```
sys=ss(A , B , C , D)
```

```
K=lqry(sys , 0.1*eye(3) , 1)
```

可求得最优控制量 $K=[0.3162 \ 1.2545 \ 58.3764 \ -13.0486 \ 10.0605 \ -20.2530]$ ，其仿真结果如图 3-12 所示。

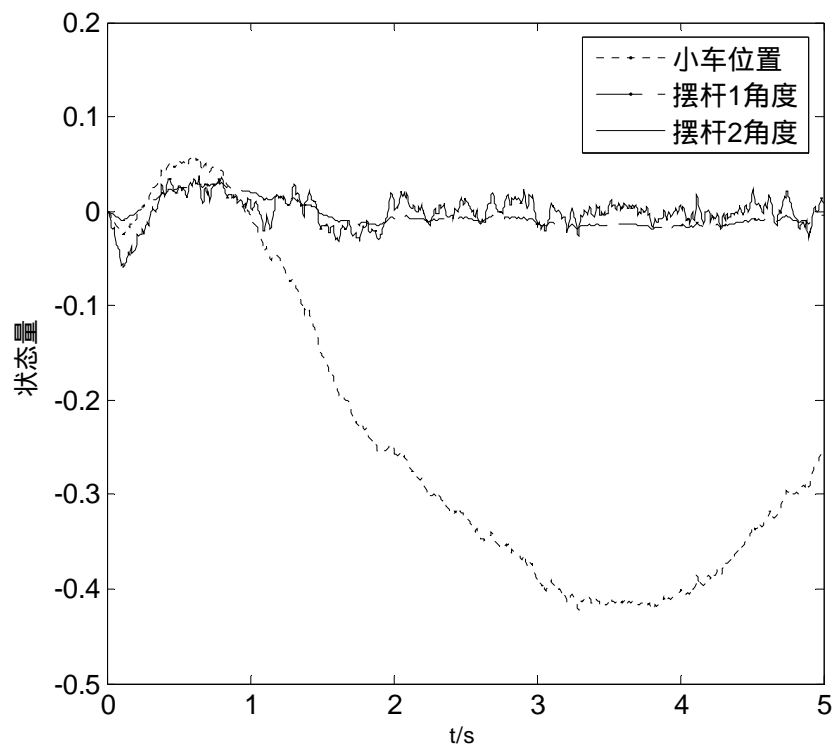


图 3-12 LQR 控制

由上图可知此时系统的状态变量含有噪声，其输出波形呈明显的锯齿波状。下面在系统中引入卡尔曼滤波，得到状态变量的最优估计，此时系统仿真结果如图 3-13 所示。

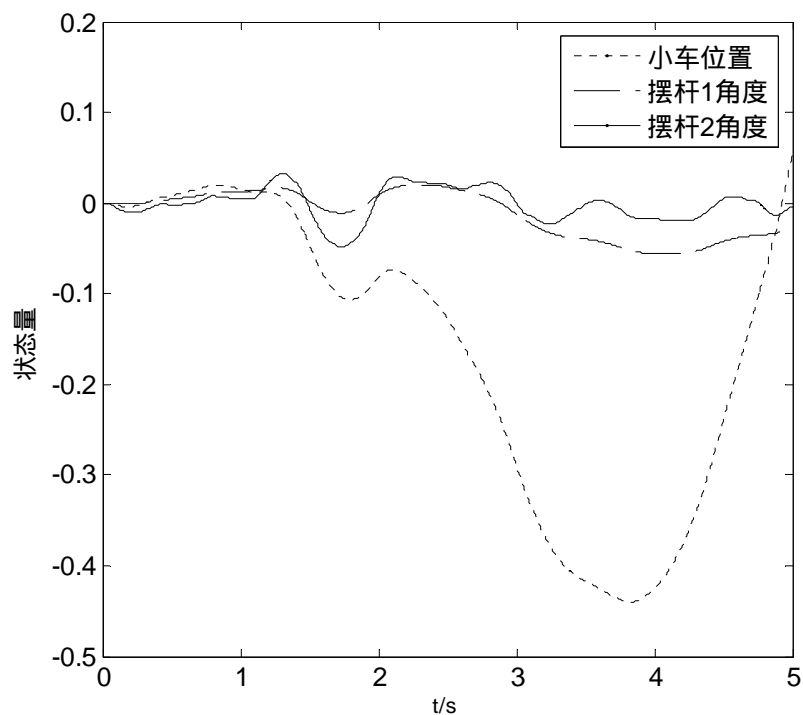


图 3-13 基于卡尔曼滤波的 LQR 控制

可以看出图 3-13 中的状态量相对较为平滑。这是因为卡尔曼滤波有效的抑制了噪声对系统稳定性的影响。

3.5 小结

基于 SimMechanics 的建模方法比经典数学建模方法更加方便快捷，计算量较小，且更加贴近实物模型。本章基于 SimMechanics 的直线二级倒立摆系统模型^[7-10]，通过独立使用 LQR 控制器与结合卡尔曼滤波的 LQG 控制器仿真结果做对比，明显的看出单独使用 LQR 控制器时状态变量超调相对较小，但是受噪声的影响较大。而结合卡尔曼滤波的 LQG 控制器在对控制效果影响较小的情况下，既节省了硬件成本，又抑制了噪声对直线二级倒立摆系统的影响，显著提高了系统的鲁棒性。

参考文献

- [1] 罗忠,史志勇,等.直线倒立摆系统控制特性的影响因素分析与实验[J].东北大学学报,2011.
- [2] 罗忠,赵士鑫,史志勇,等.基于状态观测器的倒立摆系统控制与实验研究[J].东北大学学报:自然科学版,2010,31(1):107-110.
- [3] Nenad Muskinja, Boris Tovornik. Swing up and stabilization of a real inverted pendulum[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2006, 53(2): 631-639.
- [4] 孙大卫,曾静,张国良.基于卡尔曼滤波的一级倒立摆 LQR 控制研究[J].实验技术与管理.2007.
- [5] 祁虔,李祖枢,谭智,等.基于卡尔曼滤波的倒立摆控制系统噪声抑制[J].控制与决策.2010.
- [6] 侯岩松,李华.一种基于卡尔曼滤波器的单级倒立摆的 LQR 方法[J].兰州交通大学学报:自然科学版.2005.
- [7] 郑大钟.线性系统理论 [M]. 北京:清华大学出版社,2002.
- [8] 王志贤.最优状态估计与系统辨识 [M].西安:西北工业大学出版社,2004.
- [9] Mohinder S G, Angus P A. Kalman filtering: Theory and practice[M]. 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, 2001: 133-148.
- [10] Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering. Publishing House of Electronics Industry. 2007.

第四章 虚拟现实技术在倒立摆仿真中的应用

在控制理论课程中，采用虚拟现实技术作为辅助手段实时控制倒立摆的教学方式，将原来抽象、枯燥的学习内容，用图像、动画和声音等多种媒体表现形式展现在课堂教学过程中，有利于学生对抽象控制理论内容的形象理解，从而提高教学质量；还可以减少控制理论验证的时间和外界因素的影响，提高单位时间内学生获得的知识量；同时，能极大地提高教学质量，实现教学目标，并将推动教学研究，促进教学改革。

4.1 引言

在控制理论^[1-4]教学过程中，通常采用经典的倒立摆作为实验对象。但由于倒立摆系统庞大、笨重，不易在课堂上随堂进行演示。而且在是实际实验中，由于场地、套数的原因，每位学生并没有足够的时间熟练掌握针对实际倒立摆的控制器设计方法。另外倒立摆造价较高，由本科低年级学生使用时，常常会造成设备的损坏甚至出现摆杆伤人的危险情况。

