

“CHAOS” Theory

PART THREE

NONLINEAR DYNAMICS

- 11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems
- 12. Dynamical Analysis of Time Series
- 13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ Newtonian Physics

- 변수간 선형 관계를 기반으로 함
- 가정
 - 모든 원인에 대해 Direct effect가 존재함
 - 모든 시스템은 평안할 때(at rest) Equilibrium으로 가려는 성질을 지님
 - 자연은 질서정연함
- 시계(Clock)가 뉴턴물리학의 Supreme Symbol
 - 뉴턴물리학은 18세기부터 현재까지 Art, Music, Science 등 엄청난 업적을 이룸
 - 그러나, 상황이 복잡해질 경우, 뉴턴 물리학으로 Prediction하는 것은 거의 불가능

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ Why Unpredictable?

1. Dynamic Systems은 Feedback Systems

- 끊임없이 결과가 원인으로 귀결되는 과정을 반복

2. Critical Level의 존재

- 낙타의 등에 짚을 짚어지게 하는 행위 → 어떤 무게를 넘어서기 전까지 변화가 없지만, Critical Level을 넘으면, 낙타가 무게를 이기지 못하고 쓰러짐
- 유체관 속의 담배연기의 층류 및 난류 실험에서도 확인 → 일정한 층(층류)을 이루고 흘러가지만 공기의 속도가 특정 속도를 넘어설 경우, Chaotic한 형태의 난류 형성

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

- Point Attractor의 예) 현실에서 추의 진자운동 → 한 점으로 수렴하게 됨

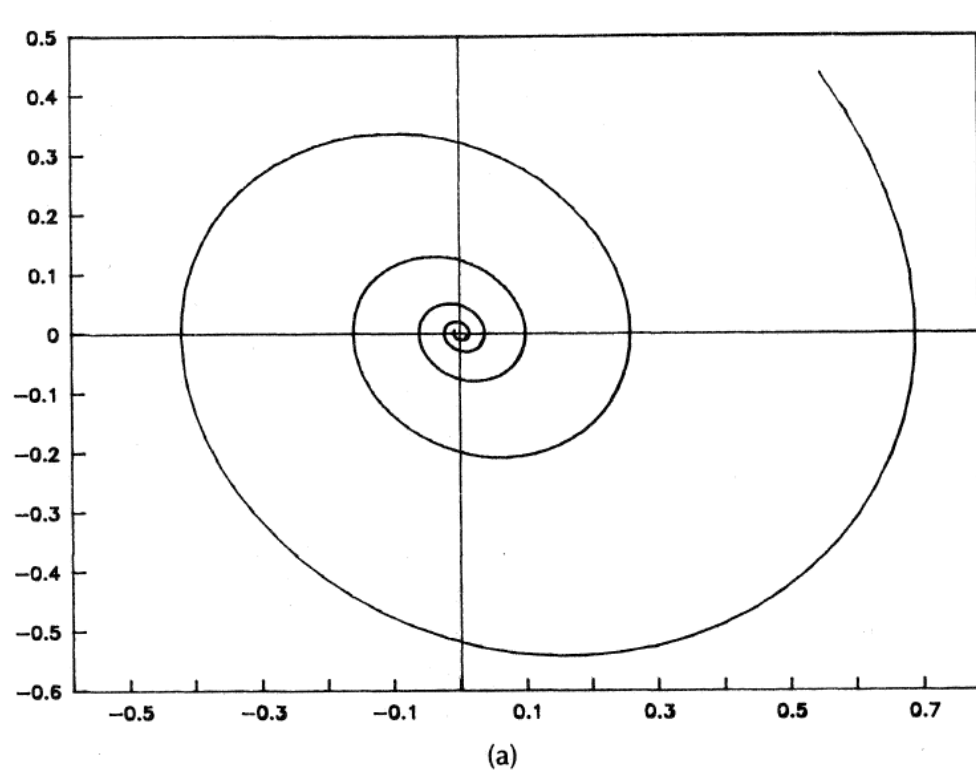


FIGURE 11.1a Point attractor. Phase portrait.

X축 위치, Y축 속도 그래프

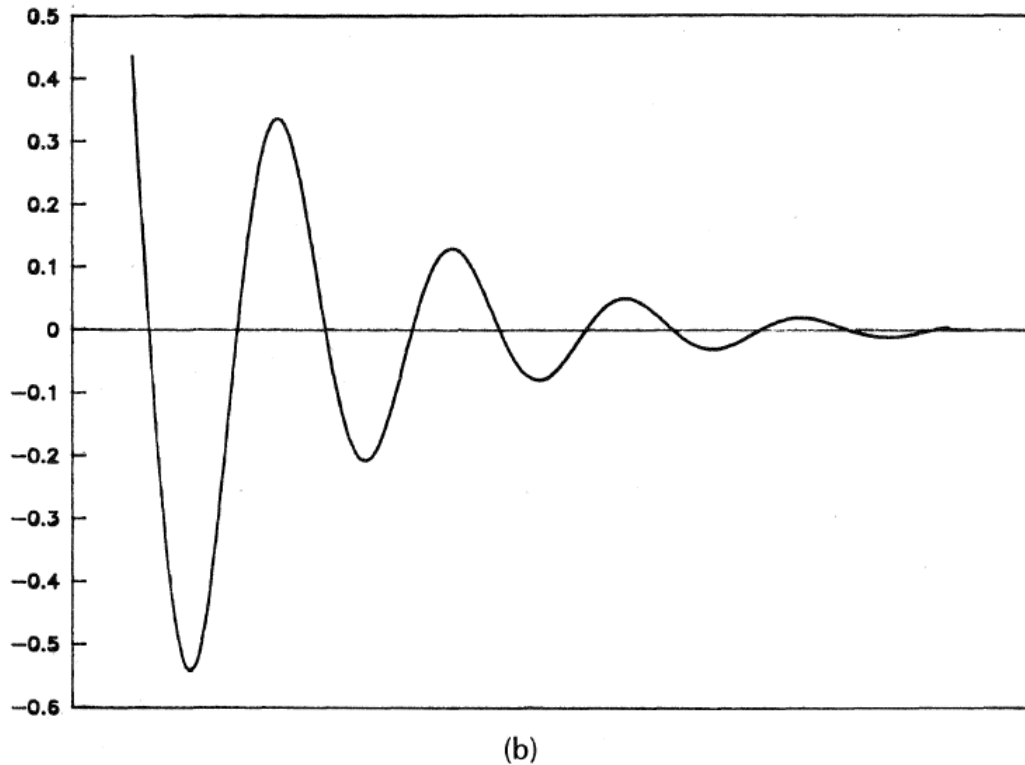


FIGURE 11.1b Point attractor. Time series.

X축 시간, Y축 속도 그래프

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

- Limit Cycle Attractor의 예) 이상적인 상황에서 추의 진자운동(수렴하지 않음)

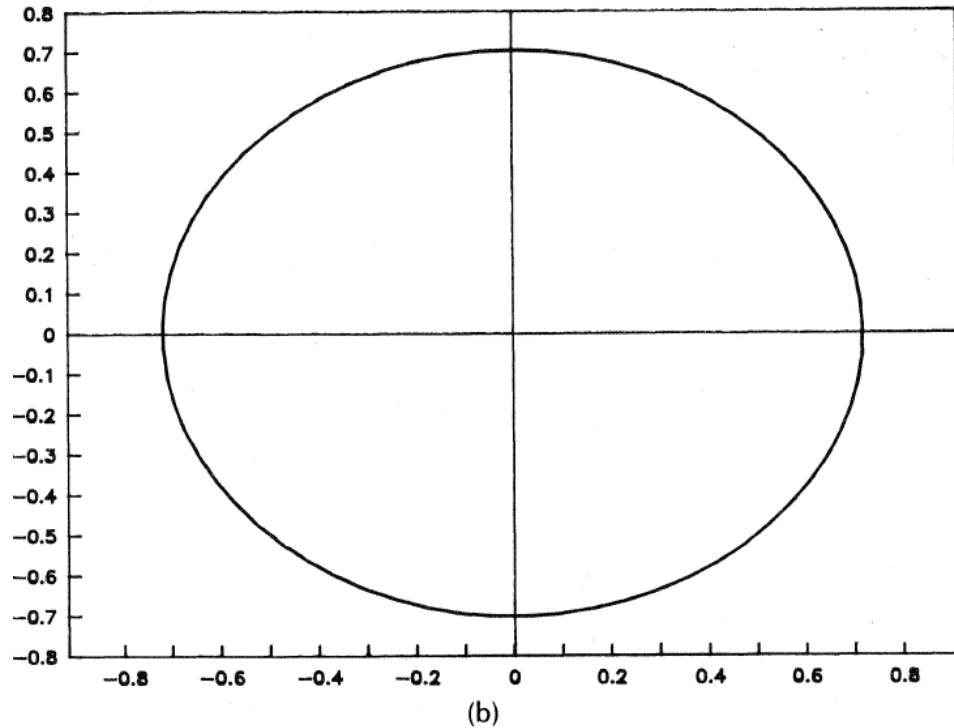


FIGURE 11.2b Limit cycle attractor. Phase portrait.

