Racjonalny, ale czy najlepszy?

Czyli słów kilka o teorii gier w praktyce

Tymoteusz Ciesielski
tymoteusz@akcja.pl
I Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Chrobrego
ul. 3 maja 7
43-200 Pszczyna
tel. 32 210 37 27
e-mail: liceum.pszczyna@post.pl
Opiekun pracy: Joanna Szczurek

SPIS TREŚCI

1. Wstęp

Kiedy w 1994 r. nagroda Nobla w dziedzinie ekonomii została przyznana trzem matematykom zajmującym się teorią gier, wielu ludzi kręciło głową z niedowierzaniem. „Nobel za pokera?" pisały niektóre polskie (i nie tylko) czasopisma. John Nash, Reinhard Selten i John Harsanyi przyczynili się nie tylko do ogromnego rozwoju tej dziedziny, ale także do jej rozpowszechnienia w społeczeństwie – często nauka ta kojarzona była bowiem tylko z brydżem i pokerem. Nie są to jednak skojarzenia całkowicie bezpodstawne – cofnijmy się do korzeni teorii gier.

Gry towarzyszą nam od tysięcy lat – zasadniczo różnią się one między sobą formą: zaczynając od piłki nożnej, przez gry karciane aż po grę na giełdzie. Wszystkie łączy jednak fakt, że w określonych warunkach wymagają od grających podjęcia jakiejś konkretnej decyzji – odpowiednio może to być podanie piłki górą, podbijanie stawki, bądź sprzedawanie akcji które tracą na wartości. Jeszcze poważniejsze cechy teorii gier nosi słynny zakład Pascala - rozumowanie dowodzące, że w Boga opłaca się wierzyć. Jeśli bowiem istnieje, możemy poświęcić mu życie doczesne i zostać wynagrodzeni życiem wiecznym. Jeśli zaś nie istnieje, to wierząc nie mamy nic do stracenia – życia wiecznego i tak nie ma a nasze istnienie jest krótkie i nietrwałe. Teoria gier jako dziedzina nauki powstała jednak stosunkowo niedawno – formalnie za jej narodziny przyjmujemy rok 1944 kiedy to w wyniku pracy Johna von Neumana i Oskara Morgensterna powstała książka *Theory of Games and Economic Behavior.* Później rozwijała się ona bardzo dynamicznie, znajdując zastosowanie na wielu płaszczyznach – teorię gier zastosować można bowiem wszędzie tam gdzie stoi przed nami jakiś wybór. I tak od intensywnej pracy nad jej militarnym zastosowaniem podczas zimnej wojny, przez wykorzystanie w informatyce, filozofii, ekonomii, biologii i ewolucji teoria gier pomagała nawet wygrywać miliony w programach telewizyjnych. A każdego dnia naukowcy starają się implementować teorię gier do coraz to nowych dziedzin.

2. Pojęcie gry

Wszystko należy upraszczać
jak tylko można, ale nie bardziej.

Albert Einstein

Teoria gier zajmuje się logiczną analizą sytuacji konfliktu i kooperacji. Jednym z jej celów jest opis różnych zjawisk, ich wyjaśnienie oraz szczegółowe zbadanie. Idąc dalej, służy też ona do przewidywania możliwego rozwoju wypadków a także do obrania najlepszej strategii w danej sytuacji. Nie jest to jednak narzędzie do wygrania dowolnego konfliktu. Jak w wielu dziedzinach matematyki, teoria gier rozpatruje bowiem modele biorąc pod uwagę niektóre aspekty opisywanych zjawisk. Jest to uproszczenie rzeczywistości nie zawsze zgodne z nią w stu procentach. Teoria gier zakłada także, że gracze są osobami racjonalnymi, obdarzonymi nieograniczoną inteligencją i mocą obliczeniową, których celem jest jak najlepszy wynik. Motywy graczy są jednak często bardzo złożoną kombinacją egoizmu i altruizmu , stosunku do prawa i uczciwości , rozważań krótko- i długoterminowych. Z drugiej strony pewne uproszczenia pozwalają na usprawnienie efektywności rozpatrywania problemu a czasem dają nam w ogóle możliwość na jego rozpatrzenie. Stworzenie takiego ogólnego modelu zwiększa też jego możliwą liczbę zastosowań. Od formalnej strony, o grze możemy mówić wtedy, kiedy spełnia ona określone warunki

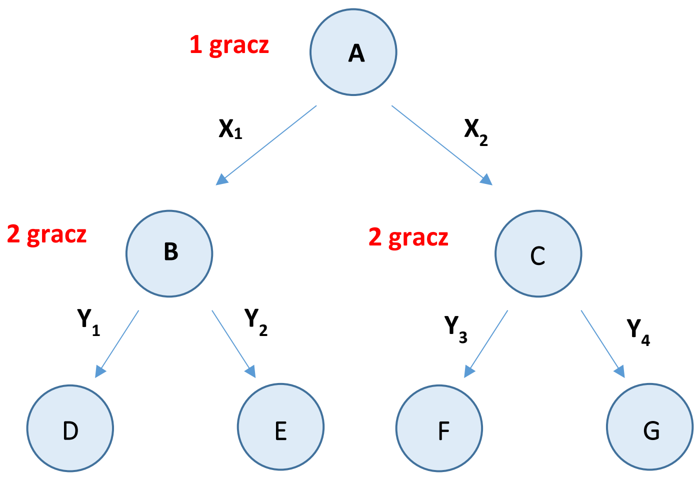
- Można wskazać co najmniej dwóch uczestników gry zwanych graczami. Mogą to być pojedynczy ludzie, grupy, takie jak firmy, państwa a nawet gatunki w znaczeniu biologicznym.
- Każdy gracz ma do wyboru pewną liczbę strategii określających jego możliwości postępowania.
- Można sprecyzować cele do których dążą gracze
- Gra zawiera opis dostępnych graczom informacji
- Wynik gry determinowany jest przez kombinację strategii wybranych przez graczy. Zapisany jest on w formie wypłaty każdego z graczy.

Na potrzeby teorii gier, można też dokonać podziału gier w zależności od kilku aspektów:

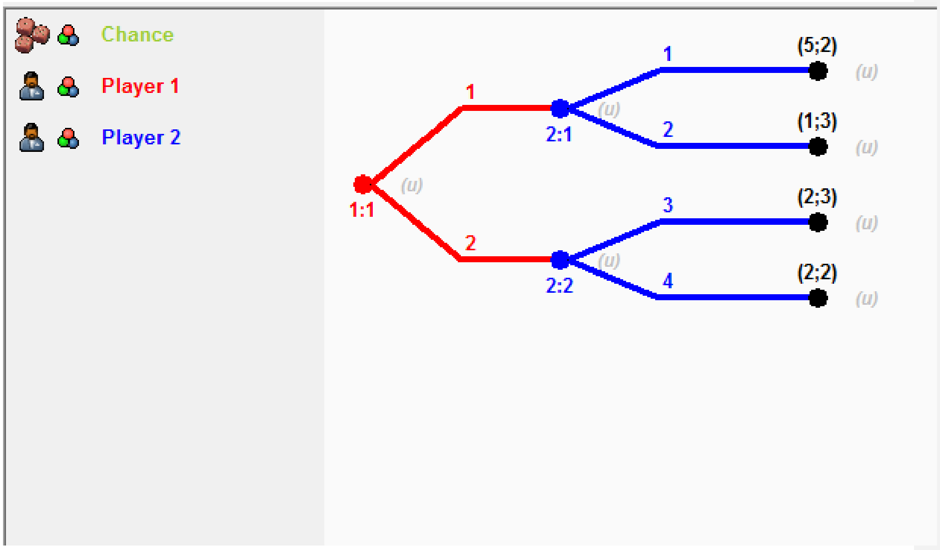
- Gry o skończonym i nieskończonym czasie trwania
- Gry dwuosobowe i wieloosobowe
- Gry, w których każdy gracz ma pełną informację o wypłacie wszystkich graczy oraz gry w której nie ma pełnej informacji
- Gry w postaci ekstensywnej (każdy gracz ma wiedzę o kolejnych ruchach pozostałych graczy) i gry w postaci normalnej (gracze podejmują swoje decyzje w tym samym momencie, bez wiedzy o decyzjach pozostałych graczy)
- Gry o stałej sumie (w szczególności o sumie zerowej) i o zmiennej sumie.

3. Postać ekstensywna gry

Wygodnym sposobem na przedstawienie gry jest tzw. drzewo gry. Jest to dobra interpretacja graficzna gry w postaci ekstensywnej w której gracze podejmują swoje decyzje nawzajem po sobie, wieloetapowo.



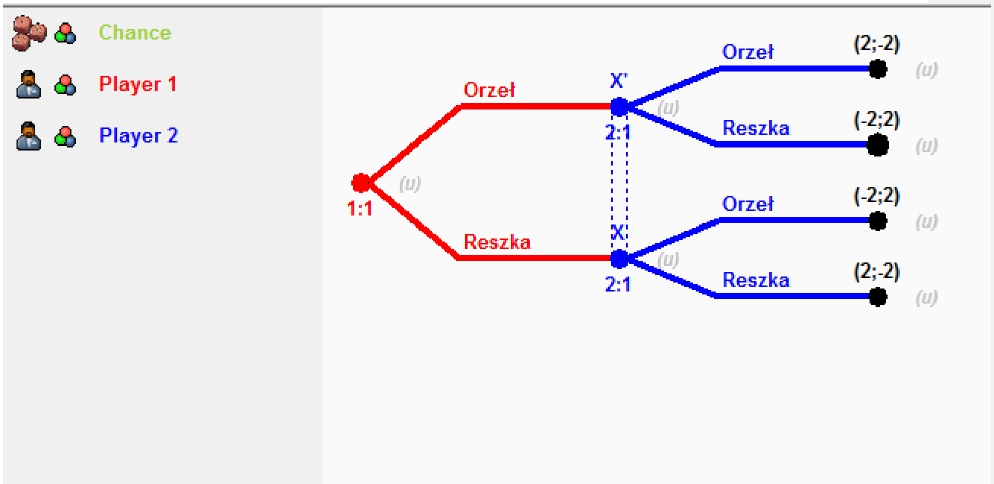
Pumkty leżące na początku i na końcu każdej strzałki – A,B,C,D,E,F,G - to **wierzchołki** lub **węzły.** Opisują one sytuację w grze. Wierzchołek, do którego nie prowadzi żadna strzałka oznacza **początek gry** (A), zaś wierzchołki z których żadna strzałka nie wychodzi to **wierzchołki końcowe** (D,E,F,G). Każda strzałka reprezentuje możliwą **decyzję** gracza (**X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 , , Y_3 , Y_4).** Przez **drogę** rozumie się ciąg strzałek następujących po sobie. Przykładem gry w postaci ekstensywnej są na przykład szachy – gracze na zmianę wykonują po sobie ruchy i w każdym momencie widzą swoje decyzje i ich efekty. Do rozrysowywania, a także rozwiązywania gier można używać programów kompuerowych. Jednym z nich jest program Gambit. Przedstawimy teraz prostą grę stworzoną w tym programie. W dalszej części pracy również korzystać będziemy z tego programu.



Powyższa gra rozgrywana jest przez dwóch graczy. Jej celem jest osiągnięcie jak najwyższej wypłaty – na podstawie drzewka gry nie możemy wywnioskować co jest jej przedmiotem i na czym polegają decyzje podejmowane przez graczy, jednak dostarcza nam ono wielu cennych informacji. Rozpoczynający gracz (czerwony) może wybrać jedną z dwóch decyzji (1 lub 2). Następnie, w zależności od jego wyboru drugi gracz (niebieski) podejmuje swoją decyzję – jeśli czerwony wybrał 1, niebieski może wybrać 1 lub 2. Jeśli zaś czerwony wybrał 2, niebieski może zdecydować się na 3 lub 4. Każdemu końcowemu wierzchołkowi przyporządkowane są wypłaty podane w nawiasach – pierwsza liczba odpowiada wypłacie pierwszego gracza zaś druga, wypłacie drugiego gracza. Dokonać możemy pierwszej analizy. Celem gry jest osiągnięcie jak najwyższej wypłaty. Rozpoczynający gracz, wiedząc jakie mogą czekać go wypłaty wybiera swoją strategię. Po wybraniu strategii 1 może liczyć, że gracz 2 również wybierze swoje 1 – wtedy czeka go wysoka wypłata 5. Z drugiej strony jeśli gracz 2 wybierze swoje 2, to 1 otrzyma wypłatę w wysokości 1. Może więc lepsze dla niego będzie wybranie decyzji 2 oznaczającej pewną wypłatę 2 niezależnie od decyzji gracza niebieskiego? Podobne przemyślenia może mieć gracz 2. Jeśli czerwony wybierze 1, bardziej opłacalna dla niebieskiego będzie strategia 2 dająca mu wypłatę 3. Z drugiej strony wybór tej strategii zapewnia czerwonemu graczowi dużo mniejszą wypłatę. Może niebieski ma również na względzie wypłatę drugiego gracza? Jeśli zaś czerwony wybierze 2, wybór niebieskiego wydaje się bardziej ewidentny. Jego strategia 3 zapewnia mu wyższą wypłatę niż strategia 4, powinien więc ją wybrać. A może jednak... Niebieski nie lubi trójek? Takie rozterki często stoją przed graczami a w powyższym prostym przykładzie po krótce opisaliśmy proces decyzyjny graczy w tego rodzaju grach.

4. Gry w postaci normalnej

W poprzednim rozdziale przedstawiliśmy gry w których gracze sekwencyjnie podejmują po sobie decyzje czyli gry w postaci ekstensywnej. Zastanówmy się jednak co z grami które toczą się błyskawicznie czyli oboje gracze podejmują decyzje w tym samym momencie bez wiedzy o posunięciu przeciwnika. Czy takie gry również przedstawić można w postaci drzewka? Odpowiedź jest twierdząca, a takie gry nazywamy grami w postaci normalnej. Rozpatrzmy teraz taką grę o następujących zasadach: Dwoje graczy otrzymuje po jednej monecie 1 zł. Następnie oboje wybierają czy położą na stół monetę reszką bądź orłem do góry i jednocześnie odkrywają monety. Jeśli wybrano dwie takie same strony – dwie reszki lub dwa orły, pierwszy gracz otrzymuje obie monety. Jeśli zaś monety ułożone zostały różnymi stronami - reszka i orzeł - monety trafiają do drugiego gracza. Taką grę można przedstawić również w trochę inny, jednak prostszy w interpretacji graficznej sposób. Załóżmy, że decyzję najpierw podejmuje gracz 1 a potem gracz 2 przy czym drugi gracz nie wie co wybrał pierwszy. Sytuację tą przedstawia następujące drzewko:



Tak skonstruowane drzewko różni się od drzewka poprzedniej gry. Podstawowa różnica jest taka, że gracz 2 nie wie jakiego wyboru dokonał gracz 1 a co za tym idzie, nie wie w którym wierzchołku drzewka się znajduje (w X' bądź X). Niebieski może więc podjąć decyzję o wybraniu orła a jednak w zależności od tego czy znajduje się w wierzchołku X czy X' (czyli w zależności od wyboru czerwonego) gra może skończyć się na dwa sposoby. Wierzchołki X i X' należą do jednego **zbioru informacyjnego** – fakt ten zaznacza się obrysowując oba wierzchołki linią przerywaną. Wykonując swój ruch gracz zawsze wie w którym zbiorze informacyjnym się znajduje, nie wie jednak w którym z jego wierzchołków. Ponadto, z każdego wierzchołka w danym węźle informacyjnym wychodzi taka sama liczba, tak samo oznaczonych gałęzi (decyzji). W przeciwnym wypadku, gracze mogliby rozróżniać w którym wierzchołku zbioru się znajdują. Gra w której każdy zbiór informacyjny składa się z tylko jednego wierzchołka, nazywa się grą **z pełną informacją**. Jej przykładem jest gra pokazana w poprzednim rozdziale. Powyższa gra jest przykładem gry **z niepełną informacją.** Większość gier karcianych (a także wiele gier planszowych) to gry z niepełną informacją – nie wiemy bowiem jakie karty na ręce ma przeciwnik. Wszystkie pozycje w grze, które różnią się tylko (nieznaną) konfiguracją kart na ręce przeciwnika lub przeciwników należą do jednego zbioru informacyjnego. Przyjąć możemy, że gry te zaczynają się od losowego rozdania kart – czyli od decyzji którą podejmuje Los.

Na tym etapie warto zaznaczyć różnicę między **strategią** a **decyzją.**

Decyzją nazywamy jeden poszczególny wybór gracza. Na przykład decyzją w szachach będzie przesunięcie konia na F3, a w grze z poprzedniego rozdziału wybór 3 przez drugiego gracza.

Strategią nazywamy kompletny opis postępowania gracza w każdej możliwej sytuacji. Na przykład w grze z poprzedniego rozdziału gracz 1 ma dwie strategie:

A. Zaczynając, wybieram 1
B. Zaczynając, wybieram 2

W tej samej grze gracz 2 ma cztery strategie

A. Jeśli czerwony wybierze 1 to wybiorę 1, a jeśli wybierze 2 to wybiorę 3
B. Jeśli czerwony wybierze 1 to wybiorę 1, a jeśli wybierze 2 to wybiorę 4
C. Jeśli czerwony wybierze 1 to wybiorę 2 a jeśli wybierze 2 to wybiorę 3
D. Jeśli czerwony wybierze 1 to wybiorę 2, a jeśli wybierze 2 to wybiorę 4

W grze w monety, przedstawionej w tym rozdziale, gracz czerwony ma 2 strategie. Również gracz niebieski ma 2 strategie. W każdym wierzchołku z jedynego zbioru informacyjnego musi się zachowywać tak samo – nie wie bowiem w którym z nich się znajduje. Są to strategie:

- Niezależnie od tego czy czerwony wybierze Orła czy Reszkę wybiorę Orła
- Niezależnie od tego czy czerwony wybierze Orła czy Reszkę wybiorę Reszkę

Zauważmy, że deklaracja każdego z graczy jaką będzie się posługiwał strategią może zastąpić jego faktyczny udział w grze. Określenie przez każdego z graczy wybranej strategii wyznacza już bowiem jednoznacznie przebieg gry aż do jej końca. W sytuacji gdyby dla przykładu gracze nie mogli się spotkać, grę za nich może więc toczyć arbiter poinstruowany o wybranych przez nich strategiach. Rozpoczynający gracz dokonuje decyzji, a następnie strategia drugiego gracza przewiduje na nią odpowiedź. Arbiter wybiera następne posunięcie które prowadzi do kolejnej sytuacji przewidzianej przez pierwszego gracza… Grę można więc traktować jako pojedynek strategii.

W powyższych przypadkach liczba strategii każdego z graczy wynosi 2 lub 4, są to bowiem bardzo proste gry. W przypadku bardziej rozbudowanych gier, z większą liczbą decyzji i możliwych wyborów, liczba strategii rośnie w zastraszającym tempie. Dla przykładu, wyobraźmy sobie drzewo decyzyjne dla pierwszych dwóch ruchów w grze w szachy. Każdy z graczy może się na początku poruszyć na 20 sposobów – jednym z 8 pionków o 1 lub 2 pola do przodu lub jednym z 2 skoczków na dwa sposoby. W drzewie tym biały ma więc 20 sposobów na rozpoczęcie gry. W odpowiedzi na każdy z tych ruchów, czarny może wykonać jeden ze swoich 20 możliwych ruchów. W ten sposób na drzewie decyzyjnym pojawia się 20x20=400 gałęzi. Liczba możliwych strategii drugiego gracza jest dużo większa. Kompletna strategia musi zakładać odpowiedź na każdą możliwą sytuację: „Jeśli biały zagra A, ja zagram X, jeśli zagra B ja zagram Y…” itd. Liczba możliwych strategii drugiego gracza wynosi więc $20^{20} \approx 10^{26}$. O ile drzewo o 400 gałęziach jest przy odrobinie cierpliwości możliwe do narysowania, o tyle tabela ze stoma kwadrylionami kolumn robi już wrażenie. Całkowite przeanalizowanie gry w szachy pod kątem możliwych strategii stoi daleko poza zasięgiem najnowocześniejszych superkomputerów.