鉴于此种原因，本章提出利于虚拟现实^[5-7]技术建立应用于教学实践中的倒立摆实时仿真模型。利于此模型，学生不仅可以体验到操作实体倒立摆的真实感，而且可以安全有效的验证经典控制理论、现代控制理论及智能控制理论^[8]中的各种方法，如根轨迹^[9、10]、频率响应、PID^[11]、状态反馈、最优控制^[12]、鲁棒控制^[13]、模糊控制^[14]、神经网络控制算法等。

本章首先使用 MATLAB/Simulink 中的 SimMechanics 工具箱建立直线一级倒立摆的非线性动力学模型，利于用 VRML 建立倒立摆系统的虚拟现实场景，然后使动力学模型驱动虚拟现实场景。在与控制器进行集成后，利于 MATLAB/RTW 工具箱生成实时运行的仿真程序。最后分析了这种基于虚拟现实技术在控制理论课程教学方法中的应用和意义。

4.2 基于 SimMechanics 的倒立摆仿真模型

4.2.1 倒立摆系统

为了推导数学模型的方便，可将直线一级倒立摆抽象成小车和摆杆组成的系统，一

级倒立摆如图 2-1 所示。在输入给小车一个力信号之后，小车带动摆杆运动。一般情况都以小车位置和摆杆角度为控制量。通过拉格朗日方法，可以得到倒立摆系统在摆杆处于小车上方垂直位置时线性化的方程。对于一级倒立摆，此方程为：

$$\frac{\theta(s)}{F(s)} = \frac{m l s^2}{[(M + m)(I + m l^2) - m l^2] s^4 + b(I + m l^2) s^3 - (M + m) m g l s^2 - b m g l s} \quad (4-1)$$

式中：

M —— 小车质量

m —— 摆杆质量

l —— 摆杆中心距回转轴距离

b —— 小车与轨道的阻尼比

I —— 摆杆转动惯量

该方程是系统抽象化的数学模型，虽然在设计控制器时需要对其进行分析，但如果以其为模拟的被控对象，学生往往会感觉抽象而不利于他们对控制过程的理解。因此，可以首先向学生介绍 MATLAB 中有关机械系统动力学分析的工具箱 SimMechanics，然后引导学生以此工具建立倒立摆系统非线性的动力学模型，然后以此模型作为模拟的被控对象。

4.2.2 基于 SimMechanics 的倒立摆模型

利用 SimMechanics 工具箱建立的直线一级倒立摆系统动力学模型如图 4-1 所示。伺服电机的驱动力矩自左方施加给小车与轨道的平动关节，小车的位置由 BodySensor1 输出。小车与摆杆之间为单自由度旋转关节。摆杆重心位置和姿态由 BodySensor2 输出。摆杆初始角度可通过设置初始朝向来实现。例如在控制实际倒立摆时，控制器在摆杆角度为 $\pm 10^\circ$ 以内时才介入，也就是只有当摆杆向上提起至 10° 时，控制器才开始作用。为使仿真与实际一致，需要在 SimMechanics 模型中设置摆杆的初始朝向为 10° 。这样，仿真的初始状态即如图 4-2 所示。

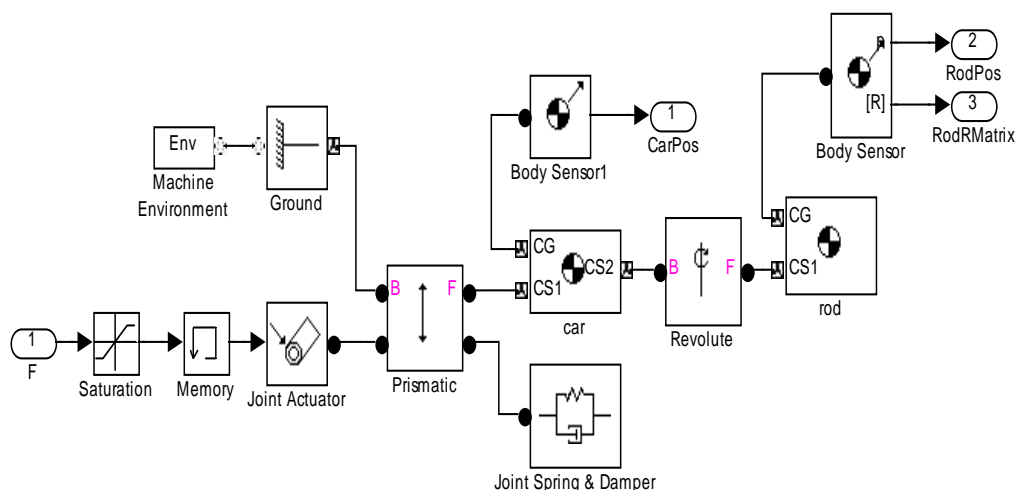


图 4-1 基于 SimMechanics 直线一级倒立摆模型

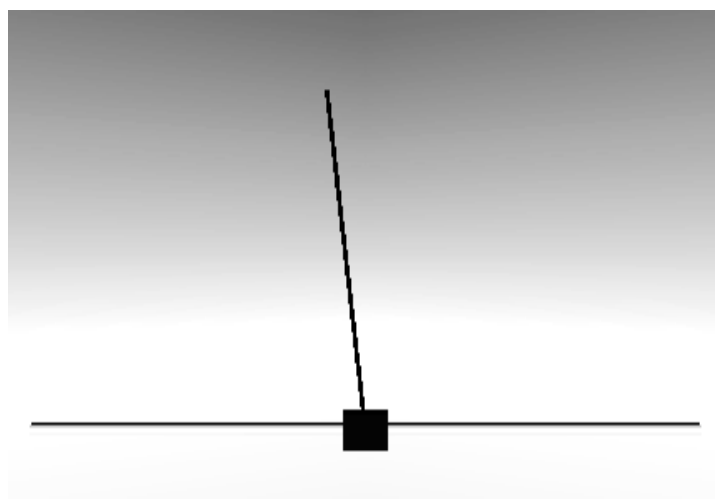


图 4-2 一级倒立摆模型的初始状态

4.2.3 虚拟现实模型

MATLAB/Simulink 集成了 VRML 模型的驱动和渲染模块。该模块作为 VRML 模型的容器，可以接受 Simulink 中的运动学参数，并使用这些参数驱动虚拟环境的渲染。动力学模型和 VRML 模型的连接如图 4-3 所示。

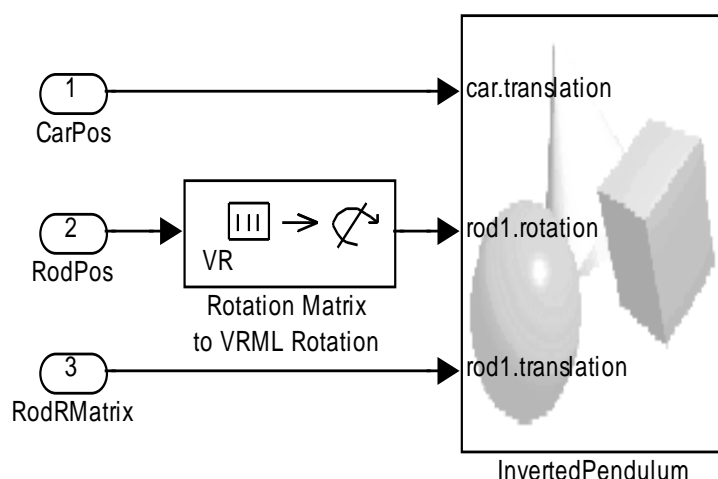


图 4-3 VRML 模型的输入数据接口

4.3 控制器设计及实时仿真

学生可以在 Simulink 中自由设计控制器来验证不同算法的有效性和差异。这些方法如根轨迹、频率响应、PID、LQR、自适应、神经网络等等。以 LQR 方法为例的控制器及整个仿真模型框图如图 4-4，其中阴影部分所示为仿真的被控对象。有时为了引导学生通过设计控制器来压制扰动的影响，可以增进测量噪声和干扰噪声来开展这方面的教学。

