**平衡步兵动力学模型**

机器人的动力学和运动学模型是实现机器人控制策略的基础。想要完成对两轮自平衡机器人控制系统的设计，需要根据两轮自平衡机器人的运动特点和结构特点进行分析， 建立准确可靠的数学模型。机器人动力学建模有两种具有代表性的方法：牛顿力学法和拉格朗日函数法。

拉格朗日函数法依据 Hamilton 原理，利用标量代替矢量，对总动量和总势能进行分析，建立动力学模型。这种方法运用能量方式建模，不需要对内向力进行分析。

牛顿力学法运用牛顿定律和动量矩定理对各部分刚体的受力情况进行隔离分析， 然后建立相邻刚体间的内力项，最终得到系统的动力学模型。牛顿力学建模法可以表达出系统完整的受力关系，有明确的物理意义，该方法建立的模型易于被控对象控制策略的设计。本节针对两轮机器人采用牛顿力学法建立动力学模型。

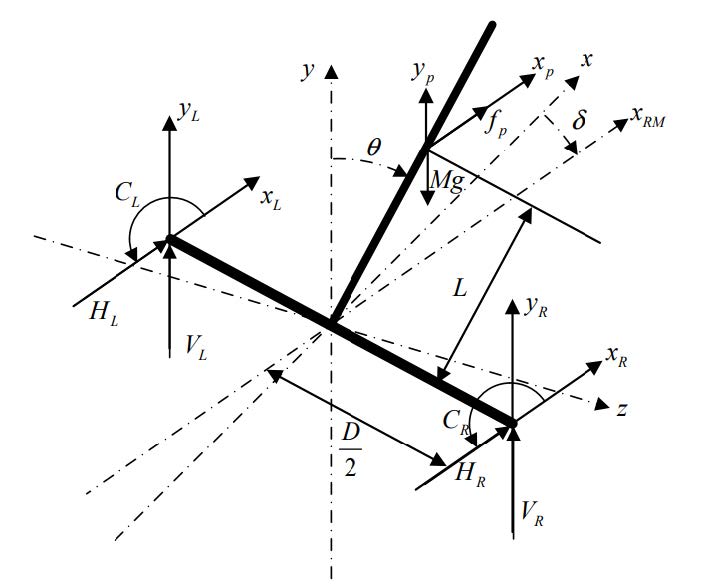
由于机器人不是线性的，并且具有不稳定的性质，而且具有一定耦合性的系统。机器人的构造结构和它的运动的方式是很复杂的，这样难以精确地去建立其数学模型，所以为了简化难度去分析系统，建立可行性的近似的系统模型，在一定范围内，我们允许忽略掉系统的弹性误差、信号干扰、机体和车轮之间的作用等。为了简化难度去分析系统，做了一些简化，简化的思想如下:

1. 在机器人运动的过程中不会发生跳跃，也就是不会离开地面，左右轮不会产生滑动，无论是左右滑动还是前后滑动，只能是滚动；

2. 使用机器人时，电机会有转动的摩擦，电机内部会有电感，电机在 不加负载的情况下产生的阻碍转矩，这些我们都要忽略。在这种情况下电机 的转矩就是电磁转矩；

3. 使用机器人时，齿轮间空隙和倾角仪、陀螺仪等引起的噪声都不关心；

4. 只关心由摩擦产生的力和力矩，忽略其它



平衡步兵机器人系统车体重心位于两轮转轴轴线之上，若不对其进行任何控制，那么机器人车体将会向前或向后倾倒。为了保护机器人，在旁边安装了保护机器人的支架，安装与机器人本体的夹角大约为 25°，转化为弧度即为0.43rad。