X축 위치, Y축 속도 그래프

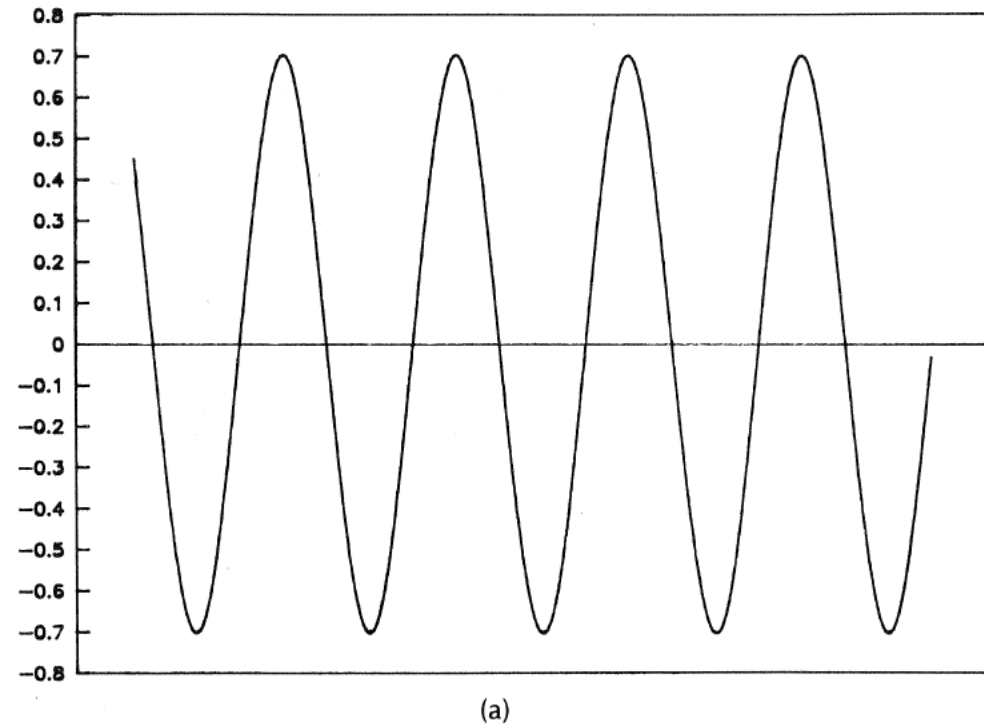


FIGURE 11.2a Limit cycle attractor. Time series.

X축 시간, Y축 속도 그래프

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ Pendulum

- 마찰과 공기저항으로 인해 가운데 점에 수렴하게 됨("Attracted" to the origin)
- 이상적인 Pendulum 운동 범위 내에서(유한한 범위)내에서, 다양한 원인에 의해 무한한 가능성을 지니게 됨

■ 위상 공간(Phase space)

- 역학 시스템의 추상적인 움직임을 시각화 하기 위하여 만들어진 수학적인 공간 체계
- 관계를 분석하는 변수의 개수에 따라 위상 공간의 차원이 정해짐

■ 끌개(Attractor)

- 어떤 물리적 현상이 위상 공간(Phase space) 상에서 구현되었을 때 장기적으로 움직임이 수렴하게 되는 한 점 혹은 점들의 집합 → 다음 장에서 설명

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ Pendulum

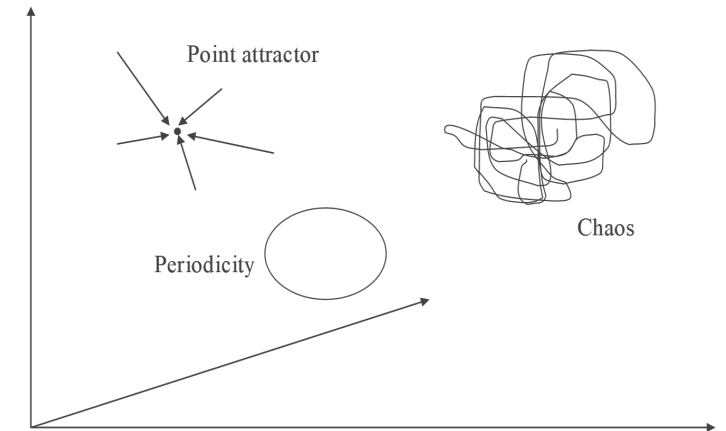
- 마찰과 공기저항으로 인해 가운데 점에 수렴하게 됨("Attracted" to the origin)
- 이상적인 Pendulum 운동 범위 내에서(유한한 범위)내에서, 다양한 원인에 의해 무한한 가능성을 지니게 됨

Attractors in phase space

■ Phase Space와 Attractor

• Attractor의 종류

- point attractor
 - 큰 진동 후에 그 진폭이 시간에 따라 줄어 결국 안정된 균형점으로 수렴
- limit cycle attractor
 - 시계열 상에서 규칙적인 진동을 반복, 닫힌 원형태의 위상도
- strange attractor 또는 chaotic attractor
 - 하나의 균형점에 수렴하거나 폐곡선을 구성하지 않고, 원형을 이루면서 반복되지 않는 다양한 궤도를 만듦
 - 한정된 공간에 무한한 수의 해가 존재



11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ HENON MAP(Attractor의 예)

- 앞서 살펴본 삼각형 Fractal모형은 Random하게 점이 찍히면 같은 규칙을 이루며 찍혀감, 따라서 Initial Point가 어디인지 중요 → 초기조건에 대한 민감도가 높음
- Henon Map(Henon Attractor)은 Initial Point에 상관없이 같은 결과를 향하게 됨

$$X_{t+1} = 1 + y_t - a * X_t^2$$

$$y_{t+1} = b * X_t$$

- $a = -1.40$, $b = 0.30$ 의 Phase Portrait

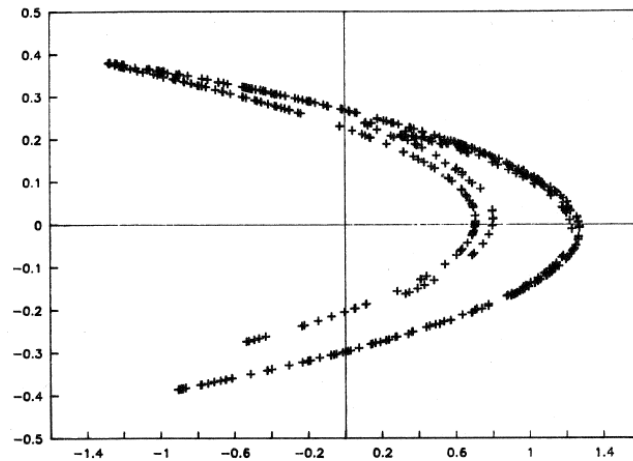
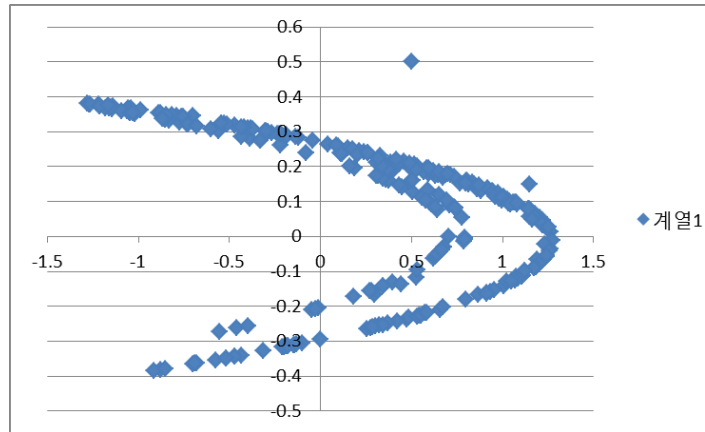
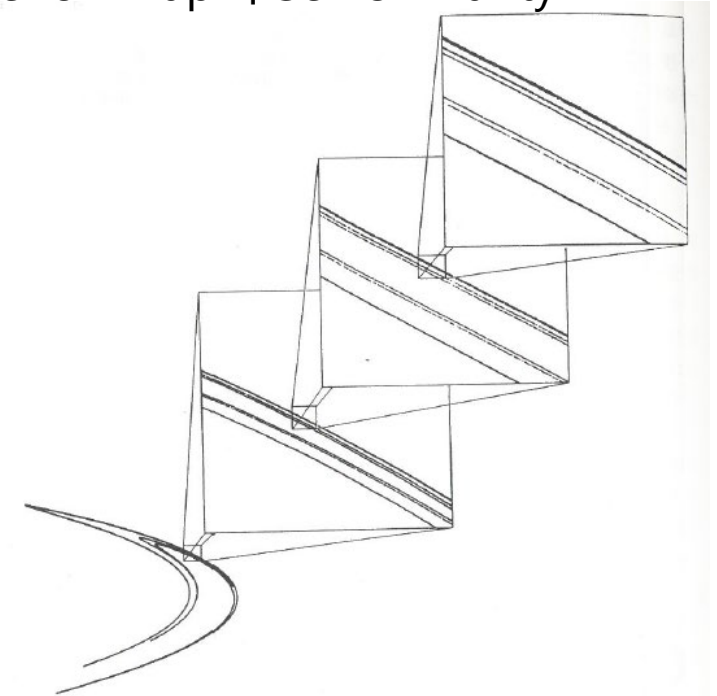


FIGURE 11.4 Henon attractor: phase portrait; $a = -1.4$, $b = 0.3$.