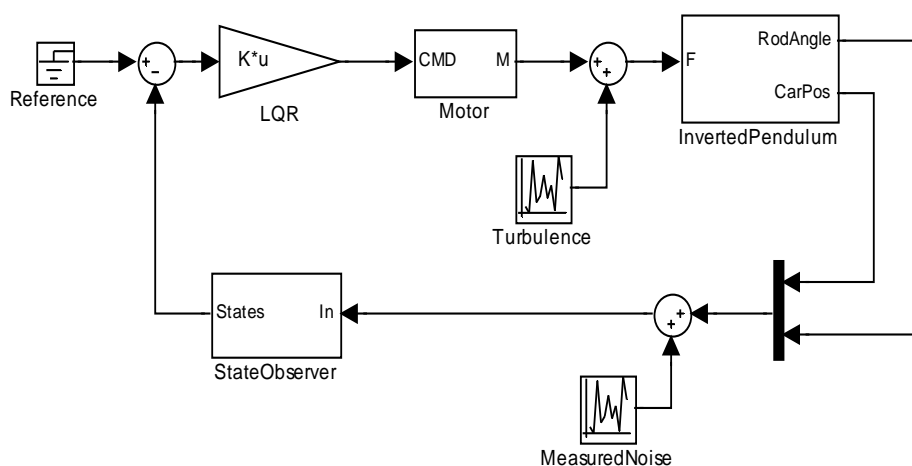


图 4-4 LQR 控制器作用下的系统仿真框图

为了能够达到交互式的仿真体验，需要仿真时间与实际时间严格对应。MATLAB 中的 RTW 工具箱可以方便的将 Simulink 框图转化为特定实时应用平台上的源程序并加

以编译和下载。为了学生的使用方便,在此使用 Real-time Windows Target 作为实时应用平台。这样,在一台电脑上既实现了实时仿真,又方便在 Windows 环境下进行控制器参数的在线修改和虚拟现实场景的显示。如图 4-5 为虚拟的倒立摆在控制器作用下的运动过程。

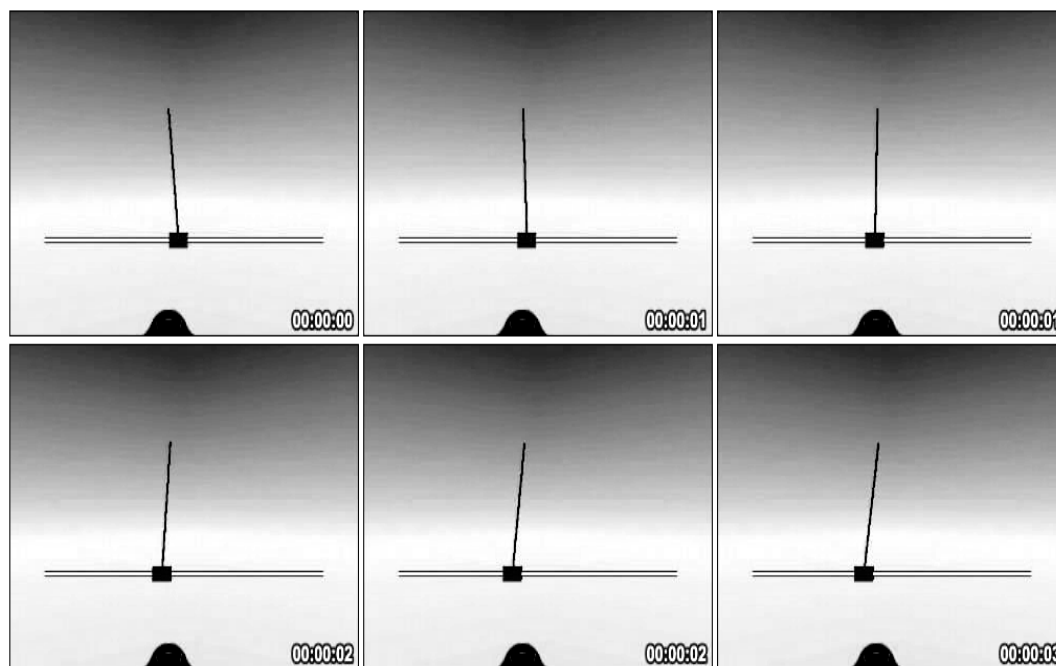


图 4-5 仿真过程

4.4 教学效果

将以上倒立摆实时仿真模型的建立过程介绍给学生需要两个课时,学生课下完成这个模型大约需要两个课时时间。在进行实际的倒立摆实验时,事先经过仿真预习的学生一次成功率达到 80%,而且其对系统的理解更加深刻,对知识的掌握也更加牢固。

4.5 小结

将虚拟现实技术应用于控制理论的教学过程,为学生提供了随时验证算法的方法,提高了学生的学习积极性,达到了理想的教学效果。通过不断的探索,加深了学生对知识的理解,使学生充分掌握自动控制的基本理论、典型的分析方法和设计方法,为今后的学习和工作奠定扎实的基础。

该方法不仅使学生深入掌握自动控制的相关知识,而且还使其接触到计算机仿真的基本概念和原理。这些都为系统的学习专业知识打下坚实的基础。

参考文献

- [1] Katsuhiko Ogata , Modern Control Engineering (Fourth Edition)[M].NJ: Prentice Hall , 2009.
- [2] 郑大钟.线性系统理论[M].北京:清华大学出版社, 2002.
- [3] 胡寿松.自动控制原理(第五版)[M].北京:科学出版社, 2007.
- [4] 张嗣瀛, 高立群.现代控制理论[M].北京:清华大学出版社, 2006.
- [5] 徐林, 高魏, 邱联奎.基于 VRML 的倒立摆三维仿真[J].计算技术与自动化, 2009, 28(3):24-26.
- [6] 梁延德, 刘海龙.基于虚拟样机技术的倒立摆仿真研究[J].机床与液压, 2007, 35(7):26-28.
- [7] 曾祥光, 张玲玲.倒立摆的虚拟现实实现[J].机电产品创新, 2006, 19(6):99-101.
- [8] 李永强, 杨明忠.智能控制理论在倒立摆系统中的应用研究[J].北方工业大学学报, 2003, 18(2):100-103.
- [9] 王福永.控制系统根轨迹的通用算法[J].苏州丝绸工学院学报, 1989, 9(4):58-66.
- [10] 耿直, 曹洛生, 吕燕丰.自动控制系统校正装置的计算机辅助设计-根轨迹法[J], 微型机与应用, 1987, 2:10-13.
- [11] 杨平, 徐春梅, 曾婧婧.PID 控制在倒立摆实时控制系统中的应用[J].微计算机信息, 2006, 22(7-1):83-85.
- [12] 刘琛.二级倒立摆系统的稳定控制研究[D].西北工业大学, 2007.
- [13] 李树奎, 鲁仁全, 王建中.基于鲁棒保性能控制的倒立摆虚拟现实仿真研究[J].机电工程, 2009, 26(5):9-14.
- [14] 陈振峰, 张鹏, 蔡毓峰等.基于模糊控制的倒立摆控制[J].现代电子技术, 2004, 22(6):11-15.

