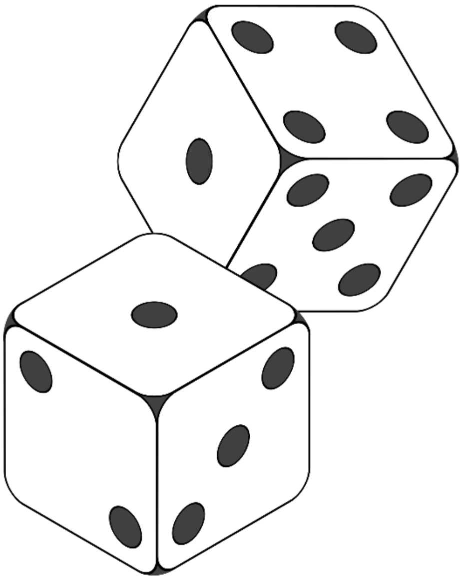
Tymoteusz Ciesielski

Rzut okiem na prawdopodobieństwo



I Liceum ogólnokształcące
im. Bolesława Chrobrego
ul. 3-go Maja 7, 43-200 Pszczyna
tel. 32 210-37-27
e-mail: liceum.pszczyna@post.pl
Opiekun pracy: mgr Joanna Szczurek

Studzienice 2015

Przypadek sprzyja tylko temu, kto wie, jak starać się o jego względy.
Karol Nicolle

Spis Treści

Wstęp……4

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa………………………………………………………………….5

Podstawowe Własności prawdopodobieństwa……………………………………………………………6

Prawdopodobieństwo warunkowe…………………………………………………………………………….7

Prawdopodobieństwo całkowite…………………………………………………………………………………9

Dylemat Monty’ego Halla…………………………………………………………………………………………11

Problem podziału nagrody ………………………………………………………………………………………14

Definicja aksjomatyczna prawdopodobieństwa……………………………………………………….17

Metoda Monte Carlo…………………………………………………………………………………………………17

Bibliografia………23

Wstęp

Prawdopodobieństwo towarzyszy nam od wielu tysięcy lat. Jego początków doszukiwać się można w grach hazardowych – początkowo były to kości oraz loterie, później wynaleziono karty, by przejść do ruletki. Wszystkie powyższe rozrywki łączy jedno – ich wyników nie da się z góry przewidzieć. Od początku istnienia tych gier, ludzie starali się przewidzieć wynik, oraz swoje szanse na wygraną. Obserwacje gier losowych, oraz obliczenia pomagające ustalić szanse poszczególnych wyników doprowadziły do powstania rachunku prawdopodobieństwa – odrębnego działu matematyki zajmującego się badaniem zjawisk losowych. Jedne z pierwszych naukowych badań i rozważań nad prawdopodobieństwem przeprowadzali w drugiej połowie XVII wieku Pierre de Fermat i Blaise Pascal. Obecnie, prawdopodobieństwo napotkać możemy w większości dziedzin nauki, w informatyce, kryptologii, statystyce. Probabilistykę (czyli inaczej prawdopodobieństwo), stosowano nawet do tak, zdawałoby się, dziwacznych celów, jak ocena szans na udany połów – ryby pływają przecież w morzu w sposób przypadkowy (lub w oparciu o własne „rybie prawa", nie znane nam i dlatego przypadkowe). Jeden z takich przypadków opisał w książce „Podróże cybernetyczne" Lew Katolin. Rybaków nurtował wtedy problem „Czy płynąć na łowisko, na którym czasami pojawiają się ogromne ławice cennych okoni, czy udać się na inne łowisko, na którym zawsze trafiają się małe grupy szprotek?". Sprawą zainteresowali się matematycy i po przeanalizowaniu wcześniejszych połowów a także innych czynników, oraz zastosowaniu metody Monte Carlo (opisanej w późniejszej części), ustalili oni optymalną szansę na wystąpienie okoni na danym łowisku. Przedstawili oni też rybakom ogólną strategię połowów. W efekcie, już w ciągu dwóch tygodni uzyskano o sześćdziesiąt ton ryb więcej niż zazwyczaj. Przypadek odgrywał też ogromną rolę przy znaczących odkryciach, bez których życie dzisiaj, wydawać by się mogło niemożliwe m.in. nietłukącego się szkła, barwników syntetycznych, duraluminium, a nawet szczepień ochronnych i penicyliny! Wiele z nich opisał w swej książce „Niezwykłe perypetie odkryć i wynalazków" Juliusz Jerzy Herlinger. Co jest więc takiego w, jak nazywał go Herlinger, „Jego Królewskiej Mości Przypadku?"

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Każde działanie, którego wyniku nie można z góry przewidzieć, nazywamy **doświadczeniem losowym**.

Najbardziej znane przykłady doświadczeń losowych to:

- Rzut monetą

Możliwe są dwa wyniki tego doświadczenia: wypadnie orzeł lub reszka. Jeżeli moneta jest symetryczna, to prawdopodobieństwo otrzymania orła jak i reszki wynosi $\frac{1}{2}$.