Henon Map의 Self-similarity



11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ HENON MAP

- Initial Value(X_1, Y_1)에 상관없이 같은 형태를 보임

| 0.5 | 0.5 | 0.9 | 0.1 |
|----------|----------|----------|----------|
| 1.15 | 0.15 | -0.034 | 0.27 |
| -0.7015 | 0.345 | 1.268382 | -0.0102 |
| 0.656057 | -0.21045 | -1.26251 | 0.380514 |
| 0.186975 | 0.196817 | -0.85098 | -0.37875 |
| 1.147873 | 0.056093 | -0.3926 | -0.2553 |
| -0.78857 | 0.344362 | 0.528918 | -0.11778 |
| 0.473791 | -0.23657 | 0.490564 | 0.158676 |
| 0.449162 | 0.142137 | 0.821761 | 0.147169 |
| 0.859692 | 0.134749 | 0.201762 | 0.246528 |
| 0.100049 | 0.257908 | 1.189537 | 0.060529 |
| 1.243894 | 0.030015 | -0.92047 | 0.356861 |
| -1.13617 | 0.373168 | 0.170689 | -0.27614 |
| -0.43406 | -0.34085 | 0.68307 | 0.051207 |
| 0.395384 | -0.13022 | 0.397988 | 0.204921 |
| 0.650924 | 0.118615 | 0.983169 | 0.119396 |
| 0.525433 | 0.195277 | -0.23387 | 0.294951 |
| 0.808766 | 0.15763 | 1.218376 | -0.07016 |
| 0.241887 | 0.24263 | -1.14838 | 0.365513 |

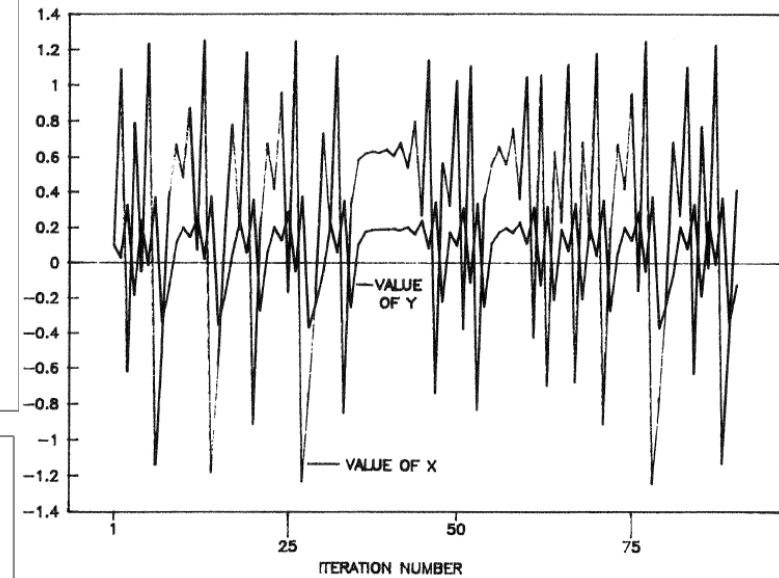
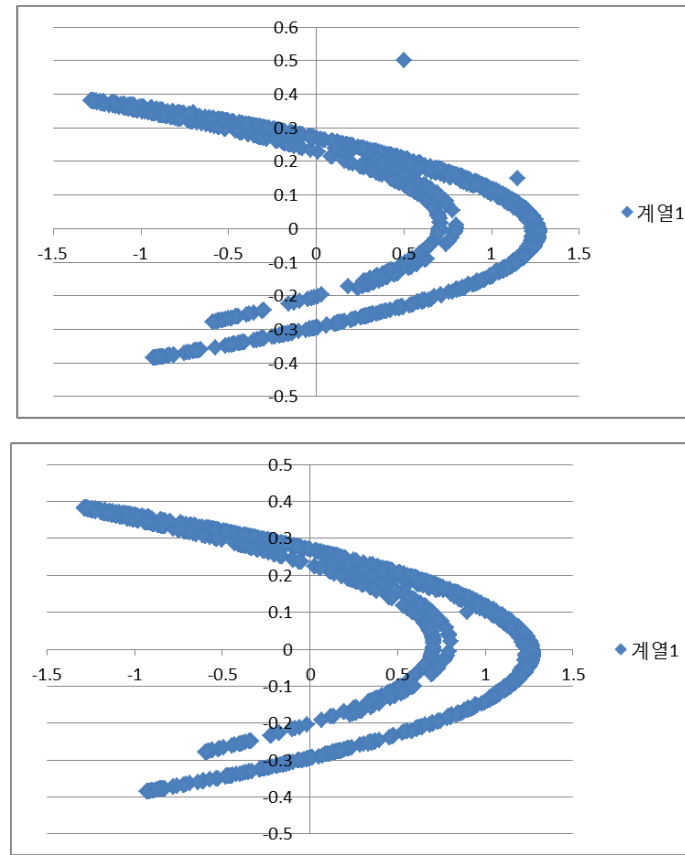


FIGURE 11.3 Henon attractor: Time series of X and Y.

$(1, X_1), (1, Y_1)$

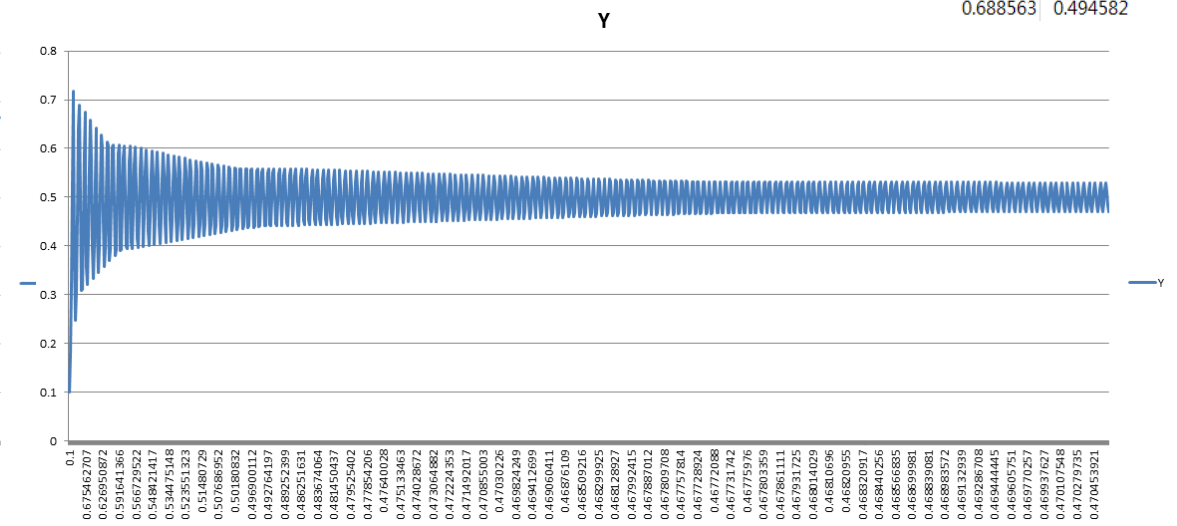
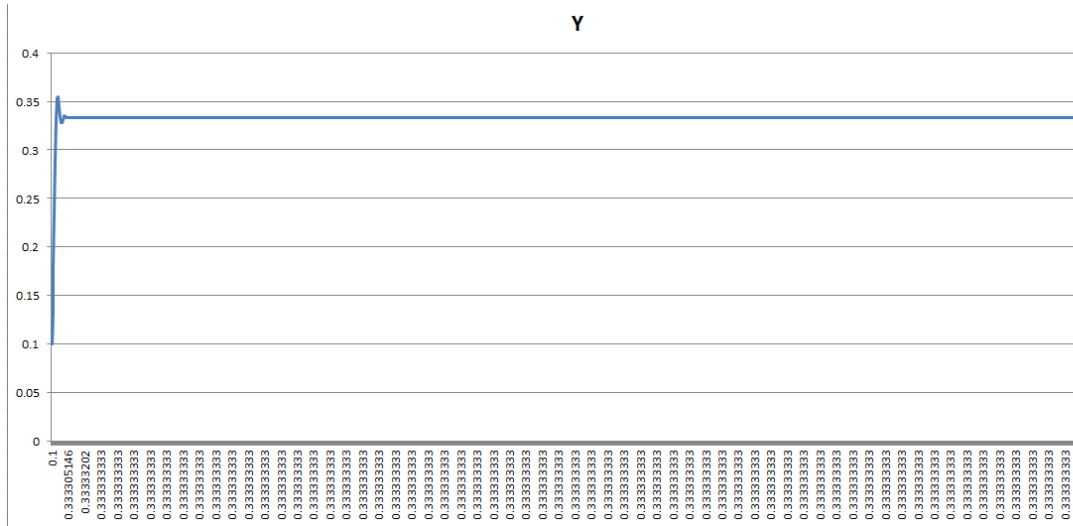
$(2, X_2), (2, Y_2)$

\vdots

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

■ The Logistic Delay Equation

- $X_t = a * X_{t-1} * (1 - X_{t-2})$ 앞선 식에 Time lag를 주는 Equation



- 각각 $a=1.5, 2.0$

| | |
|----------|----------|
| 0.1 | 0.1 |
| 0.1 | 0.18 |
| 0.18 | 0.324 |
| 0.324 | 0.53136 |
| 0.53136 | 0.718399 |
| 0.718399 | 0.673341 |
| 0.673341 | 0.379227 |
| 0.379227 | 0.247756 |
| 0.247756 | 0.307601 |
| 0.307601 | 0.462781 |
| 0.462781 | 0.640859 |
| 0.640859 | 0.688563 |
| 0.688563 | 0.494582 |