第五章 两轮自平衡小车硬件设计与控制

两轮自平衡小车是一个集动态规划与决策、行为控制和执行、环境感知等多种功能于一身的综合的复杂的系统，其关键是解决如何保持自我平衡；同时，还要解决在各种环境下的适应性和完成任务的能力。小车车身上配备有超声波传感器、速度传感器、红外传感器、倾角传感器等，可以实现平衡车的自主避开障碍物、追踪某个物体、自主规划路径等复杂的功能^[1-4]。若加入惯性制导和全球定位系统，小车就可以实现自动导航行驶。总之，两轮自平衡小车越来越受到世界各国科学家的重视，具有较高的学术研究的意义。

5.1 引言

两轮自平衡小车和直线一级倒立摆具有相似的模型结构，小车双轮由两个电机分别控制，通过驱动电机的正反转控制车轮的正反转，实现小车的前进倒退，如果小车往前倾则车轮正转，往后倾则车轮反转，在此过程中，需要角度传感器把小车的倾斜角度信息返回到单片机，通过设计一个闭环控制系统保证小车的自平衡。

两轮自平衡小车的机械结构设计是非常重要的，其控制中心是自平衡，而良好的机械结构设计有助于两轮小车本身的平衡。在实际控制过程中，除了让双轮车保持平衡，还要求能稳定行进，因此整体车身的质量布局、惯性大小、质心高度等都至关重要^[5-7]。

5.2 系统设计总体思路

一般来说，平衡车系统分为两个部分：硬件系统与软件系统。硬件系统包括了电路系统和机械系统；而软件系统则可以分为底层代码和实现算法，后者主要包括用于实现路径识别的算法、电机转速闭环、和导引策略等。具体层次结构如图 5-1 所示。

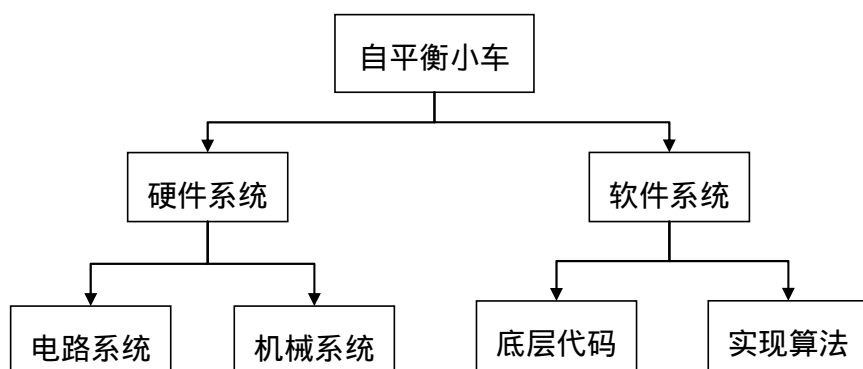


图 5-1 自平衡小车系统结构图

5.2.1 两轮自平衡小车的模块组成

将自平衡小车采用模块化设计，其包含一线几个模块：控制模块(MCU)、电源管理模块、存储器模块、电机驱动模块、人机接口模块、姿态传感器模块等。

- (1)电源管理模块：为系统各模块可靠供电。
- (2)人机接口模块：提供运行模式输入接口；显示系统的运行状态。
- (3)核心控制模块：以 16 位单片机 xs128 为核心控制器，完成传感器信息的分析处理，决策直流电机的控制。
- (4)电机驱动模块：根据控制器输出的 PWM 信号进行直流电机的转速控制。
- (5)存储器模块：采用 SPI 型 EEPROM，为单片机提供充足的存储空间，便于常用数据、指令的存储和功能扩充。
- (6)姿态传感器模块：采用陀螺仪和加速度传感器，通过数据融合，获得车体当前的倾角。

5.2.2 系统工作原理

自平衡车系统的工作原理是闭环控制理论的典型代表，其工作原理如图 5-2 所示。

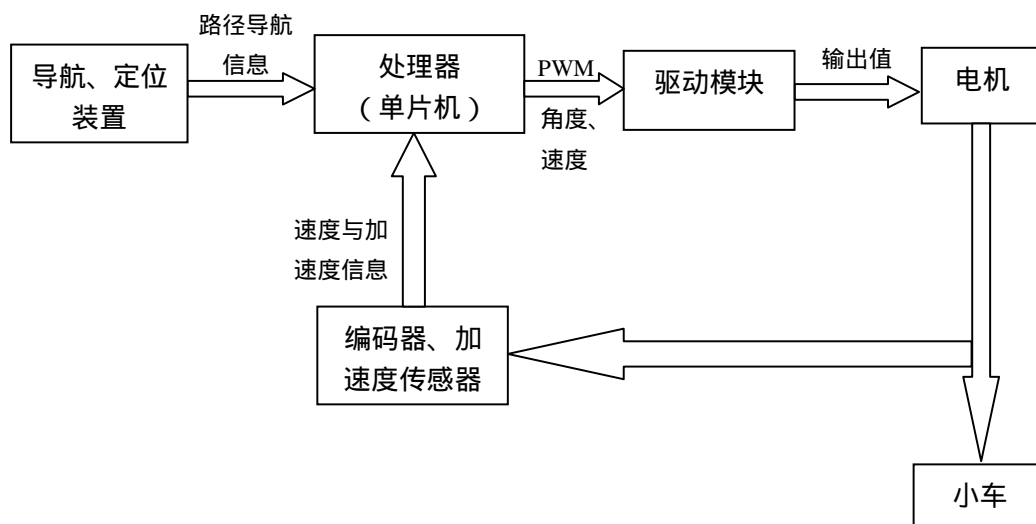


图 5-2 自平衡车系统工作原理示意图

在本文中，自平衡车系统通过电磁传感器来检测当前电磁轨道的信息，并将电磁轨道信息传送给单片机，单片机经过 AD 转换得出一定数值，将其与设定的阈值进行比较。同时，自平衡车系统通过编码器和加速度传感器构成的反馈渠道将车体的行驶速度及加速度信息传送给主控单片机。单片机综合以上两方面的情况做出决策判断^[9]，并根据已经设定好的程序内容发出不同的 PWM 信号控制直流电机进行相应动作，从而实现车体的速度控制。