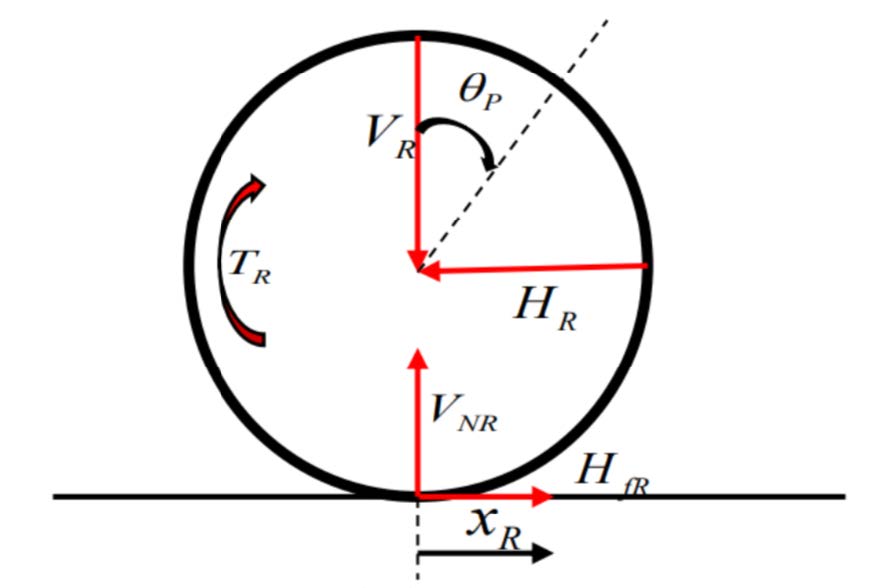
平衡步兵机器人类似于倒立摆结构，由左右两个驱动轮和车体两部分组成。左右两轮由电机独立驱动并且在同一轴线上。如图所示建立两轮自平衡机器人空间直角坐标系。以两轮轮轴中心为坐标原点，机器人水平移动方向为 x 轴，z 轴为机器人的两轮轴向方向并从左轮指向右轮， y轴为经过两轮轴中心点的竖直向上方向，坐标系满足右手法则。

其底盘结构主要由车体和双轮两部分组成，可以看成一个移动的倒立摆。下面分别对平衡步兵的车轮和车体进行力学分析，建立动力学模型，最后，通过对两者的分析给出系统的状态空间表达式。

**车轮模型**

两轮机器人左右两轮受力分析图如图所示，机器人水平方向的合力即车轮与地面的摩擦力以及车身与车轮的水平作用力的矢量和。

平衡步兵的运动是通过车轮转动来实现的，我们选用的是一对同轴安装，参数(质量、转动惯量、半径)相同的车轮。以右轮为例进行受力分析：



车轮的运动可分解为平动和转动，则由牛顿第二定律可得

由刚体定轴转动定律可得

|  |  |
| --- | --- |
| 公式量 | 意义 |
| m | 左轮、右轮各自的质量(kg) |
| r | 左轮、右轮各自的半径(m) |
| xL,xR | 左轮、右轮的水平位移(m) |
| x | 车体中心的水平位移(m) |
| HfL,HfR | 左轮、右轮受到地面的摩擦力的大小(N) |
| HL,HR | 左轮、右轮受到车体作用力的水平分力的大小(N) |
| TL,TR | 左轮、右轮电机输出转矩的大小(N ∙ m) |
| I | 车轮的转动惯量(kg ∙ m^2 ) |
| wL,wR | 左轮、右轮的角速度的大小(rad/s) |

联立(1)和(2)，消去HfL，可得

在车轮不打滑的情况下，车轮移动速度的大小和转动速度的大小成比例关系，即

将方程(4)代入(3)中，可得

由于左右轮的参数相同，则对左轮也可以得到相似的结果，即

**车体模型**

与车轮的运动类似，车体的运动也可以分解为正向运动（前向、俯仰）和侧向运动（转向、偏航）。其中，偏航运动可以看成是转向运动的特殊情况，因此，主要分析车体的正向运动和转向运动。

**正向运动**

为了易于分析，对车体模型进行简化，简化后的模型如图所示

图片包含 物体, 游戏机, 挂, 滑雪

描述已自动生成

小车的正向运动可以分解为前向运动和绕车体质心 P 的相对转动（俯仰）。小车底盘中心 O 的水平位移为

将方程(5)和(6)相加后，等式两边除以 2 可得

联立方程(7)(8)可得

对车体，由牛顿第二定律可得

在水平方向上，有

在竖直方向上，有

对车体，由刚体定轴转动定律可得

式中

|  |  |
| --- | --- |
| 公式量 | 意义 |
| M | 整个机器人的总质量(kg) |
| l | 机器人机体重心到 z 轴的距离(m) |
| Jp | 车体绕质心转动时的转动惯量(俯仰)(kg ∙ m2 )=(1/3)\*Ml^2 |
| θp | 机器人机体与 y 轴的夹角(rad) |

联立方程(9)(10)

方程(13) 就是机器人的非线性数学模型，根据牛顿力学方程得到的。

目前，由于对非线性控制系统没有一个实用的成熟的非线性控制理论来分析它的性能，所以我们把目标转向了线性控制理论，因为它的应用已经十分广泛，并且已经有着一套十分成熟的科学体系，能够为我们解决非线性系统提供帮助。因此，我们要用线性化之后的系统模型去代替原来的非线性系统的模型，然后利用线性分析的成熟的体系简化非线性系统的模型，降低解决非线性系统复杂模型的难度，但是还是要在合理的效果之内，若是简化之后不能够达到控制要求，那么简化就是失去了意义。根据线性化数学模型设计出来的控制器应用在原来的非线性数学模型中，理论上都会有比较好的控制效果，这样就简化了非线性系统的难度，为解决非线性系统遇到的问题提供了一种可行性方案。