11. Introduction to Nonlinear Dynamic Systems

- 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)
 - 복잡계에서 **무질서한 행태와 임의적 행태를 구별**하는데 사용되는 다양한 방법 중 하나
 - 결정론적 카오스가 존재하는지의 여부를 검증하는 데 있어 가장 널리 사용 되는 수단
 - 지수는 초기 조건에 대한 민감성의 정도를 나타냄
 - 위상공간의 각 차원에서 한 개 씩의 리아푸노프 지수가 존재
 - 예를 들어, Henon Map(다음 장에서 설명)의 경우 (0.42, -1.6)이라는 리아푸노프 지수를 가짐
 - 지수가 양이라면 시스템은 민감한 종속성이 존재한다는 것을 의미
 - 지수가 음이라면 시스템은 안정적이거나 주기적
 - 리아푸노프지수에 대한 자세한 설명은 다음장의 개념설명 이후에 이어짐

12. Dynamical Analysis of Time Series

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ Packard et al.(1980)

- 1개의 Dynamical variable에서 Phase Space를 재구축 하는 방법의 제시
- Time lag를 통해 새로운 Phase Space 구축
 - A는 원래 헤논맵(Henon Map Attractor)의 'X' 값
 - **B는 한 기간, C는 두 기간만큼의 lagging된 값**
 - B를 X축, C를 Y축에 그림

Henon Attractor 식

$$X_{t+1} = 1 + Y_t - a * X_t^2$$

$$Y_{t+1} = b * X_t$$

Table 12.1 Phase Space Reconstruction
with Logged Values

| A | B | C |
|----|----|----|
| 10 | 5 | 14 |
| 5 | 14 | 21 |
| 14 | 21 | 2 |
| • | • | • |
| • | • | • |
| • | • | • |

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ Packard et al.(1980)

• 결론

- 'X'만을 가지고, 새로운 Phase Space를 구축하였음(기존 X,Y)
- 또한, 위 그래프만 가지고, 다시 Y차원을 추가할 수도 있으므로, 본래 차원의 정보를 잃은 것이 아님
 - 기존과 같은 프랙탈 차원과 리아푸노프지수를 가짐
 - 본래 Henon Map을 회전시켜놓은 모양이며, 이는 결국 Y차원을 X차원을 Lag하면서 대체할 수 있음을 뜻함

Henon Attractor Equations

$$X_{t+1} = 1 + Y_t - a * X_t^2$$

$$Y_{t+1} = b * X_t$$

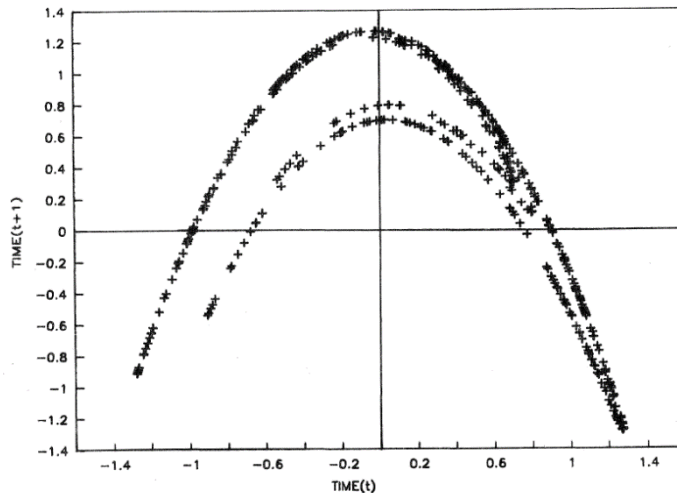


FIGURE 12.1 Henon attractor: reconstructed phase portrait using X value only, lagged one iteration.

Time lag를 통해 Phase Space를 재구축해도 차원이 바뀌지 않는다!

$$(X_t, Y_t) \rightarrow (X_t, X_{t+1})$$

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ 앞선 실험의 Contribution

- 앞선 방법으로 Phase Space를 재구축해도 Attractor의 Dimensionality는 바뀌지 않음
 - 이상적인 평면은 2차원, 평면이 3차원에 놓인다고 하더라도 평면이 3차원이 되지 않음
 - 이상적인 선은 1차원, 3차원에 선을 긋는다고 해서 3차원의 선이 되는 것은 아님
- 적절한 Time lag와 Dimension 값의 선정
 - 앞선 Henon Attractor의 예시에서는 식을 알기 때문에, 쉽게 접근 가능 했음
 - 현실에서는 Time lag와 Dimension을 어떻게 설정해야 할지 실험적으로 찾아야함
- Time lag와 Orbital Period(Q, 앞선 허스트 지수의 N과 같은 의미)의 관계
 - $m * t = Q$ (where m = embedding dimension, t = time lag, Q = mean orbital period)
 - Embedding Dimension의 경우 보통 2~10 사이를 모두 조사하고, 각각의 Embedding Dimension에 따라, time lag가 결정됨
 - 예를 들어, period가 48iterations(Q)이고, 2차원 위상공간(m)의 경우, 2-points-lagged 24 iterations(t)가 사용되며, 3-points-lagged가 16 iterations가 3차원 위상공간에서 사용됨
 - Q 는? R/S에서 구한 N값(S&P 500의 경우 48month였음)

12. Dynamical Analysis of Time Series

▪ Embedding Dimension(내재차원)

- 비선형 시계열에서 결정론적 특성을 찾는 것이 카오스 분석
 - Henon처럼 식이 알려진 Attractor가 아닌 실제 시계열 데이터를 재구성할 때는 **실제 차원을 알 수 없음**
 - 따라서, 위상공간을 구성할 때 몇 차원으로 구성할지를 선택해야 함
 - 최대 차원값을 설정하고, 그 이하의 임의의 내재차원들을 모두 분석 (ex 최대값을 10으로 설정할 경우 2~10차원에 대해 분석을 진행함)

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 상관차원(Correlation Dimension)과 상관적분(Correlation Integral)
 - 상관차원(Correlation Dimension)과 상관적분(Correlation Integral)은 Fractal Dimension을 추정하기 위해 개발된 방법 → 방법은 다음 페이지에서 설명
 - 위상 공간과 시계열의 프랙탈 차원의 범위는 다름
 - 시계열은 변수가 시간과 시간에 대한 특정한 변수 하나이므로 1과 2 사이의 값
 - 위상 공간은 위상 공간 구성 시 선택된 변수의 개수에 따라 달라짐
 - 만일 n 개의 변수가 선택되면 $n-1$ 에서 n 사이의 차원 값
 - 만일 내부 체계가 알려지지 않은 어떤 계의 프랙탈 차원을 알 수 있다면 그 계의 변수의 개수를 알 수 있음
 - 현실 세계의 현상을 관측, 분석하여 프랙탈 차원을 알 수 있다면 그 계에 영향을 주는 변수의 개수를 알 수 있음
 - 어떤 시계열의 차원이 3이라면, 어떤 3개의 변수에 의해 해당 시계열을 설명할 수 있음을 의미

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ 상관차원과 상관적분

- Grassberger and Procaccia(1983)가 제안
- 오른쪽과 같이 기존의 시각적인 차원을 계산하는 방법은 시계열 Data에서는 불가능
- $C_m(R)$ 이 상관적분(*Correlation Integral*)을 의미
- **Correlation integral은 attractor에 놓인 한 쌍의 점이 거리 R안에 존재할 확률**

$$C_m(R) = (1/N^2) * \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N H(R - |X_i - X_j|)$$

- $H(X)=1, X>0; 0$ otherwise [$H(y)$: Heaviside 함수]
- N : m-history로 구성된 시계열 자료의 수
- R : 특정 거리
- C_m : 내재차원 m에서의 상관적분(Correlation integral)
- m : 상관차원

$$D = \frac{\log N}{\log(1/R)}$$

where N = number of circles of diameter R
 R = diameter

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ 상관차원과 상관적분

- Chaos 시스템의 경우 Embedding Dimension(m) 이 늘어날수록 상관차원은 특정 값에 수렴하게 되며, 그 수렴한 값이 차원을 결정함,
 - 설정한 Embedding Dimension(m)이 증가함에 따라 상관차원이 계속 증가한다면 확률 과정, 즉 자유도가 무한대인 과정으로 정의
 - 상관차원을 통하여 분석대상 시스템이 비선형 Deterministic System인지 확률적 시스템인지 구분할 수 있음.
- 주어진 차원 (m)에서의 상관적분 C_m 은 R 이 증가함에 따라 R^D 의 비율로 증가한다는 성질을 이용하여 다음과 같이 D 를 구할 수 있음

$$C_m = R^D \quad \log(C_m) = D * \log(R) + constant$$

- 위와 같은 관계에 의해 C_m 을 안다면 R 값을 변화시키면서 기울기를 구하여 D 값을 추정
 - 다양한 잡음이 포함되어 있는 실제 현상의 관측값으로 부터 신뢰할 만한 프랙탈 차원은 과정
- 결론적으로 상관차원은 프랙탈 차원(fractal dimension)과 유사하지만 보다 실용적인 방법으로, 이는 correlation integral을 이용한 **프랙탈 차원의 근사값**임