- Rzut klasyczną sześcienną kostką do gry

Możliwe jest sześć wyników tego doświadczenia: wypadnie jedno, dwa, trzy, cztery, pięć lub sześć oczek. Jeżeli kostka nie jest sfałszowana, prawdopodobieństwo otrzymania każdego z tych wyników np. otrzymania w rzucie czterech oczek, wynosi $\frac{1}{6}$.

- Losowanie karty z talii 52 kart

Karty w talii poukładane są w czterech kolorach: karo, kier, pik, trefl, a każdy z kolorów składa się z 13 kart: 4 figur (asa, króla, damy, i waleta) oraz 9 blotek (od dwójki do dziesiątki). Prawdopodobieństwo wylosowania dowolnej karty z talii, np. waleta kier, wynosi $\frac{1}{52}$.

Każdy możliwy wynik doświadczenia losowego nazywamy **zdarzeniem elementarnym**. Zbiór wszystkich takich zdarzeń nazywamy **przestrzenią zdarzeń elementarnych** i oznaczamy literą Ω.

Dla przykładu, dla rzutu monetą, Ω = {O,R} gdzie O oznacza wypadnięcie orła, zaś R wypadnięcie reszki.

Oceniając szanse wyników, rozważać możemy nie tylko pojedyncze zdarzenia elementarne, ale też ich grupy. Np. przy rzucaniu kością rozważać możemy szansę na wypadnięcie parzystej liczby oczek. Warunek ten spełniają trzy zdarzenia elementarne: {2; 4; 6}, inaczej mówiąc, trzy zdarzenia elementarne sprzyjają temu zdarzeniu.

Dowolne podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych nazywamy **zdarzeniami losowymi** i oznaczamy dużymi literami *A, B, C, ... Z.* Zdarzeniem losowym dla rzutu kostką może więc być np. *A* – wypadło pięć oczek lub *B* – otrzymano mniej niż dwa oczka.

Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to **prawdopodobieństwem zdarzenia** losowego nazywamy iloraz:

$$\frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu}}{\text{liczba wszystkich zdarzeń elementarnych}}$$

Ta definicja nosi nazwę **definicji klasycznej**. Można z niej korzystać, gdy zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne i jest ich skończenie wiele. Zapisujemy ją wzorem:

$$P(A) = \frac{n_A}{N}$$

Podstawowe Własności prawdopodobieństwa

1. Zdarzenie Ω \ A nazywamy **zdarzeniem przeciwnym** do zdarzenia A i oznaczamy symbolem *A'*.

   Jeśli zdarzenia A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to zachodzą równości:

   $A \cap A' = \emptyset$ $\quad$ $A \cup A' = \Omega$ $\quad$ $P(A') = 1 - P(A)$

2. Jeśli zdarzeniu losowemu nie sprzyja żadne zdarzenie elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem niemożliwym**._ Zdarzenie takie jest zbiorem pustym i oznaczamy je symbolem Ø.
   Jeśli zdarzeniu losowemu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne, to nazywamy je **zdarzeniem pewnym**. Zdarzenie takie jest równe przestrzeni wszystkich zdarzeń elementarnych i oznaczamy je symbolem Ω.

   $$P(\emptyset) = 0$$

   $$P(\Omega) = 1$$

3. W doświadczeniu losowym dla dowolnych dwóch zdarzeń A i B zachodzi równość:

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4. Zdarzenia A i B nazywamy **wykluczającymi się** (lub rozłącznymi), jeśli $A \cap B = \emptyset$

   Jeśli zdarzenia A i B się wykluczają to:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A i B będą zdarzeniami w pewnym doświadczeniu losowym i $P(B) > 0$.
Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A, przy założeniu, że zaszło zdarzenie B, nazywamy iloraz $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Liczbę tę oznaczamy symbolem $P(A|B)$ (czytamy: prawdopodobieństwo A, pod warunkiem, że B)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Zadanie 1

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania króla spośród talii 52 kart, jeśli wiadomo, że wylosowana karta to figura?

P(F) – prawdopodobieństwo wylosowania figury

P(K) – prawdopodobieństwo wylosowania króla

$P(F) = \frac{4}{13}$

$P(K) = \frac{1}{13}$

$P(K|F) = \frac{\frac{1}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{1}{4}$

Prawdopodobieństwo wylosowania króla w takiej sytuacji wynosi $\frac{1}{4}$

Prawdopodobieństwo warunkowe obliczać możemy także ze wzoru:

$$P(A|B) = \frac{n_{A \cap B}}{n_B}$$

Zad 2

W Polsce 35% dorosłych pali papierosy lub choruje na serce. Wiadomo także, że 19, 4% dorosłych mieszkańców Polski pali papierosy, a 25% cierpi na choroby serca. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany dorosły mieszkaniec Polski choruje na serce, jeśli wiadomo, że pali papierosy?

A – Wybrany dorosły mieszkaniec Polski choruje na serce

B – Wybrany dorosły mieszkaniec Polski pali papierosy

$P(A) = 0,25$

$P(B) = 0,194$

$P(A \cup B) = 0,35$

$P(A \cap B) = 0,25 + 0,194 – 0,35 = 0,094$

$P(A|B) = \frac{0,094}{0,194} \approx 0,48$

Jeśli wybrany losowo, dorosły Polak pali papierosy, prawdopodobieństwo, że jest chory na serce wynosi 0,48.