Poniżej znajduje się przedstawienie dwóch wspomnianych gier w formie tabeli. Zaznaczyć należy, że w poszczególnych komórkach znajdują się wyniki kombinacji strategii dwóch graczy nie zaś ich decyzji.

Pierwsza gra

Player 1 / Player 2	A		B		C		D	
A	5	2	5	2	1	3	1	3
B	2	3	2	2	2	3	2	2

Druga gra

Player 1 / Player 2	Orzeł		Reszka	
Orzeł	2	-2	-2	2
Reszka	-2	2	2	-2

5. Myślenie strategiczne

Życie jest warte życia jeśli możemy grać w najlepsze gry…
I wygrywać.

Platon

W telewizji amerykańskiej popularne było kiedyś reality show – *Survivor* . W telewizji polskiej ukazało się 6 sezonów tego programu pod nazwą Ryzykanci. W każdej edycji programu, grupa kilkunastu osób zostaje wysłana w odległe dzikie miejsce, gdzie walczy o przetrwanie i wykonuje zadania postawione przez prowadzących – zwycięzca rozgrywek otrzymuje milion dolarów. Pierwsza edycja programu miała miejsce na Borneo. Ostatni odcinek edycji jest szczególnie interesujący pod kątem myślenia strategicznego – jego zwycięzca, starał się być postrzegany jako niegroźny dla przeciwników, w rzeczywistości zaś doskonale przechytrzył rywali. Na wyspie zostały wtedy trzy osoby – Rudy Boesch siedemdziesięcioletni emerytowany żołnierz amerykańskich sił specjalnych Navy SEALS , Kelly Wiglesworth dwudziestotrzyletnia przewodniczka oraz niezbyt obiecujący , trzydziestodziewięcioletni, niski i otyły Richard Hatch. Ostatnim zadaniem całej trójki było jak najdłuższe ustanie na tyczce. Osoba która zwycięży, miała zapewnić sobie wejście do finału i dodatkowo wybrać swojego przeciwnika. Z pozoru wydawałoby się, że droga do zwycięstwa w programie stoi otworem dla najbardziej wytrzymałego z trójki. Sytuacja była jednak bardziej skomplikowana. Zwycięzca programu wybierany miał być bowiem w głosowaniu osób, które do tej pory zostały wyeliminowane. Wszyscy troje zdawali sobie sprawę, że Rudy jest najbardziej popularny – ma on więc ogromne szanse na zwycięstwo w finale. Jedyną szansą Richarda było więc przejść do finału z Kelly. Na pierwszy rzut oka wydawałoby się, że zwycięstwo w konkurencji przedfinałowej, to dobry sposób na zapewnienie sobie drogi do zwycięstwa. Przeanalizujmy jednak dokładniej sytuację Richarda. Zarówno on jak i Kelly zdawali sobie sprawę z popularności Rudy'ego – gdyby znaleźli się z nim w finale, najpewniej by przegrali. Wydawało się, że gdyby jedno z nich wygrało, na przeciwnika nie powinno wybierać Rudy'ego. Richard powinien więc utrzymać na tyczce co najmniej do momentu w którym odpadnie Rudy. Kłopot w tym, że Richarda i Rudy'ego łączyło ze sobą przymierze. Lojalny Rudy, zwyciężając na tyczce, za swojego przeciwnika musiałby wybrać Richarda. Podobnie zachować powinien się Richard w przypadku zwycięstwa – w przeciwnym wypadku Rudy i jego towarzysze w finałowym głosowaniu zwróciliby się przeciwko niemu. Pozbywając się rywali należało więc być bardzo ostrożnym. Spójrzmy na sprawę z punktu widzenia Richarda – finałowa rozgrywka mogła się potoczyć na trzy sposoby:

1. Wygrywa Rudy. Wybiera do finału Richarda, lecz Rudy jest faworytem.
2. Wygrywa Kelly. Rozumie że jej jedyną szansą na zwycięstwo jest wybór do finału Richarda.
3. Wygrywa Richard. Jeśli wybierze Rudy'ego przegra z nim w finale. Jeśli wybierze Kelly, nadal może przegrać gdyż straci poparcie Rudy'ego i jego przyjaciół.

Dla Richarda paradoksalnie najbardziej korzystne było więc przegrać i wyeliminować Rudy'ego. Należało więc postawić na Kelly. Kiedy prowadzący żartobliwie zaoferował stojącym na słońcu plaster pomarańczy dla osoby która dobrowolnie podda się w rozgrywce, Richard skorzystał z tego prawa. Po 4 godzinach stania na tyczce, Rudy stracił równowagę i upadł. Do finału przeszła Kelly, za przeciwnika wybierając Richarda. W finałowym głosowaniu to jeden głos Rudy'ego przesądził o zwycięstwie Richarda. Patrząc wstecz, cała rozgrywka może się wydawać prosta, jednak przewidzenie zachowania rywali, zwłaszcza po długiej, wyczerpującej psychicznie i fizycznie rozgrywce, już takie proste nie jest. Richard wczuł się w sytuacje swoich rywali, popisał się zdolnością strategicznego myślenia i zgarnął milion dolarów.

Niestety, Richard nie wykorzystał swojego talentu przewidywania, aby zrozumieć jakie mogą być konsekwencje, jeśli nie zapłaci podatku od wygranego miliona. 16 maja 2006 r. został skazany na 51 miesięcy więzienia za uchylanie się od zapłacenia podatku.

6. Gry dwuosobowe o sumie zerowej

Przeanalizujemy teraz kolejny, szczególny rodzaj gier – gry dwuosobowe o sumie zerowej. Są one przykładem ogólniejszej rodziny gier o sumie stałej. Zgodnie z ich zasadami, wygrana jednego gracza doprowadza do proporcjonalnej straty drugiego gracza. Są to gry niekooperacyjne - interesy graczy są całkowicie przeciwstawne, celem gry jest więc albo jak największy zysk, albo jak największa strata drugiego gracza (między tymi dwoma możemy postawić znak równości). Z punktu widzenia teorii gier są one dużo prostsze do analizy niż gry o sumie niezerowej (mimo że to głównie gry o sumie niezerowej spotykamy na co dzień). W poprzednim rozdziale, zapisaliśmy dwie gry w postaci drzewka, a następnie przedstawiliśmy je w postaci tabeli. Istotnie, każdą grę dwuosobową zapisaną w postaci drzewka można zapisać również w postaci tabeli. Łączy je bowiem pojęcie strategii – w drzewku jest to komplet dróg składający się z kolejnych gałęzi, będących odpowiedziami na ruchy drugiego gracza, zaś w tabeli dostępne strategie graczy umieszczone są w pierwszej kolumnie i pierwszym wierszu tabeli. Przy postaci drzewka dokładniej opisany jest tok decyzyjny, zaś w postaci tabelki nacisk położony jest na przejrzystość wartości wypłat obu graczy. Przykładowa dwuosobowa gra o sumie zerowej wygląda następująco:

Strategie Gracza 2

Strategie Gracza 1

	A	B
A	(3,-3)	(-5,5)
B	(-2,-2)	(0,0)
C	(-6,6)	(10,-10)

Każda komórka tabeli odpowiada wypłatom dwóch graczy w zależności od stosowanych przez nich strategii. Pierwsza liczba w komórce oznacza wypłatę pierwszego gracza (jego 3 strategie odpowiadają wierszom A, B i C) zaś druga liczba to wypłata drugiego gracza (jego strategie przedstawiono w kolumnach A i B). Jak już wspomnieliśmy, w grach o sumie zerowej, wypłaty graczy są dokładnie przeciwne. Dla przejrzystości, przy tworzeniu tabeli, wystarczy więc podać wypłatę pierwszego gracza, a wypłatę drugiego gracza uzyskamy mnożąc wypłatę pierwszego przez -1. Powyższą grę można więc przedstawić również tak:

Strategie Gracza 2

Strategie Gracza 1

	A	B
A	3	-5
B	-2	0
C	-6	10

Z racji sposobu przedstawienia w tabeli, gry dwuosobowe o sumie zerowej są też nazywane **grami macierzowymi**. Zastanówmy się teraz jaką strategię opłaca się zagrać każdemu z graczy. Spójrzmy na tabelę – pierwszy gracz chciałby uzyskać jak najwyższy możliwy wynik – może więc zagrać strategię C, licząc, że gracz 2 zagra B a on zgarnie wypłatę 10. Gracz 2 może jednak spodziewać się takiego przebiegu wydarzeń i podejrzewać, że Gracz 1 zagra C. W takim wypadku jego bardziej opłacalną strategią jest A – gracz 1 musiałby mu bowiem zapłacić 6 (przypominamy że Gracz 2 dąży do jak najniższej wypłaty Gracza 1). To z kolei może przewidzieć Gracz 1 i odpowiedzieć na strategię A swoim A… Analizując tabelkę możemy porównywać różne odpowiedzi graczy na poszczególne strategie. Takie rozważania możemy przedstawić w postaci **diagramu przesunięć.**

	A	B
A	3	-5
B	-2	0
C	-6	10

Diagram przesunięć tworzymy dorysowując strzałki między poszczególnymi komórkami w tym samym wierszu bądź kolumnie w następujący sposób:

- W wierszach, prowadzimy strzałki do komórki z najmniejszą wartością (przy stałej strategii Gracza 1, najlepsza strategia Gracza 2)
- W kolumnach , prowadzimy strzałki do komórki z największą wartością (przy stałej strategii Gracza 2, najlepsza strategia Gracza 1)

Jak widać, w podanej wyżej grze nie ma komórki w której ustawałby ruch strzałek – z każdej pozycji obu graczy można wybrać inną decyzję aby poprawić swoją sytuację. Wynik tej gry mógłby więc zależeć od tego jak daleko gracze zaszliby w rozumowaniu „Jeśli on myśli, że ja myślę, że on myśli że zrobię tamto, to zrobię…" i tak dalej, czyli od wiedzy wyższego rzędu. Z drugiej strony gracze nie tylko mogą się domyślać strategii przeciwnika – mogą oni dowiedzieć się o niej przed grą, lub jeśli jakaś gra jest powtarzana więcej niż jeden raz, przewidzieć schemat według którego przeciwnik wybiera strategię. Wszystko zależy od rodzaju gry i poziomu komunikacji między graczami.

Ponieważ strategie Gracza 1 znajdują się w wierszach, w części książek przyjęło się mówić o tym graczu Pan Wiersz, z kolei o graczu, którego decyzje przedstawione są w kolumnach czasem mówi się Pani Kolumna. Dwuosobową grę o sumie zerowej, w której Pan Wiersz ma m decyzji a Pani Kolumna ma n decyzji, można zawsze przedstawić jako tabelę o m wierszach i n kolumnach, której każda komórka odpowiada jednej z m x n możliwych decyzji i w której znajduje się odpowiednia wypłata. Tabela taka to macierz m x n.

Spójrzmy na następną grę:

Pani Kolumna

Pan Wiersz

	A	B	C	D
A	26	-2	2	0
B	10	2	14	-40
C	6	4	8	6
D	-32	0	0	32

Obie strony podejmują decyzje (od A do D) i dążą do uzyskania jak najwyższego dla siebie wyniku. Wiersz chce uzyskać jak najwyższą liczbę (maksymalnie 32) zaś Kolumna dąży do jak najmniejszej liczby (minimum – 40). Strategia D wiersza może zapewnić mu wygranie wysokiej kwoty, jednak równie dobrze skończyć się może dużą stratą. Podobnie w przypadku Pani Kolumny. Jakie strategie powinni wybierać gracze? Porównajmy strategie B i C Pani Kolumny. W przypadku zagrania przez Wiersz dowolnej strategii, wynik uzyskiwany przy zastosowaniu B przez kolumnę jest lepszy bądź taki sam niż przy zastosowaniu C. Wniosek – strategia B jest lepsza od strategii C. Mówimy tutaj o dominacji jednej strategii nad drugą.

Definicja: Strategia S dominuje strategię T, jeżeli każdy wynik dawany przez S jest co najmniej równie korzystny, co odpowiedni wynik dawany przez T, a przynajmniej jeden wynik dawany przez S jest bardziej korzystny niż wynik dawany przez T.

Racjonalny gracz podlega **kryterium dominacji**. Nigdy nie wybierze on strategii zdominowanej.

Skoro zdominowana strategia nigdy nie powinna być grana, liczbę branych pod uwagę przez graczy decyzji można zmniejszyć a cała gra zostanie uproszczona:

Pani Kolumna

Pan Wiersz		A	B	D
	A	26	-2	0
	B	10	2	-40
	C	6	4	6
	D	-32	0	32

Po usunięciu zdominowanych strategii Wiersza i Kolumny, może się tak zdarzyć, że jedna ze strategii dominuje inną mimo, że taka sytuacja nie występowała w oryginalnej grze. W takim wypadku mówimy o **dominacji wyższych rzędów,** zaś w wyniku kryterium dominacji wyższych rzędów, gracze powinni wybierać tylko te strategie, które przejdą taką wieloetapową selekcję. W podanej wyżej grze, żadna ze strategii nie jest już jednak zdominowana.

Przeanalizujmy pozostałe strategie. Gracze podejmują decyzje jednocześnie, bez wiedzy o decyzji przeciwnika. Może się więc zdarzyć tak, że Pan Wiersz, wybierając którąś ze swoich strategii, otrzyma najmniejszą możliwą wypłatę odpowiadającą tej strategii na skutek decyzji Pani Kolumny. Pan Wiersz może więc ocenić, jaki najgorszy wynik czeka go po zagraniu każdej strategii – sprawdzić minimalne wypłaty w każdym wierszu, a następnie wybrać z nich największą. Taka wartość nazywana jest **maksiminem** Podobnie pani kolumna, patrząc na najwyższe wyniki w swoich kolumnach, może wybrać z nich najmniejszy. Wartość ta to **minimaks.**

	A	B	D
A	26	-2	0
B	10	2	-40
C	6	**4**	6
D	-32	0	32

Najniższe wypłaty w wierszach

-2
-40
4
-32

Maksimin

Najwyższe wypłaty w kolumnach

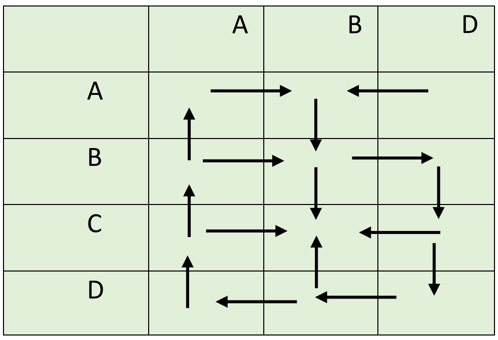
26	4	32

Minimaks

Dla powyższej gry, strategia maksiminowa wiersza to C zaś strategia minimaksowa kolumny to B.

Strategie te są najbezpieczniejszymi – pojawia się jednak pytanie, dlaczego to właśnie je powinni grać gracze. Istnieją ku temu dwa główne powody:

1) Para strategii C Wiersza i B kolumny daje wynik będący punktem równowagi. Oznacza to że gdyby wiersz wiedział że kolumna zagra B to jego najlepszą odpowiedzią jest C – daje mu to najwyższy możliwy wynik. Z drugiej strony, gdyby Kolumna spodziewała się że Wiersz gra C najbardziej opłacalną dla niej strategią byłoby B. Jeśli obaj gracze zagrają strategie będące w równowadze, żadnemu z nich nie opłaca się zmieniać swojej strategii – doprowadziłoby to do pogorszenia jego sytuacji. Wywnioskować to można również analizując diagram przesunięć gry:



W punkcie C, B zbiegają się bowiem wszystkie strzałki przesunięć.

2) Wybierając strategię C Pan Wiersz gwarantuje sobie wygranie co najmniej 2. Grając strategię B Pani Kolumna jest pewna że wiersz wygra najwyżej 2. Gdyby wiersz wygrał więcej niż 2, Pani Kolumna wiedziałaby że popełniła błąd nie wybierając B. Gdyby zaś Pan Wiersz wygrał mniej niż 2, wiedziałby że lepiej wyszedłby wybierając strategię C. Jeżeli gracze nie zagrają strategii w równowadze to oboje otrzymają wynik poniżej tego który mogliby osiągnąć.

Strategia w równowadze nie zawsze jest „sprawiedliwa" – nie każda gra jest jednak sprawiedliwa. Granie tej strategii zapewnia jednak pewny wynik.

W niektórych (jednak nie we wszystkich) grach minimaks kolumn i maksimin wierszy pokrywają się. Mówimy wtedy o występowaniu **punktu siodłowego.**

Definicja: Wynik gry macierzowej, nazywamy **punktem siodłowym**, jeżeli jego wartość jest mniejsza lub równa każdej wartości w jego wierszu, a większa lub równa każdej wartości w jego kolumnie.

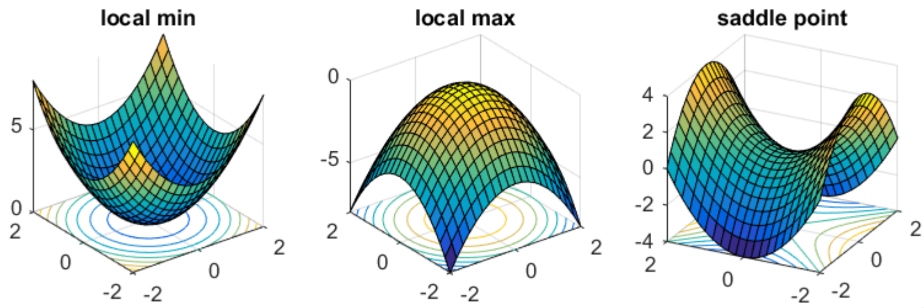
Definicja: Dla każdej gry macierzowej, dla której istnieje taka liczba v, że Wiersz ma strategię gwarantującą mu wygranie co najmniej v, a Kolumna ma strategię gwarantującą, że Wiersz wygra nie więcej niż v, v nazywamy **wartością gry**.

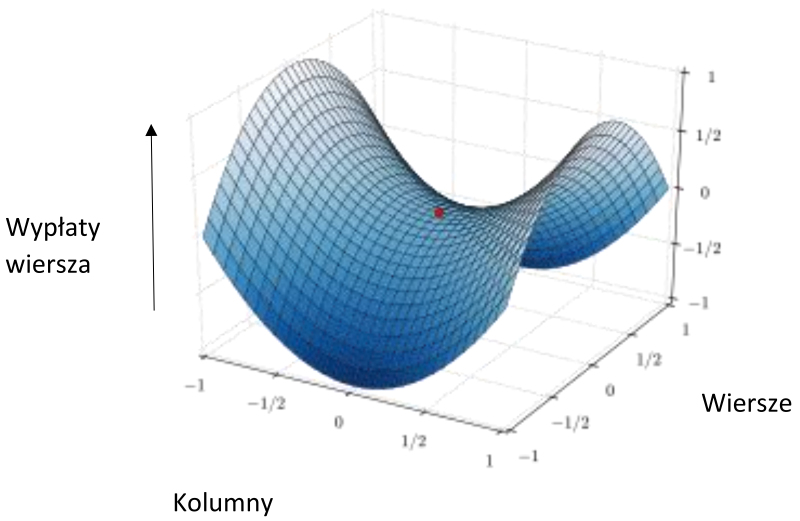
Kryterium punktu siodłowego: Jeżeli gra macierzowa ma punkt siodłowy, obaj gracze powinni wybrać zawierające go strategie.