12. Dynamical Analysis of Time Series

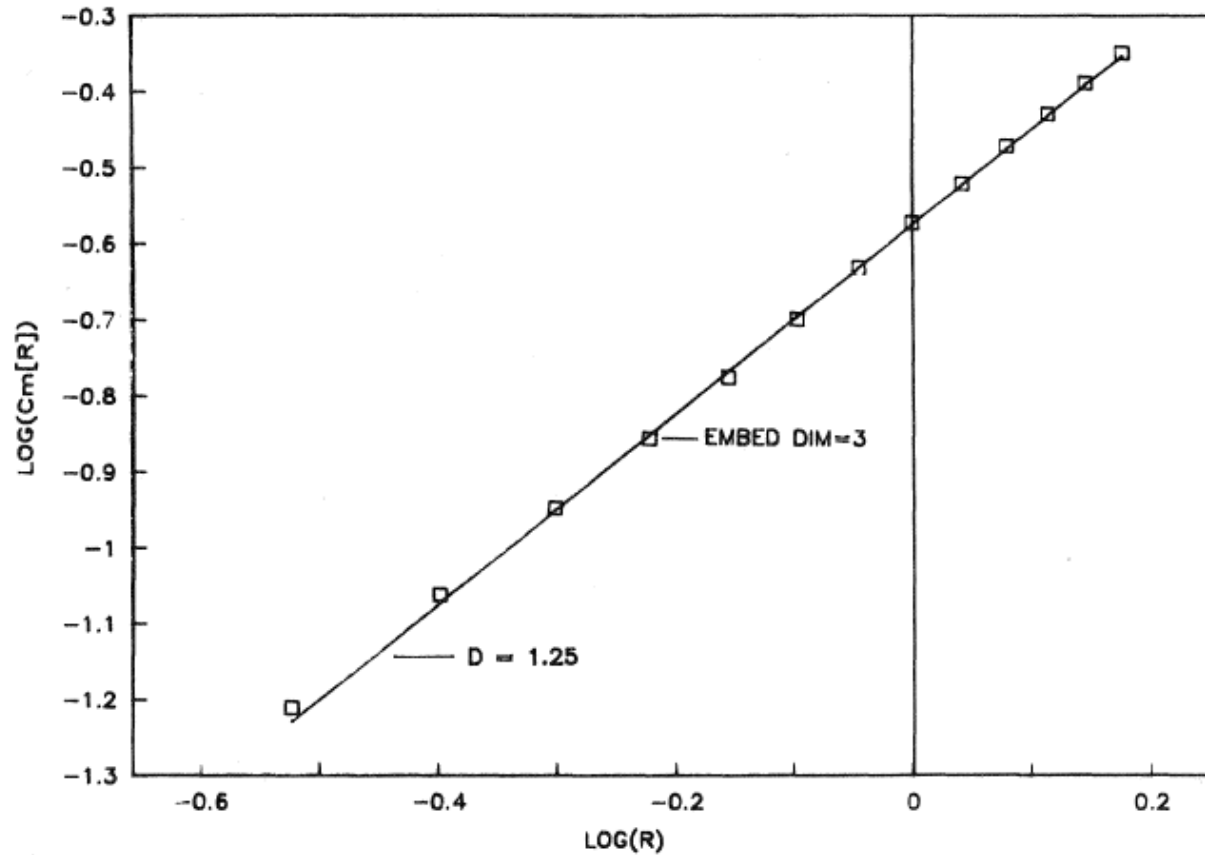


FIGURE 12.2 Correlation integral: Henon attractor; estimated fractal dimension of 1.25.

Embedding Dimension(m)에 따르는 Fractal Dimension(D)를 계산하는 예시

→ Embedding Dimension(m)이 3일 때, Fractal Dimension은 1.25로 측정되었음

→ 카오스 시스템인 경우 각각의 Embedding Dimension(m)에 대해 Fractal Dimension(D)을 계산하면, 어느 순간 일정한 값을 확인할 수 있게 되며, 이 일정한 값이 해당 시계열의 **진짜 Fractal Dimension**이 됨

→ 이에 대한 실증 분석 예제는 다음 Chapter에서 다룸

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)
 - 의미: Lyapunov exponent의 값은 단위 시간동안 정확성의 소실량을 의미
 - 예를 들어 2차원 위상 공간에서 Lyapunov exponent가 단위 시간당 0.42 일 경우. 초기에 2bits의 정밀도(2 bits of accuracy)를 가지고 있다면 $2/0.42=4.8$ 이 되며 이는 약 4.8 시간 후에는 현재의 정보로 예측이 불가능함을 의미
 - 만일 양수이면 점차 차이가 벌어지게 되며 이는 시스템이 작동할수록 발산하게 됨을 의미
 - 만일 음수이면 점차 차이가 좁아지게 되며 이는 시스템이 작동할수록 수렴하게 됨을 의미하며, 대표적인 예로 point attractor
 - 만일 0이면 일정한 간격을 유지하게 되는 것이며 대표적인 예로 Limit cycle attractor

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)

- 위상공간에서 구의 용적(The volume of a sphere)이 시간에 따라 어떻게 변하는지를 측정함으로써 구할 수 있음
 - 예를 들어, 3차원 위상공간에서 시작하고, 초기조건이 유사한 근접한 점들로 이루어지는 구는 시간이 경과함에 따라 타원체가 됨
 - 아주 장 기간 후에는 무수히 펼쳐지고 접혀서(Stretched and folded) 인간의 소장과 같은 형태를 이루게 됨
 - 이때 구의 용적의 지수적 증가율이 리아푸노프 지수의 척도

- i 차원 $P_i(t)$ 에 대한 i 번째 리아푸노프 지수 L_i 의 공식

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \left(\frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right)$$

- 타원의 선형 확장이 $2^{L_1 t}$ 의 비율로 증가하므로, 첫 번째 2차원 영역은 $2^{(L_1+L_2)t}$ 의 비율로 증가, 3차원 구의 용적은 $2^{(L_1+L_2+L_3)t}$ 의 비율로 증가

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)
 - \log_e 가 아니라, \log_2 를 이용하는 이유
 - 리아푸노프 지수는 Shannon & Weaver(1963)가 개발한 정보이론에 기초
 - 정보이론(Information Theory)은 컴퓨터의 효율성을 측정하는 내용
 - 컴퓨터는 2진수(0과1)로 저장하고 기록하는데, 이러한 2진수들을 Bit로 표현함
 - 그래서, 리아푸노프 지수의 단위에 Bit가 들어감

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)
 - **Henon과 같이 동작방정식(The equation of motion)이 알려져 있을 때**, 리아푸노프 지수의 계산은 아래와 같은 식으로 행할 수 있음(앞의 식의 특수한 Form)
 - 위상공간에서 근사한 궤도로 Divergence한 것을 측정함으로써 계산
 - Linear System
 - 오차가 있더라도 위상공간에서 가까운 점은 여전히 가까이 남아있음
 - 즉 리아푸노프 지수의 측정시 작은 오차가 결과에 거의 영향을 미치지 않음
 - Non-Linear System
 - 가까운 점의 초기상태의 차이가 복잡해짐에 따라 발산
 - 시스템이 카오스과정을 따른다면 초기상태의 작은 오차로 인하여 시간이 지남에 따라 완전히 다른 궤적을 보임
 - 지름이 r 인 구의 부피가 시간이 지남에 따라 팽창할 때, 리아푸노프 지수의 완전한 스펙트럼은 다음과 같이 계산됨

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r(0) \rightarrow 0} \sum [(1/t) \log_2 \{r_i(t)/r_i(0)\}]$$

12. Dynamical Analysis of Time Series

■ 리아푸노프 지수(Lyapunov Exponent)

- 이론적으로 노이즈가 없는 무한한 개수의 자료를 가지면 아래의 두 식은 같은 식이 됨

$$L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log_2 \left(\frac{P_i(t)}{P_i(0)} \right) \qquad L_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r(0) \rightarrow 0} \sum [(1/t) \log_2 \{r_i(t)/r_i(0)\}]$$

- 그러나, 현실은 우리에게 노이즈가 포함된 유한한 개수의 자료를 제공, 현실적으로 동작 방정식이 알려져 있지 않기 때문에 리아푸노프 지수의 모든 스펙트럼을 계산할 수 없음
- 따라서, Wolf, Swift, Swinney & Vastano(1985)가 개발한 최대 리아푸노프 지수 L_1 을 계산하는 방법을 사용해야 함 → 다음장에서 설명

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 최대 리아푸노프 지수(Largest Positive Lyapunov Exponent)
 1. 최소 1 mean orbital period apart한 2개의 점을 선택
 2. 정해진 interval time 이후, 2개의 점 사이의 거리를 측정
 3. 거리가 너무 멀어지면, 원래 점과 Orientation similar Angle을 가진 재배치된 점을 찾음

최대 리아푸노프 지수를 구하는 방법에 대한 이해를 돕기 위한 평면그림 설명

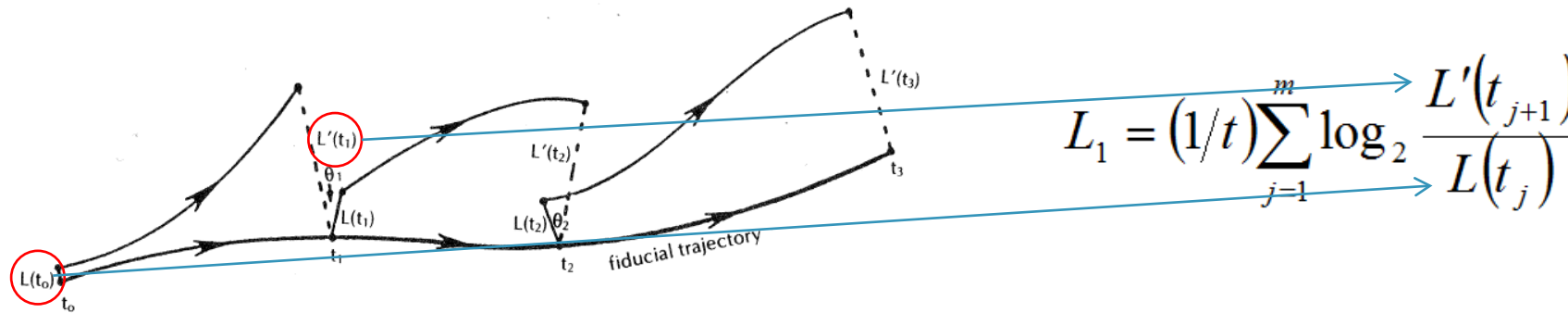


FIGURE 12.3 Artist's sketch of Wolf algorithm for estimating the largest Lyapunov exponent from a time series. (Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

