平面向量与三角形四心的交汇

一、四心的概念介绍

（1）重心——中线的交点：重心将中线长度分成 2：1；

（2）垂心——高线的交点：高线与对应边垂直；

（3）内心——角平分线的交点（内切圆的圆心）：角平分线上的任意点到角两边的距离相等；

（4）外心——中垂线的交点（外接圆的圆心）：外心到三角形各顶点的距离相等。

二、四心与向量的结合

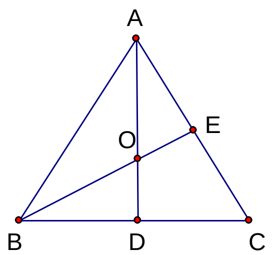
（1）$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow O$ 是 ΔABC 的重心.

证法 1：设 $O(x,y),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1-x)+(x_2-x)+(x_3-x)=0\\(y_1-y)+(y_2-y)+(y_3-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\\y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\end{cases}\Leftrightarrow O\text{ 是 }\Delta ABC$$

的重心.

证法 2：如图



$\because \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

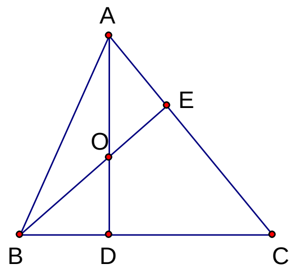
$\therefore \overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$

$\therefore A$、O、D 三点共线，且 O 分 AD 为 2：1

$\therefore O$ 是 ΔABC 的重心

（2）$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow O$ 为 ΔABC 的垂心.

证明：如图所示 O 是三角形 ABC 的垂心，BE 垂直 AC，AD 垂直 BC，D、E 是垂足.$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$



$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$

同理 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow O$ 为 ΔABC 的垂心

（3）设 a,b,c 是三角形的三条边长，O 是 Δ ABC 的内心

$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow O$ 为 ΔABC 的内心.

证明：$\because \dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}$、$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，

$\therefore \dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b}$ 平分 $\angle BAC$，

$\therefore \overrightarrow{AO}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b})$，令 $\lambda=\frac{bc}{a+b+c}$

$\therefore \quad \overrightarrow{AO}=\frac{bc}{a+b+c}$（$\frac{\overrightarrow{AB}}{c}+\frac{\overrightarrow{AC}}{b}$）

化简得 $(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\therefore a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

（4）$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right| \Leftrightarrow O$ 为 ΔABC 的外心。

三、典型例题：

例 1：O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的（　　）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

例 2：O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的（　）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

例 3：1) O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos C})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则点 P 的轨迹一定通过 ΔABC 的（　　）

A．外心　　B．内心　　C．重心　　D．垂心

2) 已知 O 是平面上的一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的(　　)

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

3) 已知 O 是平面上的一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C})$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的(　　)

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

例 4、已知向量 $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},\overrightarrow{OP_3}$ 满足条件 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$，求证：$\triangle P_1P_2P_3$ 是正三角形．

例 5、 ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 m =_________.

例 6、点 O 是三角形 ABC 所在平面内的一点，满足$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OA}$，则点 O 是$\Delta ABC$的（ ）.

A．三个内角的角平分线的交点　　　　B．三条边的垂直平分线的交点

C．三条中线的交点　　　　D．三条高的交点

例 7 在$\triangle \mathrm{ABC}$内求一点P，使$AP^2+BP^2+CP^2$最小．

例 8 已知O为$\triangle \mathrm{ABC}$所在平面内一点，满足$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$，则$O$为$\triangle \mathrm{ABC}$的______心．

例 9.已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

例 10 .已知 O 为△ABC 所在平面内一点，满足$|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2$，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 垂心　　B. 重心　　C. 内心　　D. 外心

例 11 已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{CA}=0$，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

例 12：已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若$a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

例 13：已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若$\overrightarrow{PO}=\dfrac{a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$(其中 P 是△ABC 所在平面内任意一点)，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

四、配套练习：

1．已知 ΔABC 三个顶点 A、B、C 及平面内一点 P ，满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ ，若实数 λ 满足：

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AP}$，则 λ 的值为（　　）

A．2　　　B．$\dfrac{3}{2}$　　　C．3　　　D．6

2．若 ΔABC 的外接圆的圆心为 O，半径为 1，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　　　B．0　　　C．1　　　D．$-\dfrac{1}{2}$

3．点 O 在 ΔABC 内部且满足 $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 ΔABC 面积与凹四边形 $ABOC$ 面积之比是（　　）

A．0　　　B．$\dfrac{3}{2}$　　　C．$\dfrac{5}{4}$　　　D．$\dfrac{4}{3}$

4．ΔABC 的外接圆的圆心为 O，若 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，则 H 是 ΔABC 的（　　）

A．外心　　　B．内心　　　C．重心　　　D．垂心

5．O 是平面上一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，若 $\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{AB}^2$，则 O 是 ΔABC 的（　　）

A．外心　　　B．内心　　　C．重心　　　D．垂心

6．ΔABC 的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，

则实数 m =________

7．(06 陕西)已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足: $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\bullet\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\bullet\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=-\dfrac{1}{2}$，则△ABC 为(　　)

A．三边均不相等的三角形　　B．直角三角形

C．等腰非等边三角形　　D．等边三角形

8．已知 ΔABC 三个顶点 A、B、C，若 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$，则 ΔABC 为（　　）

A．等腰三角形　　B．等腰直角三角形

C．直角三角形　　D．既非等腰又非直角三角形

9.已知 O 是平面上一定点,A、B、C 是平面上不共线的三个点,动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$\lambda\in[0,+\infty)$.

则 P 点的轨迹一定通过△ABC 的(　)

A. 外心　　　B. 内心　　　C. 重心　　　D. 垂心

10.已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ = **0**, 则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　　B. 内心　　　C. 重心　　　D. 垂心

11.已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若 $\overrightarrow{PO}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$(其中 P 为平面上任意一点), 则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　　B. 内心　　　C. 重心　　　D. 垂心