Kryterium to jest o tyle ważne, że jeśli wynik gry jest punktem siodłowym, to żadnemu z graczy nie opłaca się zmieniać strategii, jeśli przeciwnik pozostanie przy obecnej strategii – obaj gracze grają najlepszą odpowiedź na swoje strategie. Istotne jest tutaj kolejne twierdzenie udowodnione przez Johna von Neumana:

Twierdzenie o maksiminie i minimaksie
Jeśli maksimin i minimaks gry macierzowej są równe, to gra posiada punkt lub punkty siodłowe o tej wartości. Punkty te leżą na przecięciu wierszy i kolumn których minima i maksima są równe tej wartości. Jeśli maksimin jest mniejszy od minimaksu, to gra nie posiada punktów siodłowych.

Skąd bierze się określenie „punkt siodłowy''(ang. Sadle point)? Wiąże się ono z trójwymiarową interpretacją graficzną tabelki. Na poniższych rysunkach, na osi Y zaznaczono wypłaty dla wiersza. Na osi X znajdują się poszczególne strategie Kolumny zaś na osi Z rozpisane są strategie Wiersza.


local min
local max
saddle point


Wypłaty wiersza
Wiersze
Kolumny

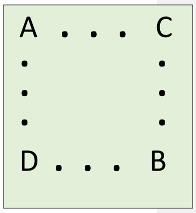
Niektóre gry w ogóle nie mają punktu siodłowego, zaś inne mają ich więcej:

	A	B	C	D	Minima
A	4	**2**	5	**2**	**2**
B	2	1	-1	-20	-20
C	3	**2**	4	**2**	**2**
D	-16	0	16	1	-16
Maksima	4	**2**	16	**2**	

W powyższej grze, zaznaczone na czerwono wyniki w tabeli są punktami siodłowymi. Z kolei wynik strategii B wiersza i A kolumn jest równy 2 tak samo jak inne punkty siodłowe. Nie jest on jednak punktem siodłowym. Nie jest ani najmniejszy w swoim wierszu, ani największy w swojej kolumnie. Jak widać istniejące punkty siodłowe są ze sobą powiązane – mają te same wartości jak i znajdują się w wierzchołkach jednego prostokąta. Mówi o tym poniższe twierdzenie:

Twierdzenie: Każde dwa punkty siodłowe w tej samej grze mają taką samą wartość. Jeżeli zarówno Wiersz jak i Kolumna zagrają strategie zawierające punkty siodłowe to wynik gry zawsze będzie punktem siodłowym.

Dowód: Załóżmy, że A i B są wartościami pewnych punktów siodłowych w grze macierzowej, oraz że są wierzchołkami pewnego prostokąta. C i D będą pozostałymi wierzchołkami tego prostokąta tak jak na rysunku:



Z definicji punktu siodłowego:

A jest najmniejsze w swoim wierszu, zaś B jest największe w swojej kolumnie, zatem:

$$A \leq C \leq B$$

Dodatkowo, A jest największe w swojej kolumnie, a B jest najmniejsze w swoim wierszu więc:

$$B \leq D \leq A$$

A zatem:

$$A \leq B \text{ oraz } B \leq A \text{ czyli } A = B = C = D$$

Zatem punkty C i D również są punktami najmniejszymi w swoich wierszach i największymi w swoich kolumnach – są więc one punktami siodłowymi. CND

Jak już zaznaczyliśmy, jeśli w grze występują punkty siodłowe, racjonalni gracze zawsze powinni grać strategie zawierające te punkty. Co jednak powinni zrobić gracze, jeśli maksimin wierszy i minimaks kolumn nie pokrywają się, tak jak ma to miejsce w jednej z gier z poprzedniego rozdziału:

	A	B	Minima
A	**3**	-5	-5
B	**-2**	0	**-2**
C	-6	10	-6
Maksima	**3**	10	

W opisanej grze maksimin wierszy wynosi -2 zaś minimaks kolumn wynosi 3. Gra ta nie ma punktu siodłowego. Zgodnie z definicją, Pan Wiersz ma wobec tego taką strategię, która gwarantuje mu wygranie co najmniej -2, zaś Pani Kolumna ma strategię zapewniającą, że Wiersz nie wygra więcej niż 3 - pomiędzy tymi wartościami rozciąga się jednak obszar niepewności. Gra ta nie ma zatem jednoznacznego wyniku w **strategiach czystych** to znaczy takich, które wybiera się bez losowania (decydując samemu o wyborze strategii). Rozwiązania takiej gry będziemy szukali w następnym rozdziale w strategiach mieszanych.

7. Strategie mieszane w grach

Przypadek sprzyja tylko temu, kto wie, jak starać się o jego względy.

Karol Nicolle

Rezultat gry nie zawsze zależy tylko od wyboru odpowiedniej strategii. Bardzo często kluczową rolę odgrywa tutaj psychologia graczy. Gracze zastanawiają się „Co zrobi mój przeciwnik? Co myśli że ja zrobię? Co myśli że ja myślę że on zrobi?" I tak dalej. Dla przykładu w klasycznej grze w kamień, papier i nożyce, wiedza o strategii drugiego gracza prowadziłaby do prostego zwycięstwa – przykładowo, jeśli nasz przeciwnik zauważy że często zagrywamy kamień, może on wykorzystać to przeciwko nam zagrywając papier. Czasem postępowanie według jakiegoś schematu może zostać rozpracowane na korzyść przeciwnika. Jak zatem w takim przypadku postępować? Całkowicie nieprzewidywalnie, bez z góry określonego schematu. Pojawiają się tutaj jednak dwa zasadnicze problemy:

1. Po pierwsze, wielu ludzi sądzi, że człowiek niezdolny jest do podjęcia całkowicie losowej decyzji. Zasadniczo wiąże się to z determinizmem – koncepcją filozoficzną, według której wszystkie zdarzenia są ze sobą połączone ciągiem przyczynowo - skutkowym. Każda decyzja jest uwarunkowana (zdeterminowana) wcześniejszymi decyzjami – nie ma więc czegoś takiego jak przypadek, a losowość wynika jedynie z dysponowania ograniczonymi informacjami.
2. Po drugie, celowe wybieranie decyzji w sposób losowy może wydawać się irracjonalne, zwłaszcza że mieliśmy na celu stosowanie myślenia strategicznego, a nie pozostawianie wyniku w rękach przypadku.

Na oba te zarzuty możemy jednak odpowiedzieć – determinizm jest tylko koncepcją filozoficzną i na dodatek stojącą w opozycji do ogólnie uznanej teorii, będącej podstawą fizyki kwantowej – zasady nieoznaczoności Heisenberga. Po drugie zaś, postępowanie w sposób losowy nie wyklucza się wzajemnie z działaniem strategicznym – wartość losowości można obliczyć, pomagając trochę losowi.

Posłużmy się przykładem rzutów karnych. Jest to specjalny rodzaj uderzenia piłki w piłce nożnej, który pojawia się w meczu w dwóch przypadkach. W pierwszym, w trakcie meczu, jeśli drużyna broniąca sfauluje zawodnika drużyny przeciwnej będącego w tym czasie w polu bramkowym. W drugim przypadku, jeśli mecz turniejowy nie może zakończyć się remisem, a nie jest on rozstrzygnięty zarówno w regulaminowym czasie gry jak i w dogrywce, dochodzi do serii rzutów karnych wykonywanych na zmianę przez obie drużyny. Rzuty karne wykonywane są z odległości 11 metrów od bramki. Bramka ma 732 cm długości i 244 cm wysokości. Biorąc pod uwagę, że kopnięta piłka często osiąga prędkość 100 km/h (rekord należy do Brazylijczyka Ronny'ego Heberson Furtado de Araújo – kopnięta przez niego piłka osiągnęła 211 km/h), przebycie drogi od strzelającego do bramki zajmuje jej około 0,4 s. W tak krótkim czasie bramkarz nie może sugerować się torem lotu piłki – może próbować odgadnąć w którą stronę atakujący uderzy piłkę ale i tak będzie on zgadywał jak ustawić się w bramce. Przyjąć możemy zatem, że rzuty karne to gra symultaniczna między bramkarzem a strzelającym. Dodatkowo, interesy graczy są całkowicie przeciwstawne – strzelec chce strzelić bramkę, a bramkarz za wszelką cenę mu w tym przeszkodzić. Jeśli jeden z nich wygrywa, drugi automatycznie ponosi porażkę. Jest to więc gra o sumie stałej. Jakie możliwości mają obaj gracze? Bardzo rzadko piłkarze decydują się na strzał na wprost bramki – biorąc to pod uwagę, również bramkarze rzadko pozostają w miejscu na środku bramki. Pozostają nam dwa możliwe wybory – piłkarz kopnie piłkę w prawo lub w lewo, podobnie bramkarz może rzucić się w prawą lub lewą stronę (patrząc z perspektywy strzelca). Dla tak uproszczonej gry, możemy stworzyć tabelę – jak jednak ustalić wypłaty? Jeśli bramkarz wybierze ta samą stronę co strzelec, to mimo to, piłka cały czas ma dużą szansę prześlizgnąć się obok niego. Również piłkarz może trafić w słupek, poprzeczkę lub przestrzelić obok lub ponad bramkę. Specjalnym działem teorii gier jest **teoria użyteczności** zajmuje się ona szczegółowym ustalaniem wypłat, biorąc pod uwagę różne zjawiska. W tym przypadku posłużymy się średnim procentem celnych strzałów oddanych przez piłkarzy w zależności od wybranego przez nich i przez bramkarzy kierunku. Statystyki takie zebrał do swojej pracy Ignacio Palacios - Huerta – hiszpański ekonomista, profesor w London School of Economics. Badał on celność strzelców i bramkarzy ligi włoskiej, hiszpańskiej i angielskiej w latach 1995-2000. Średnie wyniki przedstawiono w poniższej tabelce:

Bramkarz

Strzelec

	Lewo	Prawo
Lewo	58	93
Prawo	95	70

Wypłata Strzelca w każdej komórce to średni procent celnych strzałów. Wypłatę bramkarza obliczać będziemy po prostu odejmując wynik komórki od 100. Przy okazji, warto nadmienić tutaj, że rezultaty strzałów w lewo mają trochę niższe maksymalne i minimalne wartości niż strzały w prawo. Dzieje się tak być może dlatego, że większość piłkarzy jest prawonożna, a naturalnym jest uderzenie piłki wewnętrzną częścią stopy - prawą stopą posyła się więc piłkę w prawą stronę. Jak widać w grze, żadna ze strategii nie jest zdominowana, nie ma tu także mowy o równowadze w postaci punktu siodłowego. Decydując się na strzały w prawo strzelec może uzyskać skuteczność 95% jeśli bramkarz rzuci się w lewo. Jeśli jednak rozpracowując tą strategię bramkarz rzuci się w prawo, celność strzelca spada do 70%. Jeśli więc bramkarz wybierze korzystną dla niego strategię, celność strzelca wynosić będzie 58% dla strzałów w lewo i 70% dla strzałów w prawo. Każdy z graczy mógłby wykorzystać wiedzę o upodobaniu przeciwnika do którejś ze strategii – zastosować należy więc **strategie mieszane**. Polegają one na stosowaniu strategii czystych (Prawo, Lewo) w odpowiednich proporcjach. Załóżmy, że statystyczny strzelec wybiera swoje strategie z równym prawdopodobieństwem 0,5. Wobec tego jeśli bramkarz zdecyduje rzucić się w prawo, szansa na strzelenie gola wynosi:

½ x 93 + ½ x 70 = 81,5%

A jeśli wybierze lewą stronę:
½ x 58 + ½ x 95 = 76,5%

Bramkarz w tym przypadku oczywiście wolałby wybrać dającą lepsze efekty strategię Lewo i zapewnić strzelcowi celność 76,5%. Widzimy jednak, że strzelec stosując strategię mieszaną osiągnął lepszy wynik niż stosując swoją najlepszą strategię czystą (70%) – i to o 6,5%! Jaki najlepszy wynik może osiągnąć strzelec? Zakładaliśmy do tej pory, że bramkarz dysponuje informacjami i umiejętnościami, pozwalającymi mu najlepiej zareagować na oddany strzał.

Teraz dochodzimy do momentu w którym dokładnie określimy dlaczego i jak korzystać ze strategii mieszanych:

Kryterium stosowania strategii mieszanych:

W przypadku gier z czystym konfliktem, dla pierwszego gracza zasadne jest stosowanie mieszania losowego czystych strategii, jeśli szkodliwe byłoby pozwolenie przeciwnikowi na poznanie jego strategii z wyprzedzeniem. Proporcje mieszanki powinny być tak dobrane, aby rywal nie mógł wpłynąć na wynik wyboru pierwszego gracza, stosując sobie dostępne strategie czyste tzn. średnia wypłata pierwszego gracza jest taka sama, niezależnie od tego, jakiego wyboru czystej strategii dokonał rywal.

Jeśli gracz stosuje się do tego kryterium, jego oczekiwany wynik jest pewny - jego przeciwnik nie może zastosować swojej wiedzy do uzyskania przewagi nad nim. Jego wybór strategii czystej nie zmieni wyniku gry. Może on jednak zastosować swoją strategię mieszaną. Pojawia się jednak pytanie – skoro wynik gry nie zależy od strategii przeciwnika, to czemu miałby on stosować strategię mieszaną? Mógłby on oszczędzić sobie obliczeń i zastosować dowolną strategię, na przykład w rzutach karnych, bramkarz mógłby bronić tylko lewej strony. Wszystko opiera się jednak na tym, że jeśli jeden gracz nie stosuje swojej strategii mieszanej, jego przeciwnik nie ma motywacji aby stosować własną strategię mieszaną. Kontynuując przykład, strzelec wykorzysta zachowanie bramkarza kopiąc piłkę w prawo. Gracze powinni stosować strategie mieszane, aby zmusić przeciwnika do stosowania swoich. Jeśli obaj gracze stosują strategię mieszaną w odpowiednich proporcjach, żaden nie jest w stanie uzyskać wyższej wypłaty gdyby od tej strategii odstąpił. Mówiliśmy już, że w takim przypadku strategie znajdują się w równowadze – w tym przypadku jest to **równowaga Nasha**. Pojęciem tym zajmiemy się w jednym z następnych rozdziałów jest ono bowiem ściśle związane z grami o sumie niezerowej. Nadmienić jednak warto, że jest to stabilne rozwiązanie gry - najlepsze odpowiedzi graczy na swoje wzajemne strategie.

Wracając jednak do przykładu z rzutami karnymi. Jak obliczyć najlepszą proporcję strategii mieszanych? Podejść do tego możemy na dwa sposoby. Pierwszy to metoda algebraiczna. Patrząc z perspektywy strzelca, ułamek strategii Lewo wynosić będzie x. Częstość strategii Lewo i Prawo sumować się będzie do 1. Proporcja strategii Prawo wynosić więc będzie (1 – x). Wskaźnik pomyślności tej strategii wynosić więc będzie:

- Jeśli bramkarz wybiera lewo: $58x + 95(1-x) = -37x + 95$
- Jeśli bramkarz wybiera prawo: $93x + 70(1 - x) = 23x + 70$

Jak wspomnieliśmy średnia wypłat powinna być taka sama, niezależnie od strategii bramkarza, więc:

$$-37x + 95 = 23x + 70$$

$$60x = 25$$

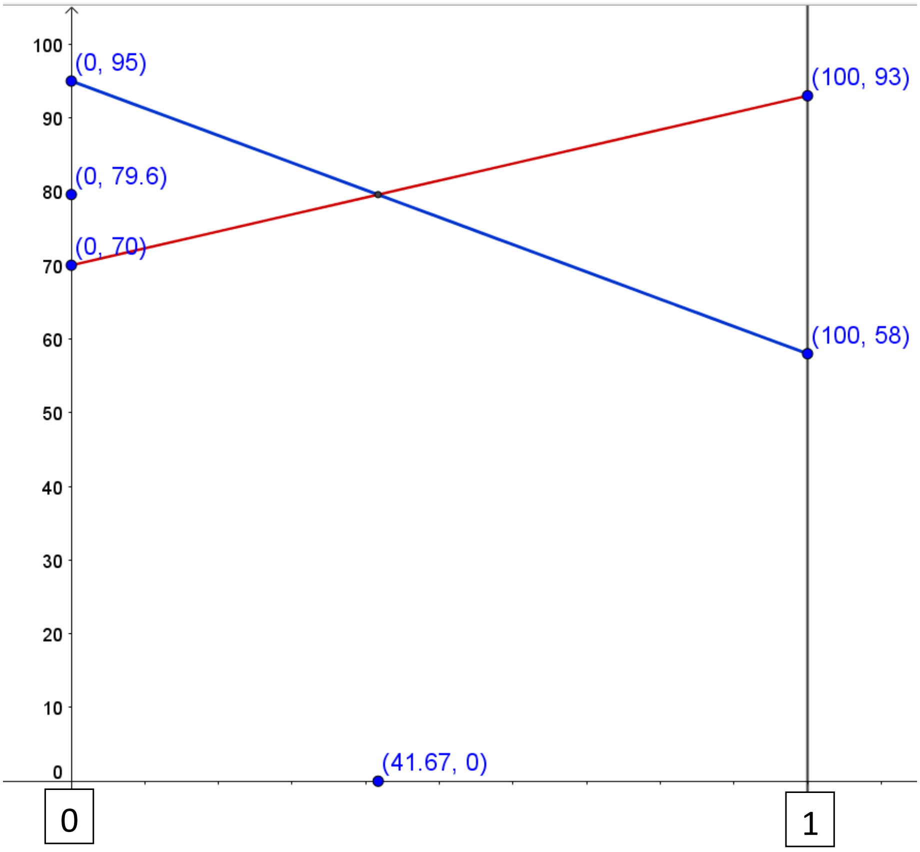
$$x = \frac{5}{12} \approx 41{,}67\%$$

A średnia wypłat wynosi:

$$-(37)\,x\,\frac{5}{12} + 95 = 79{,}6\%$$

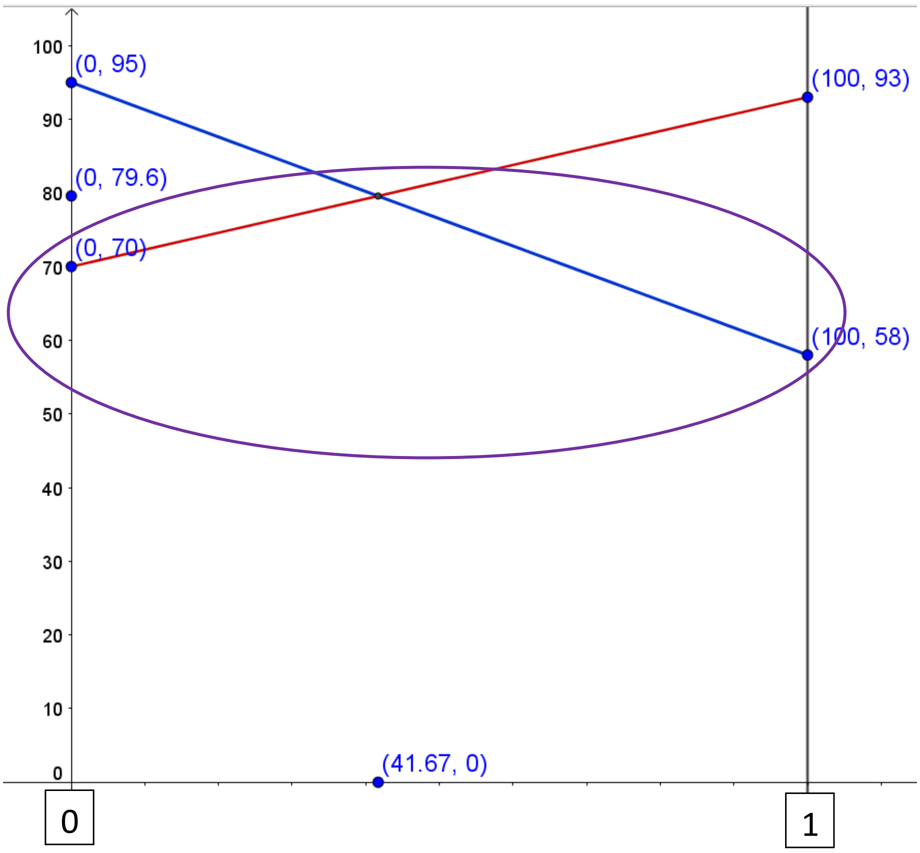
Strzelec powinien więc stosować strategię mieszaną w proporcjach ($\frac{5}{12} \approx 42\%$ Lewo, $\frac{7}{12} \approx 58\%$ Prawo).

