“CHAOS” Theory

PART TWO
FRACTAL STRUCTURE IN THE CAPITAL MARKETS

5. Introduction to Fractals
6. The Fractal Dimension
7. Fractal Time Series – Biased Random Walks
8. R/S Analysis of the Capital Markets
9. Fractal Statistics
10. Fractals and Chaos

5. Introduction to Fractals

5. Introduction to Fractals

- Fractal이란?
  - 자기유사성(Self-similarity)의 성질을 갖는 도형으로, 부분과 전체가 닮아 그 규모를 아무리 확대하거나 축소하여도 여전히 같은 형태를 지님
  - 어느 부분이든 전체를 재구성할 수 있는 정보를 모두 가지고 있음을 뜻하며, 일부분만 보아도 전체가 어떤 도형인지 짐작할 수 있음

5. Introduction to Fractals

- 유클리드 기하학(Euclidean Geometry)과 프랙탈 기하학(Fractal Geometry)
  - Plane Geometry(유클리드 기하학)
    - 유클리드 기하학은 고대 Greeks를 수학적으로 풀어냄
    - 세상의 이치를 최대한 순수한 형태와 질서로 해석하는 것을 목적으로 함
    - Point, Line, Plane, Solid 등으로 구성
      - 특히, Solid는 Spheres, Cones, Cylinders, Blocks라는 이름을 가진 형태로 존재
      - Ex) 실제 산을 그래픽화 하는 작업
        실제 유클리드 기하학을 통해 실제 '산'을 그래픽화 하는 작업을 하면, 수많은 유클리드 Solid를 통해 산의 모든 곡면과, 재질 등을 표현
  - Fractal Geometry(프랙탈 기하학)
    - 실제 산을 구성하는 재질의 프랙탈적인 성질을 분석하여 유클리드 기하학으로 표현하기 힘든 정보들을 구현 → 카오스 이론에서는 Fractal Geometry에 대해 다룸

Mountains are not cones,
and clouds are not spheres

5. Introduction to Fractals

- Plane Geometry(유클리드 기하학)의 차원
  - 유클리드 기하학에서 Solid의 정의
    - 모든 면에서 연속적이며 미분 가능해야함
    - 속이 비어있는 원기둥이나, 볼링공과 같이 구멍이나 공간상의 Gap이 있는 경우 3차원 Solid가 아님
      - 이럴 경우, Solid(3차원)보다 낮으면서, Plane(2차원)보다는 높은 차원을 갖게됨
        - 2~3 사이의 Dimension을 지님(예 2.58차원)

6

It has no holes in it, not rough
It has pure & smooth form

5. Introduction to Fractals

- What is Fractal?
  - Mandelbrot(1982)
    "부분이 전체를, 전체가 부분을 대신할 수 있는 형태의 것"
    → self-referential, or self-similar(자기 유사성)
    → Can you guess which is which?
    - 오른쪽 그림은 Daily, Weekly, Monthly의 시계열 자료를 도식화한 것
    - 실제 우리는 각 사진에 대해, 무엇이 무엇인지 알 수 없음

7

  - 자기 유사성(self-similarity)의 특징
    - 어떤 부분을 관찰하는 관찰 망을 확대하거나 축소하더라도 전체와 같은 구조가 나타나는 것을 의미

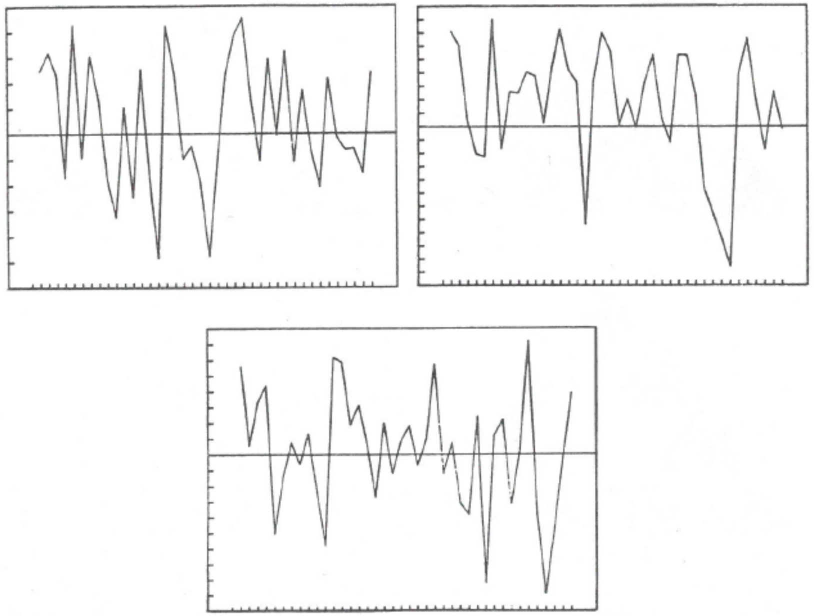


FIGURE 5.1 Self-similarity in S&P 500 returns: daily, weekly, and monthly returns. (Can you guess which is which?)

5. Introduction to Fractals

- Sierpinski Triangle
  - 어두운 삼각형의 가운데에 밝은 구멍의 역삼각형을 만들어내는 프랙탈
  - 가장 대표적인 프랙탈의 형태

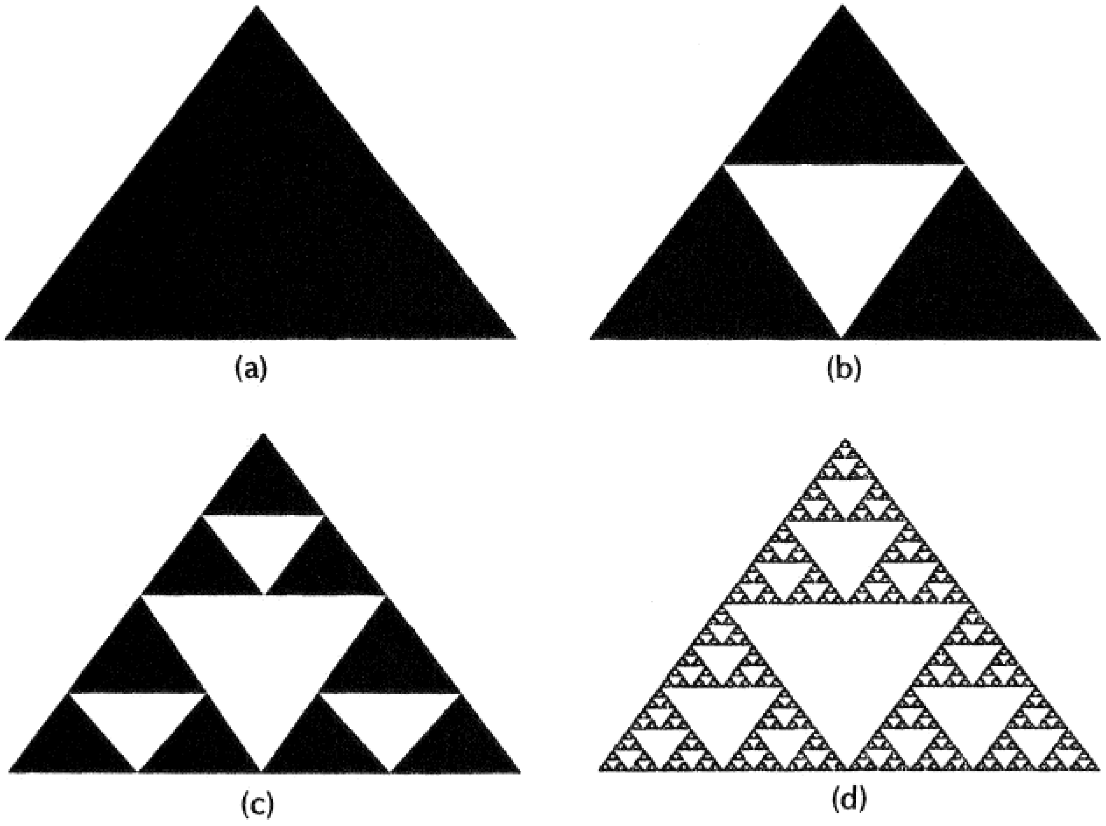


FIGURE 5.2 Generating the Sierpinski Triangle. (a) Start with a solid equilateral triangle. (b) Remove an equilateral triangle from the center. (c) Remove a triangle from the remaining triangles. (d) Repeat for 10,000 iterations, triangles within triangles.

5. Introduction to Fractals

- Koch Snowflake
  - 최초삼각형의 변의 1/3지점 두개의 점에서 밖으로 튀어나오는 정삼각형을 만들어 나가는 Fractal

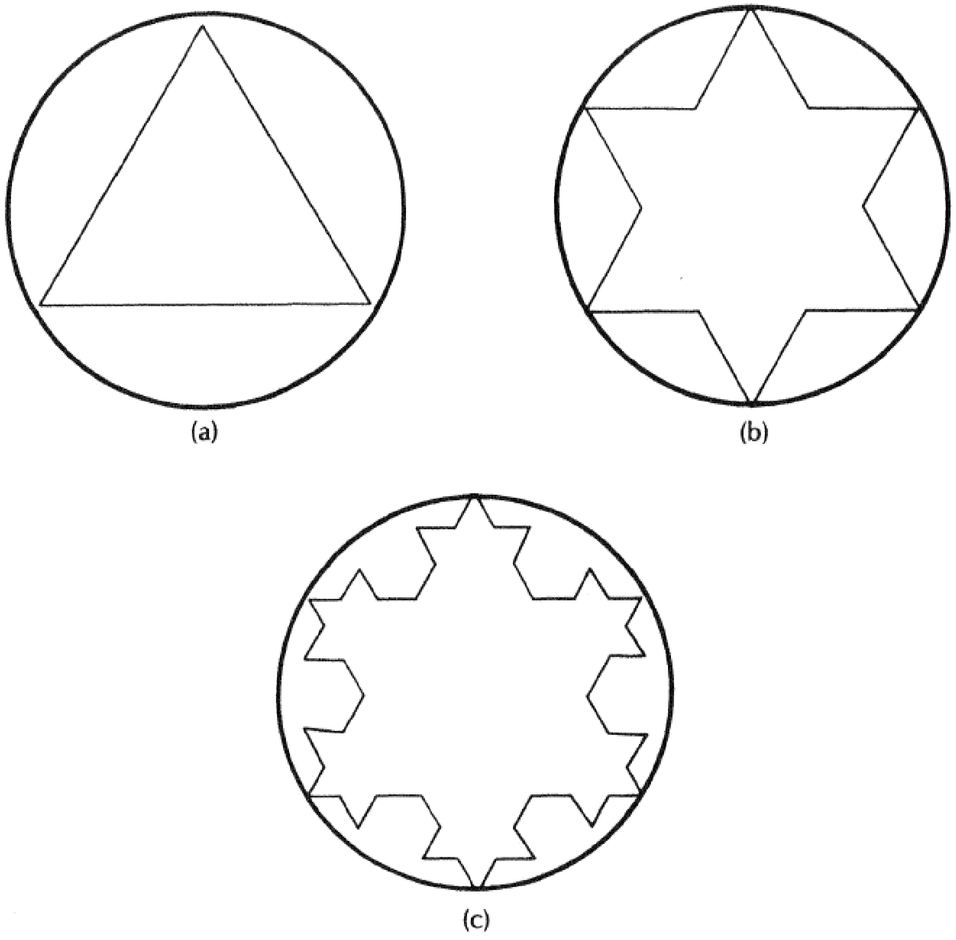


FIGURE 5.3 Generating a Koch Snowflake. (a) Start with an equilateral triangle. (b) Add an equilateral triangle to the middle third of each side. (c) Continue to add an equilateral triangle to the middle third of each side.