下面是如何简化系统的非线性系统模型，具体的线性化过程如下：

在平衡点周围可以近似的认为有θ ≈ 0 ，则有 sinθ ≈θ,cosθ ≈1，则有

故方程(13)变为

将方程(10)和(11)代入方程(12)中，可得

的，对方程(15)进行线性化可得

将方程(16)代入方程(14)中，消去可得

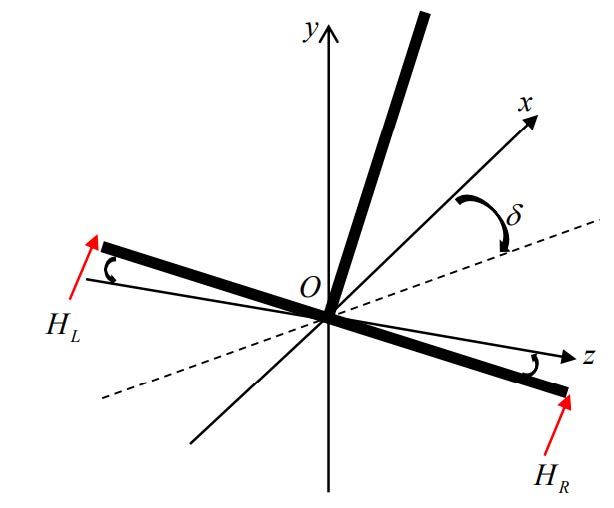
将方程(14)代入方程(16),消去,可得

综上所述，对于正向运动有

式中

**转向运动**

与正向运动类似，我们也可以建立简化后的转向运动模型，如图所示



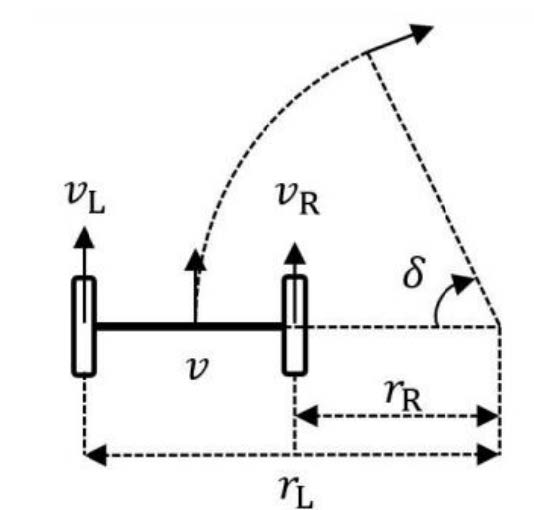
转向运动是由于左右两车轮从水平方向上施加给车体的反作用力的大小HL和HR不相等引起的，则由刚体定轴转动定律可得

式中

|  |  |
| --- | --- |
| 公式量 | 意义 |
| d | 左轮、右轮两个轮子间的距离(m) |
| Jδ | 车体绕 y 轴转动时的转动惯量(kg ∙ m2 )=(1/12)\*MD^2 |
| δ | 机器人机体与 x 轴的夹角(小车的偏航角)(rad) |

将方程(5)和(6)相减后可得

当左右两轮运动速度不相等时，小车身转向，如图所示。由几何关系可得



位移的表达式

转角的表达式

并且

得到

解得

对方程(23)两边同时求导得

联立方程(20)(21)(24)可得

**系统状态方程以及解耦**

由方程(19)和(25)可得系统的状态方程为

由方程(19)(25)可得，矩阵中的元素为

由机器人系统模型的状态方程可知系统输入为左右两轮控制扭矩，是双输入系统，为了方便分析与控制器的设计，现在把该系统解耦成为平衡控制和转向控制两个单输入的系统，根据两轮机器人运动学模型可知：

**注意：这里可推出TL=0.5Tθ,即Tθ=2TL**

由方程(26)和(27)可得：

分解上式可以得到平衡子系统和转向子系统，并且两者之间是相互独立的

平衡子系统：

假定 Tl = Tr = Tlr ，替换Tl，Tr , 为Tlr 可以得到机器人的二自由度的线性数学模型为：

式中

|  |  |
| --- | --- |
| **公式量** | **意义** |
| Tl,Tr | 二自由度子系统 1 左边、右边电机控制时的各自输出转矩 |