Rozwiązanie można również znaleźć korzystając z wykresu:



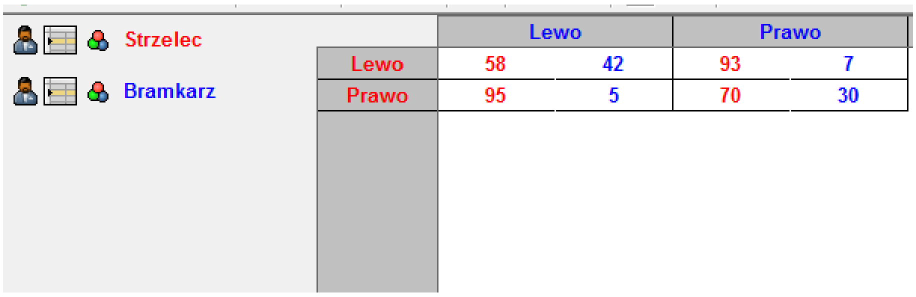
Ułamek stosowania przez strzelca strategii Lewo (x) znajduje się na poziomej osi o wartościach z przedziału <0;1>. Cała oś prezentuje różne możliwe proporcje stosowania strategii Lewo – dla każdej z tych mieszanek prezentowany jest za pomocą linii wskaźnik pomyślności (współrzędna y), gdy bramkarz wybiera czystą strategię Lewo (niebieska linia) lub Prawo (czerwona linia). Zatem jeśli strzelec wybierałby tylko strategię Lewo (ułamek 1) to może ona się skończyć wynikiem 93 (jeśli bramkarz wybierze prawo – czerwona linia) lub wynikiem 58 (jeśli bramkarz wybierze lewo – niebieska linia).

Bramkarz chce utrzymać pomyślność strzelca na jak najniższym poziomie. Wobec tego, znając proporcje strategii strzelca wybierać będzie strategię L lub P w zależności od tego która będzie dawała niższe wyniki (będzie znajdowała się niżej na wykresie). Gdy bramkarz będzie wykorzystywał swoje strategie optymalne, wskaźnik strzelca będzie znajdował się na dolnej łamanej (w kształcie odwróconej litery V) zaznaczonej fioletową elipsą:

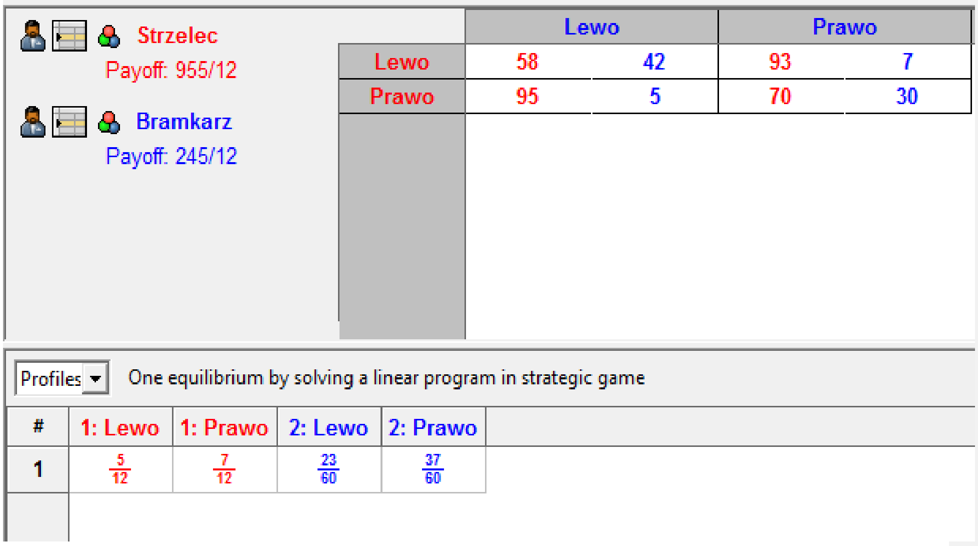


Strzelec chce zwiększyć wskaźnik pomyślności w granicach tego minimum. Będzie chciał się znaleźć w najwyższym punkcie tej łamanej, tam gdzie przecinają się niebieska i czerwona linia – współrzędna x tego punktu to odpowiedni dla niego procent strategii L.

Do rozwiązania tego problemu można również użyć wspomnianego wcześniej programu Gambit. Tworzymy w nim tabelkę z odpowiednimi wypłatami:



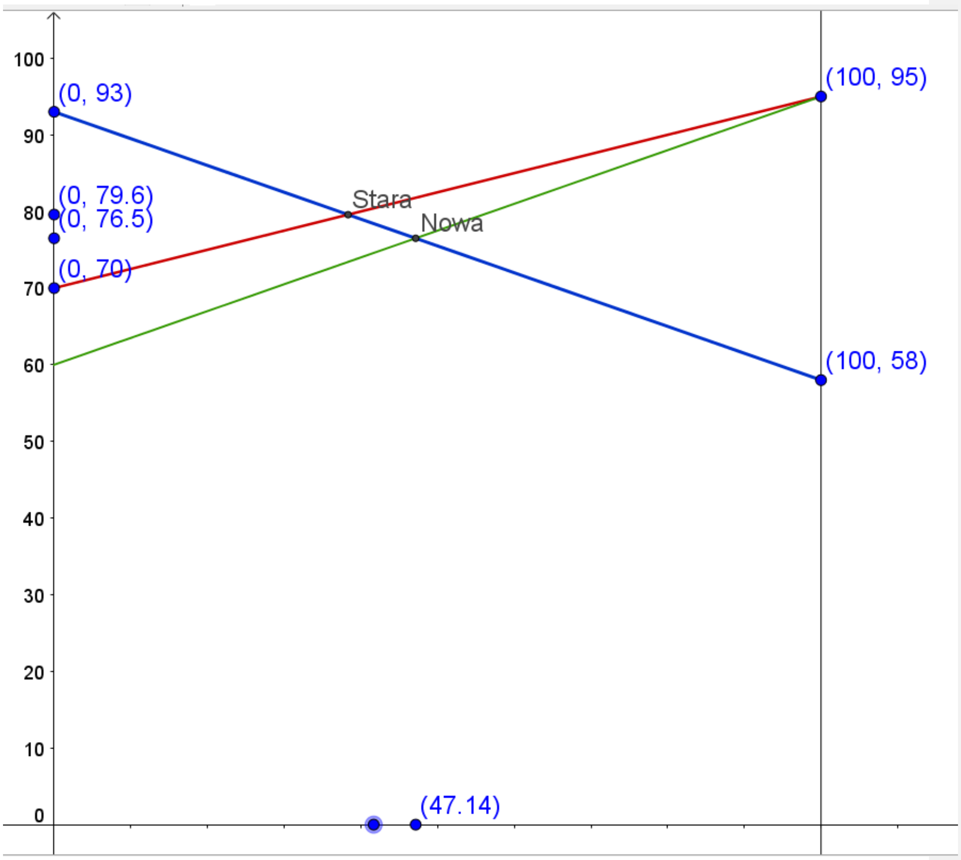
Następnie z pomocą programu wyznaczamy równowagi Nasha dla tej gry. Otrzymane mieszanki strategii, wraz z przewidywanymi wypłatami przedstawiono poniżej:



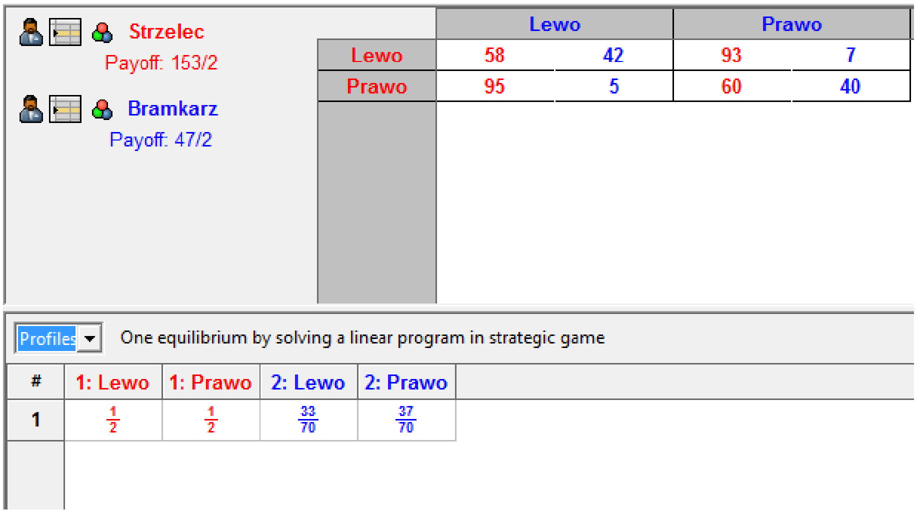
Strategię mieszaną bramkarza obliczymy w analogiczny sposób – w przypadku metody z wykresem, interesujący nas punkt będzie jednak najniższym punktem górnej łamanej. Program Gambit obliczył również odpowiednie proporcje strategii mieszanej bramkarza – wynoszą one $\frac{23}{60} \approx 38\%$ Lewo i $\frac{37}{60} \approx 62\%$ Prawo.

> *Łańcuch jest tak mocny, jak jego najsłabsze ogniwo.*
>
> *William James*

Zwróćmy jeszcze uwagę na ciekawą, nieoczywistą właściwość tego typu gier. Załóżmy, że nasz statystyczny bramkarz, trenując ciężko, zdołał poprawić swoją obronę strzałów w prawo. Dzięki temu, skuteczność strzelca, spada z 70% do 60%. Wykres proporcji strategii bramkarza wygląda następująco (na czerwono zaznaczona jest stara skuteczność bramkarza, a na zielono nowa):



Zaś w programie Gambit:



Okazuje się, że optymalne proporcje stosowania przez Bramkarza strategii zmieniają się. Teraz, powinien on stosować strategię Prawo w proporcji $\frac{37}{70} \approx 53\%$. Przed poprawieniem swojej obrony, stosował tę strategię w 62% przypadków. Gdy bramkarz udoskonalił swoją obronę prawej strony, używa jej rzadziej! Na pierwszy rzut oka wydaje się to dziwne, jednak jest stosunkowo proste do wytłumaczenia. Gdy bramkarz poprawia swoją obronę strzałów w prawo, strzelec będzie częściej korzystał ze strzałów w lewo, zmuszając bramkarza do częstszej obrony lewej strony bramki (Udział Lewo w strategii strzelca zmienił się z 42% do równego 50%). Poprawienie obrony dało jednak wymierny rezultat – średnia skuteczność strzelca spadła z 79,6% do 76,5%.

8. Teoria gier a antropologia – rybołówstwo na Jamajce

Według przedstawicieli jednego z najważniejszych nurtów antropologii, funkcjonalizmu, instytucje społeczne, zwyczaje i wzory zachowań, można interpretować jako funkcjonalne odpowiedzi na problemy z którymi styka się społeczeństwo – każde, nawet najmniejsze zjawisko kulturowe ma jakąś funkcję dla całego systemu społecznego. Dla przykładu, tabu kazirodztwa można interpretować jako reakcję społeczeństwa na zagrożenia genetyczne wynikające z krzyżowania wsobnego. Pierwszym historycznym przypadkiem zastosowania teorii gier do rozwiązania problemu antropologicznego był wydany w 1960 r artykuł Williama Davenporta dotyczący rybołówstwa na Jamajce. Do dziś budzi on wiele kontrowersji. Davenport prowadził badania w położonej na południowym wybrzeżu Jamajki wiosce, której około dwustu mieszkańców eksploatowało pobliskie łowiska. Jak pisze w swoim artykule:

„Dwadzieścia sześć załóg w żaglowych kanoe łowiło ryby za pomocą specjalnych koszy, ustawianych i wybieranych, jeśli morze i pogoda pozwalały, trzykrotnie w ciągu tygodnia […] Łowiska dzieliły się na leżące wewnątrz i na zewnątrz laguny. Łowiska wewnętrzne leżały w odległości 8-24 km od brzegu; wszystkie zewnętrzne znajdowały się dalej. Ze względu na ukształtowanie dna morza oraz przebieg linii brzegowej, w wodach zewnętrznych łowisk regularnie wzbudzały się bardzo silne prądy, tak w kierunku zachodnim, jak i wschodnim. Pojawianie się prądów […] nie było w żaden widoczny sposób powiązane z pogodą lub stanem morza w okolicy. Na łowiskach wewnętrznych prądy te były w zasadzie nieodczuwalne". [Davenport, 1960]

Dowódcy łodzi mieli 3 różne strategie połowów:

- Wewnętrzną – ustawić wszystkie kosze na łowiskach wewnętrznych
- Zewnętrzną – ustawić wszystkie kosze na wodach zewnętrznych
- Pośrednią – ustawić część koszy na łowiskach wewnętrznych a pozostałe na zewnętrznych

Każda z tych strategii miała swoje widoczne wady i zalety:

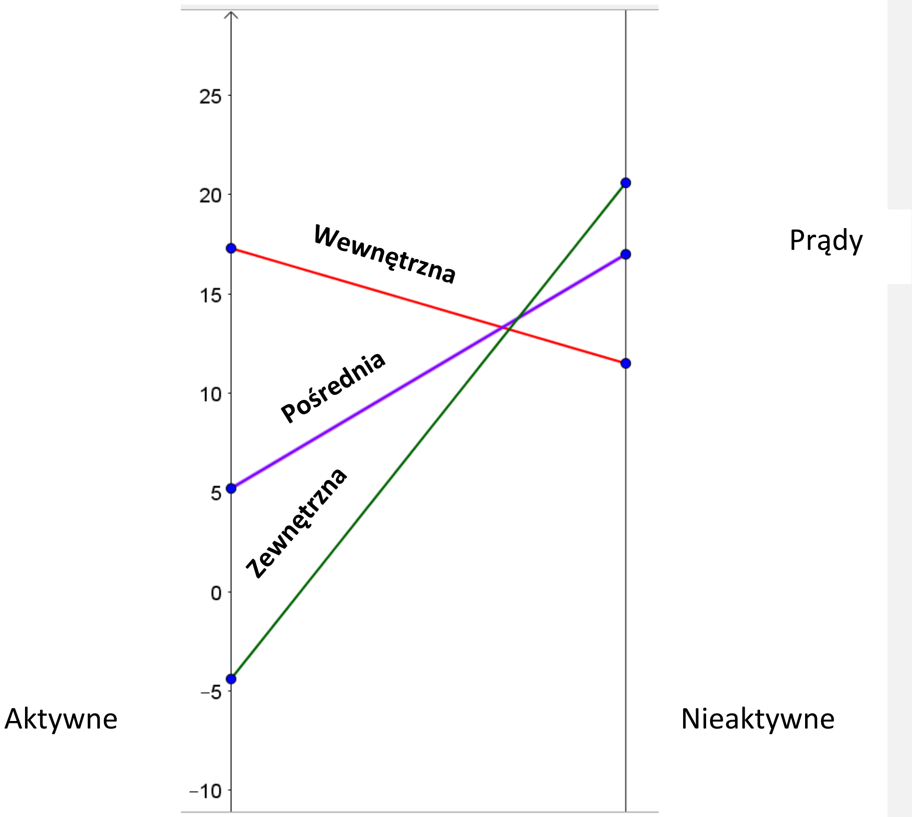
- Dopłynięcie do zewnętrznych łowisk było czasochłonne – załogi stosujące pośrednią bądź zewnętrzną strategię ustawiały mniej koszy
- Aktywność prądów przynosiła rybakom na łowiskach zewnętrznych wiele szkód: ze względu na ruch wody, boje oznaczające kosze mogły zostać przesunięte, same kosze mogły zostać zniszczone, a obecne w nich ryby zginąć np. na skutek zmian temperatury
- Ryby dostępne na zewnętrznych łowiskach były lepsze jakościowo i wielkościowo – rybacy mogli oczekiwać za nie dużo lepszej ceny.
- Do wypływania na łowiska zewnętrzne potrzebne są lepsze łodzie. Mimo ich wyższego kosztu, zapewniały one swoim załogom zwycięstwa w zawodach żeglarskich – przynosiło to prestiż i wartościowe nagrody.

Jak widać rybacy mają do podjęcia pewne konkretne decyzje – mamy tutaj do czynienia z grą. Jak ustalić jednak wartości wypłat odpowiadające poszczególnym strategiom? Zdawałoby się to bardzo subiektywnym zadaniem. Davenport podczas swojej dwuletniej pracy zebrał jednak dane dotyczące aktywności pływów, oraz ustalił średnią dochodów w funtach szterlingach przypadającą na dowódcę łodzi w ciągu miesiąca. Sytuację przedstawia poniższa macierz:

		Prądy	
		aktywne	nieaktywne
Strategia rybaków	wewnętrzna	17,3	11,5
	zewnętrzna	-4,4	20,6
	pośrednia	5,2	17,0

Godny uwagi jest fakt, że Davenport dokonywał powyższych oszacowań nic nie wiedząc o teorii gier. Jednak znając tę teorię możemy opisać tę sytuację jako grę 3x2, znaleźć optymalną strategię rybaków i porównać ją z rzeczywistym postępowaniem mieszkańców wioski:

Z komentarzem [TC1]:



Gra nie ma punktu siodłowego ani strategii zdominowanych. Graficzne rozwiązanie przedstawiono na powyższym rysunku – jest ono analogiczne do przypadku gry 2x2 z rzutami karnymi. Najniższy punkt górnej łamanej leży na przecięciu strategii wewnętrznej i pośredniej – to te dwie strategie powinni zatem obierać rybacy. Rozwiązując właściwą grę 2x2 znajdujemy optymalną strategię rybaków:

Prawdopodobieństwo wewnętrznej – p

Prawdopodobieństwo pośredniej – (1-p)

Jeśli prądy są aktywne: p x 17,3 + (1-p) x 5,2 = 12,1p+5,2

Jeśli prądy są nieaktywne: p x 11,5 + (1-p) x 17 = -5,5p + 17

12,1p+5,2 = -5,5p + 17

17,6p=11,8

p = $\frac{59}{88}$ ≈ **67%**

W 67% przypadków powinni stosować strategię wewnętrzną, a w 33% pośrednią. Obliczamy optymalną strategię prądów:

Prawdopodobieństwo bycia aktywnym – q

Prawdopodobieństwo bycia nieaktywnym – (1-q)

Dla wewnętrznej: q x 17,3 + (1-q)x11,5 = 5,8q + 11,5

Dla pośredniej: q x 5,2 + (1-q)x17= -11,8q + 17

5,8q + 11,5 = -11,8q + 17

17,6q = 5,5

q=$\frac{5,5}{17,6}$ = $\frac{5}{16} \approx \mathbf{31}\%$

A więc optymalna strategia prądów to „być aktywnym" przez 31% czasu i być nieaktywnym przez 69% czasu. Wartość gry wynosi:
12,1 x $\frac{59}{88}$ +5,2 ≈ **13,3**

Zatem rybacy powinni średnio uzyskiwać 13,3 funta miesięcznie z połowów.

Porównanie otrzymanej strategii z rzeczywistym zachowaniem rybaków jest uderzające:

- Po pierwsze, dowódcy łodzi prawie nigdy nie decydowali się ustawiać swoich łodzi tylko na zewnętrznych łowiskach – uznali to za zbyt ryzykowne.
- Po drugie, w okresie kiedy Davenport prowadził swoje badania, około 69% rybaków wybierało strategię wewnętrzną, a 31% wybrało strategię pośrednią, co jest wynikiem bardzo zbliżonym do otrzymanego drogą obliczeń.
- Po trzecie, nawet prądy zdawały się „stosować swoją strategię optymalną – przez dwa lata obserwacji były aktywne 25% czasu.