5. Introduction to Fractals

- Symmetrical Fractals(Deterministic Fractals)
  - 앞서 살펴본 두 가지의 Fractal 예시
    - 정해진 “규칙”에 따라서, 세밀한 구조를 형성해 나가는 Fractal의 형태
  - 실제 자연계에서는 설정된 규칙에 따르는 Symmetrical Fractal 형태는 발견되지 않음

- Random Fractals
  - 해안선이 Random Fractal의 좋은 예시
    - 하늘에서 촬영한 해안선은 매우 smooth하고, irregular line의 형태를 보이지만, 좀더 낮은 고도에서는 더 세밀한 jagged 형태의 모습을 확인 가능
  - 폐의 구조에서도 Random Fractal의 형태를 확인
    - 최초로 둘로 나뉘는 부분인 기관(Trachea), 그 이후 계속 나뉘는 가지의 형태에서 Random Fractal의 형태를 확인
  - **실제 자본시장의 흐름도 이와 마찬가지로 Random Fractal 형태**

5. Introduction to Fractals

- Chaos Game
  - 프랙탈을 만들어내기 위한 도구 Iterated Function Systems(IFS)
    - Interated Systems, Inc, Michael Barnsley
    - 일종의 규칙을 통해 프랙탈의 형태를 구성

1. 삼각형 내에 임의의 점을 찍음 (Random한 요인)
2. 임의의 점에서 C점(A,B,C점 중 임의의 설정) 까지의 거리의 Half인 부분에 점을 찍음
3. 새로 찍힌 점에서 C점까지 사이의 Half인 부분에 계속해서 점을 찍고, 이 작업을 계속 반복하다 보면 그림(C)

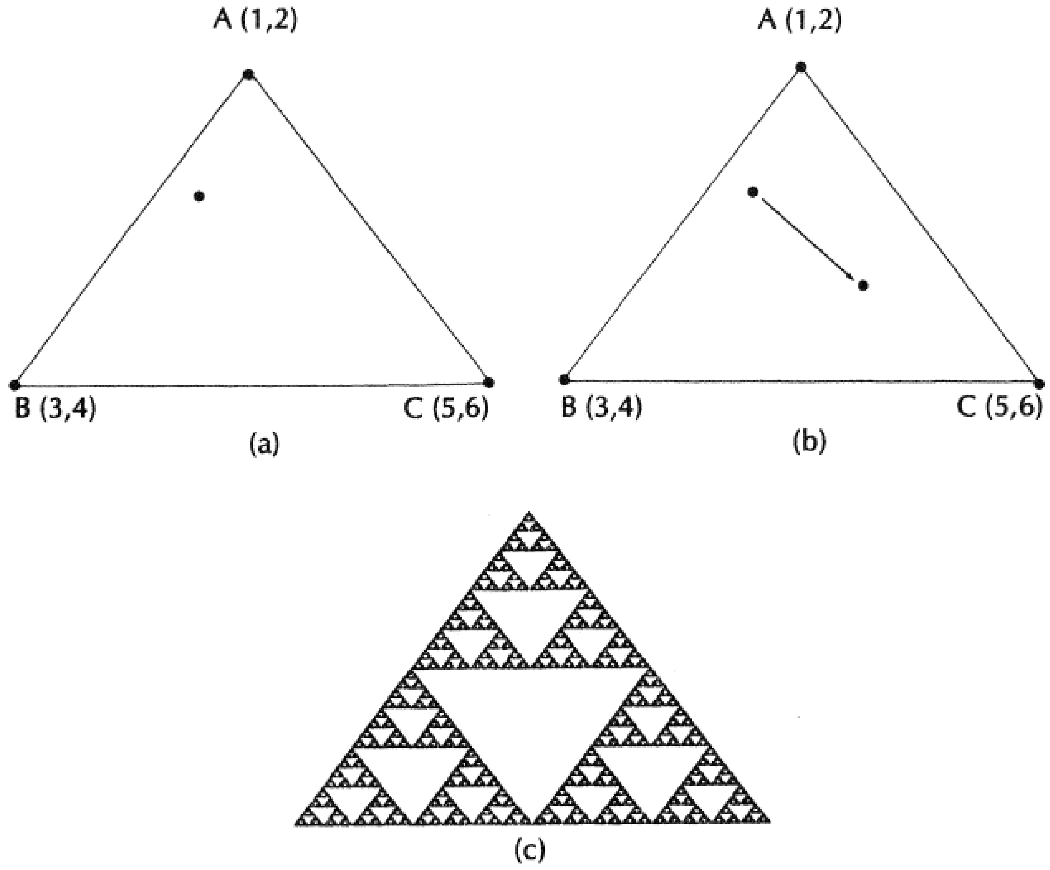


FIGURE 5.4 The Chaos Game. (a) Start with three points, an equal distance apart, and randomly draw a point within the boundaries defined by the points. (b) Assuming you roll a fair die that comes up number 6, you go halfway to the point marked C(5,6). (c) Repeat step (b) 10,000 times and you have the Sierpinski triangle.

5. Introduction to Fractals

- 프랙탈의 특성
  - 유한한 Range의 가능성안에서 무한한 Number의 가능성이 존재
    - 우측 예시)
      유한한 삼각형 내에서, 무한한 점의 존재
      - 프랙털을 시간의 개념으로 확장하면 국지적으로는 무작위적, 전체적으로는 결정론적(locally random & globally deterministic)임

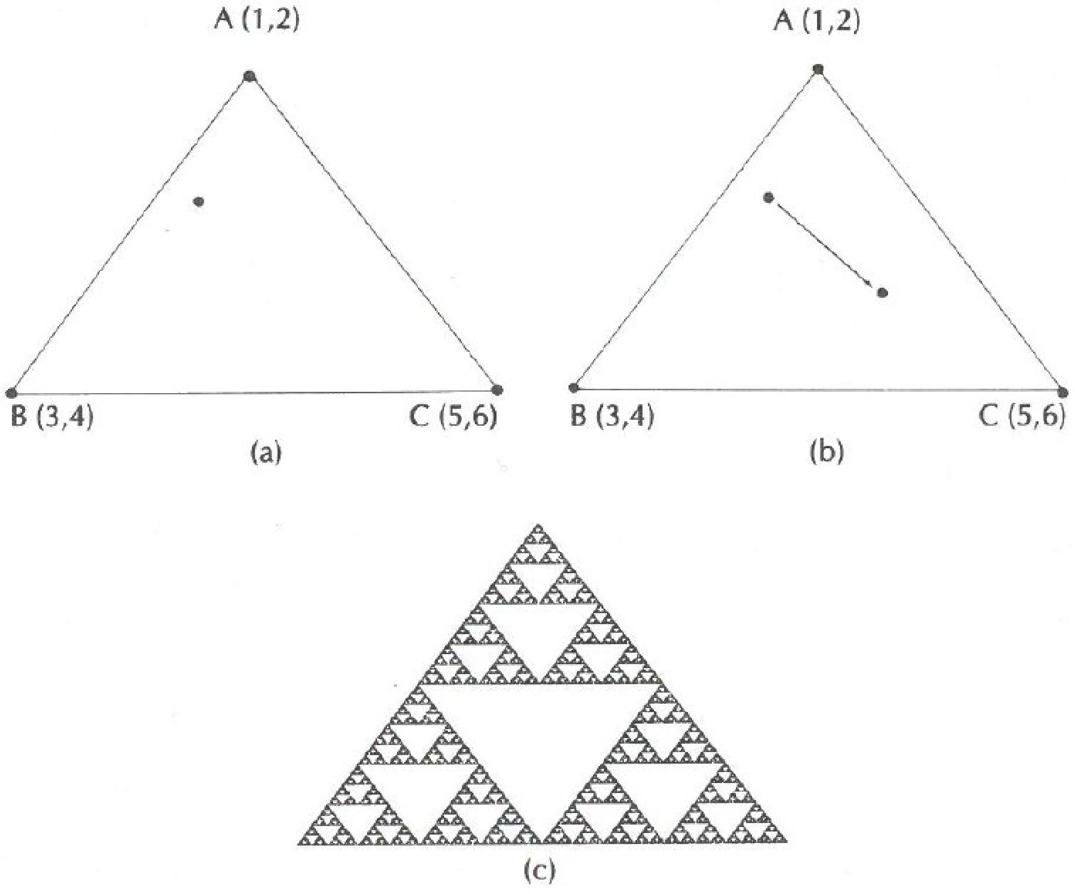


FIGURE 5.4 The Chaos Game. (a) Start with three points, an equal distance apart, and randomly draw a point within the boundaries defined by the points. (b) Assuming you roll a fair die that comes up number 6, you go halfway to the point marked C(5, 6). (c) Repeat step (b) 10,000 times and you have the Sierpinski triangle.

6. The Fractal Dimension

6. The Fractal Dimension

- Mandelbrot(1982)
  - 서로 인접하고 있는 두 나라의 국경선의 길이를 백과사전을 통해서 조사해 보았는데 재미있는 사실을 발견함
  - 일반적으로 작은 나라의 백과사전에 국경의 길이가 더 길게 기록되어 있었음
  - 의문의 시작
    - 왜 그런 현상이 발생했을까?
    - 작은 나라에서는 더 짧은 자로 국경선을 측량하기 때문이 아닐까?
  - 측량자의 길이를 반으로 축소시키면 국경선의 길이는 더욱 길게 나타남
    - 극단적으로 측량자의 길이를 무한히 줄인다면 국경선의 길이는 얼마가 될 것인가?
    - 이렇게 짧은 측량자로 국경선의 길이를 측량한다면 그 길이는 무한대라는 결론이 나옴
  - 측량자의 기본 길이 ε
    - 측량자로 해안선 혹은 국경선의 길이를 측정한다고 할 때 ε 을 축소시킴에 따라 늘어나야 하는 측량자 갯수의 증가율을 D(Dimension)라고 표현.
      - 일반적으로 D(Dimension)는 정수가 아니며, 일반적인 거리공간에서 적용되는 차원의 의미
    - Mandelbrot는 정수가 아닌 차원을 강조하여 fractal 차원이라는 말을 도입
      - 이러한 개념을 염두에 둔다면 복잡한 구조를 가진 것일수록 fractal 차원은 증가

6. The Fractal Dimension

- 해안선 Fractal의 차원
  - 본 장에서는 실제 기하학 적 프랙탈의 차원을 계산하는 방법에 대해 다룸
    - 실제 자본시장과 같은 숫자로 이루어진 시계열에 대한 차원을 계산하는 방법은 이후에 다룸
  - 구불구불한 선의 형태를 지녀, Fractal Dimension은 1보다 큼
    - The more jagged they are, the closer their fractal dimension would approach two, the dimension of a plane
  - Fractal의 Dimension을 측정하는 방법
    - 해안선의 구불구불한 부분을 모두 덮기 위해 필요한 '원의 개수'를 활용

$N*(2*r)^D = 1$ N=number of circles, r=radius, D=Fractal dimension

$D = logN/\log(1/(2*r))$

6. The Fractal Dimension

- Fractal의 차원계산(Koch snowflake 예시)

$N * (2 * r)^D = 1$ N=number of circles, r=radius, D=Fractal dimension

$D = logN/\log(1/(2 * r))$

예시) Koch snowflake의 한 면을 덮기 위해서는 반지름 0.15(지름0.3)의 원 4개 (N=4, r=0.15)필요

$$D = \log(4)/\log(\frac{1}{0.3})$$

$$D = 1.26$$

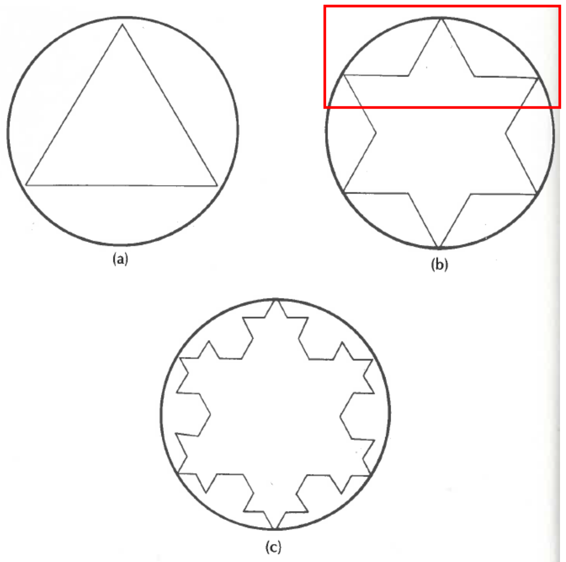


FIGURE 5.3 Generating a Koch Snowflake. (a) Start with an equilateral triangle. (b) Add an equilateral triangle to the middle third of each side. (c) Continue to add an equilateral triangle to the middle third of each side.

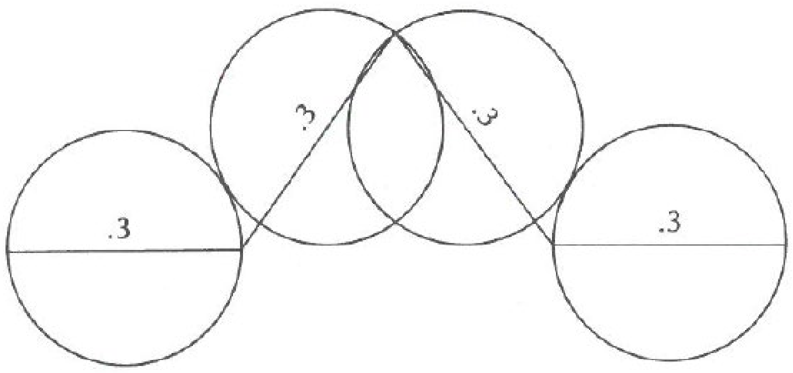


FIGURE 6.1 Calculating the fractal dimension.

