1 Tło

$\mathbb{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym, jak się okazuje, jest on zbyt mały, by mówić o granicach ciągów o wyrazach wymiernych - ciąg $(\frac{1}{1}, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000})$ "zmierza"do $\sqrt{2}$. Istnieje wiele sposobów na skonstruowanie $\mathbb{R}$ z $\mathbb{Q}$, większość okazuje się sobie równoważna (mamy tu do czyniena z tzw. własnością uniwersalną).

2 Supremum i infimum

Definicja 1. *α jest ograniczeniem górnym zbioru A wtw, gdy $\forall a \in A : a \leq \alpha$. Analogicznie definiowane jest ograniczenie dolne.*

Definicja 2. *Jeśli istnieje ograniczenie górne zbioru, zbiór określa się ograniczonym z góry. Analogicznie definiuje się ograniczenie z dołu. Jeśli istnieje ograniczenie górne oraz ograniczenie dolne zbioru, określa się go ograniczonym.*

Definicja 3. *α jest supremum zbioru A wtw, gdy $\forall a \in A : a \leq \alpha$ oraz $(\forall a \in A\ a \leq \beta) \implies \alpha \leq \beta$. Oznacza się $\alpha = sup(A)$. Analogicznie definiowane jest infimum.*

3 Aksjomat ciągłości

Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ oraz A jest ograniczone z góry, $sup(A) \in \mathbb{R}$.

Aksjomat ten jest jedynym kawałkiem informacji wyróżniającym $\mathbb{R}$ od $\mathbb{Q}$, należy się zatem spodziewać, że wszystkie twierdzenia, które dotyczą liczb rzeczywistych, ale nie wymiernych, korzystają z tego aksjomatu.

Konstruując liczby naturalne, aksjomatem równoważnym do indukcji jest tzw. zasada dobrego uporządkowania: "Każdy niepusty podzbiór $\mathbb{N}$ posiada najmniejszy element". Warto zastanowić się nad podobieństwem aksjomatu ciągłości do wyżej wspomnianego.

4 Twierdzenia na $\mathbb{R}$

Twierdzenie 1. *(Nierówność trójkąta):* $|x + y| \leq |x| + |y|$

Twierdzenie 2. *(Odwrotna nierówność trójkąta):* $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Twierdzenie 3. *(Rozszerzona nierówność trójkątna):*
$|x_1 + x_2 + ... + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$

Twierdzenie 4. *(Własność archimedejska):*
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \neq 0 \implies \exists n \in \mathbb{N} : nx > y$

Twierdzenie 5. *(Gęstość $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$) :* $\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \implies \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

5 Ciągi rzeczywiste

Definicja 4. *Ciągiem rzeczywistym nazywana jest funkcja* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$*, często stosuje się zapis* $a_n := a(n)$.

Definicja 5. *Ciąg jest ograniczony z góry wtw, gdy* $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony (tak samo z ograniczeniem dolnym). Ciąg jest ograniczony, gdy* $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ *jest ograniczony.*

Definicja 6. *Ciąg* a *jest zbieżny do* L *wtw, gdy*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N : \forall n \geq N : |a_n - L| < \varepsilon$$

(N *oraz* n *muszą być naturalne, autor postanawia to pominąć, ponieważ funkcja* a *operuje tylko na liczbach naturalnych).*

Gdy ciąg a jest zbieżny do L, najczęściej stosuje się zapis $\lim_{n\to\infty} a_n$, lecz autor będzie korzystał z $\lim_n a_n$.

Twierdzenie 6. *Każdy zbieżny ciąg posiada tylko jedną granicę.*

Twierdzenie 7. *Ciągi zbieżne są ograniczone.*

Dowód. Niech a będzie ciągiem zbieżnym, weźmy $\varepsilon = 1$, wtedy $\exists N : \forall n \geq N : |a_n - L| < 1$, czyli $|a_n| < |L| + 1$. $M := max(\{|a_n| \mid n < N\} \cup \{L+1\})$ ogranicza ciąg. ***Q.E.D.***

Twierdzenie 8. *(Trzy ciągi): Niech* x_n *i* z_n *będą zbieżne do* L *oraz* $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$*, wtedy* y_n *jest zbieżny do* L.