为了实现小车的直立行走，还需采集如以下信号：小车倾角速度陀螺仪信号；重力加速度信号；平衡车电机转速脉冲信号等。

5.3 硬件设计

硬件系统的总体结构如图 5-3 所示。

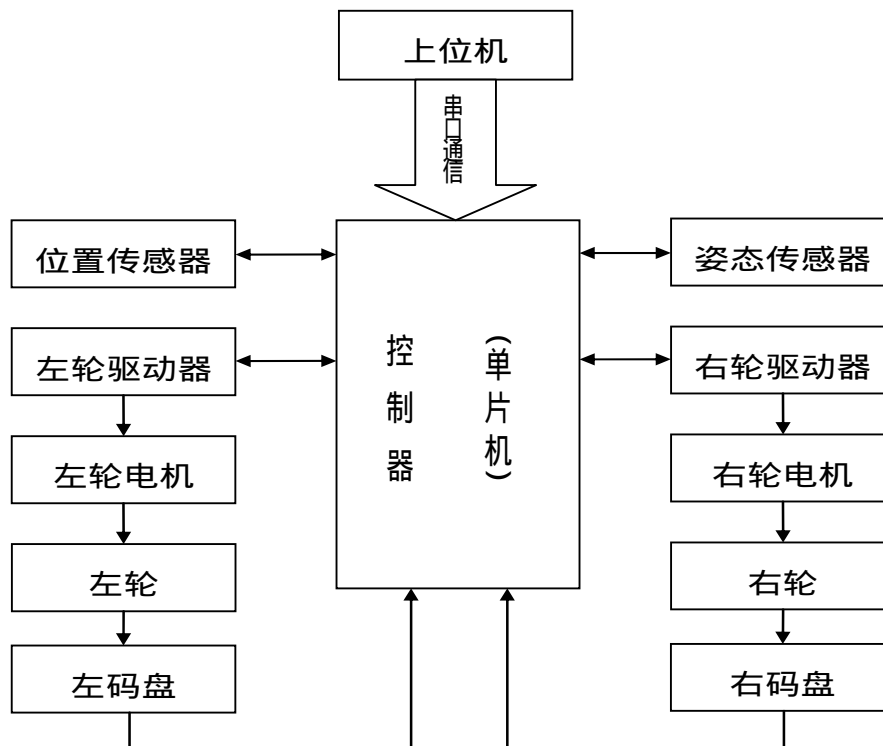


图 5-3 总结构框图

5.3.1 控制器模块

本文中所使用的核心控制芯片 16 单片机 MC9S12XS128 其功能模块如图 5-4 所示。

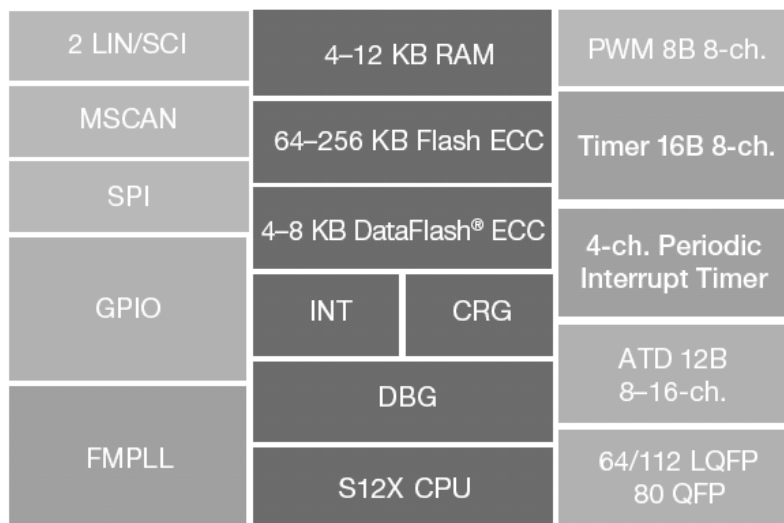


图 5-4 MC9S12XS128 单片机功能模块示意图

本芯片负责处理各传感器所获得的信息，并且加以判断再向外发出控制信号，使平衡车稳定运行。该芯片采用的是 5V 供电，芯片内部含有 128K 的 Flash 存储器，8K 的 RAM，8K 的 EEPROM，两路串行通信接口（SCI），一路串行外围接口（SPI），八路定

时器通道，两个（80 引脚为一个）八路可调转换精度的 A/D 口，八路 PWM 输出，91（80 引脚为 59）个离散数字 I/O 口，一个 MSCAN 模块。

MC9S12XS128 的最小系统包含 BDM 接口、RC 复位电路、母板接口、指示 LED、5V 电源接口及晶振，如图 5-5 所示。

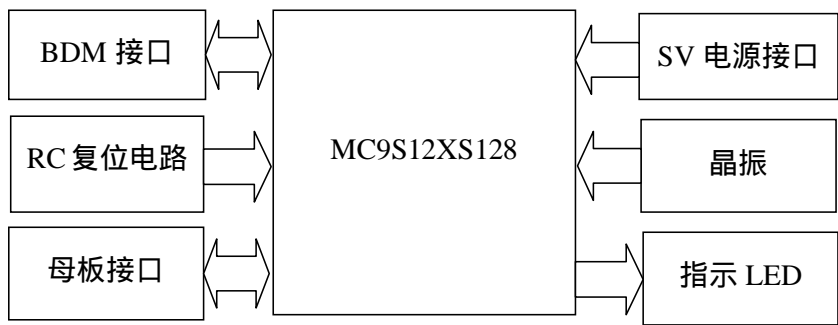


图 5-5 最小系统原理图

5.3.2 电源模块

平衡车行使用一块 7.2V、2A/h 的镍镉电池供电，电力资源比较有限，而电机、舵机在高速运行的过程当中，势必会消耗大量的电能，而电磁传感器部分对电流的变化又十分敏感，所以合理设计电源管理模块就显得尤为重要。+5V 电源是电源模块最重要的部分，因为核心模块工作在这个电压下，另外旋转编码器等也是需要这个电压。

针对线性稳压电源与开关电源存在较高工作压降的问题使得这两类电源调节器件不易广泛应用于便携式移动设备中，本设计采用了一种低压差线性电源芯片 TPS7350 来作为自平衡车的电源调节器件。其电路连接如图 5-6 所示。

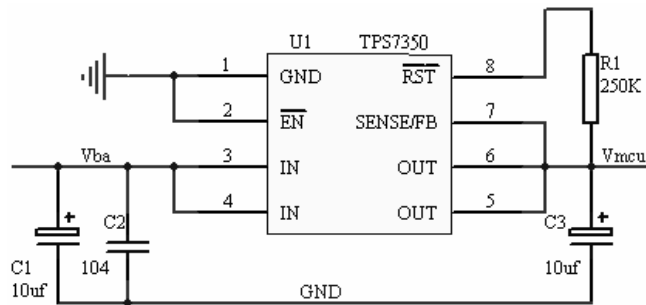


图 5-6 TPS7350 电路连接图

5.3.3 电机驱动模块

小车整体的运行性能主要取决于它的电机驱动模块。小车的驱动不但要求电机驱动系统具有高转矩重量比、宽调速范围、高可靠性，而且电机的转矩—转速特性受电源功

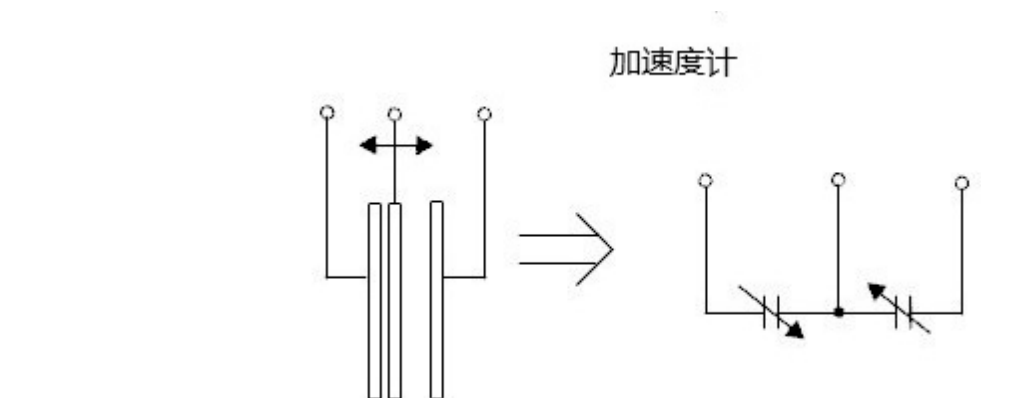


图 5-8 加速度计基本原理图

通过微机械加工技术在硅片上加工形成一个机械悬臂。它与相邻的电极形成了两个电容。由于加速度使得机械悬臂与两个电极之间的距离发生变化，从而改变了两个电容的参数。通过集成的开关电容放大电路测量电容参数的变化，形成了与加速度成正比的电压输出^[10]。MMA7361 是一款三轴低 g 半导体加速度计，可以同时输出三个方向上的加速度模拟信号如图 5-9 所示。