12. Dynamical Analysis of Time Series

- 실제 시계열 자료는 노이즈가 포함된 한정된 수의 자료
 - Embedding Dimension(m), 시차(t), 최대 및 최소 허용거리를 신중하게 선택해야함
 - 실험적으로 Wolf(1985)는 최대거리는 시계열 자료 범위의 10%, 최소 거리는 최대거리의 10%
 - Evolution Time은 Stretching은 가능 하도록 길되, Folding이 일어나기 전까지의 시간으로 주어져야 하며, 긴 것보단 짧은 것이 낫다고 말함
 - 또한 필요한 자료의 양은 시스템의 복잡성에 따라 달라짐
 - 일반적으로 10^D 개의 자료와 $10^{(D-1)}$ 의 Orbital Period가 필요함
 - D 는 앞서 Correlation Dimension을 통해 구한 Fractal Dimension
 - 하지만, 카오스 분석에서 단순히 자료의 수가 많다고 더 좋은 것은 아님
 - **Nonlinear Dynamic system은 장기 기억과정을 가지므로, 단순한 자료의 양이 아닌, 장기간 동안의 자료를 필요로 함**
 - 1000개의 일봉 Data(=약 3년)보다는, 120개의 월봉 Data(=10년)가 더 나음

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Prices VS Returns

- Linear Analysis
 - Data를 사용할 때, Prices 자체를 활용하는 것이 아니라 Returns를 활용
 - Prices는 독립성이 없기 때문(이전의 Price 주변에서 그 다음 Price가 형성)
 - Returns은 그에 반해, 독립성을 보임
- Non-Linear Analysis
 - Returns을 활용하는 것은 자연 그대로의 것을 변조한 수치
 - 특히, Serial Dependence를 삭제시킨 행위
 - 따라서, 비선형 분석에 활용될 Data의 새로운 기준이 필요!

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Scheinkman and LeBaron(1986)

- 5000개의 U.S equity market; Daily Stock Return Series를 활용해 리아프노프 지수와 프랙탈 차원을 계산
 - 차원은 5~6사이의 값
 - 그렇다면, 앞선 식에 의해, 10^6 Data가 필요, 5000개로는 신뢰할 수 없음
 - 논문의 결론
 - Rates of change(Return)은 문제를 복잡하게 만드는 요인
 - 자연과학의 관점에서 Price 그 자체를 활용 하는 것이 나옴
- 가격을 활용하는 것의 문제점
 - Inflation이 있어, 과거의 가격과 지금의 가격이 당연히 같은 평가를 받아서는 안됨
- 이러한 문제점의 대안으로 Detrending price 활용을 제안

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

▪ Detrending Price

- 경제성장과 인플레이션의 영향을 없앤 가격
- 미국과 마찬가지로 CPI가 있을 경우, 그리고 그 자료가 없을 경우 두 가지

$$S_i = \log_e P_i - (a * i + constant)$$

where S_i = detrended price series
 P_i = original price series
 i = observation number

loglinear detrended

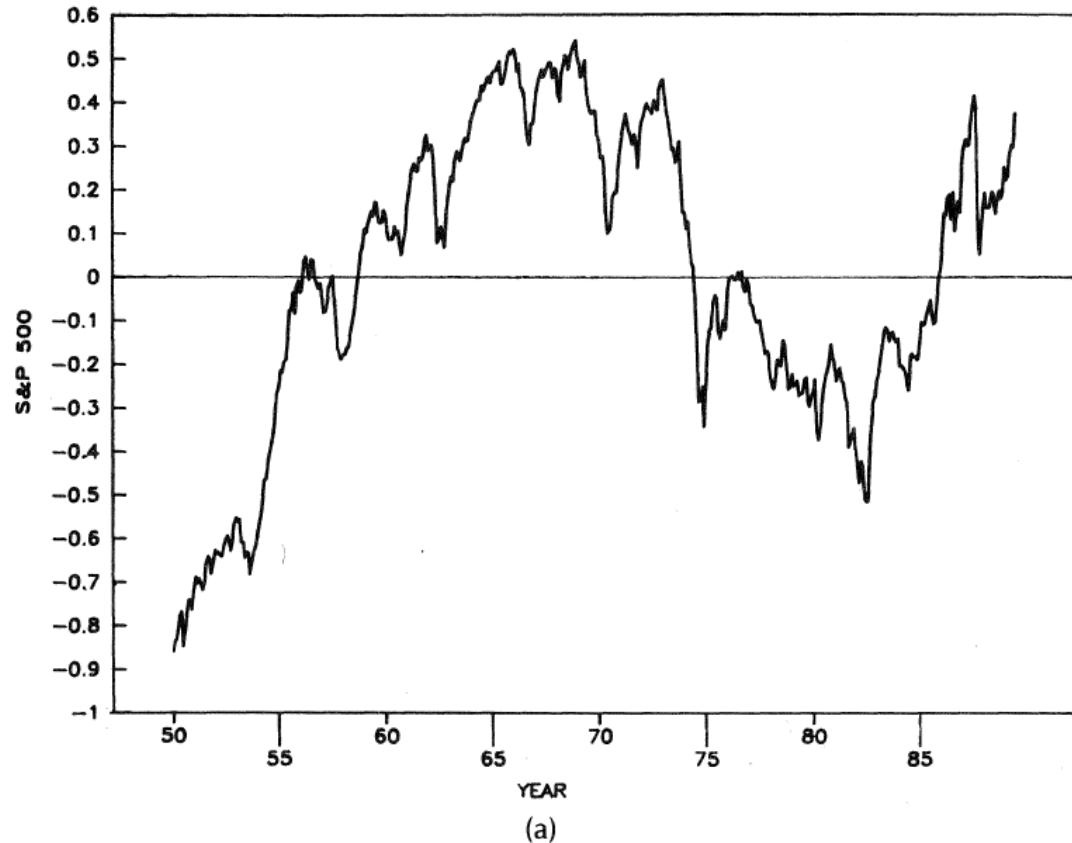
$$S_i = \log_e P_i - (a * \log_e(CPI) + constant)$$

where S_i = detrended price series
 P_i = original price series
 CPI = Consumer Price Index

Loglinear + CPI detrended

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price



S&P 500의 CPI를 활용한 Detrended 자료

FIGURE 13.1a S&P 500 detrended by CPI: January 1950–July 1989. Time series.
(Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

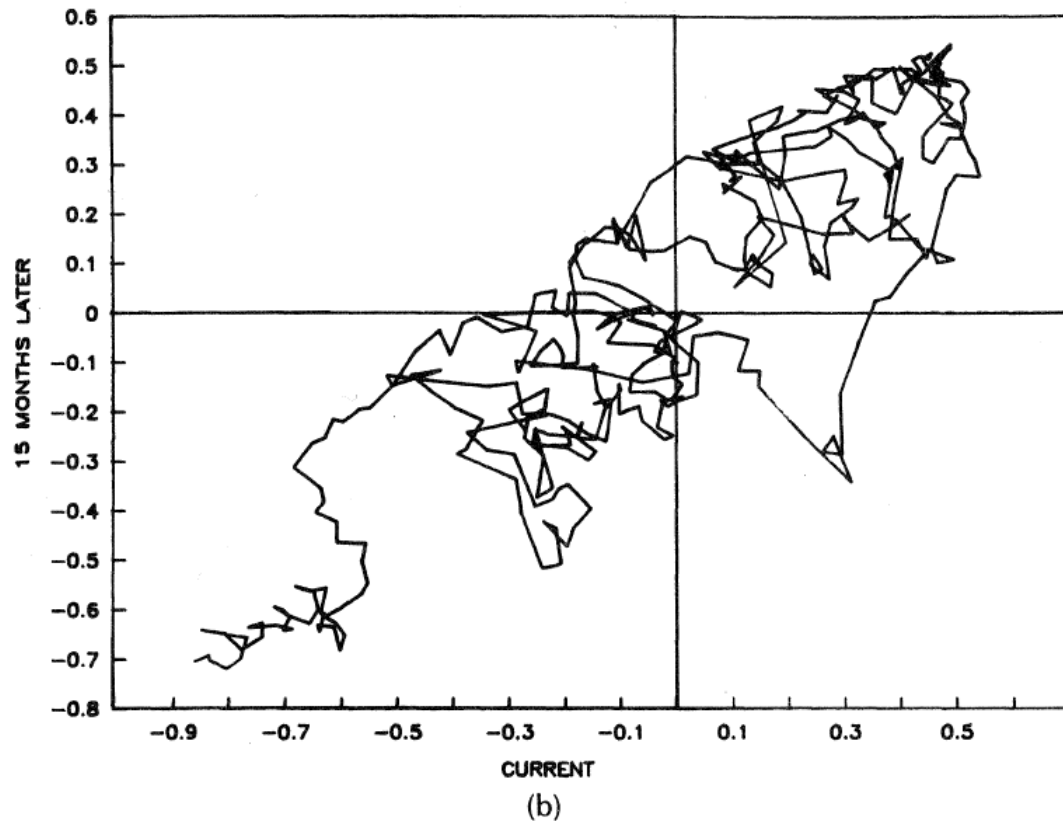


FIGURE 13.1b S&P 500 detrended by CPI: January 1950–July 1989. Two-dimensional phase portrait. (Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