6. The Fractal Dimension

- 해안선 Fractal의 차원
  - 같은 방법을 통해, 실제 Norway 해안선의 차원은 1.52, 영국 해안선의 차원은 1.3
    - Norway의 Fractal 차원이 높다는 것은 더 구불구불한 형태를 띄고 있다는 의미

6. The Fractal Dimension

- 표준편차에 대한 맹신의 위험과 Fractal Dimension의 활용
  - Markowitz(1952)
    - 표준편차(혹은 분산)를 통한 Risk 즉 변동성을 측정
      - 표준편차는 평균으로부터 얼마나 멀리 떨어져 있는지를 확인
      - 표준편차가 커질수록 산포도도 커짐
  - S1은 Trend없이 거의 Random한 상태, S2는 Trend를 가지고 움직이는 상태
  - 변동성은 Risk를 측정하는데 적절하지 못하였음을 확인, Fractal의 차원을 활용하면, 다른 정보를 알 수 있음

Table 6.1 Standard Deviation versus Fractal Dimension

Observation	S1	S2
1	+2	+1
2	−1	+2
3	−2	+3
4	+2	+4
5	−1	+5
6	+2	+6
Cumulative return	+1.93	+22.83
Standard deviation	1.70	1.71
Fractal dimension	1.42	1.13

7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- Hurst Exponent(허스트 지수)
  - 나일강의 저수지의 수위 Control하려고 했던 수리학자 Hurst
  - 1907년부터 40년간에 걸쳐 저수량이 시간에 따라 평균수준에서 어떻게 변동하는지 측정
    - 그 변동범위가 측정기간의 길이에 따라 변화하는 것을 발견
    - 시간에 따라 표준화하기 위한 노력
  - 변동범위의 값을 관측치의 표준편차로 나누어 **무차원 비율(Dimension Ratio)**를 만듬
  - 무차원비율에 따라, 시계열이 Random Walks를 따르는지 아니면, Biased Random Walks를 따르는지 판단할 수 있는 R/S분석을 제시

  - R/S분석(Rescaled Range Analysis)을, 여러 자연현상에 대하여 적용한 결과 강우량, 태양흑점 주기 등 대부분이 Random Walk를 따르지 않고, 일정한 추세가 있는 Biased Random Walks를 따른다는 사실을 확인
  - 즉, 자연현상들이 단순한 단기의존적 과정이 아니라 시계열의 내재적인 특성으로 장기기억구조를 가지고 있음을 발견

7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- Hurst Exponent(허스트 지수)

1. N기간 동안의 누적 편차를 계산

$$X_{t,N} = \sum_{u=1}^{t} (e_u - M_N)$$

- ▶ $X_{t,N}$: N 기간 동안의 누적 편차
- ▶ e_u : u 년도의 유입량
- ▶ M_N : N 기간의 평균 e_u

2. 누적 편차의 범위 계산(최대치 – 최소치)

$$R = Max(X_{t,N}) - Min(X_{t,N})$$

- ▶ R : X의 범위
- ▶ $Max(X)$: X의 최대치
- ▶ $Min(X)$: X의 최소치

3. 대입 후 H값 계산

$$R/S = (a * N)^H$$

- ▶ R/S : rescaled range   R은 위에 적힌 R, S는 표준편차를 의미
- ▶ N : 관측치의 수
- ▶ a : 상수
- ▶ H : Hurst 지수

7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- Hurst Exponent(허스트 지수)
  - Brownian motion에서의 허스트 지수값(H)은 0.5(Random series)
  - 0.50<H<1.00 일 때
    - **지속적인(persistent) 시계열 또는 추세강화 시계열(trend reinforcing series)**
    - 시계열은 프랙털 브라운 운동 또는 편의된 랜덤워크

  - 0<H<0.50 일 때
    - **반지속적인(anti-persistent) 시계열** 또는 회귀적인 시계열(mean reverting series)

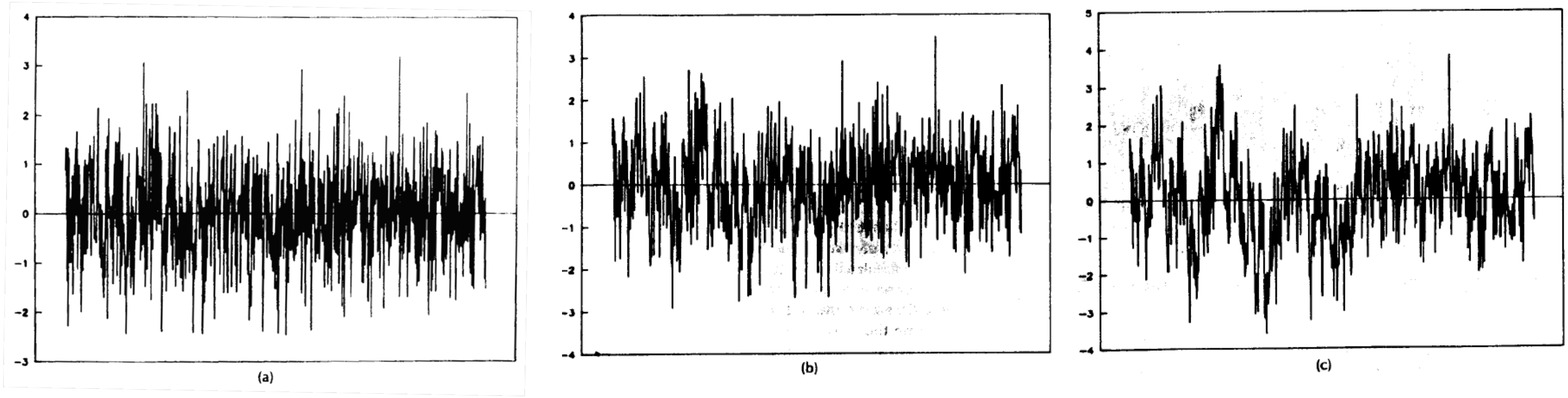
  - Mandelbrtot(1972): 허스트 지수의 역수값은 Fractal dimension(D)값과 같음
  - 자연현상의 대부분은 0.5를 넘고, 이는 즉 통계학에서 배우는 자연현상은 Normal distribution이 아님을 뒷받침하는 증거

  - H값의 의미
    - 예) H가 0.6이라면, 지난 사건이 Positive였을 때, 다음 사건도 Positive일 확률이 60%임을 의미
      - Positive라는 추세가 계속될 확률을 의미

7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

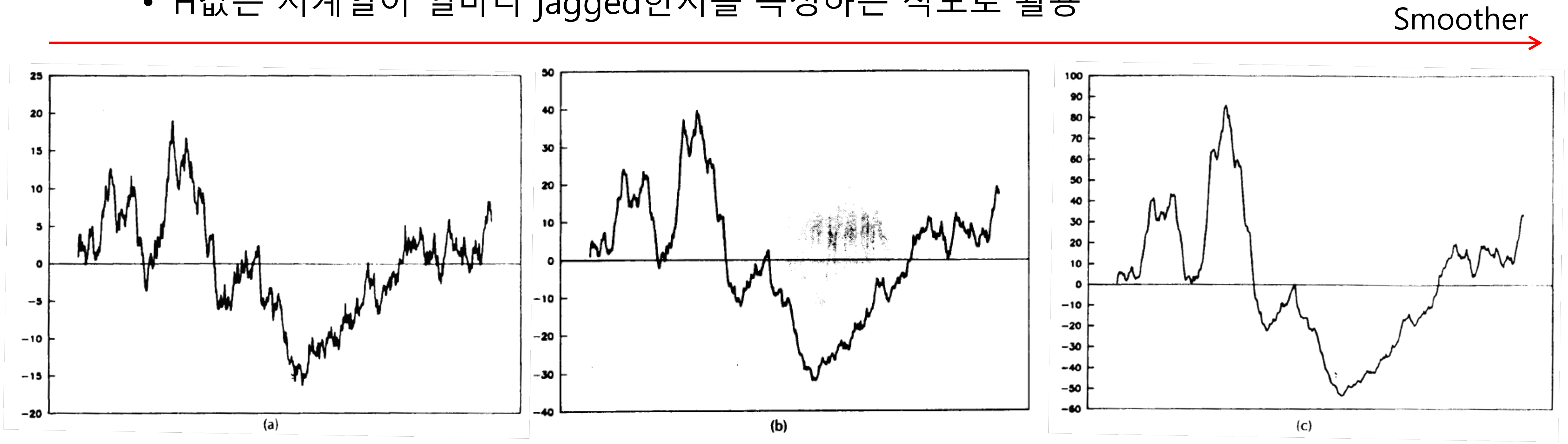
- H값에 따르는, <u>Fractal Noise</u>
  - 각각 H : 0.50, 0.72, 0.90
  - H값이 1에 가까워짐에 따라, Noise의 밀도가 감소하는 모습을 확인

밀 → 소



7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- H값에 따르는, Fractal Noise(Cumulative)
  - 각각 H : 0.50, 0.72, 0.90
  - H값이 1에 가까워짐에 따라, Smoother
  - H값은 시계열이 얼마나 jagged한지를 측정하는 척도로 활용



7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- H의 추정

$$C_n = 2^{(2H-1)} - 1$$

  - 장기기억효과(long-term memory effect)
    - Time series 자료간의 상관성이 존재함을 의미
  - C_n 일반적인 상관성의 척도

- H=0.5일 경우, 그 분포가 장기에 있어서 통계적인 의존관계가 없는 순수한 랜덤워크를 따르기 때문에 예측이 불가능함을 의미, 이때 **상관성의 척도**는 0
- H<0.5일 때는 시스템이 랜덤워크보다 더 반전이 잦은 반지속적인(anti-persistent) 시계열 또는 회귀적인 시계열(mean reverting series)이고 **상관성의 척도**가 음(-)이 됨
- H>0.5일 때는 지속적인(persistent) 시계열 또는 추세강화 시계열(trend reinforcing series)을 의미하고, **상관성의 척도**가 양(+)이 됨

$$\log(R/S) = H^* \log(N) + \log(c)$$

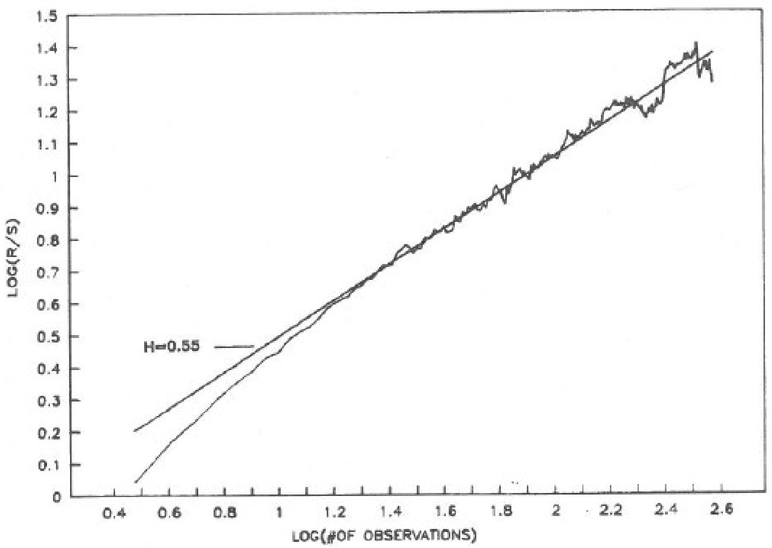
  - 실증분석 시에는 양변에 ***log***를 취하고 회귀분석을 실시
  - ***N***은 기억효과가 지속되는 기간

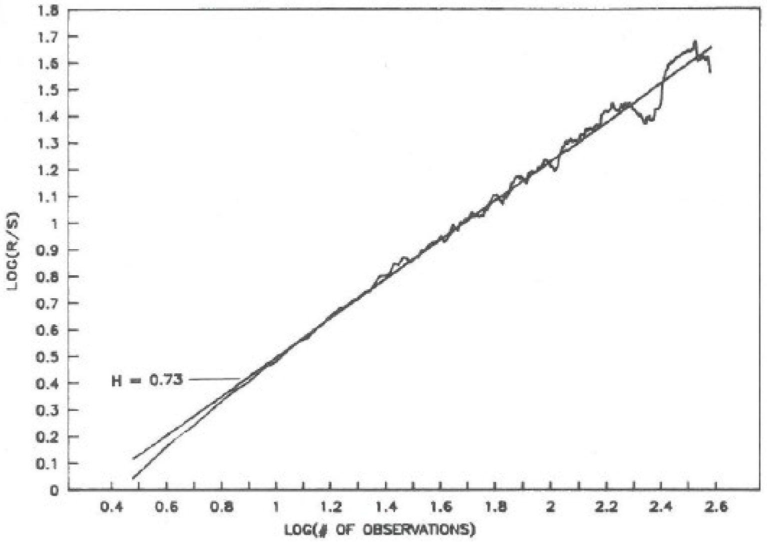
7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