Z powyższych obliczeń wynika, że odsetek chorych na serce wśród palaczy jest, jest znacząco wyższy niż odsetek chorych na serce Polaków. Wyniki te wskazują nam, że między chorobami serca a paleniem papierosów istnieje zależność. Istotnie, naukowo udowodnione zostało, że palenie tytoniu, zwiększa ryzyko chorób sercowo-naczyniowych.

Powyższy przykład pokazuje, że prawdopodobieństwo warunkowe jest powszechnie wykorzystywane w medycynie.

Prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia: $B_1,\ B_2, \dots, B_n$ spełniają następujące warunki:

- zdarzenia parami się wykluczają
- prawdopodobieństwo każdego z nich jest różne od 0
- zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup\ B_2 \cup \dots \cup B_n\ =\ \Omega$)

  Wówczas dla każdego zdarzenia A zachodzi równość:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|\mathrm{B}_1) +\ P(B_2) \cdot P(A|\mathrm{B}_2) +\ \dots\ + P(B_n) \cdot P(A|\mathrm{B}_\mathrm{n})$$

Zadanie 1

Trzy brygady: B_1, B_2, B_3 produkują deski do prasowania. Wśród desek wyprodukowanych przez brygadę B_1 jest 6% wadliwych, a wśród wyprodukowanych przez B_2 i B_3 - po 3%. W magazynie znajduje się trzy razy więcej desek wytworzonych przez brygadę B_2, niż przez B_1 i dwa razy mniej wyprodukowanych przez B_3 niż przez B_1. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z magazynu deska jest wadliwa.

A - wybrana deska została wytworzona przez brygadę B_1

B - wybrana deska została wytworzona przez brygadę B_2

C - wybrana deska została wytworzona przez brygadę B_3

W - wybrana deska jest wadliwa

$$P(A) = \frac{2}{9} \qquad P(B) = \frac{6}{9} \qquad P(C) = \frac{1}{9}$$

$$P(W|\mathrm{A}) = \frac{6}{100} \qquad P(W|\mathrm{B}) = \mathrm{P(W|C)} = \frac{3}{100}$$

$$P(W) = \frac{2}{9} \cdot \frac{6}{100} + \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{100} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{100} \approx 3{,}7\%$$

Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana z magazynu deska jest wadliwa, wynosi około 3,7%.

Twierdzenie Bayesa:

Niech *A* i *B* będą zdarzeniami takimi, że P(A) oraz P(B) są większe od 0. Wówczas:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Zadanie 2

Weterynarz stwierdził, że przyczyną choroby psa jest wirus *V* lub wirus *W*, przy czym prawdopodobieństwo zarażenia wirusem *V* ocenia na 80%, a wirusem *W* – na 20%. Prawdopodobieństwo, że pies wyzdrowieje, jest równe 0,8 w przypadku zarażenia wirusem *V* i 0,9, gdy jest to wirus *W*.

a) Oblicz prawdopodobieństwo, że pies wyzdrowieje.

   V – chory pies jest zarażony wirusem V
   W – chory pies jest zarażony wirusem W
   Z – chory pies wyzdrowieje

$$P(V) = 0{,}8, \qquad P(W) = 0{,}2$$
$$P(Z|V) = 0{,}8 \qquad P(Z|W) = 0{,}9$$

$$P(Z) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}82$$

   Prawdopodobieństwo, że chory pies wyzdrowieje wynosi 82%

b) Pies wyzdrowiał. Oblicz prawdopodobieństwo, że chorobę psa wywołał wirus W.

   Skorzystamy tutaj ze wzoru Bayesa:

$$P(W|Z) = \frac{P(Z|W) \cdot P(W)}{P(Z)}$$

$$P(W|Z) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}2}{0{,}82}$$

$$P(W|Z) \approx 0{,}22$$

Prawdopodobieństwo, że chorobę psa wywołał wirus W wynosi około 22%.

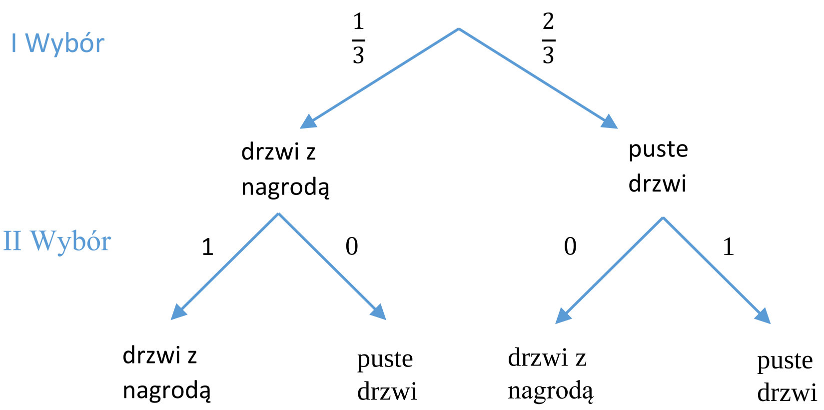
Dylemat Monty'ego Halla

Kiedyś w Ameryce popularny był pewien teleturniej o nazwie „Let's Make a Deal". Jego zasady były bardzo proste. Za jednymi z trzech drzwi znajdowała się główna nagroda, zaś pozostałe drzwi były puste. Uczestnik, wybiera drzwi i otrzymuje nagrodę, jeśli wybierze te właściwe. Teleturniej przebiegał jednak w trzech etapach:

I. Grający wskazuje drzwi, za którymi według niego znajduje się nagroda.
II. Prowadzący teleturniej otwiera jedne z pozostałych drzwi, za którymi nie ma nagrody i pyta grającego czy podtrzymuje decyzję czy zmienia drzwi.
III. Grający wskazuje jedne z drzwi, które pozostały zamknięte.

Z początku zdawać by się mogło, że prawdopodobieństwo, że za jednymi z pozostałych drzwi znajduje się nagroda, są równe i wynoszą po 50%. Przeanalizujmy jednak drzewko w dwóch sytuacjach:

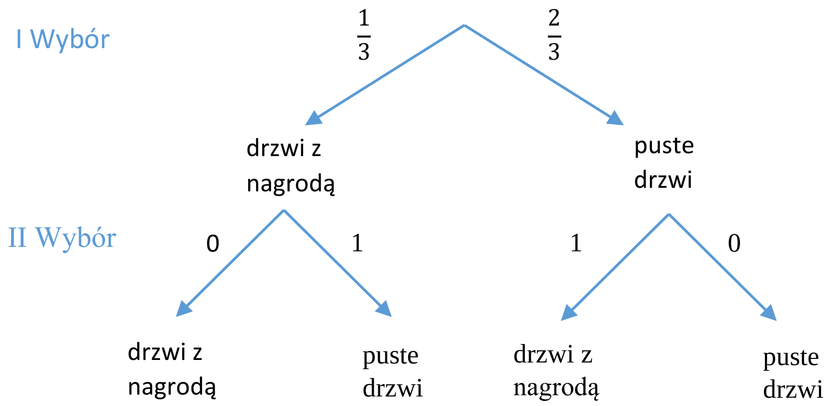
1. Nie zmieniamy drzwi przy drugim wyborze:



Jak widać na drzewku, prawdopodobieństwo na uzyskanie nagrody wynosi:

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

2. Zmieniamy drzwi przy drugim wyborze:



W tym wypadku, prawdopodobieństwo, że wybierzemy drzwi z nagrodą, gdy zmienimy decyzję przy drugim wyborze wynosi:

$$\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

A więc stosując drugą strategię, nasze szanse na zyskanie nagrody rosną o $\frac{1}{3}$ czyli dwukrotnie!

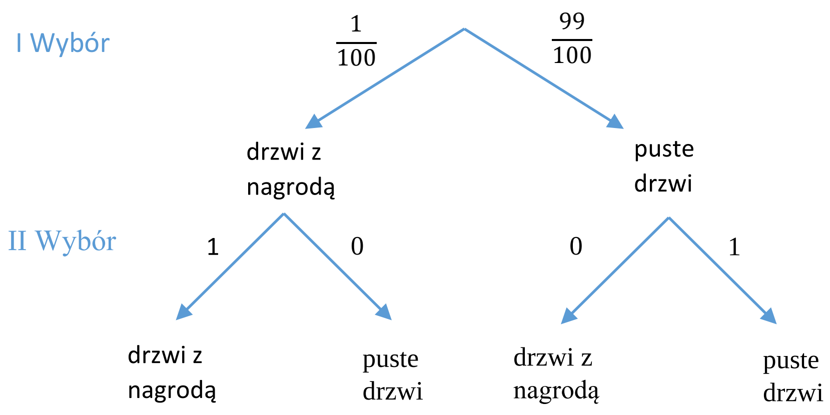
Zagadnienie to budziło wiele emocji i stało się tak znane, że nadano mu nazwę „paradoks Monty'ego Halla” od imienia i nazwiska prezentera tego teleturnieju.

Zadanie 1

Załóżmy, że w teleturnieju Monty'ego Halla, w I etapie wybiera się jedne ze 100 drzwi, zaś potem, prowadzący otwiera 98 drzwi, za którymi nie ma nagrody. Jakie prawdopodobieństwo wskazania drzwi z nagrodą, ma uczestnik, w zależności od zastosowanej strategii?