Uzyskany z doświadczenia wniosek jest taki, że społeczność dobrze zaadaptowała się do obecnych warunków przyrodniczych i ekonomicznych. Potwierdza to koncepcję funkcjonalizmu.

Niesamowite wyniki były przez długi czas dobrze przyjmowane i szeroko cytowane na całym świecie w literaturze antropologicznej. Jednak w 1970 r doświadczenie doczekało się ostrej krytyki. Wskazano, że przeciwnikiem rybaków jest prąd morski – zjawisko przyrodnicze. Nie jest to byt zdolny do podejmowania decyzji, a jego zachowanie jest niezależne od strategii podejmowanej przez przeciwnika, w szczególności zaś, jeśli rybacy nie będą stosowali swojej strategii optymalnej, przyroda nie zmieni swojej strategii aby to przeciwko nim wykorzystać. W związku z tym, rybacy powinni to wykorzystać na swoją korzyść. Znają oni strategię prądu – aktywność 25% czasu i nieaktywność 75% czasu – powinni wybrać więc strategię charakteryzującą się największą wartością oczekiwaną wypłaty. Po obliczeniu wartości wynoszą:

- Strategia wewnętrzna: 0,25x17,3 + 0,75x11,5 = **12,95**
- Strategia zewnętrzna: 0,25x(-4,4) + 0,75x20,6 =**14,35**
- Strategia pośrednia: 0,25x5,2 + 0,75x 17 = **14,05**

Zastosowanie tej metody daje kompletnie odmienne wyniki! Zgodnie z tą metodą, wszyscy rybacy powinni łowić wyłącznie na łowiskach zewnętrznych dla osiągnięcia największego zysku.

Wyjaśnienie pierwszej metody może być jednak proste - sami rybacy twierdzili, że nie stosują strategii zewnętrznej gdyż jest ona zbyt ryzykowna. Zachowanie prądów morskich jest nieprzewidywalne i nawet jeśli ich aktywność wynosi średnio 25% dla dłuższego okresu czasu, to w poszczególnych latach czy miesiącach zachowania te mogą się bardzo wahać. Załóżmy, że w pewym roku aktywność prądów wyniosła aż 40%. W tej sytuacji oczekiwane wypłaty wynoszą:

Strategia wewnętrzna: 0,4 x 17,3 + 0,6 x 11,5 = **13,82**

Strategia zewnętrzna: 0,4 x (-4,4) + 0,6 x 20,6 = **10,6**

Strategia pośrednia: 0,4 x 5,2 + 0,6 x 17 = **12,28**

Załóżmy też, że do stałego funkcjonowania, załoga rybacka potrzebuje średnio 13 funtów miesięcznie zysku. W okresie wzmożonej aktywności prądów, stosowanie strategii zewnętrznej może doprowadzić do dużych trudności – straty podczas jednego roku mogą się odbić na załodze zmuszając np. do zmniejszenia ilości ustawianych koszy. Takie zachowanie może doprowadzić do lawinowej straty w porównaniu ze stosowaniem pierwszej minimaksowej strategii – gwarantuje ona przeciętną wypłatę 13,3 funta miesięcznie, niezależnie od zachowania prądu. Jest to racjonalny wybór ze względu na jego bezpieczeństwo.

9. Drzewka gry a kryzys kubański

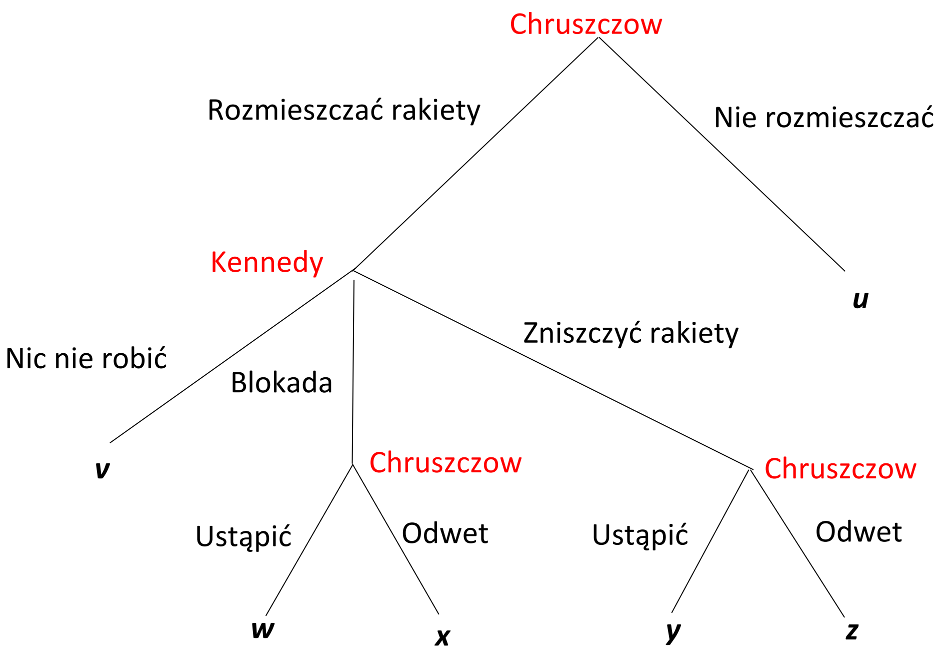
Korzystając z drzewek gier zilustrować możemy także realną sytuację, będącą największym historycznym kryzysem powojennego świata – kryzys kubański. Był to konflikt między dwoma supermocarstwami dysponującymi bronią atomową - Stanami Zjednoczonymi i ZSRR – rozgrywający się w październiku 1962 r. w okolicach Kuby. Jego przyczyną była decyzja przywódcy ZSRR, Nikity Chruszczowa o umieszczeniu na Kubie pocisków balistycznych, które zagrozić mogły Stanom. Zasięg rakiet przedstawia poniższa grafika:

Zarówno Chruszczow jak i Kennedy, ówczesny prezydent Stanów Zjednoczonych, mogli podjąć szereg naprzemiennych decyzji, znając poprzednie decyzję drugiej strony. Sytuację tę można przedstawić za pomocą gry, w której dwaj gracze to rządy obu mocarstw reprezentowane przez Nikitę Chruszczowa i Johna Kennedy'ego. Grę rozpoczyna Chruszczow decydując się umieścić pociski, bądź nie. Jeśli zdecyduje się na rozmieszczenie pocisków, Kennedy ma trzy możliwości:

A. Nie zrobić nic
B. Ogłosić blokadę Kuby przez jednostki morskie
C. Zniszczyć rakiety za pomocą precyzyjnego uderzenia z powietrza

Jeśli Kennedy zdecyduje się na blokadę bądź zniszczenie rakiet (nazwiemy te decyzje „agresywnymi") , Chruszczow może ustąpić albo podjąć kroki odwetowe – które w efekcie doprowadzić mogą do wojny nuklearnej.

Możliwe decyzje graczy przedstawia drzewko:



Kennedy ma 3 strategie odpowiadające 3 decyzjom wychodzącym z jego jedynego węzła. Chruszczow ma więcej możliwości – na początku wybiera czy rozmieścić rakiety czy nie. Jeśli zdecyduje się na rozmieszczenie rakiet, decyzja Kennedy'ego może go doprowadzić do jednego z dwóch węzłów decyzyjnych. Strategia Chruszczowa musi przewidywać jego znalezienie się w każdym z nich. Wobec tego Chruszczow ma 5 różnych strategii:

A. Nie rozmieszczać rakiet
B. Rozmieścić rakiety – w przypadku jakiejkolwiek agresywnej reakcji Kennedy'ego ustąpić
C. Rozmieścić rakiety – w przypadku zniszczenia rakiet ustąpić, w przypadku blokady zastosować środki odwetowe.
D. Rozmieścić rakiety – w przypadku zniszczenia rakiet zastosować środki odwetowe, w przypadku blokady ustąpić
E. Rozmieścić rakiety – w przypadku jakiejkolwiek agresywnej reakcji Kennedy'ego zastosować środki odwetowe.

Sytuację zamiast w postaci drzewka rozpatrzyć też możemy jako macierz. Kennedy wraz ze swoimi trzema strategiami umieszczony będzie na miejscu Pana Wiersza, zaś Chruszczow i jego strategie zajmą miejsce Pani Kolumny:

Chruszczow

Kennedy

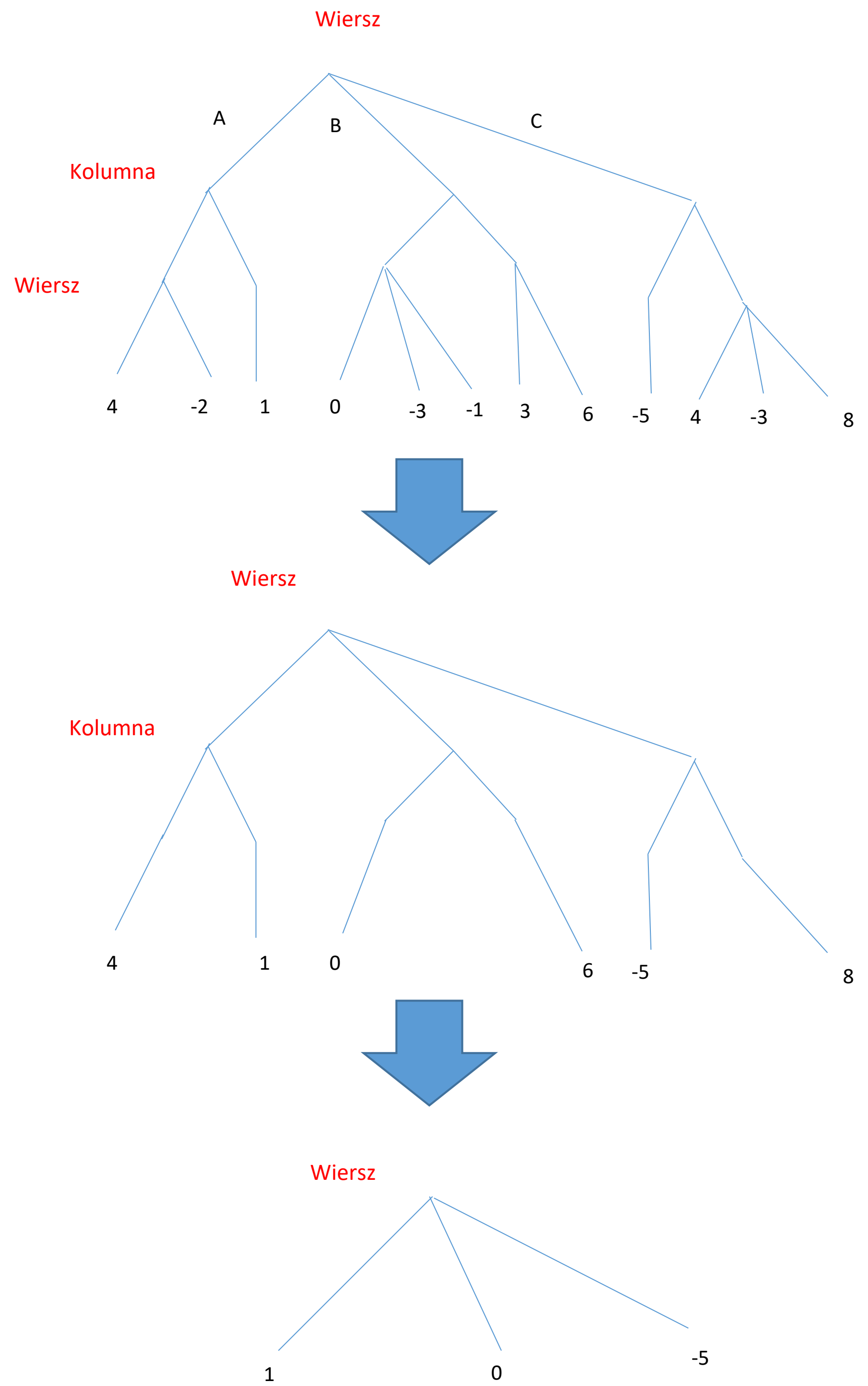
	A	B	C	D	E
A	u	v	v	v	v
B	u	w	w	x	z
C	u	y	z	y	x

Nie jest możliwe ścisłe przyporządkowanie poszczególnym decyzjom wypłat – zależą one od wielu czynników i mogłyby być ustalone bardzo subiektywnie. Nie jest to jednak na pewno gra o sumie zerowej – wynik ***u*** (nie wystąpienie konfliktu) jest dużo bardziej korzystny niż ***x*** lub ***z*** – rozwiązania zaostrzające konflikt i prowadzące do dużych kosztów obydwu stron (oraz droga do atomowej apokalipsy). Do dalszych rozważań przydatne nam będzie kolejne narzędzie istotne w teorii gier – indukcja wsteczna. Jest to sposób na rozwiązywanie gier sekwencyjnych niejako od końca. Muszą to jednak być gry o pełnej informacji czyli takie w których:

- Wszyscy gracze znają reguły, a w szczególności wypłaty swoje i przeciwnika
- Każdy węzeł należy do osobnego zbioru informacyjnego
- Nie ma w grze aspektu zależnego od losu

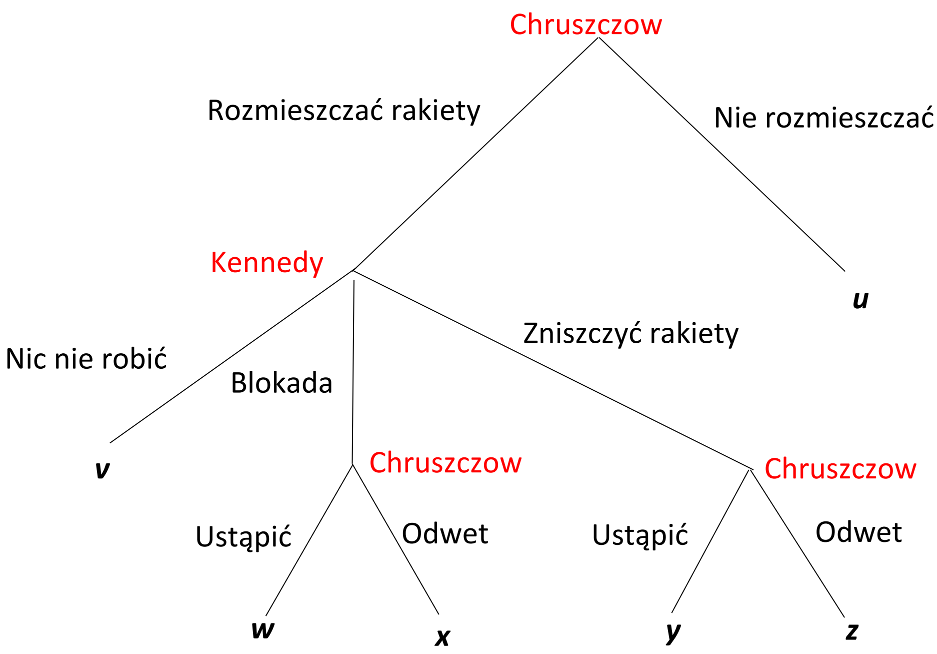
Metodę tą przedstawiono na poniższym przykładzie gry o sumie zerowej. Jak widzimy, ostatni ruch w grze należy do Wiersza. Jest to gra o sumie zerowej, a więc dąży on do jak najwyższego wyniku – niezależnie od tego w którym węźle się znajdzie, z wszystkich decyzji podejmie on tą która zapewni mu najwyższą wygraną. Z jego ostatnich decyzji można więc „przyciąć" te które nie prowadzą do najwyższego wyniku (w terminologii angielskiej, przy grze w postaci drzewka, zamiast indukcji wstecznej możemy mówić też o „przycinaniu drzewka" ang. *„tree pruning"*. W istocie termin ten dobrze oddaje ideę indukcji wstecznej – obcinania gałęzi które są nieużyteczne). Po zmniejszeniu strategii takie drzewko ulega redukcji tak, że z każdego węzła decyzyjnego Wiersza wychodzi tylko jedna gałąź. Będąc na pozycji Wiersza możemy pójść jeszcze o krok dalej. Kolumna w swoim ruchu dążyć będzie do zmniejszenia wyniku Wiersza na tyle na ile to możliwe. Wybierze więc gałąź prowadzącą do jak najmniejszej liczby. Ponownie drzewko ulega uproszczeniu.

Wiedząc o tym, dla Wiersza jasne jest, że po takiej selekcji powinien on wybrać gałąź prowadzącą do najwyższego wyniku (w poniższych przypadkach jest to wynik 1).



Taką grę również przedstawić można w postaci macierzy. Ile strategii ma kolumna? Będąc w każdym z 3 węzłów może podjąć jedną z dwóch decyzji – ma więc $2^3 = 8$ strategii. Wiersz zaś wybiera spośród 11 strategii – podejmując decyzję A ma 2x1 strategii, jeśli wybiera B ma 2x3 strategii a dla C ma 1x3 strategii. 2+6+3=11. Jak wygląda jednak odpowiednie „przycinanie strategii" odtworzone dla gier w postaci tabelki? Okazuje się, że pierwsze „przycinanie" gałęzi Wiersza, doprowadziło do wyeliminowania jego 8 strategii ze względu na kryterium dominacji. Drugie „cięcie" dla Kolumny redukuje jej 7 strategii ze względu na kryterium dominacji drugiego rzędu (pozostaje jej jedna strategia). Dwie z trzech ostatnich strategii Wiersza są przycinane ze względu na kryterium dominacji trzeciego rzędu - pozostaje nam para strategii, której wynik (1) jest w istocie punktem siodłowym. W innych grach o takiej postaci mogłoby wystąpić również więcej punktów siodłowych – widzimy jednak że korzystając z tej metody, musiałyby one mieć takie same wartości. Spełnia to podane we wcześniejszym rozdziale wymagania. Takie rozwiązanie gry w postaci drzewka jest dużo prostsze niż rysowanie tabeli z 88 komórkami i wykreślanie po kolei strategii zdominowanych.

Powróćmy jednak do Kryzysu Kubańskiego:



Wspomnieliśmy już, że niemożliwe jest przyporządkowanie decyzjom jasnych wypłat. Dużo bardziej możliwe jest jednak uszeregowanie wyników przez każdego z graczy od najlepszego do najgorszego. Na pewno Chruszczow wolałby, żeby po rozmieszczeniu rakiet Kennedy nie podjął żadnej agresywnej decyzji. Z kolei dla Kennedy'ego zdecydowanie korzystniejsze byłoby, gdyby po precyzyjnym zniszczeniu rakiet Chruszczow ustąpił, nie podejmując żadnych działań odwetowych. Załóżmy, że w Konflikcie Kubańskim dwaj przywódcy supermocarstw, dokonują następującego uszeregowania wyników, od najlepszego do najgorszego:

Kennedy: *w, y, u, v, x, z*

Chruszczow: *v, u, w, y, z, x*

Jak potoczyłby się konflikt, gdybyśmy zastosowali technikę indukcji wstecznej?