Dowód. Wiadomo, że $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 : |x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ oraz, że $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 : |z_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ Niech $N = max(N_1, N_2)$, wtedy:
$|y_n - L| \leq |y_n - x_n| + |x_n - L| \leq |z_n - x_n| + |x_n - L| \leq \varepsilon$ ***Q.E.D.***

6 Intuicja

Supremum jest najmniejszym ograniczeniem górnym, a infimum największym ograniczeniem dolnym. W odróżnieniu do maksimum i minimum, nie muszą być elementami zbioru i zawsze istnieją (z aksjomatu ciągłości) o ile zbiór jest tylko ograniczony - widać zatem potrzebę ich zdefiniowania.

Aksjomat ciągłości mówi, że najmniejsze górne ograniczenie dowolnego zbioru zawierającego się w $\mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą, ponieważ mówi on o dowolnym zbiorze, mówi on w pewnym sensie, że "oś liczb rzeczywistych nie ma dziur", posiadając taki obraz osi, widać czemu liczby wymierne są nieadekwatne.

Tworząc definicję zbieżności ciągu, należy zawrzeć w niej informację o tym, że ciąg "dąży"do pewnej wartości, ale nie musi jej osiągnąć. Można myśleć o tej definicji jako o grze: "Ty daj mi $\varepsilon > 0$, ja dam Ci N, a Ty mi dasz $n \geq N$, wtedy wygram, jeżeli $|a_n - L| < \varepsilon$ oraz przegram w przeciwnym wypadku".

Jeżeli istnieje strategia wygrywająca dla gracza rzucającego wyzwanie, ciąg jest zbieżny, jeżeli nie istnieje taka strategia, ciąg nie jest zbieżny.

O definicji tej można również myśleć jako o drugiej najlepszej rzeczy po byciu równym granicy: ciąg a_n nigdy nie musi być równy L, ale zależnie od potrzeb, będzie on zawsze od któregoś N w przedziale błędu (ε).

Pisanie dowodu zbieżności odpowiada szukaniu algorytmu, który przyjmie na wejściu ε i zwróci N.

7 Przykłady

Przykład 1. $\lim_n \frac{3}{n} = 0$

Weźmy $\varepsilon > 0$, *chcemy, żeby* $|\frac{3}{n} - 0| = |\frac{3}{n}| < \varepsilon$. *Pozbywając się modułu,* $\frac{3}{\varepsilon} < n$, *weźmy zatem* $\frac{3}{\varepsilon} < N$, *ponieważ* $N < n$, *osiągamy chcianą nierówność.*

Przykład 2. $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n^2+n} = 0$

$0 < \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}$ *oraz* $\frac{\sqrt{n}}{n^2+n} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ *(zwiększyliśmy licznik i zmniejszyliśmy mianownik, co zwiększa liczbę).* $\lim_n 0 = 0$ *oraz* $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, *zatem* $\lim_n \frac{\sqrt{n}}{n^2+n} = 0$.

8 Zadania

Zadanie 1. *Przekonaj się do prawdziwości Twierdzenia 1. tworząc rysunek ilustrujący nierówność.*
Udowodnij nierówność przez rozpatrzenie wszystkich czterech przypadków dotyczących znaku ($x > 0 \wedge y > 0$, $x > 0 \wedge y < 0$, ...)
(Abbott) Udowodnij nierówność przez rozpisanie $(|x| + |y|)^2$ *oraz skorzystanie z* $|ab| > ab$

Zadanie 2. *Udowodnij Twierdzenie 2.*
(wskazówka: skorzystaj z twierdzenia 1, podstawiając za x i y)

Zadanie 3. *Udowodnij Twierdzenie 3 (skorzystaj z indukcji).*

Zadanie 4. *Udowodnij Twierdzenie 4*
(wskazówka: zauważ, że możesz wyeliminować jedną zmienną, tym samym eliminując kwantyfikator)
(wskazówka: załóż, że jest to nieprawda i pokaż sprzeczność)

Zadanie 5. *Udowodnij Twierdzenie 5*
(wskazówka: skorzystaj z Twierdzenia 4 kilka razy).

Zadanie 6. *Udowodnij Twierdzenie 6*
(wskazówka: załóż, że istnieje zbieżny ciąg, który posiada więcej, niż jedną granicę i pokaż sprzeczność)

Zadanie 7. *Udowodnij z definicji:*
1. $\lim_n \frac{5^n}{1+5^n} = 1$

2. $\lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

3. $\lim_n \frac{\sin n^2}{\sqrt[3]{n}} = 0$

Zadanie 8. *Znajdź granice używając twierdzenia o trzech ciągach:*

1. $\lim_n \frac{n^2-5n-3}{3n^2+2n+2}$

2. $\lim_n \frac{|\cos n|}{n}$

3. $\lim_n \sqrt[n]{2^n + 3^n}$