Ponownie posłużmy się drzewkami:

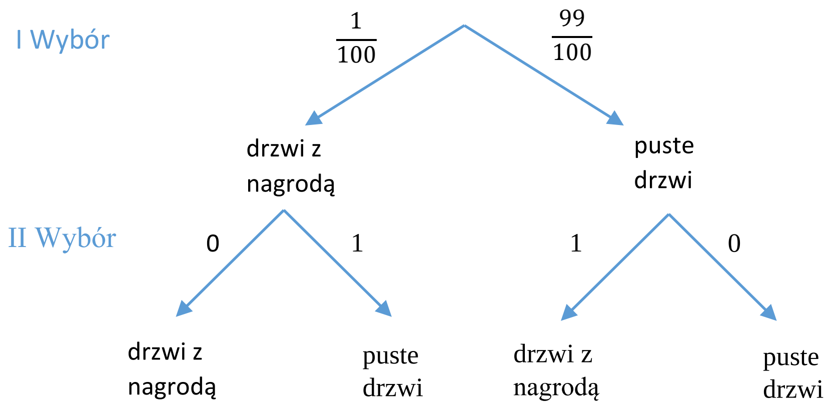
Strategia I



Stosując tą strategię, prawdopodobieństwo, że uczestnik wskaże drzwi z nagrodą, wynoszą:

$$\frac{1}{100} \cdot 1 + \frac{99}{100} \cdot 0 = \frac{1}{100}$$

Strategia II



Prawdopodobieństwo, że uczestnik wskaże drzwi z nagrodą, stosując drugą strategię, wynosi:

$$\frac{1}{100} \cdot 0 + \frac{99}{100} \cdot 1 = \frac{99}{100}$$

Jak widzimy, prawdopodobieństwo wygranej przy tej strategii jest bardzo wysokie, bo wynosi aż $\frac{99}{100}$. Wygrać powinniśmy w znaczącej większości przypadków. Z początku wydawać się to może niezwykłe, zwłaszcza, że wybieraliśmy spośród 100 drzwi, a tylko za jednymi czekała nagroda!

Problem podziału nagrody

Pierwsza znana praca naukowa dotycząca rachunku prawdopodobieństwa, *De ludo aleae,* czyli *o grze w kości,* stworzona została przez włoskiego matematyka Geronimo Cardano, w XVI w. Oprócz teorii gry, autor opisywał w niej inne zagadnienia związane z rachunkiem prawdopodobieństwa. Opisany jest tam interesujący problem, przedstawiony przez Lukę Paciolego (innego włoskiego matematyka oraz franciszkanina, który współpracował też ze słynnym Leonardem da Vinci):

Dwa zespoły rozgrywają serię meczów w piłkę. Zespoły mają równe szanse na zwycięstwo i grają tak długo, aż jeden z nich osiągnie 6 zwycięstw. Nagrodą dla zwycięzcy są 22 dukaty. Rozgrywki przerwano, gdy jeden z zespołów miał 5 zwycięstw, a drugi 3. Jak należy podzielić nagrodę?

Pacioli, Cardano, a także inny znakomity włoski matematyk Niccolo Fontana Tartaglia, podali trzy odmienne rozwiązania tego problemu, jednak każde z nich było krytykowane. Głównym zarzutem do każdego z rozwiązań było to, że uwzględniały przeszłość turnieju, ignorując przyszłość.

W pełni zadowalające rozwiązanie podał dopiero po ponad stu latach, wspomniany już wcześniej Blaise Pascal:

Stwierdził on, że seria gier, w przypadku takiego meczu, może się składać z maksymalnie 11 meczów i wypisał wszystkie możliwe wyniki ostatnich trzech meczów, które mogłyby być jeszcze rozegrane:

Z_1, Z_1, Z_1; Z_1, Z_1, Z_2; Z_1, Z_2, Z_1; Z_2, Z_1, Z_1; Z_2, Z_2, Z_1; Z_2, Z_1, Z_2
Z_1, Z_2, Z_2; Z_2, Z_2, Z_2

Gdzie Z_1 – zwycięstwo pierwszej drużyny

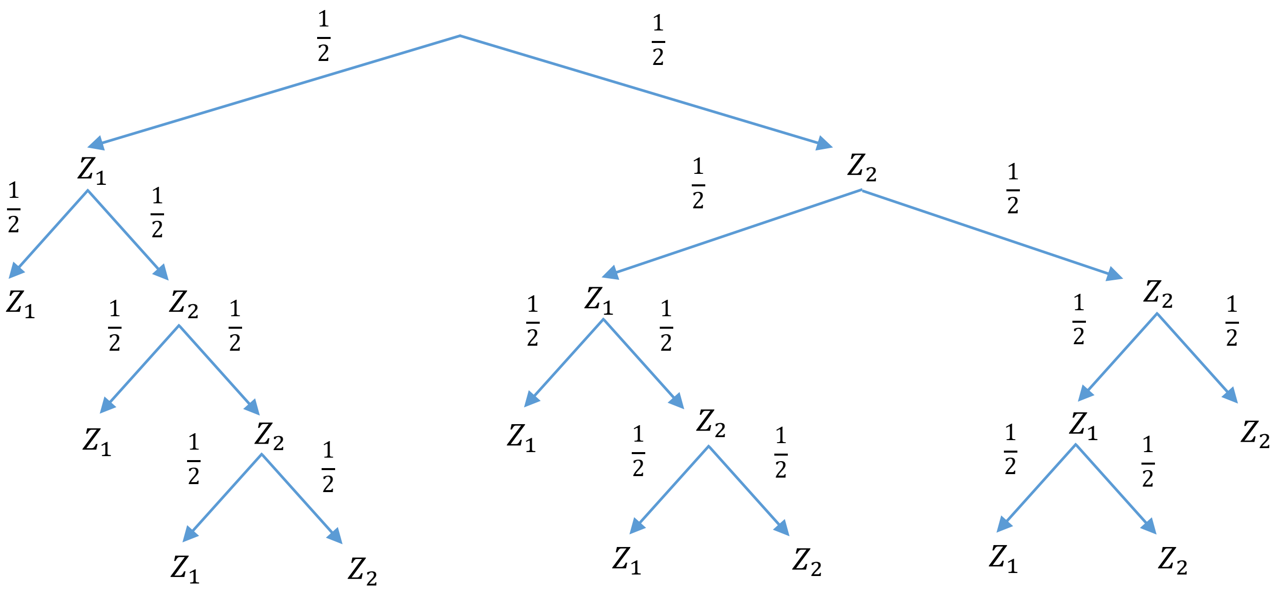
Z_2 – zwycięstwo drugiej drużyny

Biorąc pod uwagę rozegrane wcześniej mecze, wiemy, że drużyna pierwsza potrzebuje jedynie jednego wygranego meczu do zdobycia nagrody, zaś druga drużyna musi odnieść zwycięstwo trzykrotnie. Drużyna pierwsza wygrywa rozrywki w 7 na 8 przedstawionych możliwości, prawdopodobieństwo zdobycia nagrody przez nią wynosi więc $\frac{7}{8}$. Drużyna druga wygrywa w 1 na 8 możliwości – prawdopodobieństwo że wygra dukaty wynosi więc $\frac{1}{8}$. Wobec tego pierwsza drużyna powinna otrzymać $\frac{7}{8}$ nagrody, czyli 19,25 dukata, a druga drużyna powinna otrzymać resztę, czyli 2,75 dukata.

Zadanie 1

Jak powinien wyglądać podział nagrody w sytuacji opisanej w powyższym problemie, gdyby rozgrywki przerwano, gdy pierwszy zespół miał 4 zwycięstwa, a drugi 3?

Zadanie to rozwiązać można także przy zastosowaniu drzewka:



Niewątpliwą zaletą takiego drzewka jest fakt, że nie uwzględnia meczy, które na pewno by się nie odbyły (np. Sytuacja Z_1, Z_1, Z_2, Z_2 nigdy by się nie wydarzyła, ponieważ po pierwszych dwóch zwycięstwach, drużyna pierwsza wygrałaby turniej).

Teraz wystarczy tylko obliczyć prawdopodobieństwo wygrania turnieju przez drużynę pierwszą:

$$P_I = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \frac{4+2+1+2+1+1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$P_{II} = 1 - P_I = 1 - \frac{11}{16} = \frac{5}{16}$$

Wobec tego, pierwsza drużyna powinna otrzymać $\frac{11}{16}$ nagrody czyli 15, 125 dukata, a drużyna druga $\frac{5}{16}$ nagrody czyli 6,875 dukata.

Definicja aksjomatyczna prawdopodobieństwa

Podana na początku definicja prawdopodobieństwa, nazywana jest metodą klasyczną. Została ona sformułowana w XIX wieku przez francuskiego matematyka Pierra Simona de Laplace. Jej zastosowanie ma jednak pewne ograniczenia – np. zakłada ona, że wszystkie rozważane zdarzenia elementarne mają jednakowe prawdopodobieństwo. W 1933 r. rosyjski matematyk Andriej Kołmogorow podał definicję, którą można stosować dla dowolnej przestrzeni zdarzeń elementarnych:

Niech Ω będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych. Prawdopodobieństwem nazywamy funkcję, która każdemu zdarzeniu A należącemu do Ω, przyporządkowuje liczbę P(A), tak, aby spełnione były następujące warunki:

- $0 \le P(A) \le 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Dla każdej pary wykluczających się zdarzeń A, B zachodzi równość:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definicja ta nie pokazuje nam, jak wyliczać prawdopodobieństwo zdarzenia, jednak określa warunki, czyli aksjomaty, jakie prawdopodobieństwo ma spełniać. Taką definicję nazywamy definicją aksjomatyczną.

Metoda Monte Carlo

Załóżmy, że chcemy obliczyć pole powierzchni figury przedstawionej poniżej, która znajduje się na kartce:

O ile nie ma żadnego wzoru na pole powierzchni takiej plamy, wykorzystać możemy prawdopodobieństwo:

Załóżmy, że losowo wybieramy punkt na tej kartce. Rozważmy zdarzenie:

A – Zaznaczony punkt należy do narysowanej figury

Wobec tego:

$P(A) = \frac{P_f}{P_k}$ gdzie P_f - pole powierzchni figury

P_k - pole powierzchni kartki

Teraz do obliczenia pola figury wystarczy nam już tylko wartość *P(A)* oraz pole powierzchni kartki. Wartość *P(A)* oszacować można eksperymentalnie – wystarczy zaznaczyć na kartce pewną liczbę punktów, wybranych w sposób losowy. Stosunek liczby punktów należących do figury, do liczby wszystkich zaznaczonych na kartce punktów będzie stanowił przybliżoną wartość *P(A).*