Zgodnie ze swoimi preferencjami, Chruszczow w przypadku blokady bądź zniszczenia rakiet ustąpi. Wiedząc o tym, jeśli Chruszczow rozmieści rakiety, Kennedy doprowadzić może do wyników *v, w, y*. Najkorzystniejszym dla niego wynikiem jest *w*, Kennedy zarządzi więc blokadę Kuby. Ze swojej pozycji Chruszczow może więc doprowadzić do do wyniku w, lub u (jeśli nie rozmieści rakiet). Z tych dwóch wyników woli u, nie rozmieści więc rakiet, a Kryzys Kubański skończy się zanim na dobre się rozpocznie. Dlaczego więc tak się nie stało w rzeczywistości? Wytłumaczyć można to na wiele sposobów:

- Gracze nie znali wypłat poszczególnych wyników, nie byli też świadomi jak przeciwnik uszereguje kolejno wyniki.
- Chruszczow liczył na brak reakcji Kennedy'ego (miał ku temu powody, prezydent Stanów Zjednoczonych sprawiał wrażenie ugodowego) – blokada bądź zniszczenie rakiet mogły prowadzić do wojny i Chruszczow był pewien że Kennedy nie podejmie ryzyka.
- Możliwe też, że nasz model jest zbyt uproszczony – nie oddaje w pełni wszystkich możliwości, bądź źle oceniliśmy preferencje graczy co do wyników.

Ostatecznie, w rzeczywistości, w 1962 r. Nikita Chruszczow zlecił rozmieszczenie na Kubie pocisków balistycznych średniego zasięgu, mogących bezpośrednio zagrozić Stanom Zjednoczonym. W wyniku blokady Kuby zarządzonej przez Johna Kennedy'ego, Chruszczow zdecydował się ustąpić i nie rozmieszczać na wyspie rakiet. W zamian za to, Stany zagwarantowały ZSRR, że nie dopuszczą się agresji na Kubę; wycofały również z Turcji amerykańskie rakiety. Pozwoliło to Chruszczowowi zachować honor na arenie międzynarodowej, osłabiło jednak jego pozycję w kraju. Wydarzenia te doprowadziły też do powstania tzw. gorącej linii między supermocarstwami – bezpośredniej komunikacji między Waszyngtonem a Moskwą, mającej zapobiegać konfliktom – przyniosło to chwilowe ocieplenie stosunków między państwami.

Korzystając z indukcji wstecznej można dojść również do ciekawych wniosków. Rozważmy skończoną grę dwuosobową o pełnej informacji, rozgrywaną przez dwóch graczy – Czarnych i Białych, która skończyć się może tylko wygraną jednej ze stron i przegraną drugiej. Wobec tego zawsze zachodzi jedno z dwojga:

- Białe mają strategię wygrywającą, gwarantującą im zwycięstwo, niezależnie od tego jak będą grać Czarne.
- Czarne mają strategię wygrywającą, gwarantującą im zwycięstwo, niezależnie od tego jak będą grać Białe.

Twierdzenie to zostało udowodnione w 1912 r. przez niemieckiego matematyka Ernsta Zermelo. Bazuje ono na koncepcji indukcji wstecznej - powyższą grę można opisać w postaci drzewka jako grę o sumie zerowej z wypłatami 1 dla Białych jeśli wygrają i -1 jeśli przegrają. Techniką „przycinania drzewka" możemy odnaleźć punkt siodłowy o wartości 1 (jeśli Białe mają strategię wygrywającą) lub -1 (jeśli Czarne mają strategię wygrywającą). Oczywiście intuicyjnie na myśl przychodzi czy tak też jest w szachach. Istnieje jednak jeden problem – szachy mogą również zakończyć się remisem. Jak już wspomnieliśmy, całkowite przeanalizowanie gry w szachy stoi daleko poza zasięgiem najnowocześniejszych komputerów. Do dziś nie wiadomo czy w szachach Białe lub Czarne mają strategię wygrywającą. Pewne jest jednak, że jedna strona ma strategię nieprzegrywającą, czyli taką, która gwarantuje wygranie lub co najmniej zremisowanie.

10. Teoria gier w grach planszowych

Teoria gier wywodzi się od gier hazardowych takich jak kości czy karty. Mimo że bywa ona przydatna przy ich analizie i zrozumieniu mechanizmów, zastosować ją można również do innych gier towarzyskich. W ostatnich kilkunastu latach gry planszowe jako sposób na spędzenie wolnego czasu zaczęły się prężnie rozwijać. Nie są już one kojarzone tylko z chińczykiem i monopoly, powstaje coraz więcej ciekawych gier planszowych z oryginalnymi mechanizmami, przeznaczonych dla różnych odbiorców. Wiele z tych gier ma również swoje międzynarodowe turnieje z wysokimi nagrodami pieniężnymi – suma wartości nagród w turnieju Pro Tour jednej z najpopularniejszych kolekcjonerskich gier karcianych na świecie- *Magic: The Gathering* wynosi 250,000 $.

DOMINION:

Jedną z najlepszych i najczęściej nagradzanych gier karcianych jest Dominon, gra autorstwa Donalda X. Vaccarino, wydana w 2008 r. W grze tej, gracze wcielają się w role władców małych, średniowiecznych krain zaś ich celem jest stworzenie jak największego imperium. Pudełko wraz z zawartością przedstawiono poniżej:

W trakcie gry, gracze kupują z ogólnego zestawu karty, które będą wykorzystywali w swoich turach. Starają się oni zbudować talię, która pozwoli im na zdobycie jak największej liczby punktów zwycięstwa, reprezentowanych przez karty prowincji. Głównym zadaniem graczy jest gromadzenie pieniędzy (z pomocą kart akcji), które pozwalają na zakup nowych kart prowincji – są one drogie, zatem do ich kupna potrzeba zbudowania dobrze zbalansowanej talii, pozwalającej na osiąganie odpowiednich kombinacji kart. Istnieje wiele różnych strategii, każda partia zaczyna się jednak w taki sam sposób. Na początku, gracze wybierają wspólnie zestaw 10 rodzajów kart królestwa (każdy rodzaj karty ma 10 egzemplarzy) które będą mogli kupować w trakcie gry. W grze dostępnych jest 25 rodzajów kart co już sprawia, że liczba możliwych kombinacji (zestawów) jest ogromna:

$$\binom{25}{10} = 3\,268\,760$$

Każdy z graczy otrzymuje 10 kart – 7 kart miedziaków (o wartości 1 – służą one do kupowania) i 3 karty posiadłości (zapewniające punkty zwycięstwa) – a następnie tasuje je, tworząc swoją początkową talię. Na początku swojej kolejki gracze zawsze będą ciągnęli do 5 kart na ręce, a następnie zagrywali je i dokonywali nowych zakupów. Zagrane i zakupione karty, trafiają na stos kart odrzuconych obok talii. W momencie wyczerpania talii, odrzucone karty są przetasowywane, tworząc nową talię. Mechanizm ten jest szczególnie ciekawy – z jednej strony, w trakcie gry nie wiemy jakie 5 kart wylosujemy ze swojej talii, z drugiej zaś, to sami dokonujemy zakupów budując swoją talię. Mamy tu do czynienia z losowością kontrolowaną. W wielu grach występuje również tzw. efekt kuli śnieżnej – chodzi o to, że jeśli jeden gracz dobrze rozpocznie grę, w późniejszych etapach będzie tak szybko rósł w siłę, że pozostali gracze nie będą mogli mu przeszkodzić i wygra on rozgrywkę. W Dominionie, karty, które zapewniają graczom punkty zwycięstwa, muszą być zakupione i dodane do talii. Oprócz przybliżenia do wygranej „zaśmiecają" one talię – liczą się tylko pod koniec gry, a w trakcie rozgrywki nic nie zapewniają. Jeśli więc jakiś gracz kupi bardzo dużo kart zwycięstwa, jego późniejszy dociąg kart pełen będzie nic nie wartych posiadłości, znacznie ograniczających możliwości.

Spójrzmy dokładniej na początek rozgrywki. Wszyscy gracze startują z taką samą talią 10 kart. W pierwszej kolejce ciągną oni 5 kart, rozgrywają rundę, odrzucają karty a następnie w drugiej rundzie ciągną oni kolejne 5 kart i rozgrywają rundę. W trzeciej kolejce, odrzucone i zakupione karty są przetasowywane – od tego momentu talia każdego gracza jest inna i zależy od jego decyzji i zakupów. Mimo że przez pierwsze dwie kolejki nie wiemy jakie będziemy mieli karty na ręce, możemy obliczyć prawdopodobieństwo poszczególnych układów i tym samym przygotować swoją pewną strategię na pierwsze dwie rundy gry. Spójrzmy jeszcze raz na talię każdego gracza – składa się ona z 7 miedziaków i 3 posiadłości (kart zwycięstwa). Jakie możemy otrzymać układy kart? Ciągnąc 5 kart możemy sobie zapewnić maksymalnie 5 miedziaków. Możemy również otrzymać ich 4, 3 bądź 2. Nie uzyskamy jednego miedziaka, ponieważ musiałyby mu towarzyszyć 4 karty posiadłości a są tylko 3 w naszej talii. Jeśli w jednym z ruchów pociągniemy 5 miedziaków, w drugim z pewnością otrzymamy resztę czyli tylko dwa. Podobnie jeśli w jednej rundzie uzyskamy 3, w drugiej pociągniemy 4 miedziaki. Możliwości 5 i 2 oraz 2 i 5 są symetryczne podobnie jak 3 i 4 oraz 4 i 3. Obliczmy więc prawdopodobieństwo wystąpienia zestawu **A** = **5** miedziaków w pierwszej i **2** miedziaków w drugiej rundzie gry. W naszej pierwszej rundzie ciągniemy 5 z 10 kart, a w drugiej pozostałe 5 kart:

$$\overline{\Omega} = \binom{10}{5}$$

$$\overline{A} = \binom{7}{5}$$

$$P(A) = \frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12}$$

Zdarzenie **B** = w pierwszej rundzie pociągniemy **2**miedziaki a w drugiej **5** jest symetryczne.

$$\overline{B} = \binom{7}{2}$$

$$P(B) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{12}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania określonego zestawu x miedziaków i 5-x posiadłości (gdzie x ∈ {2,3,4,5}) wynosi więc:

$$P(C) = \frac{\binom{7}{x}\binom{3}{5-x}}{\binom{10}{5}}$$

A zatem prawdopodobieństwo wylosowania w pierwszej rundzie 4 miedziaków jest równe:

$$P(D) = \frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{5}{12}$$

Dodatkowo nie ma większego znaczenia, czy np. osiągniemy 5 miedziaków w pierwszej czy w drugiej rundzie – na zakończenie drugiej rundy i tak wszystkie karty są tasowane. Bardziej interesuje nas więc czy w naszym zestawie (niezależnie od kolejności) otrzymamy 5 i 2 miedziaki czy 3 i 4. Prawdopodobieństwo poszczególnych rozkładów to więc:

Dla 5 i 2 = $\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$

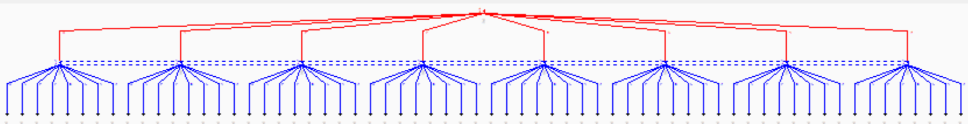
Dla 3 i 4 =$\frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$

Uzbrojeni w tę wiedzę, możemy zasiąść do gry z planem na kupno kart za 3 i 4 miedziaki w $\frac{5}{6}$ przypadków i za 2 i 5 miedziaków w $\frac{1}{6}$ przypadków.

WŁADCY PODZIEMI

Inną bardzo ciekawą grą są *Władcy Podziemi* . Jest to produkcja bazująca na grze komputerowej, stworzona w 2009 r. przez czeskiego autora Vlaada Chvátil. W przeciwieństwie do wielu gier, w których gracz kieruje odważnym bohaterem - rycerzem lub magiem, zwalczającym zło i broniącym porządku na świecie, w tej grze 4 gracze wcielają się w mrocznych władców budujących swoje podziemia. Cała gra opiera się na drążeniu tuneli, gromadzeniu skarbów, zatrudnianiu potworów (łącznie z płaceniem podatków dla Ministerstwa Podziemi) oraz odpieraniu nieproszonych gości w postaci poszukiwaczy przygód. Gra jest przy tym obdarzona dużą dawką humoru i parodiuje wiele utartych gatunkowych schematów:

W kontekście teorii gier, interesujący jest jednak jeden z jej aspektów – mechanizm wybierania i wykonywania rozkazów. Każdy z graczy w swojej kolejce będzie wybierał 3 z 8 możliwych rozkazów, które wykonywać będą jego sługi. I tak do wyboru będzie m. in. zdobywanie żywności, zatrudnianie chochlików czy kupowanie pułapek. Gracze wybierają swoje rozkazy, poprzez położenie odpowiednich kart zakrytych przed sobą (w kolejności: pierwszy rozkaz, drugi, trzeci) – nie są więc świadomi wyborów przeciwników. Co więcej, rozkazy odkrywane i wykonywane są w kolejności – najpierw pierwszy rozkaz pierwszego gracza, pierwszy rozkaz drugiego, pierwszy rozkaz trzeciego, pierwszy rozkaz czwartego, potem drugi rozkaz pierwszego gracza, drugi rozkaz drugiego gracza i tak dalej… Przy wyborze rozkazów mamy więc do czynienia z grą w postaci normalnej zaś same rozkazy wykonywane są sekwencyjnie. Co ciekawe, daną akcję mogą wypełniać maksymalnie 3 osoby – jeśli któryś z graczy odkrywa rozkaz wybrany już przez pozostałych trzech nie może go wykonać. Dodatkowo, treść tego samego rozkazu różni się trochę w zależności od tego jako który z kolei dany gracz go odkrył (na przykład pierwszy gracz wybierający wydobywanie złota może go zdobyć 4 jednostki a drugi gracz już 5 jednostek). Wyjątkowo ważne jest więc przewidzenie rozkazów przeciwników i takie rozplanowanie swoich, aby przyniosły maksymalną korzyść. Poglądowe drzewko wyboru pierwszych rozkazów przez pierwszych dwóch graczy wygląda następująco:



Widzimy, że tylko pierwszy wybór pierwszego gracza to decyzja w której zbiór informacyjny składa się z pojedynczego wierzchołka – istotnie, jako pierwszy gracz możemy być pewni, że wybrany przez nas pierwszy rozkaz zostanie wykonany jako pierwszy w grze (nikt nie wybiera rozkazu przed nami). Jednak już drugi gracz nie może być pewien co wybrał gracz przed nim – może być to jeden z 8 rozkazów (czyli jedna z 8 możliwych decyzji). Jego zbiór informacyjny składa się zatem z 8 wierzchołków. Kolejni gracze są jeszcze mniej pewni swojej sytuacji – zbiór informacyjny 3 gracza składa się z 64 wierzchołków, a zbiór informacyjny 4 gracza liczy 512 wierzchołków. Wracając ponownie do drugiego gracza, kiedy wybiera on drugi rozkaz znajduje się jednak w zbiorze nie o 4096 wierzchołkach ale o 512 – wie on jaki rozkaz wybrał jako pierwszy, nie ma tylko pewności co do 3 pierwszych decyzji pozostałych graczy. Wydawać by się mogło że pozycja ostatniego gracza jest jednoznacznie najgorsza – jest on zawsze najmniej pewny swojej sytuacji, pozostali gracze mają bowiem wiele różnych możliwości ruchu oraz jest on najbardziej narażony na wybranie swojego rozkazu jako czwarty – tym samym nie mogąc go wykonać. Z drugiej strony, nagrody za drugą i trzecią pozycję przy danym rozkazie są często wyższe niż za pierwszą pozycję, zaś gracz może często przewidzieć ruchy przeciwników.

1. Po pierwsze, w późniejszych rundach gry, 2 z 3 ostatnio wybranych rozkazów graczy jest ujawniane innym graczom i nie może zostać przez nich zagrane – mają oni do wyboru 6 rozkazów.
2. Po drugie, sytuacja w podziemiach każdego z graczy jest widoczna dla przeciwników – mogą oni dzięki temu wiele wywnioskować.
3. Po trzecie, jedne z akcji są znacznie częściej wybierane niż inne – istnieje stałe zapotrzebowanie na żywność i złoto, zaś np. pułapki potrzebne są jedynie w drugiej połowie gry.

Założmy, że w pierwszej rundzie jako czwarty gracz wybieramy pierwszy ze swoich rozkazów – zgodnie z naszym drzewkiem znajdujemy się w jednym z 512 wierzchołków naszego zbioru – jeśli wybierzemy jakiś rozkaz, nie wiemy czy do wykonania go znajdziemy się na pierwszej, drugiej czy trzeciej pozycji, a może w ogóle nie będziemy mogli go wykonać. Możemy jednak oszacować nasze szanse na konkretną pozycję. Założmy, że chcemy wydobyć złoto. Każdy gracz może wybrać kartę na 8 sposobów. Statystyczne szanse tego, że znajdziemy się na pierwszej pozycji w wydobyciu złota (jeśli każdy z graczy wybierze inną akcję niż złoto) wynoszą:

$$\frac{7x7x7}{8x8x8} \approx 67\%$$

Założmy że najbardziej interesuje nas druga pozycja, statystyczne szanse na nią wynoszą:

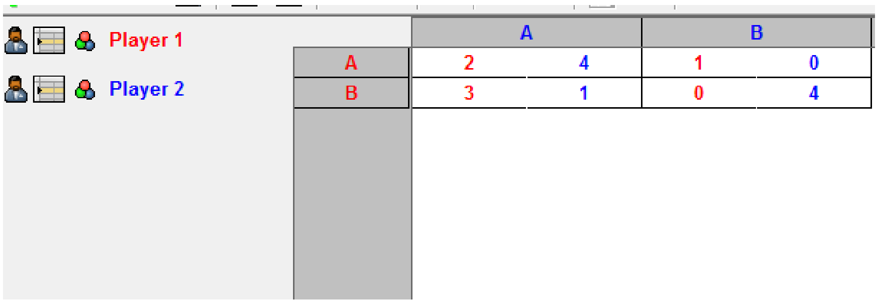
$$\frac{1x7x7 + 7x1x7 + 7x7x1}{8x8x8} \approx 29\%$$

Aby osiągnąć drugą pozycję, moglibyśmy obliczyć kolejno prawdopodobieństwa otrzymania jej jeśli wystawiamy wydobycie złota jako pierwszy rozkaz, drugi rozkaz i trzeci rozkaz. Następnie moglibyśmy skorzystać ze strategii mieszanej i odpowiednio obliczyć w jakich proporcjach powinniśmy wystawiać złoto jako pierwszy, drugi i trzeci rozkaz.

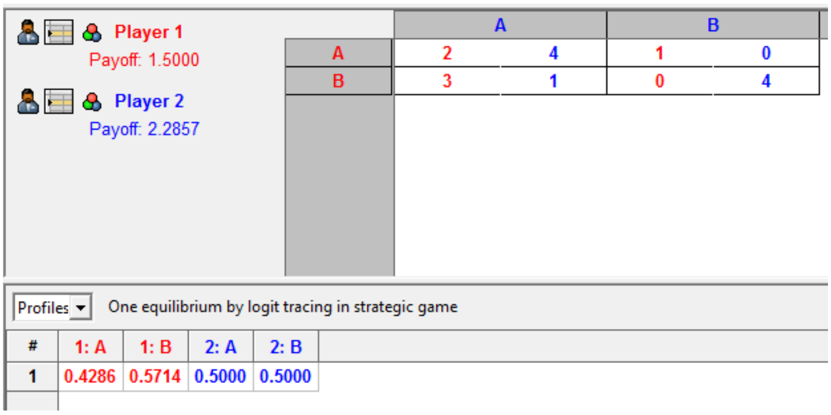
Z drugiej strony, są to odpowiednie szanse nas sukces gdyby gracze wybierali swoje rozkazy losowo a tak nie jest. Dużo bardziej przydatne nam byłoby wywnioskowanie ruchów innych graczy. Jeśli na przykład pierwszy gracz ma bardzo mało złota, a czeka go zapłacenie podatku Ministerstwu Podziemi, zapewne nie zaryzykuje on wydobycia złota jako drugi bądź trzeci rozkaz – mogłoby się to dla niego skończyć niewykonaniem tego rozkazu. Dodatkowo, trzeci gracz mógł na przykład zagrać w poprzedniej rundzie rozkaz wydobycia złota i teraz jest on dla niego niedostępny – nie musimy się obawiać jego decyzji. Wszystko zależy teraz od decyzji drugiego gracza – możemy wywnioskować jaką kartę wybierze, a dodatkowo możemy być pewni, że i tak znajdziemy się jako drudzy bądź trzeci w kolejce danego rozkazu – taka wiedza daje nam dużo lepszą pozycję - możemy założyć, że z wyjściowych 512 wierzchołków znajdujemy się w jednym z 8 – zależnym od decyzji drugiego gracza. W tej jak i w wielu innych grach, uważne wnioskowanie a także informacja o obecnej sytuacji przeciwników, są kluczowe do osiągnięcia sukcesu.