15month time lag를 통한 2-dimensional phase

예) 앞의 그림에서 첫 데이터로부터 15개월 후 데이터를 순서쌍으로 2차원상에 점을 찍음
즉, $(-0.85, -0.71)$

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

16, 32 month를 통한 3-dimensional phase

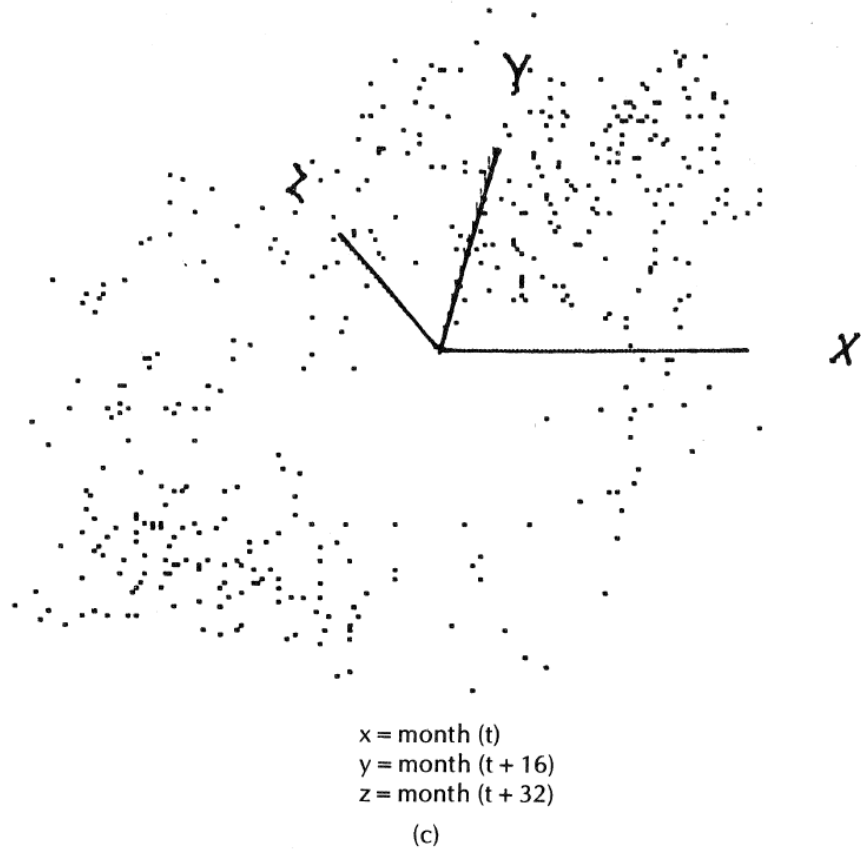
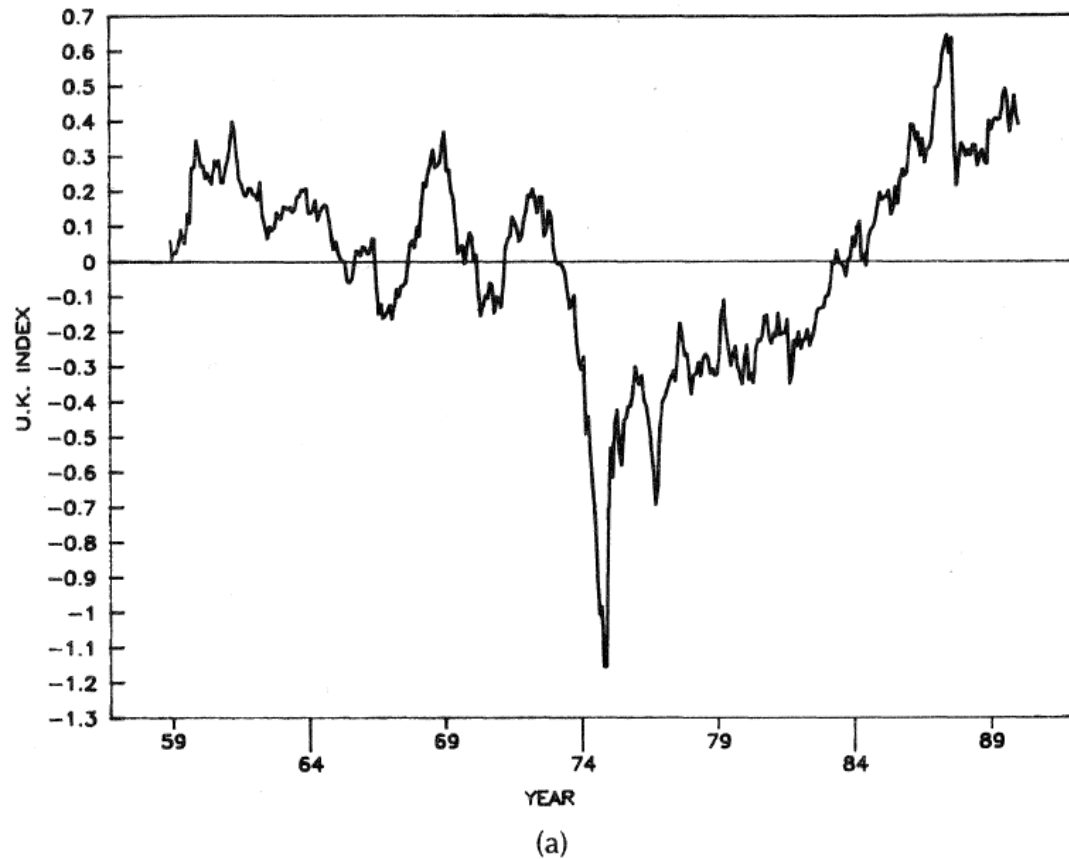


FIGURE 13.1c S&P 500 detrended by CPI: January 1950–July 1989. Three-dimensional phase portrait.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

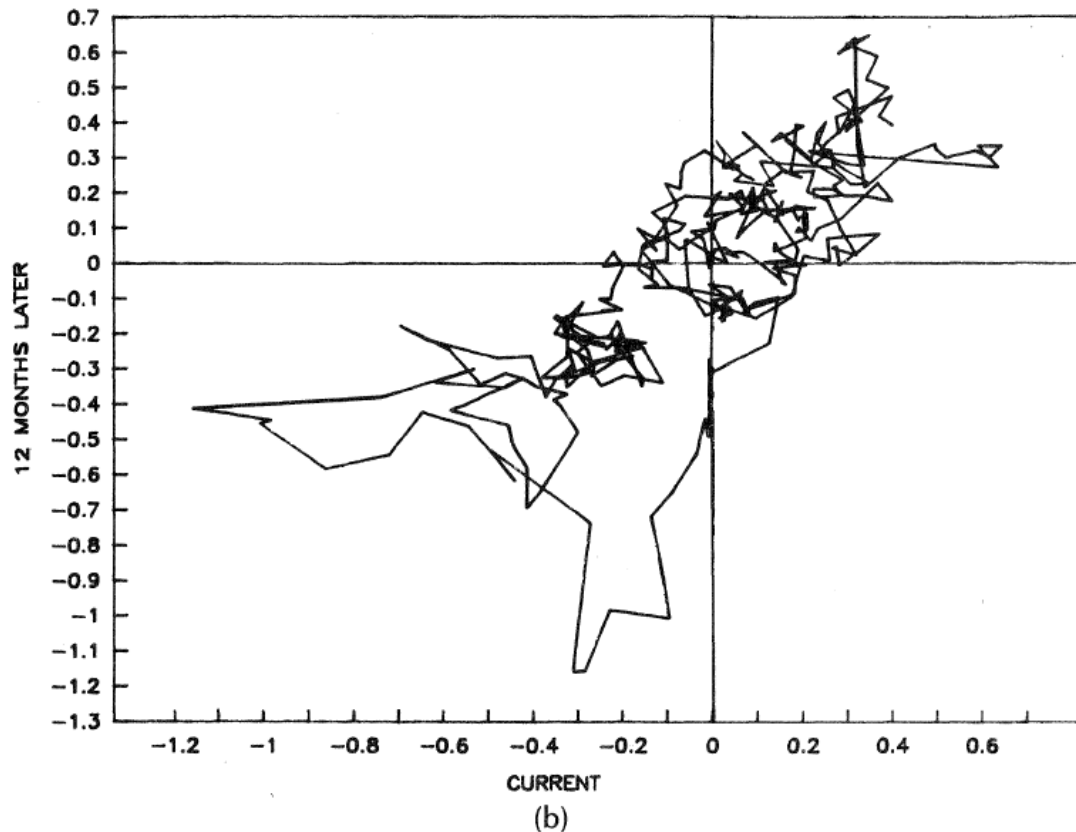


MSCI U.K. ㄹ Detrending Price

FIGURE 13.2a MSCI U.K. equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Time series.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