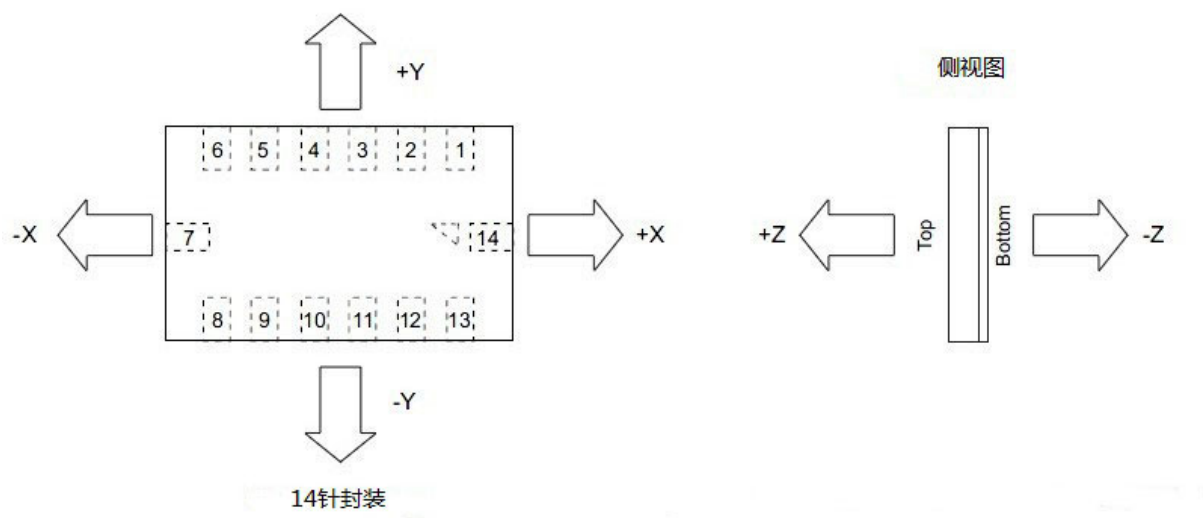


图 5-9 MMA7361 三轴加速度传感器

通过设置可以使得 MMA7361 各轴信号输出在单片机的 AD 采集范围之内，只需要测量其中一个方向上的加速度值，就可以计算出车模倾角，比如使用 Z 轴方向上的加速度信号。车模直立时，固定加速度计 Z 轴在水平方向，此时输出信号为零偏电压信号。当车模发生倾斜时，重力加速度 g 便会在 Z 轴方向形成加速度分量，从而引起该轴输出电压变化。变化规律为式 5-1：

$$\Delta u = gk \sin \theta \approx kg\theta \quad (5-1)$$

式中， g 为重力加速度； θ 为车模倾角； k 为加速度传感器灵敏度系数。当倾角 θ 比较小的时候，输出电压的变化可以近似与倾角成正比。在实际车模运动中考虑到车模本身的摆动所产生的加速度会对实际角度信号产生很大的干扰，它叠加在上述测量信号上使得输出信号无法准确反映车模的倾角，而如果对其进行平滑滤波则会减缓对于车模倾角的控制，因此考虑使用陀螺仪作为另一种获得角度的传感器。

(2) 陀螺仪

陀螺仪可以用来测量物体的旋转角速度，本设计选择的型号为 ENC-03。它利用了旋转坐标系中的物体会受到科里奥利力的原理，在器件中利用压电陶瓷做成振动单元。当旋转器件时会改变振动频率从而反映出物体旋转的角速度。陀螺仪的电路连接如图 5-10 所示。

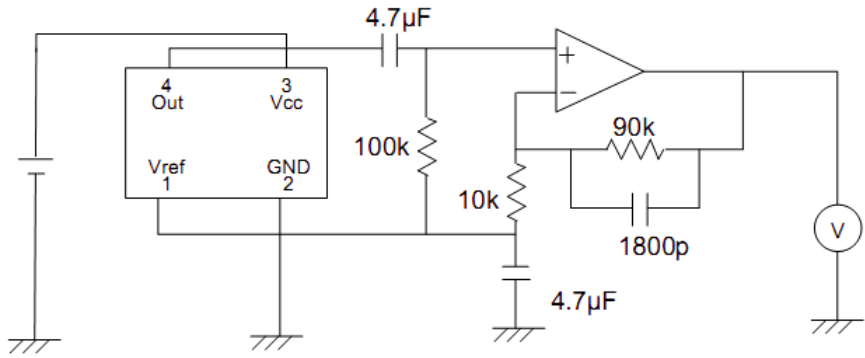


图 5-10 ENC-03RC 电路连接图

ENC-03 不但可以测量静态加速度，还可以测量倾斜角度。它的表面是多晶硅的结构；利用多晶硅来提供加速度所需要的阻力；和其它的传感器一样，它会产生温度漂移；为了克服这一缺点，本设计采用的处理电路如图 5-11 所示。

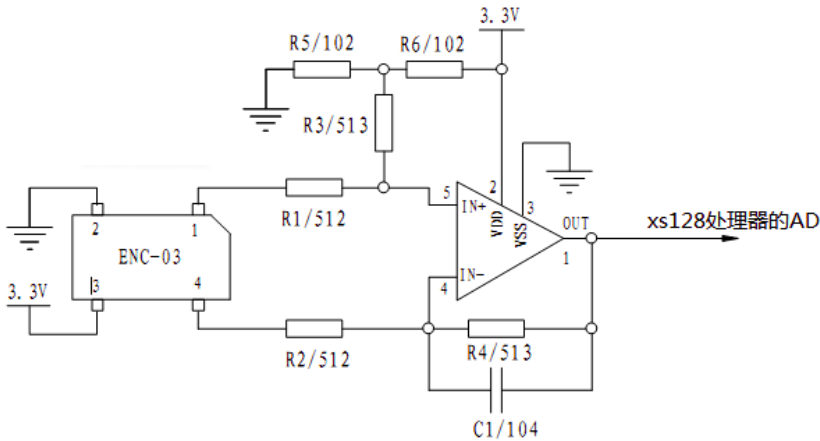


图 5-11 陀螺仪处理电路

5.4 自平衡小车的硬件安装

为了能使车模更平稳的直立，在车模上加装平衡杆；把加速度传感器和陀螺仪的电路板水平固定在小车模型的质心，或者是小车模型的底部，这是因为车模运行时会产生前后振动，这样就可以使测量倾斜角时受到的干扰降到最低；角度传感器的电路板要保持与陀螺仪传感器水平；由于电机在运行过程中会产生剧烈的震动，容易使电机管脚和导线连接处折断，所以需要用扎带将导线和电机固定，使其根部无法晃动，保证电机稳定运转；小车安装完成后如图 5-12 所示。



图 5-12 两轮自平衡小车模型

5.5 自平衡小车的控制研究

系统的各个模块经过测试，工作正常之后，就可以进行系统的联调。通过自平衡车系统在实际运行中的情况，再对系统的各个模块进行调整，以提高系统的整体性能，如反应灵敏度、反应准确度、运行稳定性等^[11]。