11. Gry dwuosobowe o sumie niezerowej

Do tej pory rozważaliśmy głównie gry o sumie zerowej, czyli takie, w której interesy dwóch graczy są ze sobą całkowicie sprzeczne. Na co dzień, w życiu czy w biznesie mamy jednak głównie do czynienia z grami o sumie niezerowej – wypłaty graczy mogą być różne, a ich cele niekoniecznie przeciwstawne. Dochodzić może między graczami do porozumień w celu otrzymania wspólnie jak najwyższego wyniku – dlatego też gry te, w przeciwieństwie do gier o sumie zerowej, mogą być kooperacyjne czyli zakładające współpracę między graczami. Część narzędzi wykorzystywanych przy grach o sumie zerowej może być również wykorzystywana w przypadku tych gier. Z powodzeniem stosować można choćby diagramy przesunięć oraz strategie mieszane, punktom siodłowym zaś odpowiadają punkty równowagi. Rozważmy następującą grę:



Jak widać w tabelce znajdować się teraz muszą wyniki dwóch graczy, niekoniecznie sumujące się do stałej wartości. Po analizie powyższej gry, stwierdzić możemy, że nie ma ona punktu równowagi w strategiach czystych. Podobnie jak w grach o sumie zerowej, rozwiązanie znaleźć możemy w strategiach mieszanych, stosując jedną z poznanych już metod:



Optymalna strategia Wiersza wynosi tutaj ($\frac{3}{7}A, \frac{4}{7}B$) i zapewnia mu ona, że Kolumna uzyska wypłatę $\frac{16}{7}$ niezależnie od wybranej przez nią strategii. Optymalna strategia Kolumny to ($\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$) i gwarantuje Wierszowi wypłatę równą $\frac{3}{2}$. Jeśli oboje gracze stosują te strategie, żaden z nich nie zyska na ich zmianie. Mówiliśmy już przy okazji strategii mieszanych, że taka sytuacja nosi nazwę **równowagi Nasha.**

Definicja: **Równowagą Nasha** nazywamy taką parę strategii, w której jednostronna zmiana strategii przez gracza nie może doprowadzić do podwyższenia jego wypłaty.

Innymi słowy, dwaj gracze stosują takie strategie A i B, że A gracza 1 jest najlepszą odpowiedzią na B gracza 2, a B najlepszą odpowiedzią na A. Równowagą Nasha w grach o sumie zerowej jest punkt siodłowy (para strategii czystych) lub para strategii mieszanych. W 1950 r. John Nash udowodnił, że każda gra o sumie niezerowej ma co najmniej jedną równowagę – stąd też równowagi w takich grach nazywamy równowagami Nasha.

Równowaga Nasha nie jest jednak uniwersalnym narzędziem do rozwiązywania gier o sumie niezerowej (jak ma to miejsce w przypadku równowag w grach o sumie zerowej). Gry tego typu są dużo bardziej skomplikowane. Spójrzmy ponownie na powyższą grę. Para strategii będących w równowadze dała nam bowiem wynik $\frac{3}{2}$ dla Wiersza oraz $\frac{16}{7}$ dla Kolumny. Jest to wynik gorszy dla obu graczy od tego, jaki uzyskaliby stosując parę strategii czystych AA. Dzieje się tak, ponieważ w przypadku poszukiwania strategii mieszanej koncentrujemy się na wyrównaniu i zmniejszeniu wyniku przeciwnika (co w grach o sumie zerowej wiąże się ze zwiększeniem naszego wyniku) ignorując swoja wypłatę.

W 1900 r. pewien włoski ekonomista i socjolog, Vilfredo Pareto sformułował postulat, że nie powinien być akceptowany system ekonomiczny, jeśli możliwy jest inny, dla wszystkich uczestników korzystniejszy. Po latach, ideę tę zaadaptowano do teorii gier tworząc następującą definicję:

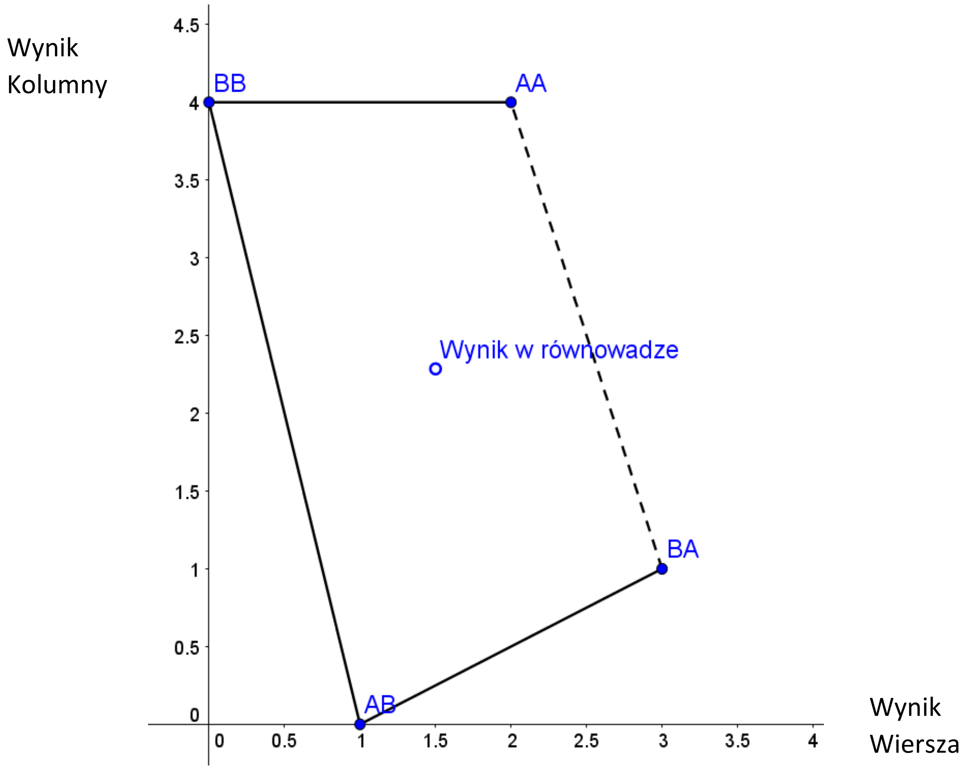
Definicja: Wynik gry jest nieoptymalny w sensie Pareto (lub nieefektywny Pareto), jeśli gra ma inny wynik, dający obu graczom wyższe wypłaty, lub jednemu z graczy taką samą a drugiemu wyższą. Wynik gry jest paretooptymalny, jeśli innego takiego wyniku nie ma.

Ideę Pareto można sformułować również w następujący sposób:

Kryterium Pareto: Tylko wynik optymalny w sensie Pareto może być akceptowany jako rozwiązanie gry.

Idea ta sprawdza się w przypadku gier o sumie zerowej – wszystkie wyniki takich gier są paretooptymalne, ponieważ zysk jednego gracza zawsze oznacza stratę dla drugiego. Tak naprawdę jednak przydaje się to w przypadku gier o sumie niezerowej.

Istnieje prosta graficzna metoda sprawdzenia , które z wyników są paretooptymalne. Należy nanieść wyniki gry na układ współrzędnych, w którym oś pozioma odpowiadać będzie wypłatom Wiersza, zaś oś pionowa wypłacie Kolumny. Gdy już wyznaczymy punkty odpowiadające wynikom w strategiach czystych, wynikom w strategiach mieszanych odpowiadają punkty należące do wieloboku ograniczonego łamaną łączącą wyniki w strategiach czystych. Wielobok ten nazywany jest **wielobokiem wypłat** gry. Wielobok taki dla opisanej gry przedstawiono poniżej:



W takim układzie, wyniki paretooptymalne znajdować się będą w „północno – wschodnim" brzegu wielokąta wypłat – zaznaczono je przerywaną linią. Wynikom paretooptymalnym może odpowiadać odcinek, kilka odcinków bądź pojedynczy punkt. Spoglądając na powyższy wykres, możemy sobie zdać sprawę że równowaga Nasha nie zawsze jest najlepszym rozwiązaniem gry o sumie niezerowej – czysty wynik kombinacji strategii AA obu graczy i znaczna część mieszankek AA i BA są dla obu graczy lepszym rozwiązaniem – są to rozwiązania paretooptymalne. Z drugiej strony, wynik będący równowagą Nasha jest stabilny oraz jak udowodniono – istnieje dla każdej gry.

12. Dylemat Więźnia

Jednym z najbardziej znanych przykładów w historii teorii gier, jest wymyślony w 1950 r. przez Melvina Dreshera i Merrill Flood *dylemat więźnia.* Jego treść zaprezentowana jest poniżej:

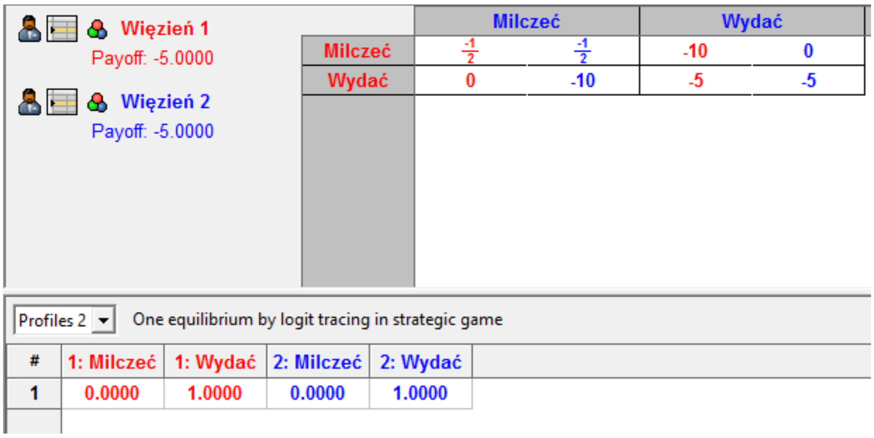
Dwóch podejrzanych zostało zatrzymanych przez policję. Policja, nie mając wystarczających dowodów do postawienia zarzutów, rozdziela więźniów i przedstawia każdemu z nich tę samą ofertę: jeśli będzie zeznawać przeciwko drugiemu, a drugi będzie milczeć, to zeznający wyjdzie na wolność, a milczący dostanie dziesięcioletni wyrok. Jeśli obaj będą milczeć, obaj odsiedzą 6 miesięcy za inne przewinienia. Jeśli obaj będą zeznawać, obaj dostaną pięcioletnie wyroki. Każdy z nich musi podjąć decyzję niezależnie i żaden nie dowie się czy drugi milczy czy zeznaje, aż do momentu wydania wyroku. Jak powinni postąpić?

Powyższa gra jest najczęściej badaną i najintensywniej wykorzystywaną w naukach społecznych. Jest ona dwuosobową grą w postaci normalnej o sumie niezerowej. Tabelę wypłat przedstawiono poniżej (liczba lat wyroku została przedstawiona jako ujemny wynik):

Więzień 1
Więzień 2

	Milczeć		Wydać	
Milczeć	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-10	0
Wydać	0	-10	-5	-5

Od początku w oczy rzuca się fakt, że strategia „Wydać” (W) dla obu graczy dominuje strategię „Milczeć” (M). Istotnie, niezależnie od decyzji drugiego więźnia, z dwóch strategii wyższe wypłaty zapewnia wydanie. Odrzucając jednak strategię zdominowaną, obaj więźniowie zeznają, skazując się tym samym na 5 lat wyroku. Uczciwy program Gambit jednoznacznie zgadza się na takie rozwiązanie:

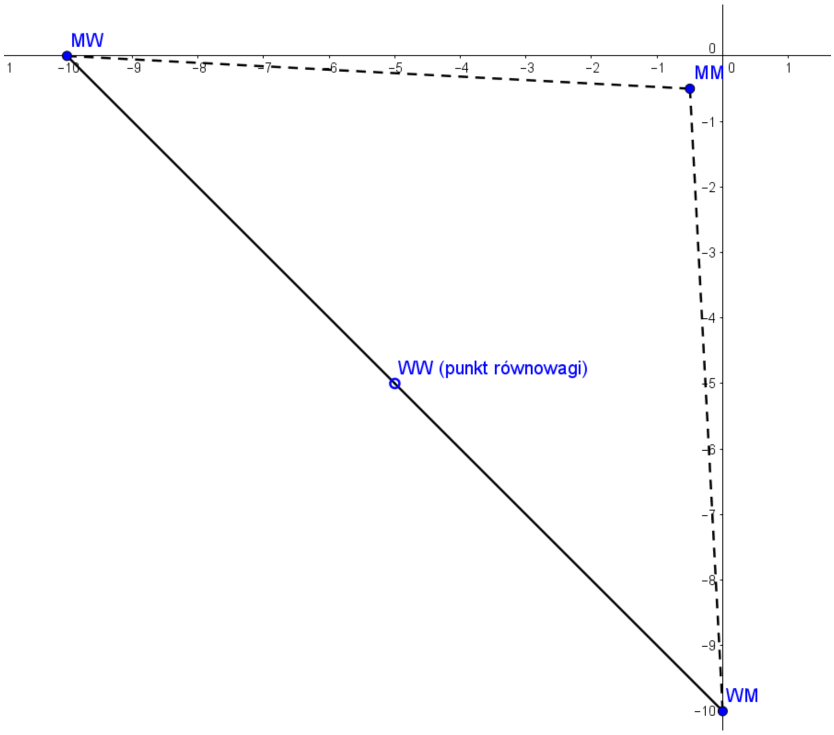

Więzień 1
Payoff: -5.0000
Więzień 2
Payoff: -5.0000

	Milczeć		Wydać	
Milczeć	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-10	0
Wydać	0	-10	-5	-5

Profiles 2 One equilibrium by logit tracing in strategic game

#	1: Milczeć	1: Wydać	2: Milczeć	2: Wydać
1	0.0000	1.0000	0.0000	1.0000

Widzimy jednak, że takie rozwiązanie jest nieparetooptymalne, a wyższe wyniki obu graczom zapewniłoby milczenie. Przedstawia to wielobok wypłat tej gry:



Ponownie przerywaną linią zaznaczono wyniki optymalne w sensie Pareto – w tym kombinację strategii MM. Problem dylematu więźnia był wielokrotnie omawiany, przedstawiano również różne koncepcje rozwiązania go. Nadal budzi on jednak wiele kontrowersji, porusza bowiem problem dużo starszy od teorii gier, towarzyszący od zawsze ludzkości. Chodzi mianowicie o konflikt między dobrem ogółu a własnym interesem. Kryterium dominacji nakazujące stosować strategię wydania, jest podstawową zasadą racjonalności indywidualnej – maksymalizuje ona własny zysk. Z drugiej strony, w tym przypadku, racjonalne jednostki dbające o własny interes doprowadzają do wyniku niekorzystnego dla wszystkich, tym samym dla nich. Koncepcją stojącą w opozycji jest kryterium Pareto, charakteryzujące racjonalność grupową – prowadzi ono do wyniku MM lepszego od WW. Mimo to, jeśli drugi z więźniów milczy i tak korzystniejsze jest wydanie go. W tym przypadku konflikt między racjonalnością grupową a indywidualną jest nieusuwalny. Warto też samemu zastanowić się nad zachowaniem w takim konflikcie. Zapewne inaczej podchodziłoby się do wyboru strategii, gdyby współwięźniem była matka czy współmałżonek, inaczej gdyby był to seryjny morderca a w jeszcze inny sposób gdyby taka sytuacja spotkała nas z losową osobą.

Obecność paradoksu więźnia jest zauważalna w wielu rzeczywistych sytuacjach. Mierzą się z nim sklepy prowadzące walkę cenową – obniżenie ceny produktu prowadzi do odebrania części klientów drugiemu sklepowi. Jeśli zaś drugi sklep wyrówna cenę, liczba klientów wyrówna się wracając do poprzedniego poziomu – oba sklepy na tym stracą, sprzedając produkty po niższych cenach. Problem ten dotyka również choćby rybaków – łowiąc na określonym łowisku, zobowiązują się do zatrzymania określonej maksymalnej liczby ryb, bądź łowienia w ustalonym sezonie. Nieuczciwi rybacy licząc na duży zysk mogą łowić więcej ryb lub robić to poza terminem – w obu wypadkach doprowadzi to do szybkiego wyeksploatowania łowiska. W końcu problem ten dotykał też wspomnianych supermocarstw – ZSRR i USA – w trakcie wyścigu zbrojeń. Oba mocarstwa mogły się zbroić, zabezpieczając przed agresją rywala (gdyby tylko jedno inwestowało w wojskowość mogłoby poważnie zagrozić drugiemu). Z drugiej strony, oba korzystniej wyszłyby rozbrajając swoje arsenały i nie nakręcając tej spirali agresji. Jeden z przykładów występowania dylemat więźnia przytoczymy w następnym rozdziale.

Ciekawe właściwości wykazuje również iterowany dylemat więźnia, czyli gra w postaci wielokrotnie powtarzanej – przez dwóch graczy rozgrywanych po sobie jest więcej (na przykład kilkaset) gier na takich zasadach, na jakich przedstawiono to powyżej. Jakie podstawy mają gracze do zdrady lub milczenia? Jak wyżej wykazano, strategia współpracy przynosi wyższe obopólne korzyści niż wzajemna zdrada. Wobec tego, gracze będą starali się współpracować, mając nadzieję, że zachęcony tym przeciwnik zdecyduje się na współpracę również w następnej rozgrywce. Co jednak wydarzyłoby się w ostatniej rundzie gry? Świadomy tego, że jest to ostatnia gra, gracz może pokusić się o wydanie swojego przeciwnika – nie będą go za to czekały bowiem żadne konsekwencje. Podobnie rozumować będzie przeciwnik doprowadzając do wspólnej zdrady. Pewni tego wyniku, za faktyczną ostatnią decyzyjną rundę, gracze uznają rundę przedostatnią. Również w niej założyć mogą, że za zdradę nie czekają ich żadne konsekwencje i tak dalej. To rozumowanie krok po kroku doprowadza nas do sytuacji w której od pierwszej rundy gracze wzajemnie się zdradzają. Aby tego uniknąć, z założenia w iterowanym dylemacie więźnia, liczba rund jest losowa lub nieznana graczom. Pierwsze zawody w iterowanym dylemacie więźnia stworzył w 1984 r. Robert Axelrod. Gracze z całego świata przesyłali zaprojektowane przez siebie algorytmy, którymi następnie rozgrywali między sobą rozgrywki. W turnieju zwyciężył jeden z najprostszych algorytmów autorstwa Anatola Rapoporta o nazwie **wet za wet.** Opiera się on na dwóch zasadach:

1. W pierwszej rundzie współpracuj.
2. Jeśli w ostatniej rundzie przeciwnik współpracował współpracuj, a jeśli zdradzał zdradzaj.