$P(A) \approx \frac{n}{N}$ gdzie *n* – liczba punktów należących do figury

N – liczba wszystkich zaznaczonych punktów

Wobec tego otrzymujemy:

$$\frac{n}{N} \approx \frac{P_f}{P_k}$$

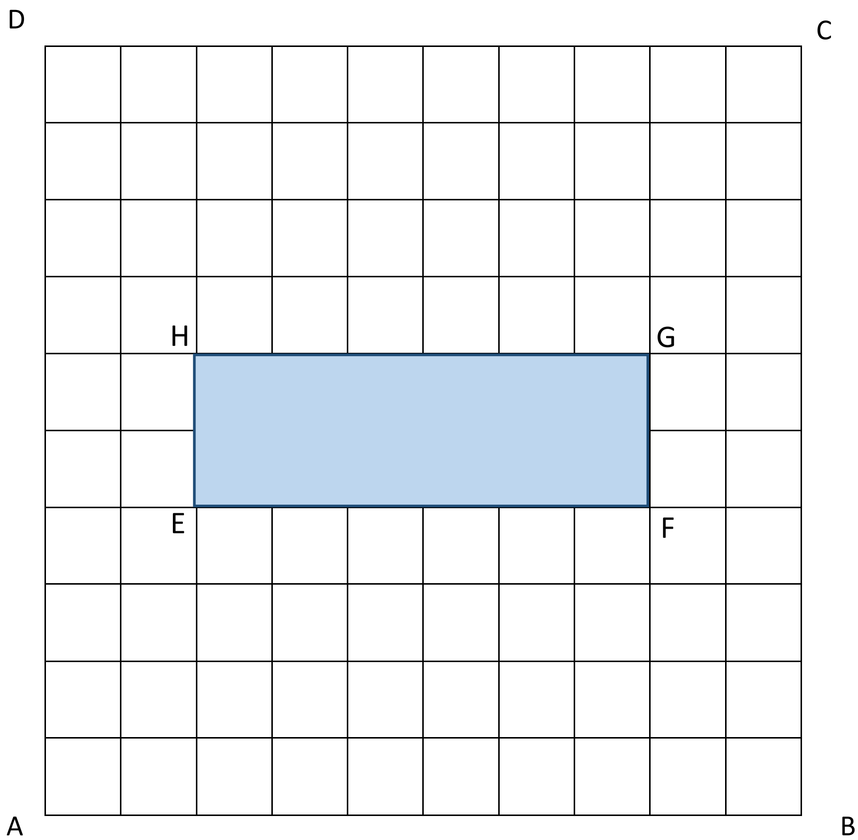
$$P_f \approx \frac{n}{N} \cdot P_k$$

Jest to równość, z której oszacować można pole badanej figury.

Sposób przedstawiony powyżej nosi nazwę „Metoda Monte Carlo”, a stworzony został w latach czterdziestych XX wieku, przez trzech matematyków współpracujących w ramach amerykańskiego „projektu Manhattan”: Johna von Neumanna (emigranta z Węgier), Stanisława Ulama (emigranta z Polski) i Nicholasa Metropolisa (emigranta z Grecji). Metoda ta znalazła zastosowanie w wielu dziedzinach matematyki i innych nauk, zaś jej popularność wzrosła dzięki zastosowaniu komputerów, które pozwalają na łatwą symulację doświadczeń i opracowanie wyników.

Doświadczenie 1

Spróbujmy zastosować Metodę Monte Carlo do obliczania pola figury. Rozważymy także jej dokładność. W tym celu, narysujemy w układzie współrzędnych kwadrat, o wierzchołkach A = (0,0), B = (100,0), C = (100,100), D = (0,100). Następnie, rysujemy w tym kwadracie prostokąt, o wierzchołkach E = (20,40), F = (80,40), G = (80,60), H = (20,60), tak jak pokazano na rysunku:



Teraz, w kwadrat ten wpisywać będziemy losowo punkty. Do ustalania ich współrzędnych posłużymy się komputerowym generatorem liczb losowych. Posłużymy się nim w ten sposób, że wygenerujemy 100 liczb naturalnych z przedziału zamkniętego od 0 do 100. Pierwsza liczba będzie współrzędną x, punktu P_1, druga, współrzędną y punktu P_1, trzecia, współrzędną x punktu P_2, czwarta, współrzędną y punktu P_2 itd. W ten sposób otrzymamy współrzędne dla 50 losowych punktów. A oto otrzymane rezultaty:

A – punkt należy do prostokąta

$n_A = 7$

$N = 50$

$P_k = 10000\ j^2$

$$P_f \approx \frac{n_A}{N} \cdot\ P_k$$

$$P_f \approx \frac{7}{50} \cdot 10000\ j^2$$

$$P_f \approx\ 1400\ j^2$$

Pole prostokąta otrzymane przy zastosowaniu Metody Monte Carlo wynosi $1400\ j^2$.