噪声对系统稳定性的影响，可采用卡尔曼滤波法抑制。实验中加速度计在滤波前和滤波后的角度误差如图 5-13 所示。

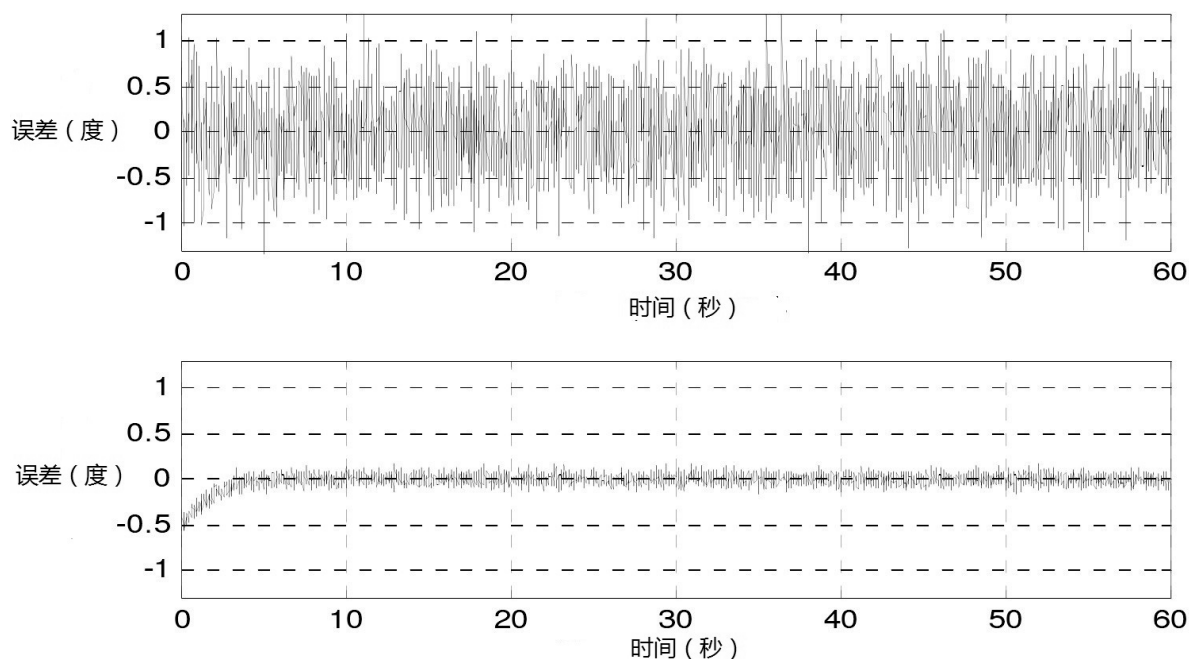


图 5-13 卡尔曼滤波效果图

在加入卡尔曼滤波后，无论加速度计信号还是陀螺信号，都比之前更稳定，误差更小。经过不断测试，使自平衡车系统的性能得以发挥到最佳。

在调试过程中，需要调整程序中的很多参数，获得良好的控制效果，为了提高调试效率，使用了串口示波器，可以通过串口把想要查看的变量发送到上位机，绘制成波形，非常的方便直观^[12]。

保持自平衡小车直立，主要靠获得精确的角度信号，角度通过数据融合得到。陀螺仪和角加速度计的测量值不能直接使用，且在其自身特性和外部干扰的双重影响下会产生误差，测量所得的信号需要进行适当的处理。对信号进行积分是将角速度和角加速度值转换为倾角信号的必要步骤，从方式上可分为硬件积分和软件积分：硬件积分的优点是不受采样频率影响，快速精确，其缺点是精确度对频率要求比较严格，电路比较复杂；软件编程积分的优点是数据处理灵活，其缺点是采样频率会影响精度和处理速度。但对于惯性元件来说无论是软件还是硬件积分都会产生漂移现象。所以在信号处理过程中要尽量避免使用积分功能，或对积分后的信号进行修正。

直立控制采用 PD 控制，倾角乘以比例系数 P，再叠加角速度乘以系数 D，即可控制车辆直立。

首先是角度的获取。先采集原始 AD 信号，进行反三角函数运算，得到真实的角度。

```
acceler=(float)sensor_ad[acc_X];           // 加速度
```

```
gyro=(float)sensor_ad[ang_speed]-T_Zero; // 陀螺仪输出的角速度。
```

```
acceler = acceler / 655; //系数换算： sin = x/g
```

```
acceler = asin(acceler); // 得到的角度单位是弧度
```

```
gyro = (3.1415926/180) * (110*gyro/900); // 角速度
```

然后通过调用 Kalman_Filter()函数，完成角度的融合。

通过卡尔曼滤波器设计的预判，可以有效的控制陀螺仪的零漂，也就是陀螺仪的零点 q_bias 是动态计算出来的，这样有效的克服了陀螺仪的温度漂移，为小车的整体运行稳定打下基础。

```
angle_ += K_0 * angle_err;
```

```
q_bias += K_1 * angle_err;
```

```
angle_dot_ = gyro_m-q_bias;
```

得到精确的角度 $angle$ 和角速度 $angle_dot$ 的值 然后通过 PD 控制输出 PWM 信号控制电机，实现直立。

```
PWM = K_angle*angle + K_angle_dot*angle_dot ;
```

其中， K_angle 和 K_angle_dot 为比例和微分系数，首先调整增大 K_angle 使车辆能够有明显的站立趋势，当 K_angle 较大的时候，车辆会出现前后震荡，此时再逐步增加 K_angle_dot ，消除这种震荡，随着震荡的消除，车辆站立基本稳定。

利用上位机监视软件可以同时观察自平衡小车滤波前后的角度、角速度等信息。其原地站立状态下，输出滤波前的角度值如图 5-14 所示。

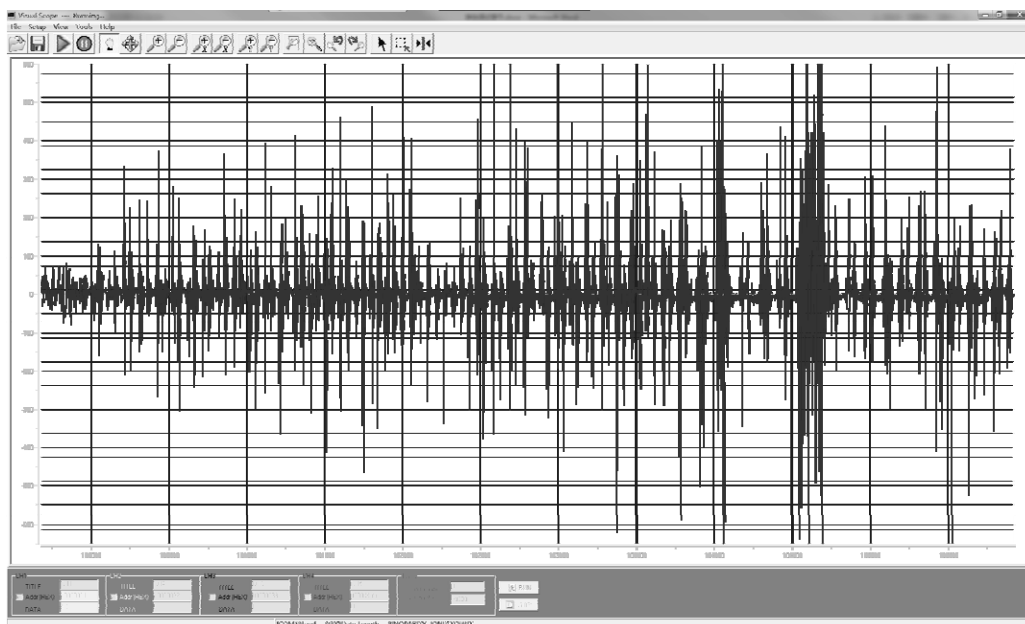


图 5-14 滤波前角度（度）

将 x 轴进行放大，可以看到，原始角度值的振动幅度非常明显，经过滤波后的角度信号非常平滑，如图 5-15 所示。

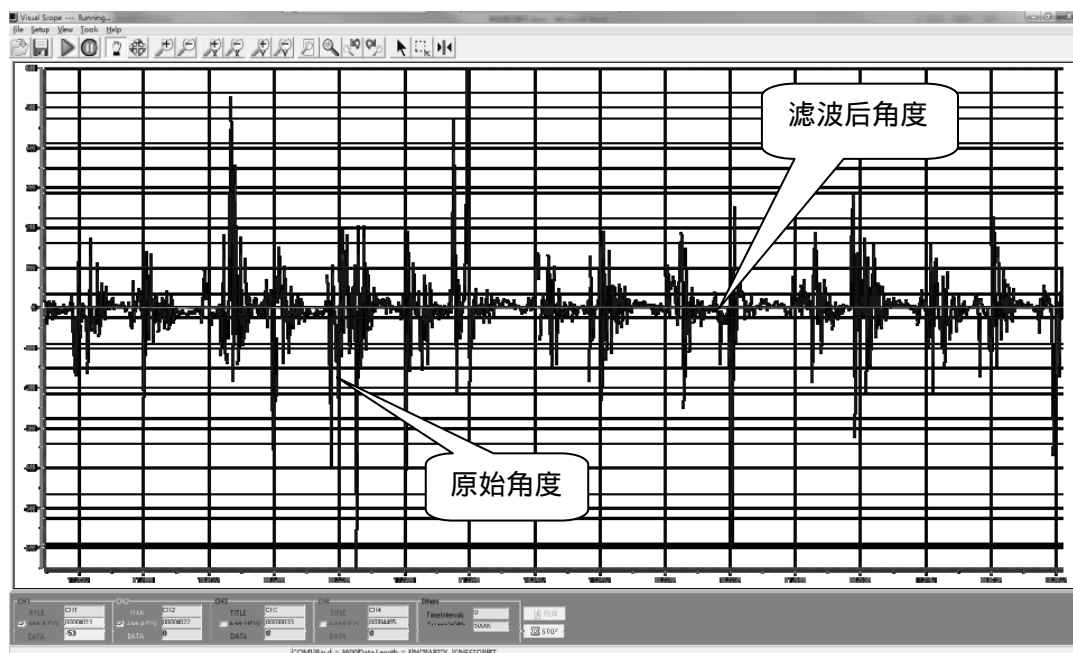


图 5-15 滤波后角度（度）

5.6 小结

本章介绍了硬件系统主要模块的设计原理及设计方法，包括控制模块、电源管理模块、电机驱动模块、舵机驱动模块、传感器模块等，并就具体方案的实现提出了切实有效的解决方案，并采用卡尔曼滤波算法进行信息融合，取得了理想的控制效果。