以速度和倾角为输出，那么输出方程为：

下面的研究对象主要就是这个二自由度数学模型

转向子系统：

以偏航角为输出，那么输出方程为：

**注意：方程(26)中的B62=-B61，方程(28)和(32)中的B62=B61**

从上面的方程(29)和(32)可知，原来的系统是有两个输入，经过处理后可以得到两个子系统，方程(29)为子系统1，这个系统是用 Tθ 控 制机器人的位移 x 和倾角θ，Tθ 即是系统1的相应的输入转矩。同理方程(32)为子系统2，这个系统用 Tδ 控制机器人的转角δ。

**平衡步兵模型系统分析**

**稳定性分析**

系统稳定性指的是系统受到外界干扰而偏离原来的状态，当去掉扰动后系统可以恢复到平衡状态的一种能力。稳定性是平衡机器人系统重要特性之一。对于任何一个系统，都要先考虑系统是否是稳定系统， 对于稳定系统要怎么样去提高系统的稳定性，能够更好的稳定。对于不稳定系统怎样去控制使得系统能够稳定。

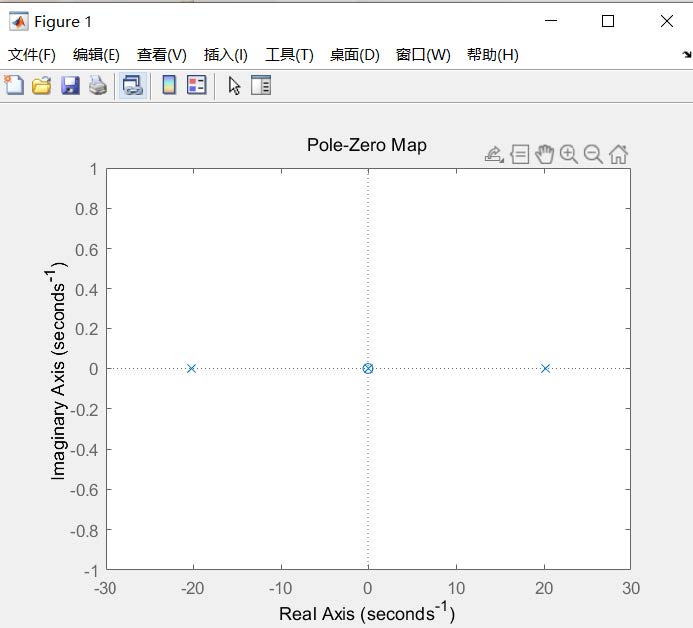
根据李雅普诺夫第一法则，在线性定常系统中，如果系统矩阵A的所有特征值都具有负实部，那么系统的平衡状态都是渐近稳定的。由上面方程（30），可知系统的状态矩阵为

表格

描述已自动生成

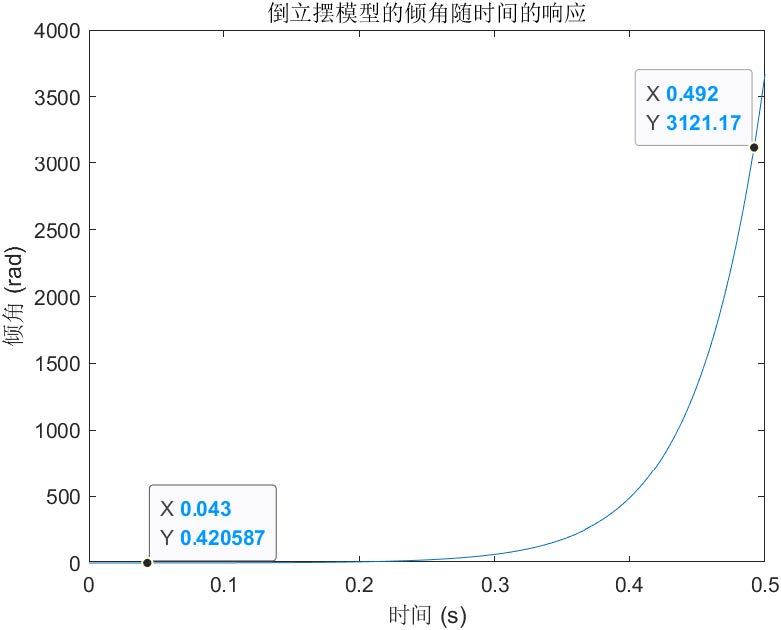
经过计算可以得到矩阵A的特征值:[0 0 20.2095 -20.2095]，其中含有正实根，说明系统是不稳定的，只有对系统 加以控制，才能使其保持平稳的运动。