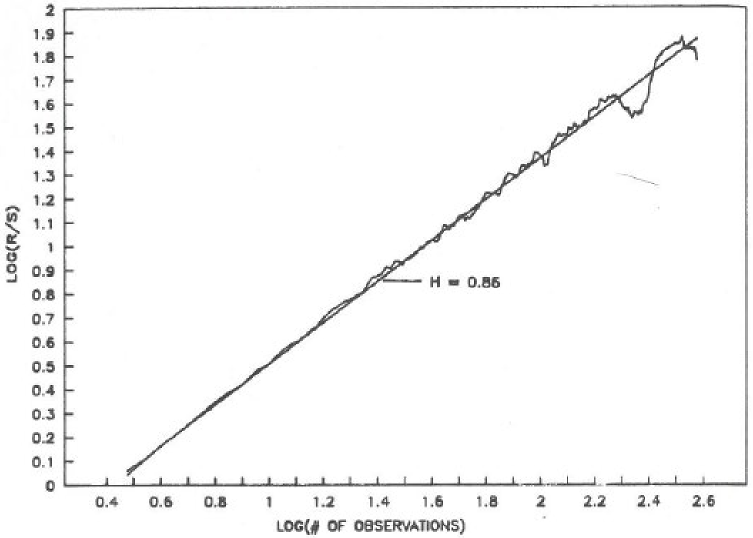
- H의 추정

  $$\log(R/S) = H^{*}\log(N) + \log(a)$$

  - H는 log/log 그래프의 기울기







7. Fractal Time Series – Biased Random Walks

- R/S 분석결과의 의미
  - Hurst지수 & Cycle
    - H : 시계열에 있어서 각 사건들이 그 이후의 사건들과 상관되어 있는지 여부를 구분할 수 있는 기준
    - Cycle : 기억효과(memory effect)를 갖는 평균적인 Cycle
  - Hurst지수가 위험요인으로서 갖는 의미
    - H가 커질수록 주식 수익률의 무작위한 정도가 줄어들고, 지속적인 성격이 커지므로 과거정보를 이용하여 투자할 때 위험이 줄어들게 됨
    - 반면 H가 0.5에 가까워질수록 주식 수익률의 생성과정은 랜덤해짐

  - 일반적으로 주식시장 R/S분석결과
    - 오늘의 사건이 내일의 가격결정에도 영향을 미치는 지속성이 강한 시계열임
    - 투자자들의 주기와 추세판단 시 효율적 시장론과는 다른 기준을 제공

8. R/S Analysis of the Capital Markets

8. R/S Analysis of the Capital Markets

- 40년치 Monthly Data
  - 480개의 Logarithmic Return(480개월)
  - Month increments(N)을 6~240까지 증가시키며, 실험
    - N이 6일 경우, 80개의 Independent 6 month increments
    - N이 48일 경우, 10개의 Independent 48 month increments

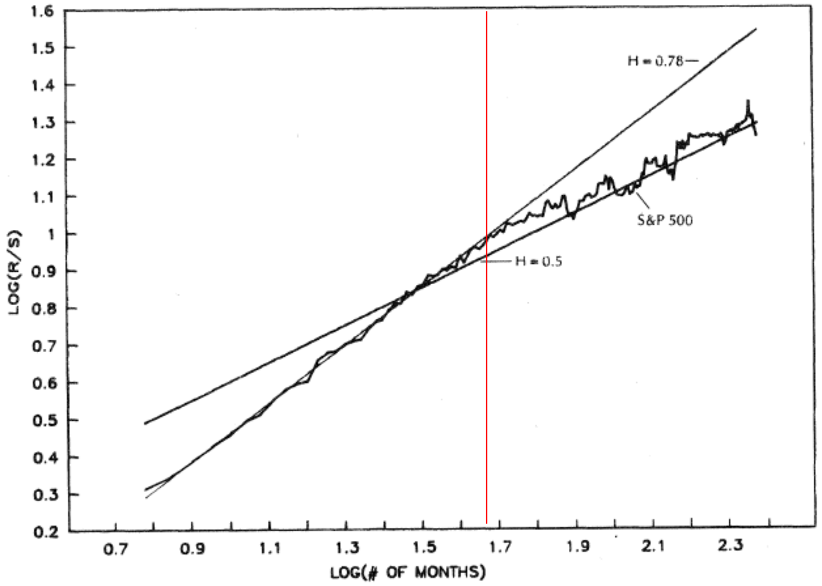


FIGURE 8.1 R/S analysis: S&P 500 monthly returns January 1950–July 1988. Estimated H = 0.78. (Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

- N이 48일 때(Log48=1.68)까지만 Long memory process
- N<48일 때 H는 약 0.78
- N>=48일 때 H는 약 0.52

8. R/S Analysis of the Capital Markets

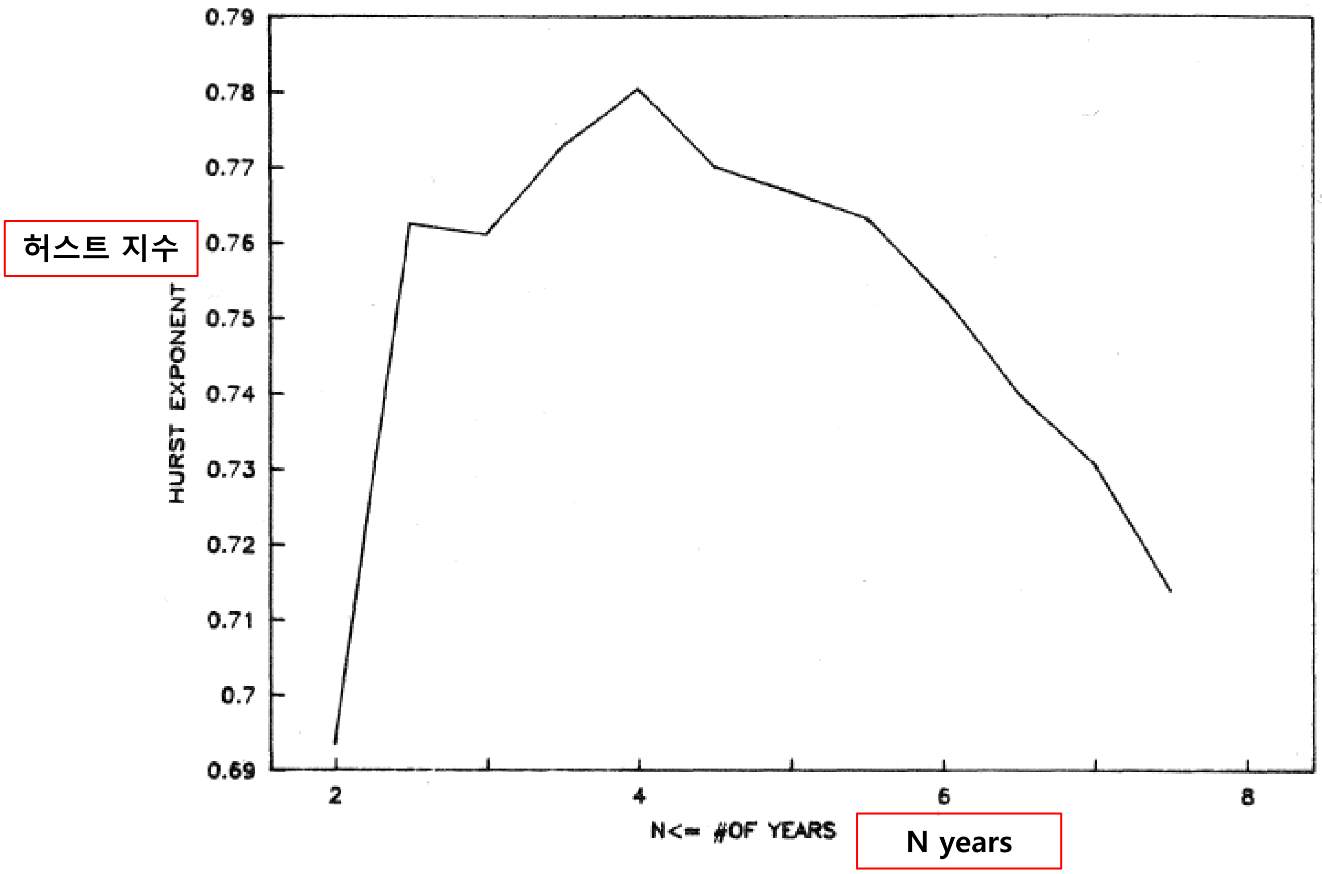


FIGURE 8.2 R/S analysis: Estimating the cycle length; S&P 500 monthly returns, January 1950–July 1988.

N에 따르는 허스트 지수 값 추이
N year를 의미(앞페이지는 Month)
N이 2일 경우 24Month

Scramblling : 시계열 데이터의 시계열 순서를 Random하게 섞는 작업(Memory를 없애버림)

Table 8.1 R/S Analysis of Stock Returns, January 1950–July 1988

	Unscrambled	Scrambled
Constant	−0.32471	−0.04544
Standard error of Y (estimated)	0.01290	0.02005
R^2	0.99559	0.98564
X coefficient (H)	0.778	0.508
Standard error of X	0.008	0.004

48개월(N) 이하에서, H값이 0.778에서 Scrambling 이후 0.508이 된 것을 확인
→N값에 따른 H를 계산 후 Scrambling 이후 H값과 비교하여 그 값이 감소하면, 시계열 자료의 Memory effect가 있음을 확인할 수 있음

8. R/S Analysis of the Capital Markets

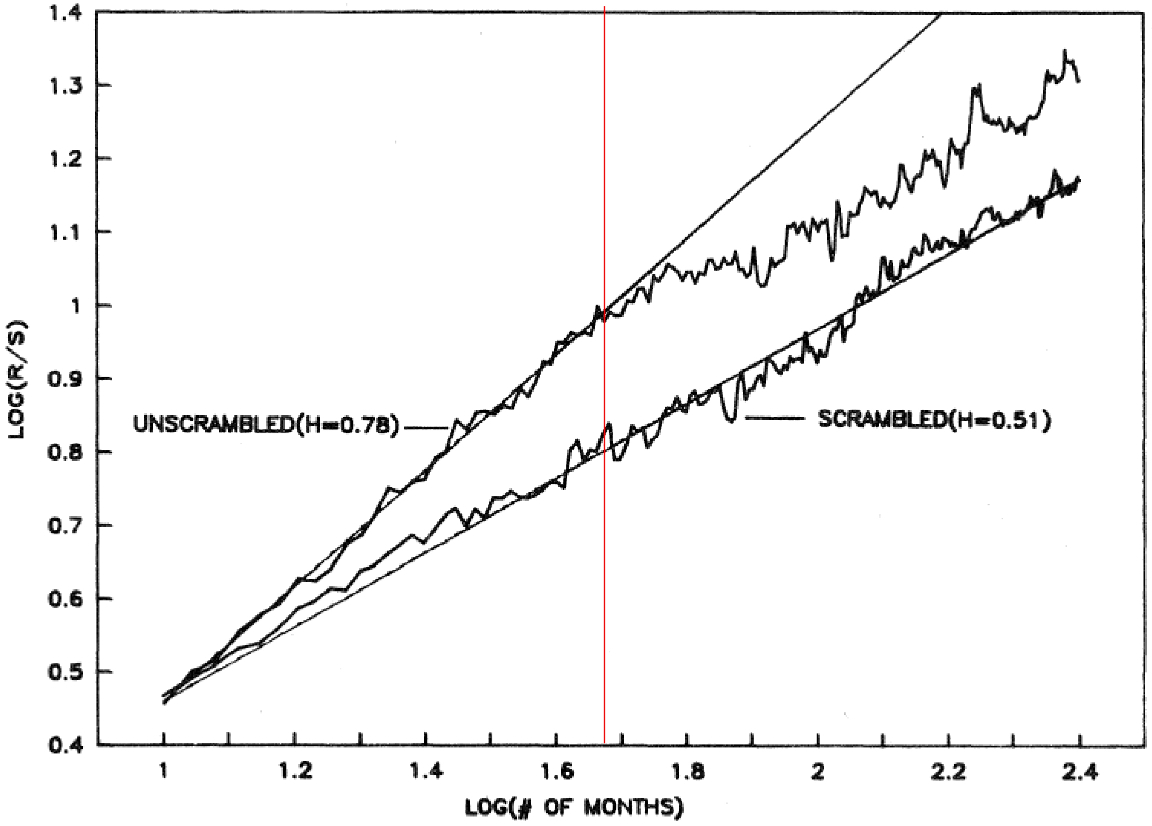


FIGURE 8.3 Scrambling test: S&P 500 monthly returns, January 1950–July 1988. Unscrambled H = 0.78; scrambled H = 0.51.

앞 페이지 표의 그래프
Unscrambled H = 0.78
Scrambled H = 0.51

→ Unscrambled(N<48)의 H가 0.78이므로
해당 시계열이 N이 48이하에서 Memory 효과가 있음을 확인

8. R/S Analysis of the Capital Markets

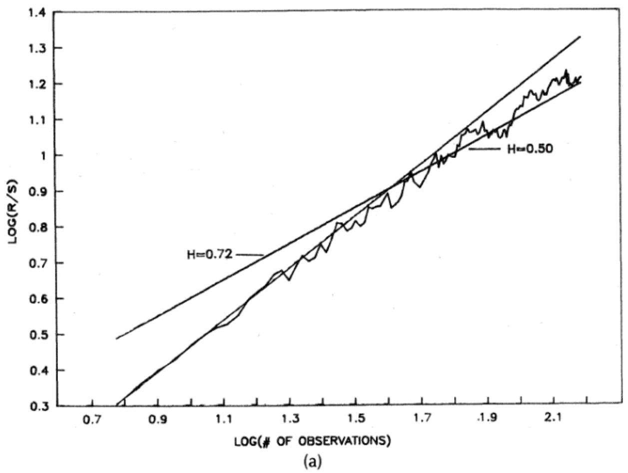


FIGURE 8.4a R/S analysis of individual stocks: Monthly returns, January 1963–December 1989. IBM: Estimated H = 0.72.