参考文献

- [1] 童诗白.模拟电子技术基础(第四版)[M].北京:高等教育出版社,2006
- [2] 阎石.数字电子技术基础(第五版)[M].北京:高等教育出版社,2005
- [3] 张晓明.多种多级倒立摆系统控制和仿真环境的研究[D].南京航空航天大学硕士论文,2003.1.
- [4] 刘时鹏.MATLAB 环境下直线单级倒立摆系统实时控制实验的研究与设计[R].重庆大学自动化学院,2004.6.
- [5] 赵莉.单级倒立摆的模糊控制及仿真[J].山东师范大学学报(自然科学版),2004,19(3):102-104.
- [6] RubiJ , RubioA , AvelloA. Swing-up Control problem for a self-erecting double pendulum[C].Proceedings of Control Theory and Applications,2002,149:169-275.
- [7] 庾朝永.基于单片机的直流电机 PWM 调速系统设计与开发[J].长沙:湖南机电职业技术学院.2011,30(6):62-68.
- [8] 阮晓钢,刘江,狄海江等.两轮自平衡机器人系统设计、建模及 LQ 控制[J].现代电子技术,2008,281(18):57-60.
- [9] 段旭东,魏衡华,陈星.基于 DSP 的二轮小车一级倒立摆系统[J].控制工程,2004,11(11):521-524.
- [10] 李航,孙厚芳,韩建海.两轮机器人行走机构的建模与实验[J].北京理工大学学报,2004(12):28-31.
- [11] 高健,黄心汉,彭刚等.基于 Fuzzy-PID 的移动机器人运动控制[J].控制工程,2004,11(6):525-528.
- [12] Y. Ha and S. Yuta. Trajectory Tracking Control for Navigation of Self-Contained Mobile Inverse Pendulum, IEEE/RSJ/GI int. Conf. Advanced Robotic Systems and the Real World. 1994, September, vol. 3. 12-16.

第六章 结束语

倒立摆是一个复杂的不稳定系统，是控制理论教学和科研中典型的物理模型。通过对它的研究可以解决控制理论中的抽象概念，如稳定性、快速性、鲁棒性等；对倒立摆系统的研究涉及到力学、电学、数学、计算机科学、机械学等领域的综合应用；此外，在控制方法的研究和应用中，倒立摆系统可以为控制理论通往实践提供一个桥梁。总结全文，主要取得的成果有以下几点：

（1）要实现倒立摆系统的稳定控制，首先要建立其数学模型。主要介绍了倒立摆系统传统的数学建模方法，分析了不同建模方法的优劣，采用了拉格朗日方法分别对直线一级和二级倒立摆系统进行详细的数学建模，并进行可控性和可观性分析。本文另辟蹊径，提出了一种基于 SimMechanics 的建模方法，建立了直线倒立摆系统的机构模型。以直线二级倒立摆系统的 SimMechanics 模型为例，设计了基于卡尔曼滤波的 LQR 控制器，并取得了良好的控制效果。

（2）在直线一级倒立摆 SimMechanics 模型的基础上，提出了基于虚拟现实技术的控制理论在课程教学中的应用，并在实践中取得了较好的教学效果。

（3）基于对倒立摆系统工作原理及控制方法的深入研究，本文成功设计了一辆两轮自平衡小车。主要包括控制器模块、电源模块、电机驱动模块、姿态传感器模块等部分的设计及硬件安装。针对实验过程中遇到的噪声影响、器件稳定性和精度等问题提出了解决方案。采用卡尔曼滤波算法有效抑制了噪声的影响，并成功控制了自平衡小车的站立。

对于倒立摆的控制问题，本文虽得了一些进展，但还有许多值得改进的地方需要在今后的工作中继续努力，有待进一步改进的问题和方向：

（1）倒立摆系统是一个非线性对象，对非线性控制理论做进一步研究是今后工作的一个重要方向，尤其是如何有效实现非线性系统的控制；

（2）在自平衡小车系统硬件设计和软件开发的研究上需要做进一步的完善，为深入研究先进控制策略提供更加好的实验平台。

攻读硕士期间主要科研成果

- 1 Tang le ,Zhang lei ,Ru feifei. SimMechanics Model and LQR Control for Linear Double Inversed Pendulum Based on Kalman Filter. 2012 International Conference on Systems and Informatics , IEEE ICSAI 2012,462-464.
- 2 茹斐斐,张镭,汤乐。基于 SimMechanics 的直线六级倒立摆 LQR 控制研究。河南大学学报(自然科学版) 2012.11,42(6):703-707.
- 3 Ru feifei ,Zhang lei ,Tang le ,Huang yanhai ,Zhang pengpeng. Design and Research of Double Closed-Loop Control Strategy for Inverted Pendulum System. 2013 Third International Conference on Intelligent System Design and Engineering Applications, IEEE ISDEA2013, 550-553.
- 4 张镭,汤乐,茹斐斐。基于虚拟现实技术的控制理论课程教学方法研究。新乡学院学报(自然科学版) 2013.4,30(2):81-30.

致 谢

硕士研究生生活马上就要结束了，回想这三年的时间真是感慨万千。记得刚来到河南大学时，心里暗许诺言：一定要利用好这三年的时间，努力学好知识绝不辜负硕士研究生这个称号。只是时间过的太快，好多目标还未达成就要离开这个美丽的校园了。在这里我祝愿母校能够越来越好，祝愿帮助过我的老师、同学和朋友们一些顺利。

本文是在导师张镭副教授的悉心指导下完成的，从论文的选题、设计、写作、修改以及最后的定稿，期间都凝聚着导师的巨大心血。导师在学术上视野开阔，思维科学严谨，学术视角独特，求学精神谦虚，使我受益匪浅；开题阶段给了我很多建设性的思路，对我日后论文的写作产生了很大的启迪；张老师在写作的关键阶段给了我充分的肯定，使我有信心沿着既定的思路做下去；导师谦虚严谨的科学态度，孜孜不倦的工作作风是我学习的榜样。在此我衷心的感谢导师给予我的帮助。

在课题研究过程中，我还得到了陈立家、张彦波、张锦龙等老师的帮助，在此也要向他们表示诚挚的感谢！同时，还有和我一起度过三年研究生生活的茹斐斐、赵贺伟、魏慧颖、张淑芳、王翔伍等同学，我们在同一个实验室里共同成长，共同努力，克服重重困难完成了科研任务，我会永远怀念这段美好时光。还有黄彦海、张鹏鹏、项伍锋、王科强、李浩、刘修龙几位师弟，虽然是师弟，但能力却相当不俗，动手能力很强，做事认真负责，在科研上我们认真讨论，相互学习，他们的新思路、新思维对我有很大的帮助。感谢在读硕士期间给予过我帮助的同学好友，感谢你们和我共同度过这段美好时光。

还要感谢担任本论文评审和评阅的各位专家、教授，感谢你们对本论文提出宝贵的意见和建议。

汤乐

2013 年 5 月

民善
新至
德於
明止