Algorytm ten zakłada dążenie do wspólnej współpracy, z drugiej strony jednak, nie jest łatwowierny i nie daje się wykorzystywać przez przeciwnika. Jego jedną wadą jest jednak podatność na pomyłki przeciwnika. Załóżmy, że dwa takie algorytmy grają ze sobą. Na skutek pomyłki, jeden z nich wybrał wydanie drugiego. Niczym spadające domino, doprowadzi to do katastrofalnych efektów – od tej pory oba będą się wzajemnie zdradzać. W turnieju bardzo istotna była też forma punktacji – pod koniec liczyła się suma wszystkich wypłat gracza z jego rozegranych rund. Gdyby zdecydowano się na system „zwycięzca bierze wszystko" to znaczy gracz z większą wypłatą wygrywa grę, a pod koniec turnieju liczy się liczba zwycięstw, algorytm Rapoporta zapewne nie osiągnąłby tak imponujących wyników. Wynika to z faktu, że inne strategie były trochę bardziej wydajne w pojedynczych grach, zaś osiągały gorszy wynik ogólny (strategia wet za wet może co najwyżej zremisować lub osiągnąć gorszy wynik od przeciwnika). Jest to ogólna cecha sposobu punktacji „zwycięzca bierze wszystko" stosowanej między innymi przy podliczaniu głosów w Stanach Zjednoczonych (i prowadzącej często do burzliwych dyskusji). Liczą się tam bowiem głosy elektorskie a nie bezpośrednio liczba głosów społeczeństwa. W słynnych wyborach prezydenckich w 2000 r. Al. Gore przegrał z Georgem W. Bushem, mimo iż Bush zebrał łącznie około pół miliona głosów mniej od niego.

Ciekawym jest również fakt, że 2004 r., w dwudziestą rocznicę przeprowadzenia przez Axelroda pierwszego turnieju, matematyk Graham Kendall zorganizował ponownie turniej iterowanego dylematu więźnia na tych samych zasadach. Konkursu nie wygrał jednak algorytm Rapoporta, a strategia stworzona przez grupę z Uniwersytetu Southampton. Grupa ta do turnieju wystawiła 60 zawodników (programów komputerowych). W rzeczywistości zaś, jeden z nich działał na trochę innych zasadach – była to królowa, zaś pozostałe 59 przyjęło rolę pionków. Wszyscy Ci zawodnicy zaczynali od niestandardowego zestawu posunięć aby się nawzajem rozpoznać. Kiedy do tego doszło, programy-pionki poświęcały się, aby królowa mogła osiągnąć maksymalnie wysoki rezultat. Dodatkowo, pionki odmawiały współpracy z innymi graczami, sukcesywnie decydując się na zdradę i zaniżając rywalom wyniki.

13. Teoria gier a ochrona środowiska

Jak już wspomnieliśmy, dylemat więźnia jest widoczny w wielu aspektach naszego życia. Występuje on również w różnych postaciach w kontekście ochrony środowiska. Wiele państw obecnie promuje wykorzystanie energii odnawialnej. Równocześnie cały czas większość krajów opiera swoją energetykę głównie na węglu czy ropie. Problem ten tyczy się również wycinki lasów, segregowania odpadów czy choćby emisji zanieczyszczeń. Łączy je fakt, że gdyby wszystkie państwa podejmowały się odpowiednich działań na rzecz ochrony przyrody, wpłynęłoby to korzystnie zarówno na nie jak i na środowisko. Kraje mogą zobowiązać się do określonych działań korzystnych dla wszystkich. Z drugiej strony, inwestycja w szeroko pojętą ochronę środowiska jest kosztowna, zaś na jej rezultaty trzeba często czekać. Władze niektórych państw mogą myśleć w następujący sposób: „Skoro wszystkie państwa i tak dbają o środowisko, to nie wpłynie to na nie bardzo źle jeśli my skorzystamy z bardziej opłacalnych rozwiązań”. Jak w takiej sytuacji zachowają się inne państwa? Może wśród pozostałych krajów również znajdą się takie, które skuszone obietnicą zysku zarzucą swoje starania. Jeśli będzie ich więcej, wkrótce ochrona środowiska przez pozostałe państwa dawała będzie coraz mniejszy efekt. Co mają więc zrobić państwa pozostające przy ochronie środowiska? Mogłyby na przykład zagrozić innym państwom, że jeśli nie będą one segregowały odpadów to zmiotą je z powierzchni ziemi korzystając z broni atomowej. Groźba ta nie byłaby jednak wiarygodna, byłaby za to bardzo kosztowna i niosła za sobą poważne reperkusje. Poza tym, co ważniejsze, nie byłaby zbyt korzystna dla środowiska. Zastanówmy się jak mogą postąpić wszystkie państwa, które na uwadze mają zarówno swoje finanse jak i środowisko. Załóżmy, że dwa sąsiadujące ze sobą państwa – A i B - stoją przed takim dylematem: mają one przed sobą problem zanieczyszczenia powietrza. Oba mogą zdecydować się na podjęcie działań w celu redukcji zanieczyszczeń, lub postępowanie w sposób opłacalny lecz szkodliwy dla środowiska. Jest to gra, bez wątpienia o sumie niezerowej, którą przedstawić można w poniższej tabeli:

Państwo B

Państwo A		Ochrona	Zysk
	Ochrona	x	y
	Zysk	z	w

Jednoznaczne przyporządkowanie wypłat poszczególnym wynikom byłoby zajęciem bardzo trudnym – zależą one bowiem on bardzo dużej liczby czynników. Pod uwagę można by jednak wziąć na przykład takie czynniki jak wydatki państwa na redukcję zanieczyszczeń, czy też poziom szkodliwych substancji w powietrzu. Możemy jednak uszeregować preferencje wyników każdego państwa. Mimo że wypłaty są tutaj trudne do porównania – na przykład wynik x przynosi lepsze efekty w dalszej perspektywie czasowej, zaś korzyści dla wyniku w są natychmiastowe – z pewnością możemy stwierdzić, że każde państwo wyżej stawia czyste powietrze niż pełne zanieczyszczeń. Również efekt ochrony środowiska przez jedne państwo jest zależny od decyzji drugiego państwa. Powietrze jest bowiem dobrem wspólnym, nawet jeśli jedno państwo stara się redukować emisję zanieczyszczeń to nas skutek przemieszczania się mas powietrza, szkodliwe substancje trafić mogą znad jednego państwa na drugie. Ostateczne preferencje wyników przedstawiają się następująco:

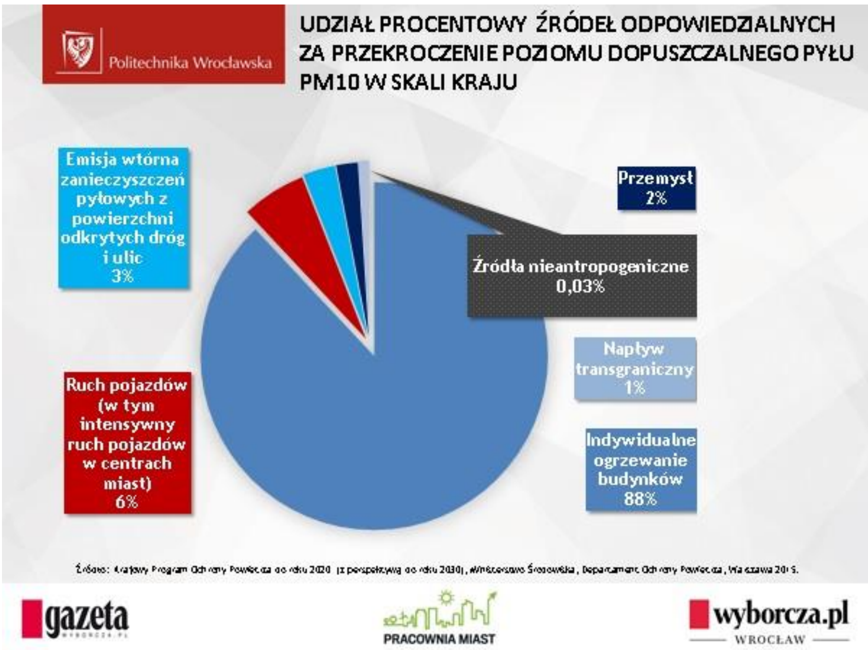
Państwo A: z, x, w, y

Państwo B: y, x, w, z

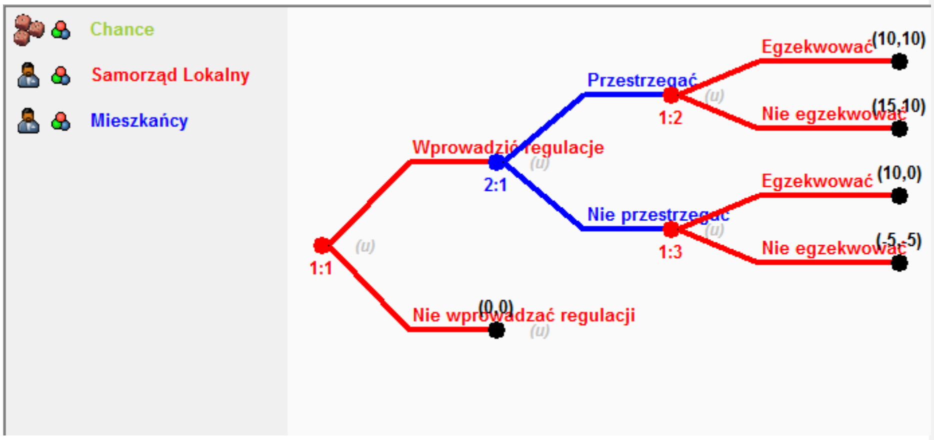
Widzimy, że podobnie jak w dylemacie więźnia, dominującą, bardziej opłacalną dla każdego państwa strategią jest działanie nastawione na zysk.

Co więc zrobić mogą państwa? Widzimy, że w rzeczywistości mamy do czynienia z iterowaną postacią tej gry. Państwa nie podejmują swoich decyzji całkowicie bez wiedzy o decyzjach przeciwnika. Gra wielokrotnie się powtarza, dzieje się na bieżąco i swoje działania państwa mogą uzależniać od siebie nawzajem. W tym przypadku, strategia wet za wet nie przyniosłaby dobrego rezultatu. Na pewno jednym z rozwiązań byłoby zmienienie wypłat przez państwa. Mogłoby się to stać na skutek gróźb bądź obietnic. O **groźbie** w kontekście teorii gier mówimy w przypadku w którym jeden z graczy oświadcza drugiemu: „Jeśli nie zrobisz czegoś co chcę, to spotka Cię kara". Przy czym kara jest zarówno niekorzystna dla gracza będącego jej obiektem oraz kosztowna dla gracza wykonującego ją. Z kolei **obietnica** zachodzi jeśli jeden z graczy informuje drugiego: „Jeśli zrobisz coś, co chcę żebyś zrobił, otrzymasz nagrodę". Nagroda w tym przypadku to coś korzystnego dla gracza otrzymującego ją, jednak stanowiąca pewien koszt dla gracza oferującego ją. O groźbie i obietnicy możemy mówić w przypadku wymiany informacji między graczami. Nie mogły one wystąpić w przypadku oryginalnego dylematu więźnia, jednak tutaj państwa mogą się ze sobą porozumiewać. Kluczowym tutaj byłoby takie zmienienie wypłat, aby na skutek obietnic lub gróźb, strategia „Zysk" przestała być dla państw dominująca – przestałyby one więc czuć pokusę aby ją stosować. Jak wygląda to w rzeczywistości? Jednym z zadań Unii Europejskiej jest właśnie dbanie o przestrzeganie przez państwa członkowskie regulacji dotyczących ochrony środowiska. Państwa wzajemnie zobowiązują się do np. redukcji emisji zanieczyszczeń do określonego poziomu. Korzystają przy tym zarówno z obietnic jak i gróźb. Przykładowo, formą nagrody dla państw jest udział w projekcie „LIFE+". Wspiera on państwa UE w realizowaniu zadań mających na celu ochronę środowiska – jeśli spełniają one określone warunki, otrzymają dofinansowanie (program ten finansuje określone projekty w wysokości 50-75%, sprawiając, że strategia „Ochrona" staje się dla państw korzystniejsza"). Z drugiej strony, państwa które nie wywiązują się z określonych umów mogą zostać oficjalnie upomniane przez głowy innych państw. Mimo że nie przynosi to żadnej wymiernej zmiany, odbija się na reputacji państwa na arenie międzynarodowej (która również leży w interesie państw). Dodatkowo mogą one zostać zmuszone do zapłacenia kar, bądź nałożone mogą być na nie ograniczenia handlowe, które to już bezpośrednio wpływają na wartość wypłaty państw w grze.

Problem zanieczyszczeń powietrza jest oczywiście dużo bardziej skomplikowany. Następna kwestia jest taka, że między deklaracją państwa co do dbania o jakość powietrza, a faktyczną poprawą sytuacji znajduje się szereg kroków i decyzji zależnych od wielu różnych stron. Spojrzeć można na to pod kątem problemu smogu w Polsce. Cały czas niewiele ludzi wie, jaki jest procentowy udział poszczególnych działań w powstawaniu smogu:



W 2015 r. podpisana została tak zwana ustawa antysmogowa wprowadzająca regulacje w kwestii sposobu ogrzewania domów. W skrócie, pozwala ona samorządom lokalnym na ustalanie rodzajów paliw dozwolonych i zabronionych (ustawa nie zakazuje jednak bezpośrednio palenia konkretnych paliw). W tym przypadku możemy mówić więc o grze między samorządem lokalnym a mieszkańcami danego regionu. Teraz założyć jednak możemy, że jest to gra sekwencyjna. Zaczyna ją samorząd, decydując czy wprowadzić surowsze regulacje w kwestii opału (zakaz palenia śmieciami, mułem węglowym), czy też nie wprowadzać. Jeśli je wprowadzi, mieszkańcy mogą ich przestrzegać, bądź też nie. W obu przypadkach samorząd może zmobilizować np. straż miejską do wzmożonej kontroli i egzekwowania przez mieszkańców przepisów, bądź też liczyć że mieszkańcy sami będą wywiązywać się ze swojego obowiązku. W tym przypadku pokusić się możemy o przypisanie opłat poszczególnym strategiom. Jest to ekstensywna gra o sumie niezerowej:



Poszczególne wypłaty ustanawialiśmy w następujący sposób:

- Jeśli samorząd nie wprowadzi regulacji, gra skończy się – utrzyma się *status quo* który reprezentują wypłaty 0
- Wprowadzenie regulacji wiąże się z procesem ich tworzenia oraz z zamieszaniem w społeczeństwie – reprezentują to wypłaty -5 dla każdego z graczy
- Czyste powietrze ma nieocenioną wartość – tutaj jednak, jeśli graczom uda się je uzyskać, dopiszemy im po 20 punktów
- Opał określony jako dozwolony w regulacjach, jest droższy niż muł węglowy, palenie nim nie pozwala również na pozbycie się śmieci (trzeba opłacić ich wywóz). Dla jednych są to oczywiste koszty, innym mogą poważnie nadszarpnąć budżet. Przestrzeganie regulacji prawnych przez mieszkańców wiązać się będzie z opłatą 10 punktów.
- Mobilizacja straży miejskiej wiąże się z kosztami 5. Dodatkowo, jeśli natrafi ona na osoby nieprzestrzegające przepisów, wpisze im mandat w wysokości 5 i nakłoni do korzystania z dozwolonego opału.

Przeanalizowanie drzewka gry pozwala stwierdzić, że obie strony najlepiej wychodzą na grze, jeśli mieszkańcy przestrzegają regulacji i wszyscy mogą oddychać czystym powietrzem. Tak się jednak nie zawsze dzieje. Dlaczego? Powody mogą być różne:

1. Po pierwsze, mieszkańcy nie zawsze świadomi są skutków swoich działań (swojej wypłaty). Perspektywa zapłaty za określone prawnie paliwo przysłania efekty palenia śmieciami i smogu (którymi są choćby zaburzenia neurologiczne, choroby płuc czy nowotwory). Poza tym zawsze mogą myśleć w kategoriach znanego nam dylematu „Jeśli wszyscy będą przestrzegać regulacji, to nawet jeśli ja tego nie zrobię, powietrze będzie czyste”

2. Nawet jeśli mieszkańcy są świadomi swoich wypłat, mogą postępować irracjonalnie. Patrząc na drzewko mogą oni błędnie dojść do rozumowania: „Wprowadzenie regulacji może wiązać się z wypłatą -5. Z dwojga złego lepsze jest 0 które mamy do tej pory”
3. Do wprowadzenia regulacji może w ogóle nie dojść. Samorząd, bojąc się reakcji społeczeństwa, w trosce o swoja posadę może zaniechać podpisywania ustawy.
4. Nawet jeśli ustawa przejdzie, nie sposób żeby straż miejska odwiedziła każdy dom w celu kontroli spalanego opału. Mogą oni pozwolić sobie jedynie na pojedyncze kontrole. Mając to na uwadze, mieszkańcy mogą liczyć na łut szczęścia i nie przestrzegać regulacji. Ponadto, nawet gdyby straż miejska mogła sobie pozwolić na kontrolę wszystkich osób nieprzestrzegających prawa, i tak jednoznacznie nie może stwierdzić w których domach ludzie dopuszczają się wykroczeń

Jak już wcześniej zauważyliśmy, idealne rozwiązanie w rzeczywistości rzadko jest osiągane. W tym przypadku można jednak do tego dążyć choćby poprzez edukację dzieci i informowanie społeczeństwa o potencjalnych szkodliwych efektach zanieczyszczenia powietrza, lub przez dofinansowanie w kupnie nowoczesnych pieców lub opału.

14. Podsumowanie

W powyższej pracy po krótce przedstawiliśmy podstawowe pojęcia teorii gier. Wprowadziliśmy podział gier oraz sposób ich rozwiązywania. Były to m. in. indukcja wsteczna w przypadku gier w postaci ekstensywnej czy kryterium dominacji dla gier w postaci normalnej. Dalej po takim przeanalizowaniu gry, punkty siodłowe pozwalały nam znaleźć wyniki gier dwuosobowych o sumie zerowej, jeśli zaś nie występowały, należało szukać rozwiązania w strategiach mieszanych. Przy analizowaniu gier o sumie niezerowej, warsztat pojęciowy został rozszerzony o równowagę Nasha. Przybliżona też została idea Kryterium Pareto. Większość pojęć wykorzystywana była na nieoczywistych przykładach – wprowadzone narzędzia pozwoliły nam chociażby na lepsze zrozumienie problemu smogu który dotyka nas na co dzień. Był to oczywiście tylko prosty przykład, miał on jednak na celu pokazanie jak szerokie zastosowanie może mieć teoria gier. Z założenia ma ona pomagać znajdować najlepsze rozwiązania problemów – zważywszy jednak na złożoność życia, często znalezienie najlepszego rozwiązania może być niemożliwe lub też może ono w ogóle nie istnieć. Zawsze jednak, spojrzenie racjonalnie na sytuację pomaga jej zrozumienie, a nawet jeśli jakiś problem zależy od losu, czemuż nie można by mu trochę pomóc?

BIBLIOGRAFIA

- Marcin Malawski, Andrzej Wieczorek, Honorata Sosnowska „Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych"
- Philip D. Straffin „Teoria Gier"
- Avinash K. Dixit, Barry J. Nalebuff „Sztuka strategii. Teoria gier w biznesie i życiu prywatnym"
- Jordi Deulofeu "Dylematy więźniów i zwycięskie strategie. Teoria gier"
- Davenport W.C. „Jamaican fishing: a game theory analysis"
- Ignacio Palacios-Huerta: "*The Review of Economic Studies.* Professionals Play Minimax"
- http://el.us.edu.pl/ekonofizyka/index.php/Teoria_gier/Gry_dwuosobowe_suma_zero
  https://pl.wikipedia.org/wiki/Kryzys_kuba%C5%84ski
- https://pl.wikipedia.org/wiki/Dylemat_wi%C4%99%C5%BAnia
- http://pwr.edu.pl/uczelnia/aktualnosci/jak-poprawic-jakosc-powietrza-na-dolnym-slasku-10376.html

Przy tworzeniu pracy korzystano również z programów:

- Geogebra
- Gambit v. 15.01