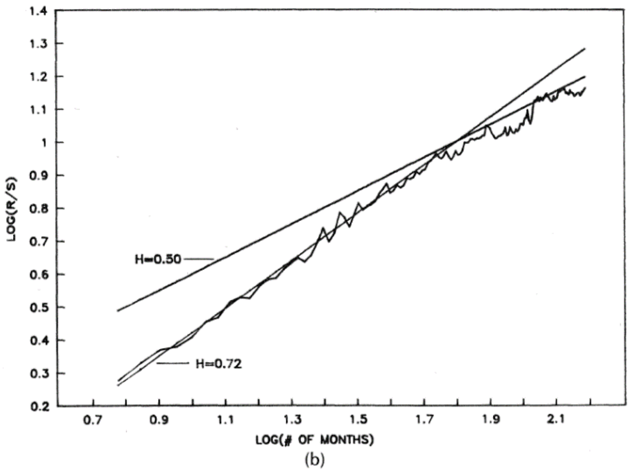


FIGURE 8.4b R/S analysis of individual stocks: Monthly returns, January 1963–December 1989. Mobil Oil: Estimated H = 0.72.

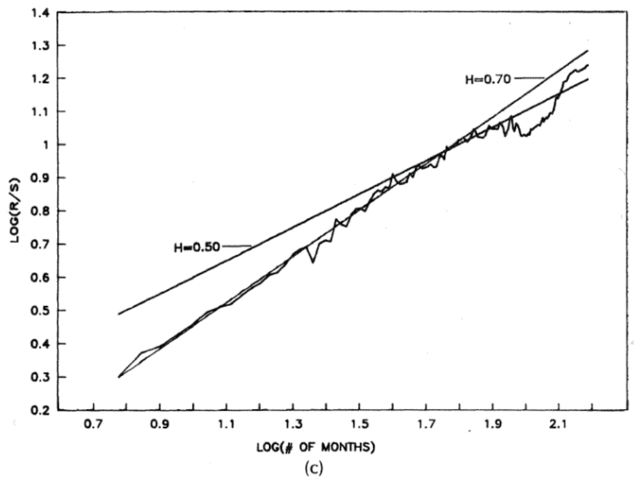


FIGURE 8.4c R/S analysis of individual stocks: Monthly returns, January 1963–December 1989. Coca-Cola: Estimated H = 0.70.

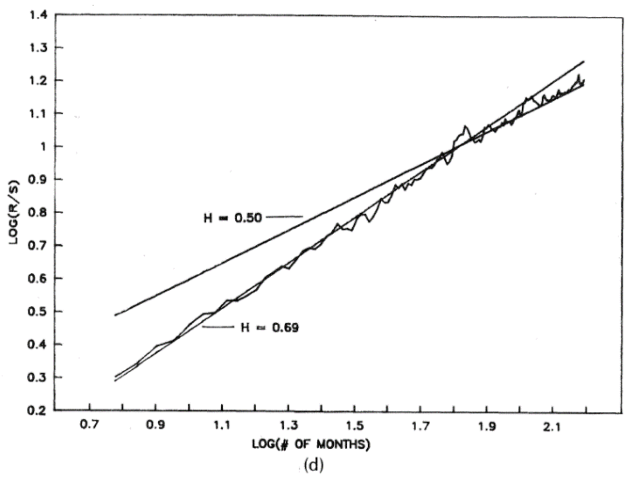


FIGURE 8.4d R/S analysis of individual stocks: Monthly returns, January 1963–December 1989. Niagara Mohawk: Estimated H = 0.69.

Table 8.2 R/S Analysis of Individual Stocks

	Hurst Exponent (H)	Cycle (Months)
S&P 500	0.78	48
IBM	0.72	18
Xerox	0.73	18
Apple Computer	0.75	18
Coca-Cola	0.70	42
Anheuser-Busch	0.64	48
McDonald's	0.65	42
Niagara Mohawk	0.69	72
Texas State Utilities	0.54	90
Consolidated Edison	0.68	90

각 Individual Stocks의 H값의 계산

FIGURE 8.4a : IBM

FIGURE 8.4b : Mobil Oil

FIGURE 8.4c : Coca-Cola

FIGURE 8.4d : Niagara Mohawk

Table 8.2 : 다양한 종목의 H값과 Memory를 가지는 N(Cycle) 값

8. R/S Analysis of the Capital Markets

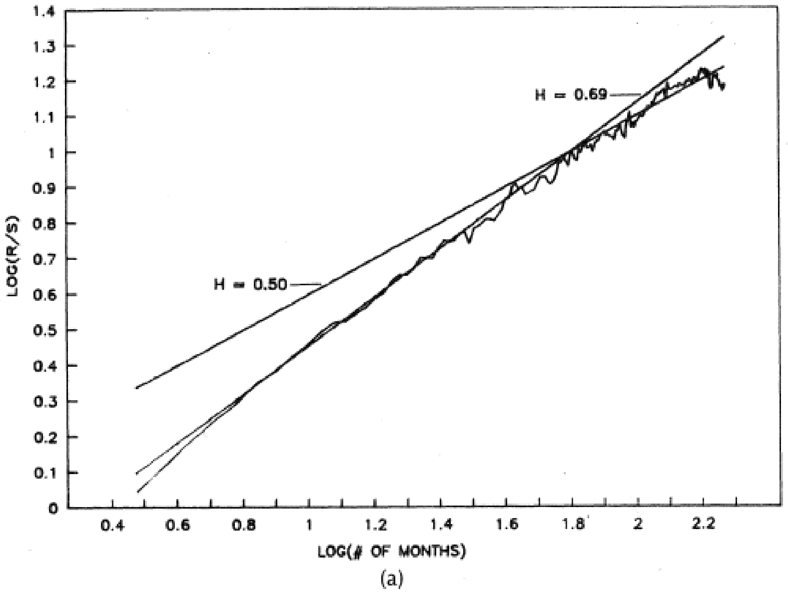


FIGURE 8.5a R/S analysis of international stocks: Monthly returns, January 1959–February 1990. MSCI U.K. index: Estimated H = 0.69.

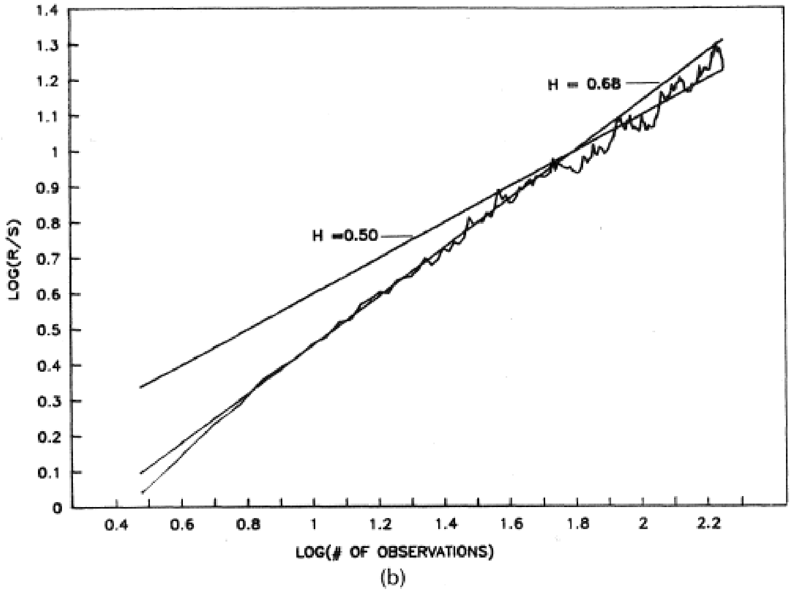


FIGURE 8.5b R/S analysis of international stocks: Monthly returns, January 1959–February 1990. MSCI Japan index: Estimated H = 0.68.

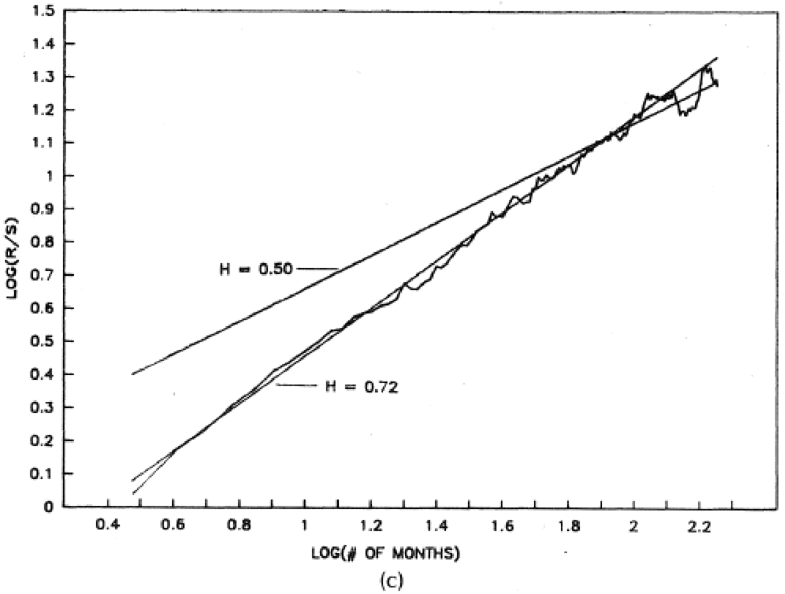


FIGURE 8.5c R/S analysis of international stocks: Monthly returns, January 1959–February 1990. MSCI German index: Estimated H = 0.72.

Table 8.3 R/S Analysis of International Stock Indices

	Hurst Exponent (H)	Cycle (Months)
S&P 500	0.78	48
MSCI Germany	0.72	60
MSCI Japan	0.68	48
MSCI U.K.	0.68	30

각 International Stocks의 H값의 계산
FIGURE 8.5a : MSCI U.K
FIGURE 8.6b : MSCI Japan
FIGURE 8.7c : MSCI German
Table 8.3 : 다양한 종목의 H값과 Memory를 가지는 N(Cycle) 값

8. R/S Analysis of the Capital Markets

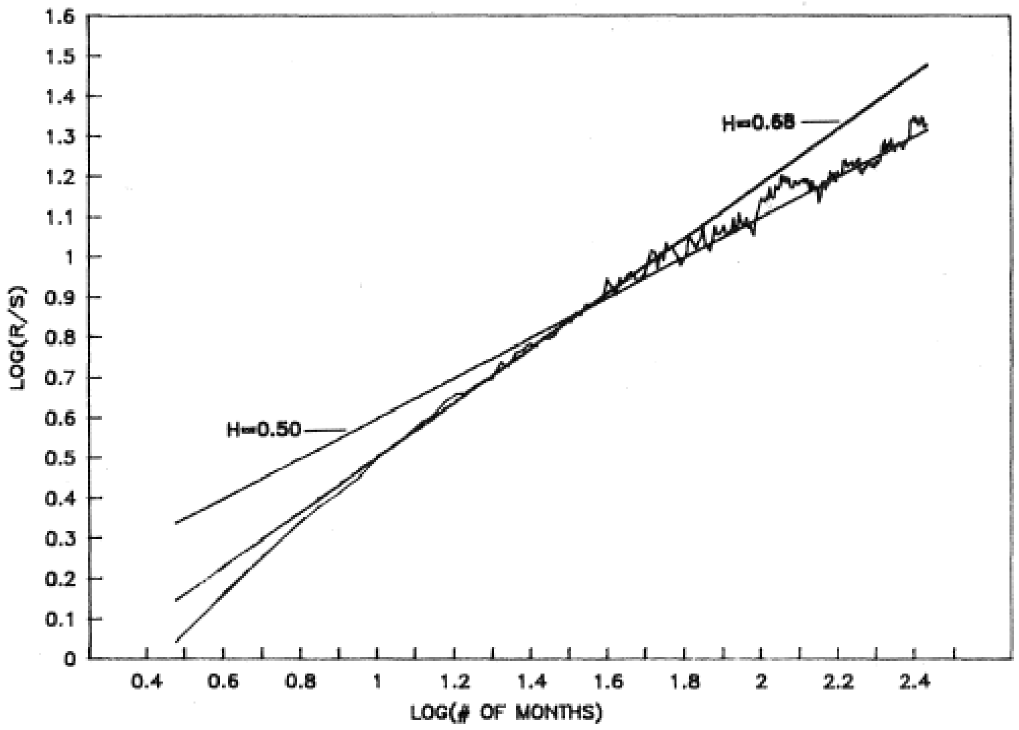


FIGURE 8.6 R/S analysis of 30-year Treasury Bond yields: Monthly, January 1950–December 1989. Estimated H = 0.68.

