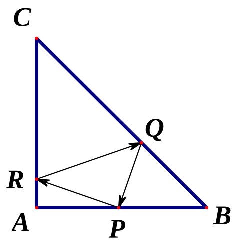
一、　　坐标法。

坐标法应该是处理平面向量问题的重要方法，只要能够建立直角坐标系，把点的坐标表示出来，则向量的坐标就可以求得出来，从而平面向量的四大常见问题：平行、垂直、夹角、模长都可以套用相应的公式解决。

例 1.（2011 年天津理 14）已知直角梯形中，$ABCD$ 中，$AD \| BC$，$\angle ADC=90°, AD=2,\ BC=1$，$P$ 是腰 DC 上的动点，则 $\left|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}\right|$ 的最小值为__________.

例 2（2013 年湖南理，8）在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC=4$，点 P 是边 AB 上异于 A, B 的一点，光线从点 P 出发，经 BC, CA 反射后又回到点 P（如图 2）。若光线 QR 经过 $\triangle ABC$ 的重心，则 AP 等于（　　）

A. 2 B. 1 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{4}{3}$



（2017 年全国卷 II，12,5）已知 ΔABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小是（　　）

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$　　C. $-\frac{4}{3}$

D. -1

【答案】B

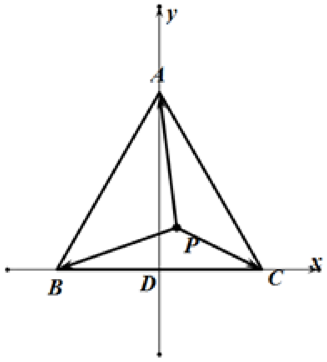
【解析】

试题分析：以BC为x轴，BC的垂直平分线AD为y轴，D为坐标原点建立坐标，则$A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，

$C(1,0)$，设$P(x,y)$，所以$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$

所以$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-2x,-2y)$，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2y(\sqrt{3}-y)=2x^2+2(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2-\frac{3}{2}\geq-\frac{3}{2}$

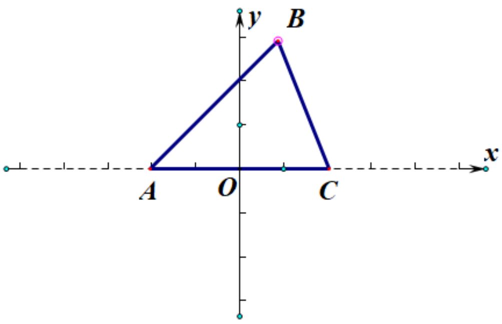
当$P(0,\frac{\sqrt{3}}{2})$时，所求的最小值为$-\frac{3}{2}$，故选 B。



【考点】 平面向量的坐标运算；函数的最值

【名师点睛】平面向量中有关最值问题的求解通常有两种思路：一是"形化"，即利用平面向量的几何意义将问题转化为平面几何中的最值或范围问题，然后根据平面图形的特征直接进行判断；二是"数化"，即利用平面向量的坐标运算，把问题转化为代数中的函数最值与值域、不等式的解集、方程有解等问题，然后利用函数、不等式、方程的有关知识来解决。

（2018 年第二次天一联考河南卷理科, 16, ,5）在面积为 2 的$\triangle ABC$中$BC^2+2AC^2+AB^2$的最小值为_______________.



如图平面直角坐标系中$\triangle ABC$，设点$A(-\frac{b}{2},0)$，$C(\frac{b}{2},0)$，$B(x,y)$

$AC^2=b^2$，$BC^2=(x-\frac{b}{2})^2+y^2$，$AB^2=(x+\frac{b}{2})^2+y^2$，则

$$BC^2+2AC^2+AB^2=(x+\frac{c}{2})^2+y^2+(x-\frac{c}{2})^2+y^2+2b^2$$

$$=\frac{5}{2}b^2+2(x^2+y^2)$$

$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}by=2$，则 $y=\frac{4}{b}$，则 $BC^2+2AC^2+AB^2=\frac{5}{2}b^2+\frac{32}{b^2}+2x^2$

$\geq 2\sqrt{\frac{5}{2}b^2\cdot\frac{32}{b^2}}+2x^2=8\sqrt{5}+2x^2$，当且仅当 $\frac{5}{2}b^2=\frac{32}{b^2}$，即 $b^2=8\sqrt{5}$ 取的等号，当 $x=0$ 时，取得最小值，此时点 B 在 y 轴上，$\triangle ABC$ 为等腰三角形。

二、　　几何意义法。

除了代数的坐标法之外，几何意义法、数形结合法也是处理平面向量的重要方法，向量的加法、数乘及模长都具有明显的几何意义。

例 3.已知 $|b|=1$，非零向量 $\vec{a}$ 满足 $\langle\vec{a},\vec{a}-\vec{b}\rangle=120°$，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围_______.