Obliczmy teraz jego pole ze zwykłego wzoru na pole prostokąta:

$$60\ j \cdot 20\ j = 1200\ j^2$$

Błąd względny = $\frac{200}{1200} \cdot 100\% \ \approx 17\%$

Spróbujmy teraz wpisać w kwadrat tylko 10 losowo wygenerowanych punktów:

A – punkt należy do prostokąta

$n_A = 2$

$N = 10$

$P_k = 10000\ j^2$

$$P_f \approx \frac{n_A}{N} \cdot\ P_k$$

$$P_f \approx \frac{2}{10} \cdot 10000\ j^2$$

$$P_f \approx\ 2000\ j^2$$

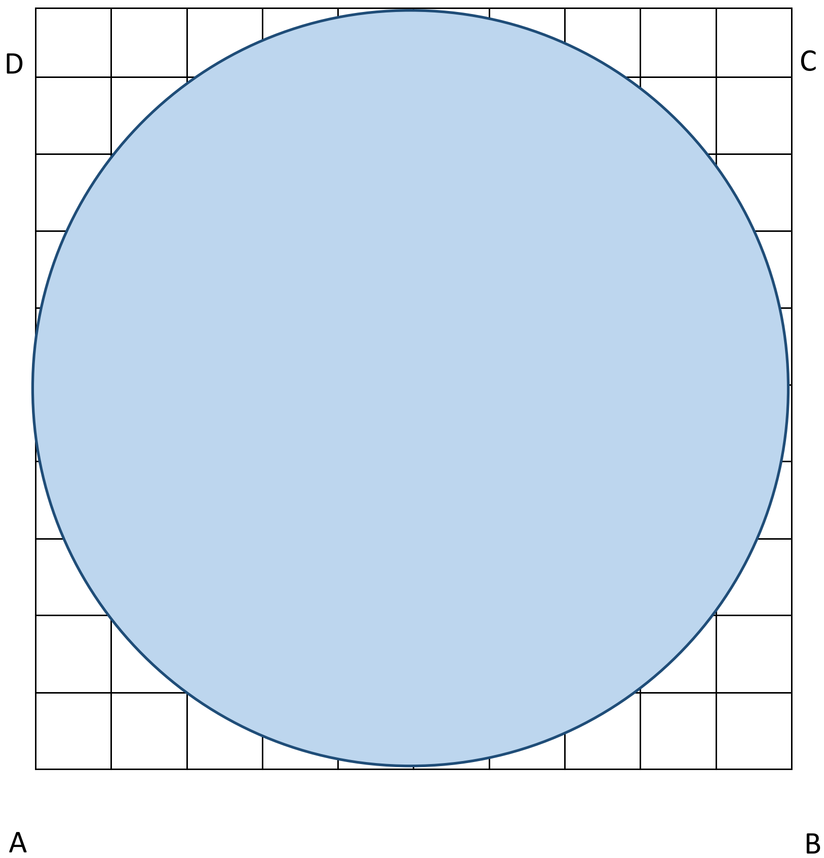
Błąd względny = $\frac{800}{1200} \cdot 100\% \ \approx 67\%$

Tym razem błąd względny wyniósł znacznie więcej niż za pierwszym razem. Jeśli chcemy bowiem zwiększyć dokładność oszacowania Metodą Monte Carlo, powinniśmy znacznie zwiększyć liczbę wygenerowanych punktów. Wynika to z jednego z tzw. praw Wielkich Liczb, które sformułował Jakob Bernoulli, a które brzmi:

„Z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1 można się spodziewać, iż przy dostatecznie wielkiej liczbie prób, częstość danego zdarzenia losowego będzie się dowolnie mało różniła od jego prawdopodobieństwa."

Doświadczenie 2

Ponownie rysujemy w układzie współrzędnych taki sam kwadrat jak w doświadczeniu 1. Tym razem, wpisujemy jednak w niego okrąg, tak jak na rysunku:



Ponownie w kwadrat będziemy wpisywać losowe punkty, tym razem jednak, celem naszego doświadczenia, będzie oszacowanie liczby π. Dojdziemy do tego w następujący sposób:

$$P_f \approx \frac{n_A}{N} \cdot P_k$$

$$\pi r^2 = \frac{n_A}{N} \cdot 4r^2$$

$$\pi = \frac{n_A \cdot 4}{N}$$

Aby zwiększyć dokładność doświadczenia, tym razem wygenerujemy 100 punktów. Otrzymaliśmy następujące wyniki:

A – punkt należy do okręgu

$n_A = 82$

$N = 100$

$P_k = 10000\ j^2$

$$\pi \approx \frac{n_A \cdot 4}{N}$$

$$\pi \approx \frac{85 \cdot 4}{100}$$

$$\pi \approx 3{,}4$$

Porównajmy teraz otrzymany wynik z liczbą 3, 14, czyli rozwinięciem dziesiętnym liczby π z dokładnością do 2 miejsc po przecinku:

Błąd względny = $\frac{0{,}26}{3{,}14}$ ≈ 8,3%

Bibliografia

- *Matematyka III część II Wersja dla nauczyciela* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
- *MATeMAtyka 3 – Podręcznik Nauczyciela Zakres Rozszerzony* Nowa Era
- Juliusz Jerzy Herlinger *Niezwykłe perypetie odkryć i wynalazków* Nasza Księgarnia