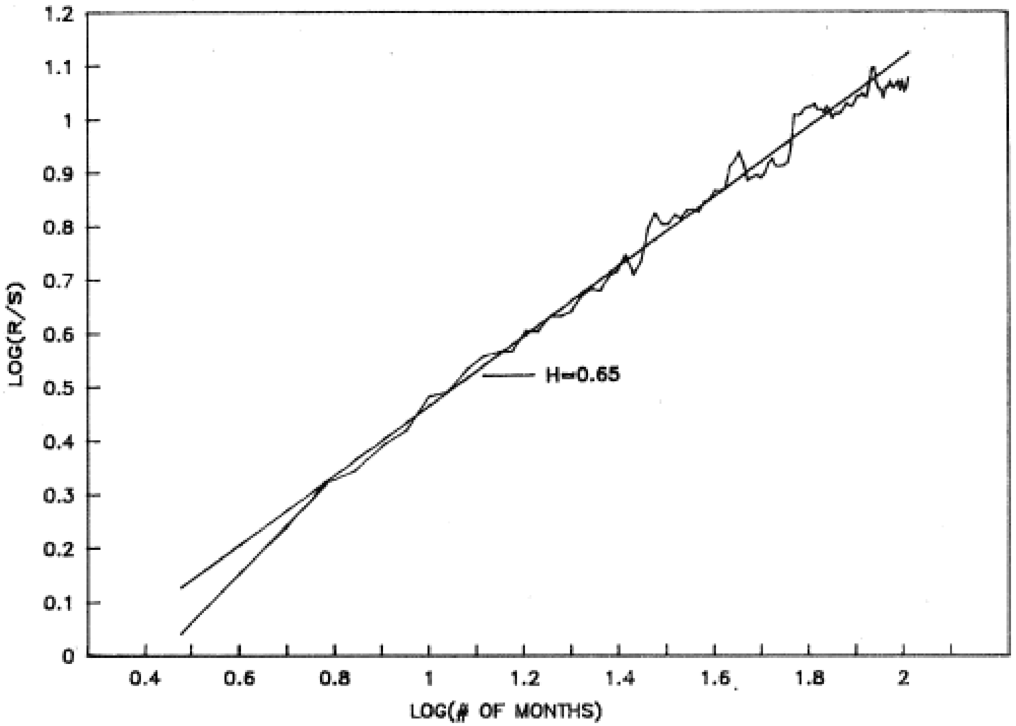


FIGURE 8.7 R/S analysis of Treasury Bill yields: Average of 3-, 6-, and 12-month T-Bill yields, January 1950–December 1989. Estimated H = 0.65.

30-year T-bond

T-Bill(3,6,12개월의 T-Bill yield 평균)

8. R/S Analysis of the Capital Markets

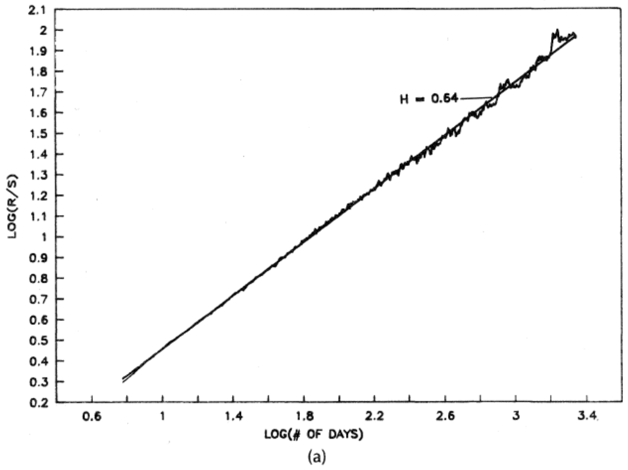


FIGURE 8.8a R/S analysis of currency exchange rates. Yen/dollar exchange rate: Daily rate, January 1973–December 1989. Estimated H = 0.64.

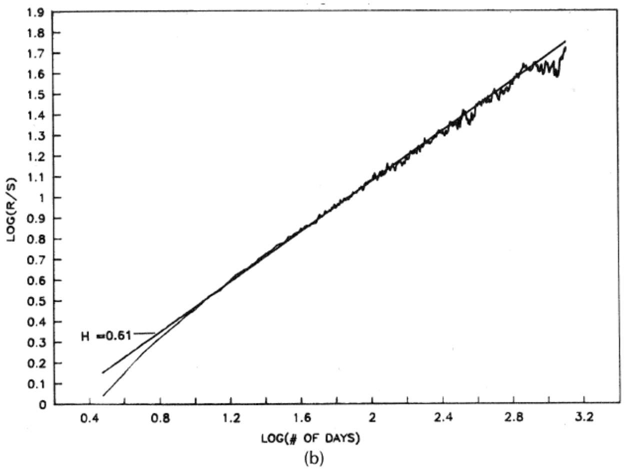


FIGURE 8.8b R/S analysis of currency exchange rates. U.K. pound/dollar exchange rate: Daily rate, January 1973–December 1989. Estimated H = 0.61.

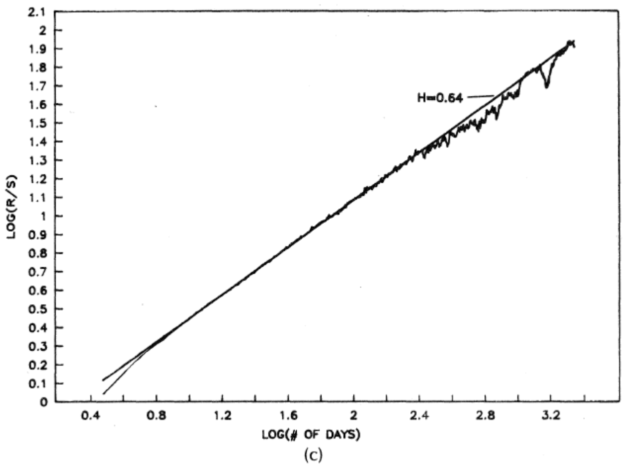


FIGURE 8.8c R/S analysis of currency exchange rates. German mark/dollar exchange rate: Daily rate, January 1973–December 1989. Estimated H = 0.64.

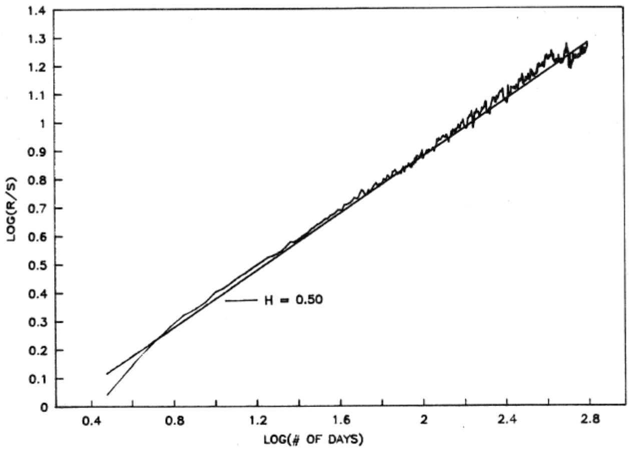


FIGURE 8.9 R/S analysis of Singapore/U.S. dollar exchange rate: Daily rate, January 1981–October 1990. Estimated H = 0.50.

Table 8.4 R/S Analysis of U.S. Dollar Exchange Rates: Daily Changes, January 1973–December 1989

	Hurst Exponent (H)	Cycle
Japanese yen	0.64	Unknown
German mark	0.64	Unknown
U.K. pound	0.61	Unknown
Singapore dollar	0.50	None

추세가 꺾이지 않아서, Unknown으로 표시
Singapore dollar의 경우, 0.50으로 완전한 Random상태, 기억효과의 Cycle도 없음

각 Currency exchange rates의 H값의 계산
FIGURE 8.8a : Yen/dollar
FIGURE 8.8b : U.K. pound/dollar
FIGURE 8.8c : German mark/dollar
FIGURE 8.9 : Singapore/U.S. dollar = 0.5 Random
Table 8.4 : H값과 Memory를 가지는 N(Cycle) 값

8. R/S Analysis of the Capital Markets

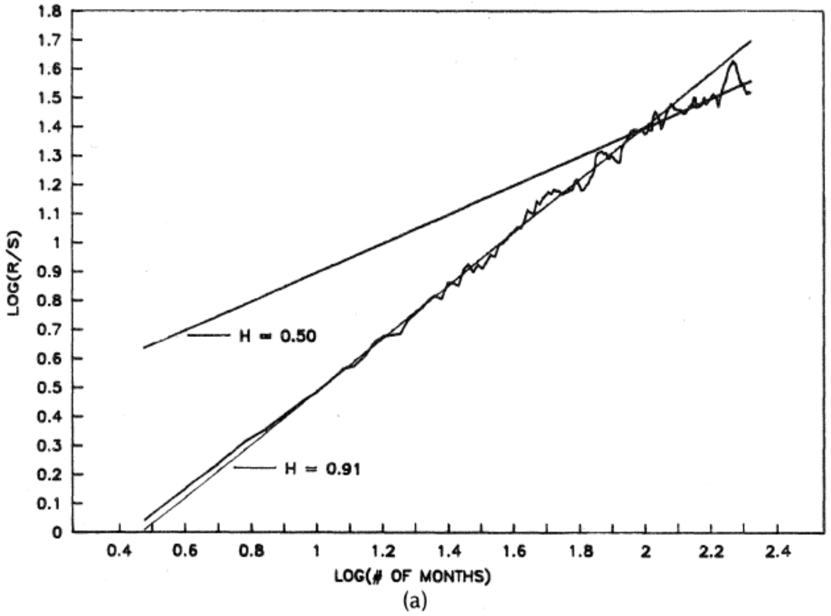


FIGURE 8.10a R/S analysis of economic indicators, January 1950–January 1990. Industrial Production: Estimated H = 0.91.

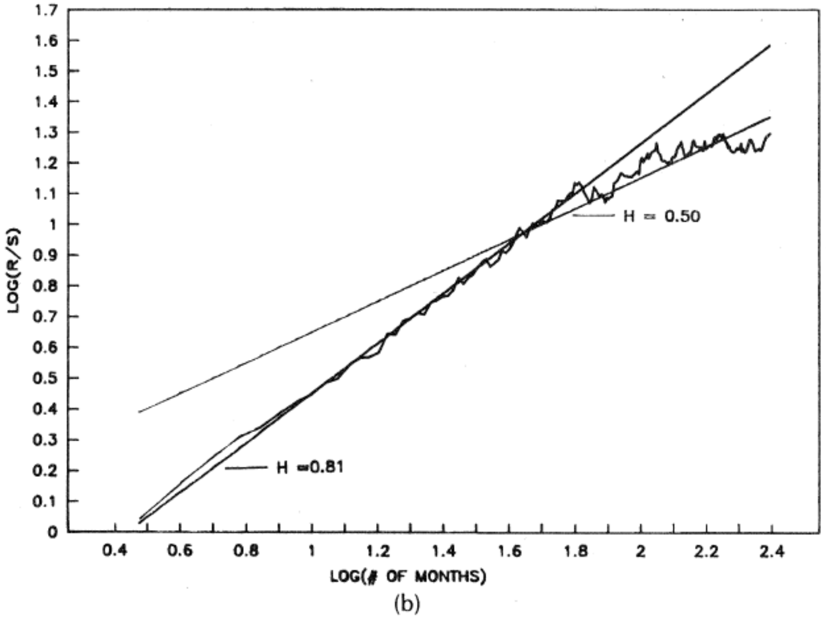


FIGURE 8.10b R/S analysis of economic indicators, January 1950–January 1990. New Business Formation: Estimated H = 0.81.

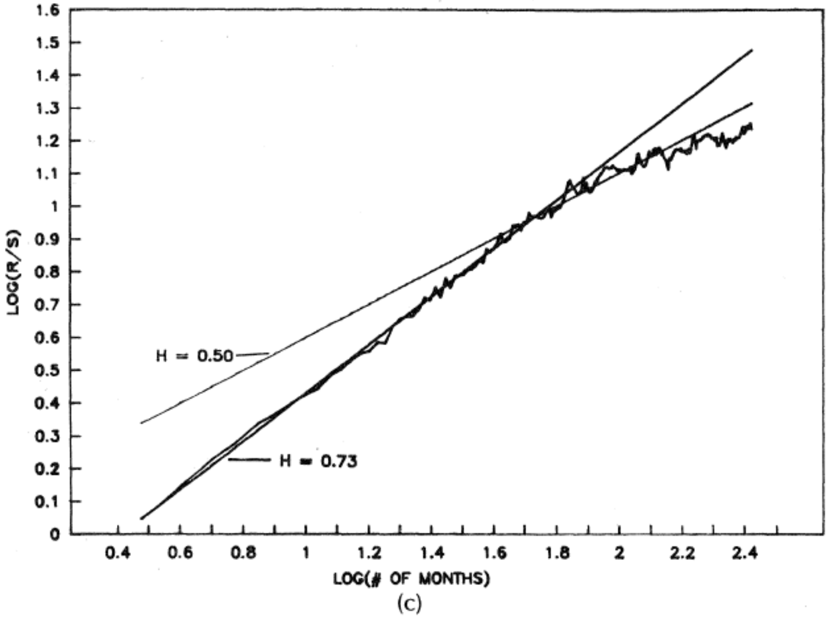


FIGURE 8.10c R/S analysis of economic indicators, January 1950–January 1990. Housing Starts: Estimated H = 0.73.