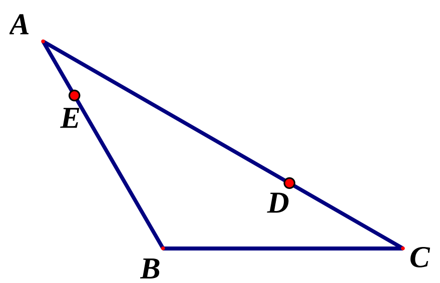
例 4.已知 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}=(2,0)$，$\overrightarrow{OC}=(2,2)$，$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，则 $<\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}>$ 的取值范围为______。

三、　　基向量法。

例 5.（2013 年天津）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点，若 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB 的长为________.

(2018 年高三第二次天一联考理，6)6.如图在 $\triangle ABC$ 中，$BA=BC=3$，$\angle ABC=120°$，点 D 在线段 AC 上，且 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$，点 E 在线段 AB 上，且 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 则，$\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{BD}=$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{11}{4}$　　D. 3



（2018 年河南八市重点高中高三第二次联合测评）在等腰梯形 ABCD 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，点 E 是线段 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 $\lambda+\mu=$（　　）

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\frac{5}{4}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

（2017 年湖北省黄冈市浠水实验中学四模理，10,5）在 ΔABC 中，$\angle BAC=60^0$，$AB=5,AC=6,D$ 是线段 AB 上一点，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-5$，则 $|\overrightarrow{BD}|$ 等于（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

四、　共起点法。

前面三种方法是解决平面向量问题的最主要的方法，应该优先选择，如果这三种方法还不能解决问题，再尝试试用后面这几种方法。

所谓共起点法，就是将题目所给条件全部转化为某一相同点作为起点的向量表示，再利用所给关系列出不等式求解。

例 6.（2013 年重庆理科 10）在平面上，$\overrightarrow{AB_1}\perp\overrightarrow{AB_2}$，$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|=1$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{AB_2}$，若 $\left|\overrightarrow{OP}\right|<\frac{1}{2}$，则 $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ 的取值范围是（　　）

A. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ B. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{7}}{2}\right]$ C. $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},2\right]$ D. $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},2\right]$

五、平方法

例 7（2013 年安徽）若非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=3\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角的余弦值为________.

（2018 年河南名校联盟理科，13）已知平面向量 $\overrightarrow{m}$、$\vec{n}$ 满足 $\left|\overrightarrow{m}\right|=4$，$\left|\vec{n}\right|=\sqrt{5}$，若 $(\overrightarrow{m}+\vec{n})\perp(\overrightarrow{m}-3\vec{n})$，则 $\overrightarrow{m}$、$\vec{n}$ 的夹角的余弦值为__________．

（2017 年河南重点高中八市测评理，13，5）若平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 $90°$，$\vec{a}=(2,0)$，$\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=$______

（2018 年河南重点高中八市测评理，13,5）已知非零向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{3}\left|\vec{a}\right|$，则 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为________．

（2017 年河南名校高三压轴第二次考试理，13,5）设平面向量 $\overrightarrow{m}$ 与向量 $\vec{n}$ 互相垂直，且 $\overrightarrow{m}-2\vec{n}=(11,-2)$，若 $\left|\overrightarrow{m}\right|=5$，则 $\left|\vec{n}\right|=$__________．

（2017 年河南郑州高三下学期三模理，14, 5）已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 30^0，且 $\left|\vec{a}\right|=1$，$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=1$，则 $\left|\vec{b}\right|=$__________．

（2017 年周口市高三上学期期末抽测调研，13,5）.已知平面向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，且

$\left|\vec{b}\right|=1,\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=2\sqrt{3}$，则$\left|\vec{a}\right|=$ ________ 。

六、点乘向量法。

例 8.（2009 年安徽，理）给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为$120°$，如图所示，点C在以O为圆心的圆弧AB上变动。若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x,y\in R$，则$x+y$的最大值为________.