应用 MATLAB 函数，根据线性方程(30)和线性方程(31)可以制作出系统的极点分布图



从图中可以知道，极点不仅存在于以零点为分界的左边这半部分，并且在以零点为界的右半部分也存在。分析可以知道若不对机器人进行控制，它就不会自己站立，即它是个不稳定系统。所以十分有必要去设计控制器来对该系统进行控制，能够让该系统在没有外力的情况下自主的去保持到平衡稳定的状态。利用 MATLAB 对于上述模型进行分析，当初始条件为X0=[0 0 0.1 0 ]T，观察系统在u =0，即零输入下的响应情况：

|  |
| --- |
| %% 稳定性分析，生成极点图和系统响应  % 初始条件  x0 = [0; 0; 0.3; 0];  % 生成状态空间模型  sys = ss(A, B, C, D);  % 计算特征向量  [V, D] = eig(A); % V是特征向量矩阵，D是特征值矩阵  figure;  % 画极点分布图  pzmap(sys);  title('系统极点图'); |



两轮平衡机器人初始很小的弧度，在没有外界控制的情况下会导致系统无法稳定， 从而验证了两轮机器人是个天然不稳定系统，需要增加外界的控制才能使其保持稳定。

**能控性分析**

对于线性连续定常系统：

式中：X ----- n 维状态向量，n ----- p维输入向量，A 、B-----分别为n n × 和n p × 常值矩阵。

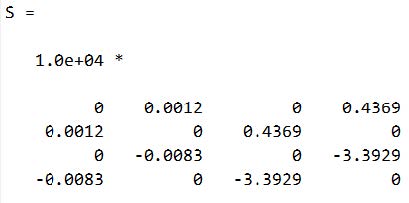
如果在有限的时间 t ∈[t0 , tf] 里，存在一个控制向量 u (t) ，能够从初始状态 x(t0) 转移到指定状态 x(tf)，则称在 t0 时刻状态 x(t0) 能控。如果系统中所有的非零状态都为能控的，则称系统是可控的。

系统完全可控的充分必要条件是：

其中，n 为矩阵A的维数，若 rank(S) = n ，即满秩时，系统状态能控；否则系统不可控

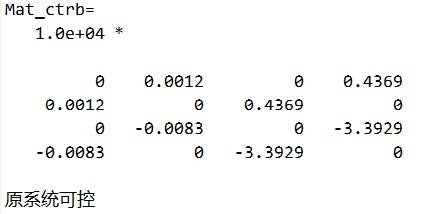
其中，S称为系统的可控判别阵

根据系统的平衡子系统状态方程(30)，使用 MATLAB 函数S=ctrb(A,B)，得到平衡子系统的能控性判别矩阵：



再根据rank=(S)命令求得rank=(S)=4，能控判别矩阵满秩可知平衡子系统是能控的。

|  |
| --- |
| %% 能控性分析  Mat\_ctrb=ctrb(A,B);  if rank(Mat\_ctrb)==4 % 判断是否满秩，这里的系统是4阶的，于是判断是否等于4  disp('Mat\_ctrb=');  disp(Mat\_ctrb); % 打印可控性矩阵  disp('原系统可控');  else  disp('原系统不可控');  end |



**能观性分析**

对于线性连续定常系统：

式中： x ----- n 维状态向量，u ----- p维输入向量，y ----- q维输出向量，A、B、C-----分别为n × n ，p ×n ，n × q 常值矩阵。

对于任意的输入u(t)，根据t ∈[t0 , tf]（tf>t0）期间的输出 y(t) 可以唯一地确定系统在初始时刻的状态x(t0) ，则称系统在t ∈[t0 , tf]内是能观测的。如果对于所有 tf>t0 系统都是可观测的，那么称系统在[t0,∞)完全可观测。

系统完全可观的充分必要条件是：

其中

称为系统的可观判别矩阵。

在 MATLAB 中利用函数V=obsv(A，C)命令可以得到能观性判别矩阵Vθ，求得 rank(Vθ)=4，所以平衡子系统系统的线性化数学模型是可观测的。同样，对于转向子系统状态方程得到该系统能观性判别矩阵Vδ ，根据rank(Vδ)=2，可以判断转向子系统是能观的。

|  |
| --- |
| %% 能观性分析  Mat\_obsv=obsv(A,C);  if rank(Mat\_obsv)==4 % 判断是否满秩，这里的系统是4阶的，于是判断是否等于4  disp('Mat\_obsv=');  disp(Mat\_obsv);  disp('原系统可观测');  else  disp('原系统不可观测');  end |