각 economic indicators의 H값의 계산

FIGURE 8.10a : Industrial Production (한 나라의 산업생산수준과 변동상태를 나타내는 지수)

FIGURE 8.10b : New Business Formation

(정해진 기간 동안, 새로 형성된 비즈니스(Firm)를 말하며, 건설, 채굴, 생산, 도매, 소매 등의 여러 종류의 비즈니스를 모두 아우르며 계절성과 트랜드를 가짐)

FIGURE 8.10c : Housing Starts (정해진 기간 동안 새로이 건설에 착수한 사적 소유의 집의 개수를 나타내는 지수)

8. R/S Analysis of the Capital Markets

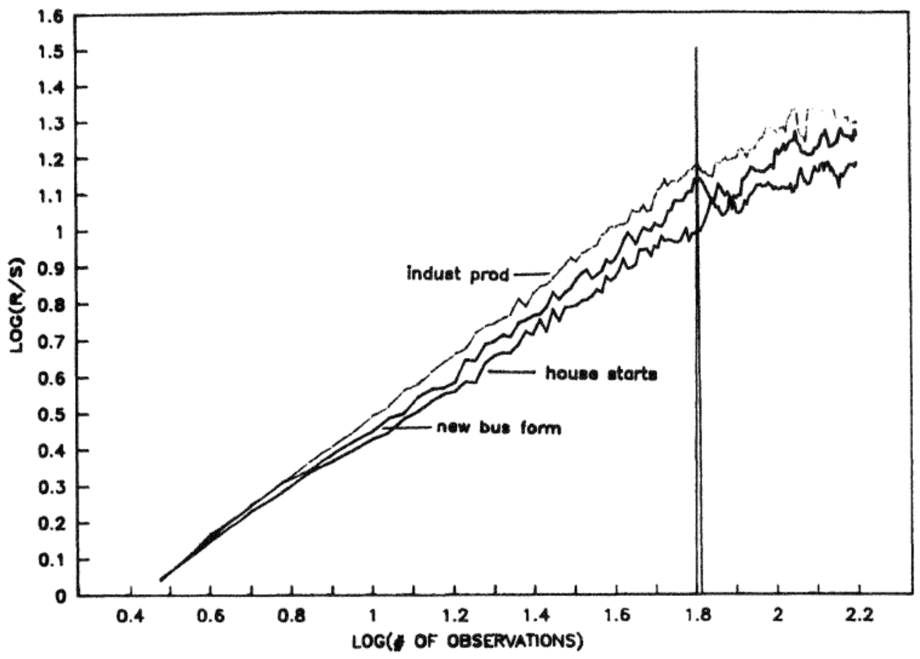


FIGURE 8.11 R/S analysis: Apparent five-year economic cycle.

각 economic indicators의 H값의 계산

FIGURE 8.11 : Industrial Production, New Business Formation, House Starting에 대한 종합 그래프

9. Fractal Statistics

9. Fractal Statistics

- Pareto Distribution
  - Pareto는 소득 분포가 대체로 log-normal 분포를 따르지만 약 상위 3% 이상의 계층은 정상 분포보다 더 많다는 사실을 발견
    - Pareto는 이와 같은 상황이 부를 축적한 사람이 더 많은 부를 축적할 수 있다는 현실을 반영한 것으로 생각
    - 이와 같은 예는 학계의 논문 발표 수에서도 볼 수 있는데 많은 논문을 발표하는 연구단체일수록 더욱 많은 논문을 발표하려는 경향이 있음

9. Fractal Statistics

- 프랙털 분포(Fractal distributions)
  - 경제학에서 'Pareto', 'Pareto-Levy', 'Stable Paretian' 분포와 같은 의미로 사용됨
  - Levy(1925)는 확률분포의 특성함수를 다음과 같이 일반화 함

- $\log(f(t)) = i*\delta*t - \gamma*|t|^{\alpha}*(1+i*\beta*(t/|t|)*\tan(\alpha*\pi/2))$

  δ : 평균의 위치모수
  γ : 일별 및 주별 자료간의 차이 등을 조정하는 척도모수
  β : 왜도를 측정하는 척도로서 -1에서 +1의 값을 갖는다.
  $\beta=0$ (좌우대칭) $\beta<0$ (왼쪽으로 기운분포) $\beta>0$ (오른쪽으로 기운분포)
  α : 분포의 첨도와 꼬리의 두터운 정도를 측정 → 프랙탈 차원

- $\log(f(t)) = i*\mu*t - (\sigma^2/2)*t^2$ $\alpha=2,\ \beta=0,\ \gamma=1,\ \delta=1$: 정규분포의 특성함수

Levy(1925)는 확률분포의 특성함수를 다음과 같이 일반화 함

9. Fractal Statistics

- 프랙털 분포(Fractal distributions)

  $\alpha = 2$

  - EMH, 분산은 유한하고 안정적인 정규분포를 의미

  $0 < \alpha \le 1$

  - 안정적인 평균값이 존재하지 않음(현실과의 괴리가 있음)

  $1 < \alpha < 2$

  - 실질적인 프랙털분포(파레시안 분포) → **현실**
  - 평균은 안정적이지만 분산은 정의되지 않거나 무한분산이 된다.
  - 장기상관관계와 통계적 자기유사성, 프랙털 브라운 운동의 특징과 부합

- Mandelbrot는 알파가 Hurst지수의 역수임을 밝힘
  - $\alpha = \frac{1}{H}$ $1 < \alpha < 2$ 에 의해 Hurst지수가 0.5보다 큼을 의미
    - 즉, CAPM에서 정의하는 베타를 이용한 위험측정은 잘못된 결과를 가져올 수 있음
      - 베타에 의한 위험평가는 효율적 시장하에서 유한분산을 가정하여 산출된 결과인데 반하여 현실은 프랙털분포이며, 분산은 정의되지 않거나 무한함 → 베타를 이용한 위험측정은 모순

9. Fractal Statistics

- 프랙털 분포(Fractal distributions)
  - ‘요셉효과(Joseph effect)’
    - 프랙털분포는 주기(cycles)와 추세(trend)를 갖는 경향
  - ‘노아효과(Noah effect)’
    - 프랙털분포에서 시스템이 갑작스럽고 극적인 반전을 하는 경향
    - 정규분포
      - 큰 변화는 수많은 작은 변화들에 의해 발생하며(a large change occurs because of a large number of small changes)
      - 가격결정은 연속적인 것으로 간주
    - 프랙털분포
      - 큰 변화는 소수의 큰 변화를 통해서 발생하며(large changes occur through a small number of large changes
      - Black Monday와 같은 큰 폭의 가격변동이 갑작스럽고 불연속적으로 이루어짐

9. Fractal Statistics

- H의 안정성 검증
  - 만일 주식시장의 수익률 분포가 Paretian 분포라면 월별 수익률의 Hurst exponent와 일별 수익률의 Hurst exponent는 비슷해야 하지만 실제 일별 분석에서 $H \approx 0.60$으로 월별 수익률 분석 결과인 $H \approx 0.78$보다 작음
    - 그러나, 일별 수익률 분석에서의 주기는 약 1000거래일로써 4년의 기간을 가지며 월별 수익률 분석에서의 48개월 주기와 일치
  - 1930년대부터 1980년대까지의 10년 간격의 일별 수익률 분석 결과를 보면 상이한 경제 상황에도 불구하고 $0.57 < H < 0.62$의 값을 가지며 10년 간격의 분석에서는 일정 주기를 구별하기 힘듬
    - 이는 10년 간격의 분석은 R/S 분석법을 통해 주기를 알아보기엔 짧은 기간이란 것을 의미
    - 앞서 살펴본 그래프(35page)와 마찬가지로 허스트 지수가 계속 유지되어서, Unknown Cycle을 의미

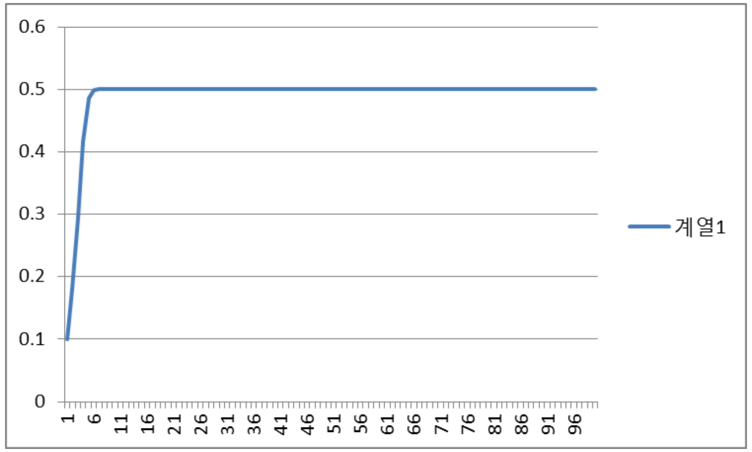
10. Fractals and Chaos

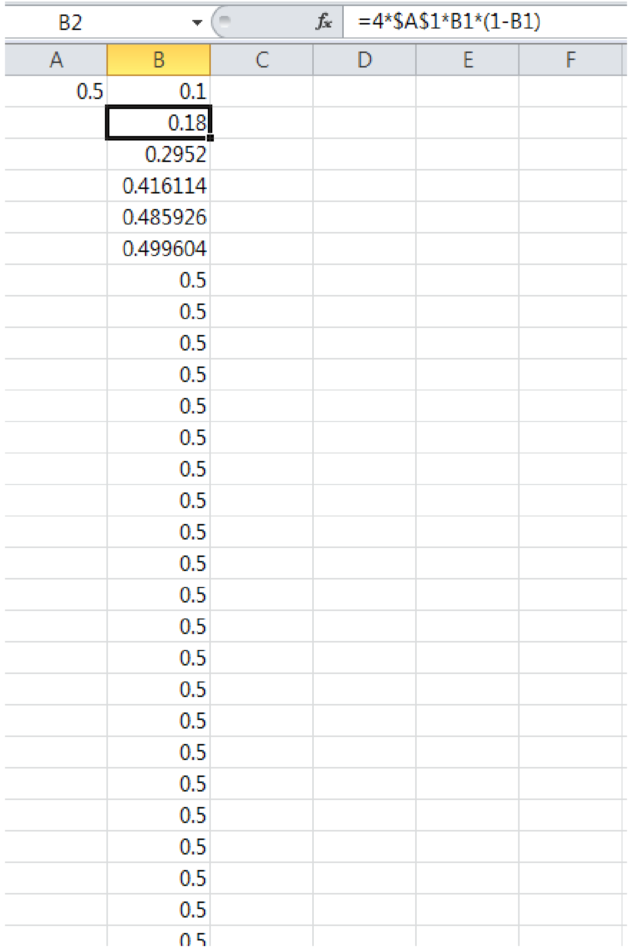
10. Fractals and Chaos

- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - Wealth of Chaotic Behavior를 표현하기 위한 간단한 1차원 모델
  - Chapter 1에서 활용했던 예제

$$X_{t+1} = 4 * a * X_t * (1 - X_t), where\ 0 < x \leq 1, 0 < a \leq 1$$

1. A1을 0~1의 값으로 설정, 우선 a=0.5로 설정
2. B1를 x의 초기값으로 X_1 =0.1로 설정
3. B2를 식 4*A1*B1*(1-B1)로 설정(A1의 값은 Constant)
4. B2를 Copy해 아래로 끌어내림(복사)

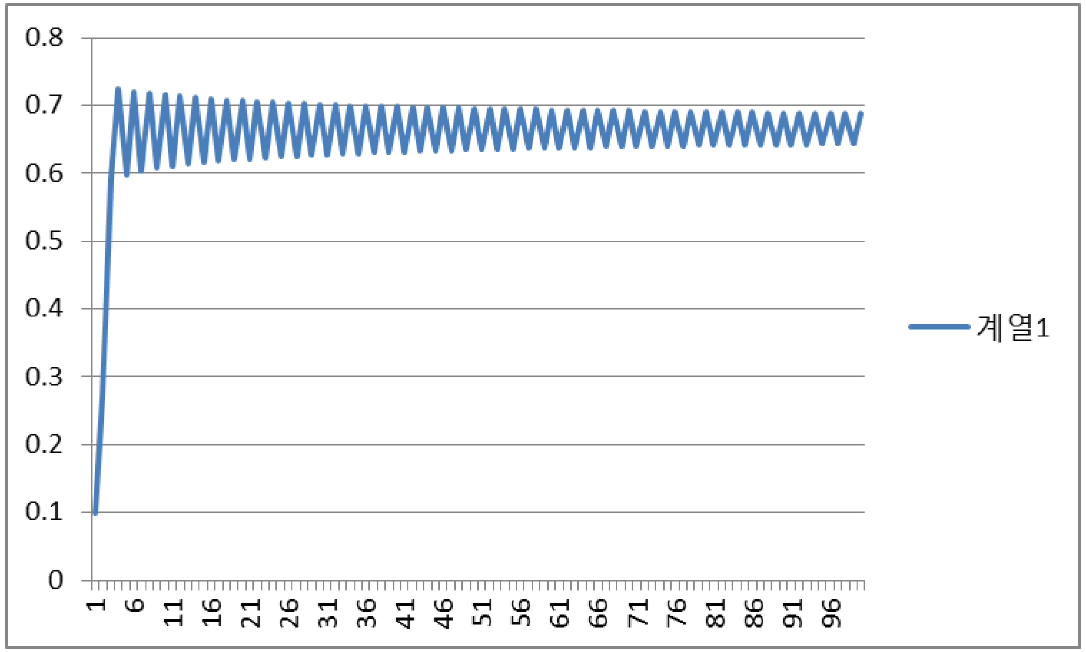



B2 =4*A1*B1*(1-B1)

A	B	C	D	E	F
0.5	0.1				
	0.18				
	0.2952				
	0.416114				
	0.485926				
	0.499604				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				
	0.5				

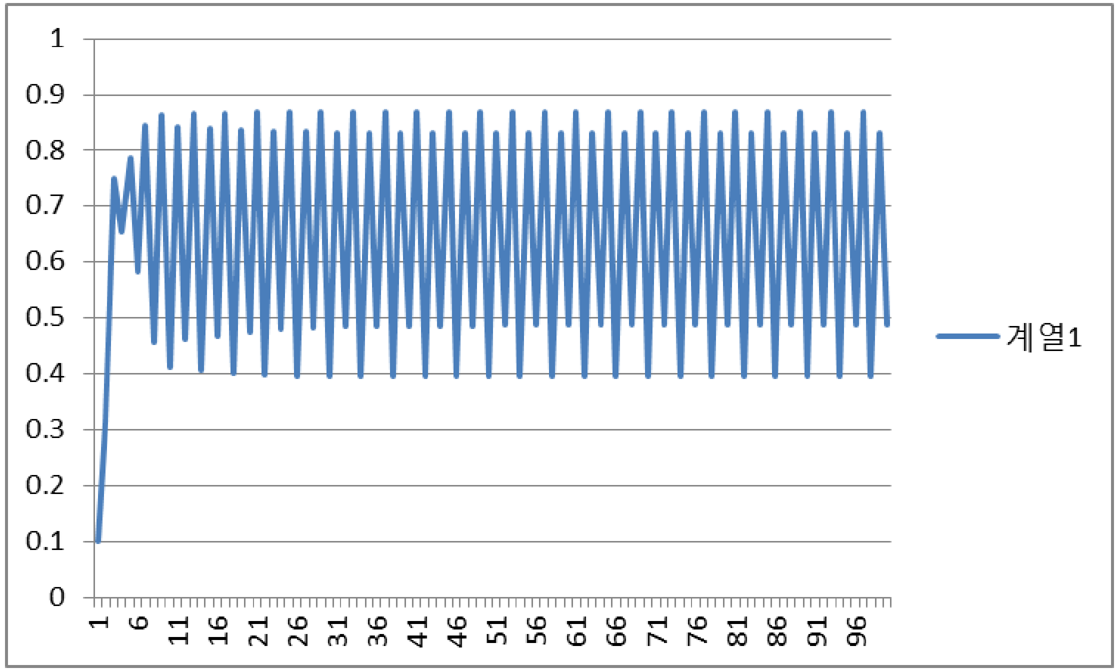
10. Fractals and Chaos

- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - a(A1)=0.75일 경우
  - 최초로 1개의 결과로 고정되지 않는 a값



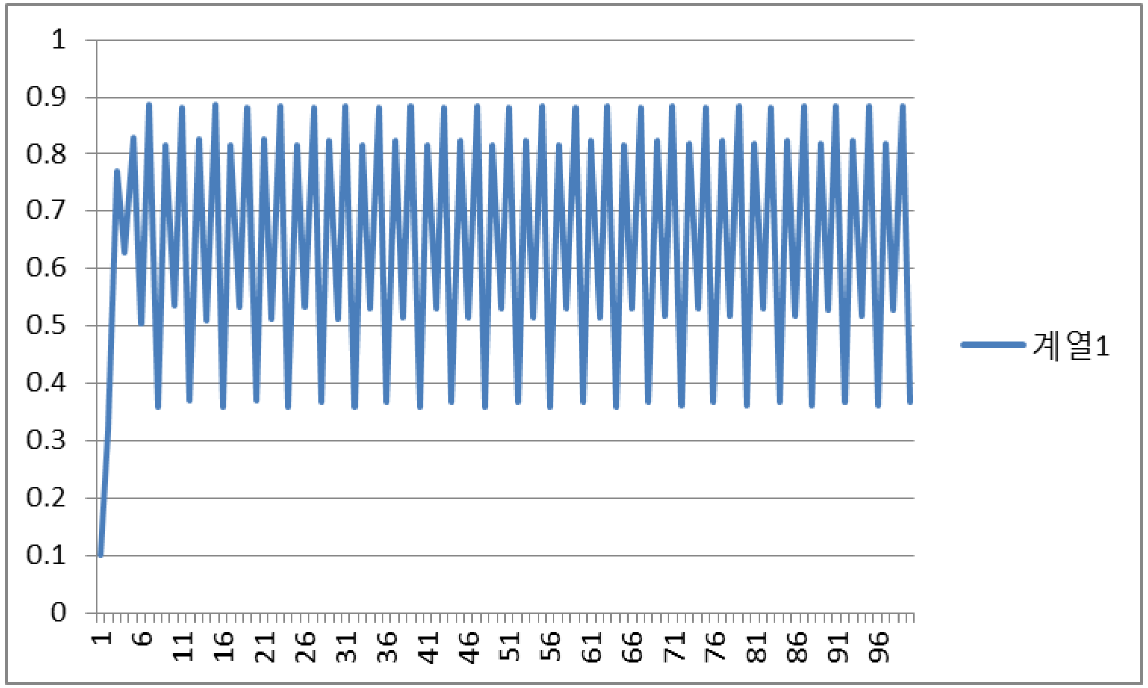
10. Fractals and Chaos

- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - a(A1)=0.87일 경우
  - 점점 안정성을 잃어감



10. Fractals and Chaos

- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - a(A1)=0.886일 경우
  - 8개의 솔루션



10. Fractals and Chaos

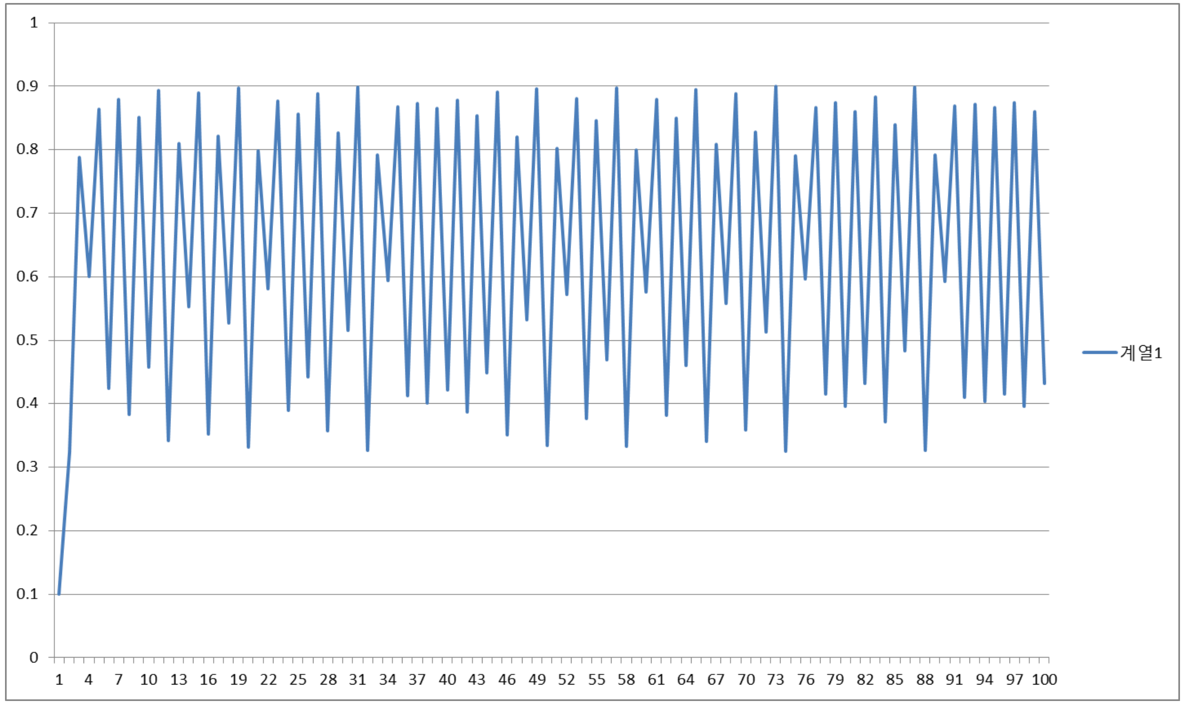
- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - a(A1)=0.8911 일 때 16개의 해
  - a(A1)=0.8922 일 때 32개의 해
  - a(A1)=0.892405 일 때 64개의 해

  →a(A1)=0.9(실제 0.892486418)에 가까워져 감에 따라 계속 해가 증가

  →그렇다면 0.9부터는?

10. Fractals and Chaos

- Logistic Equation 예제(EXCEL)
  - a(A1)=0.9가 되면(실제 0.892486418를 넘으면), System loses all stability, 무한개의 해
  - 그래서 Logistic Equation은 난수생성기로 사용
  - Birth and Death로부터의 Population을 예측할 때에도 본 Logistic Equation을 기반으로 함



10. Fractals and Chaos

- Feigenbaum Constant(파이겐바움 상수)
  - Delta : 모든 카오스가 만들어지는 과정에서 발견되는 <u>보편 상수</u> → 4.669201609
    - 모든 Parabolic nonlinear system에서 일정한 값에 수렴함
  - <u>**분기가 일어나는 간격의 비의 수렴값**</u>으로 정의
    - 앞서 살펴본 예제(45page~50page)의 현상이 일어나는 <u>a값과 그 때 해의 개수</u>

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = 4.669\,201\,609\cdots$$

$f(x) = a - x^2.$

a가 증가하면서 발생하는 해의 개수(2,4,8,16 ...)

n	Period	Bifurcation parameter (a_n)	Ratio $\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_n-a_{n-1}}$
1	2	0.75	—
2	4	1.25	—
3	8	1.368 0989	4.2337
4	16	1.394 0462	4.5515
5	32	1.399 6312	4.6458
6	64	1.400 8286	4.6639
7	128	1.401 0853	4.6682
8	256	1.401 1402	4.6689

(45page 식의 4*a가 여기서의 a)

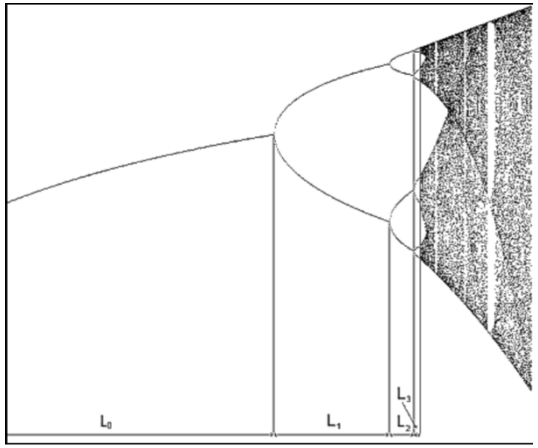
Page49에 적힌 a값*4

비가 파이겐바움 상수에 수렴해가는 것을 확인(왼쪽 식도 마찬가지)

$f(x) = ax(1-x)$

n	Period	Bifurcation parameter (a_n)	Ratio $\frac{a_{n-1}-a_{n-2}}{a_n-a_{n-1}}$
1	2	3	—
2	4	3.449 4897	—
3	8	3.544 0903	4.7514
4	16	3.564 4073	4.6562
5	32	3.568 7594	4.6683
6	64	3.569 6916	4.6686
7	128	3.569 8913	4.6692
8	256	3.569 9340	4.6694

파이겐바움 상수에 대한 이해를 돕기위한 그림



$\lim_{i\to\infty} L_{i+1}/L_i$ → 4.669201609

10. Fractals and Chaos

- Bifurcation Diagram(앞의 EXCEL 실험 결과)