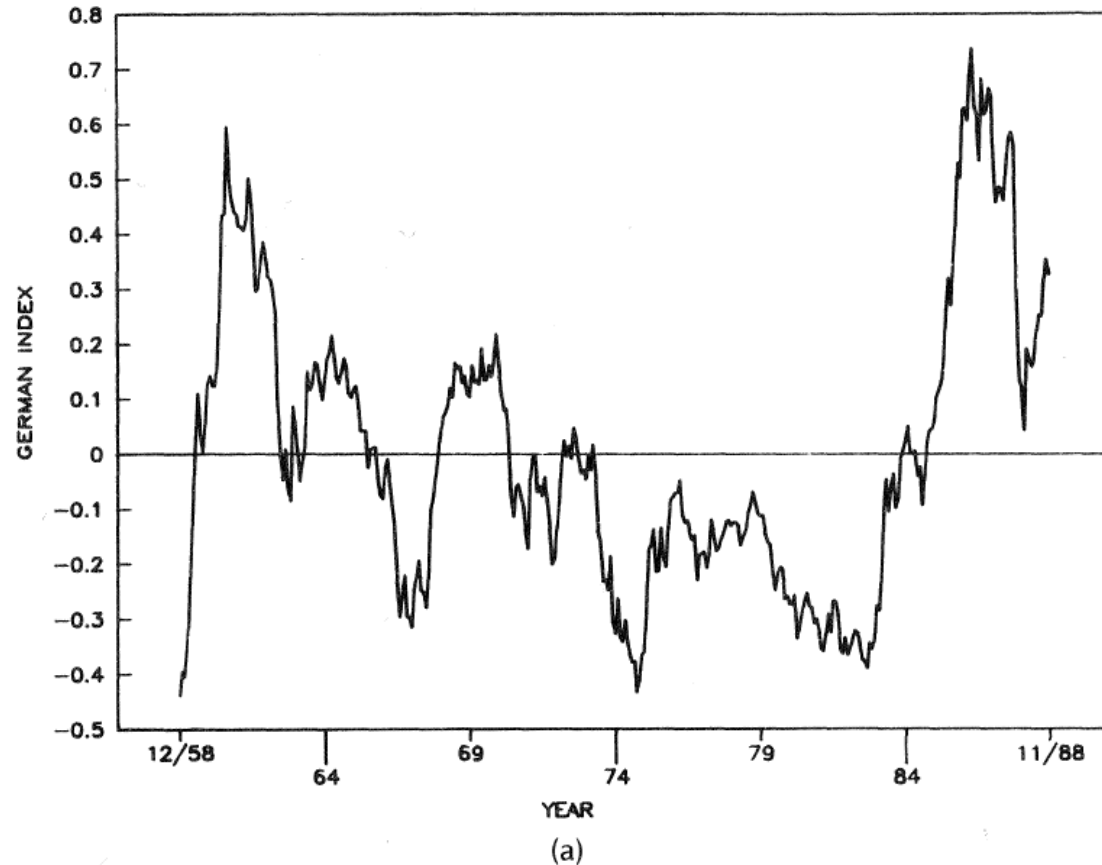


12month time lag를 통한 2-dimensional phase

FIGURE 13.2b MSCI U.K. equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Two-dimensional phase portrait.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

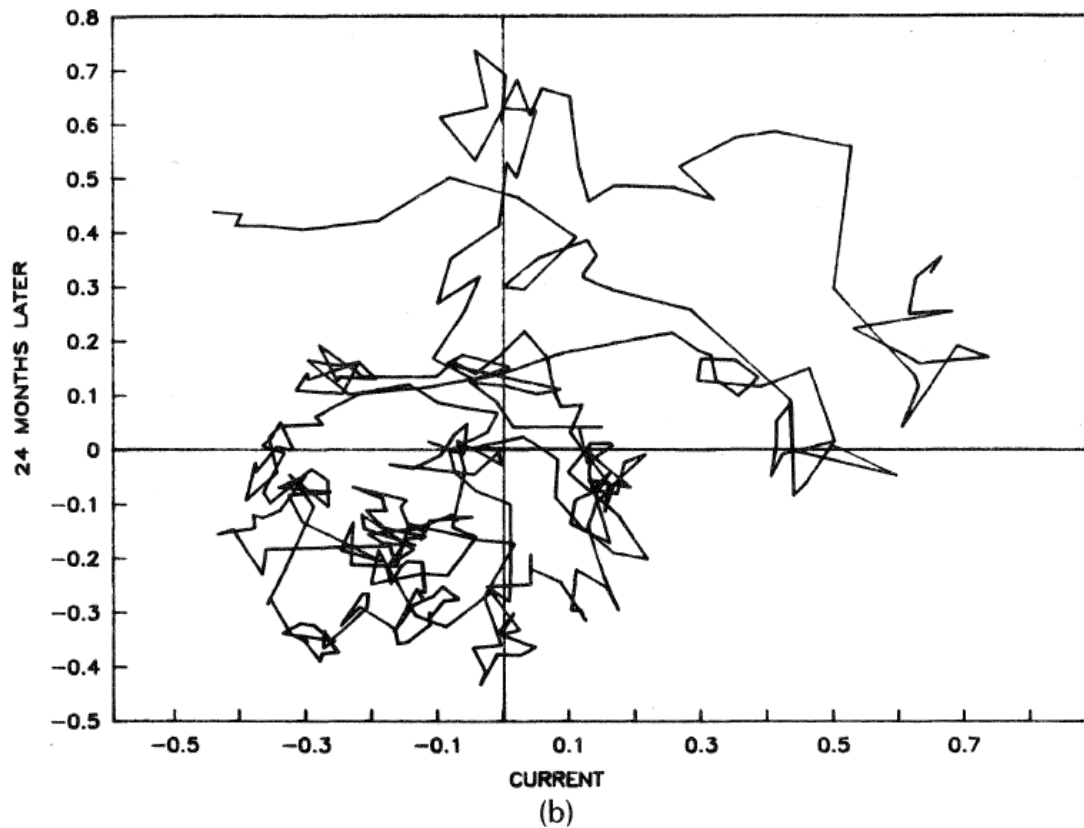


MSCI German ㄹ Detrending Price

FIGURE 13.3a MSCI German equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Time series.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

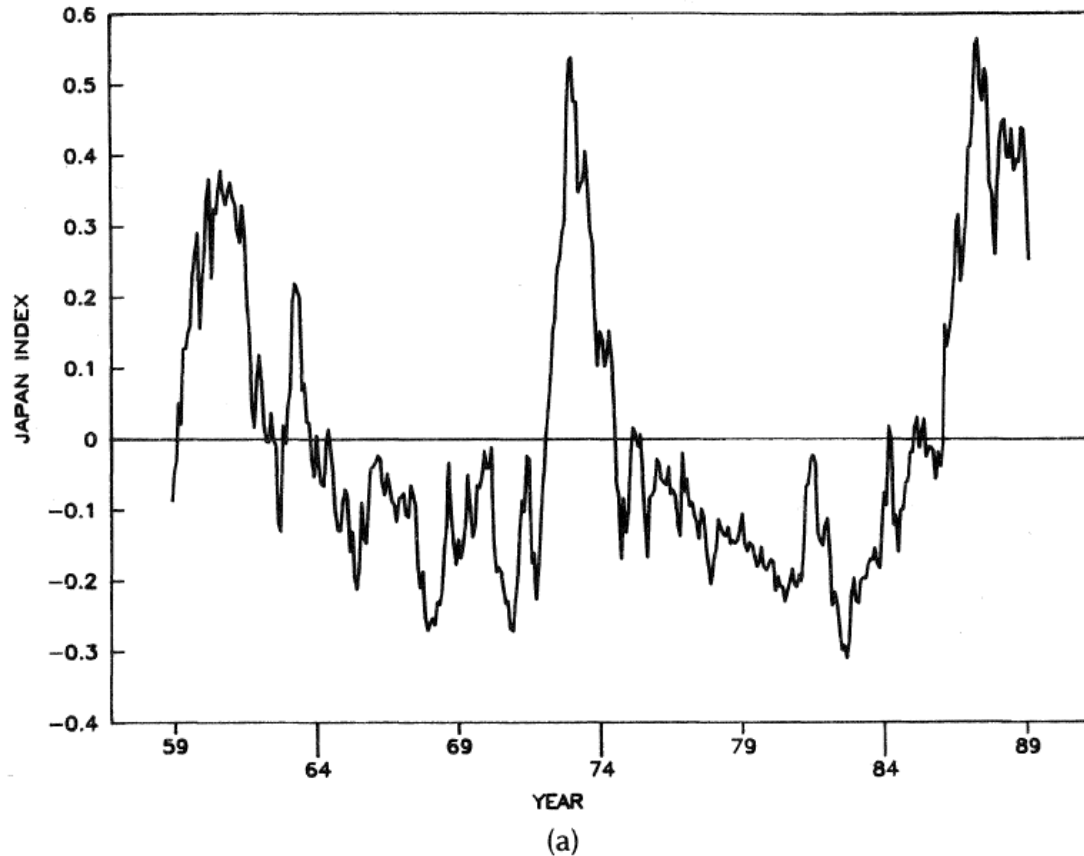


24month time lag를 통한 2-dimensional phase

FIGURE 13.3b MSCI German equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Two-dimensional phase portrait.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price

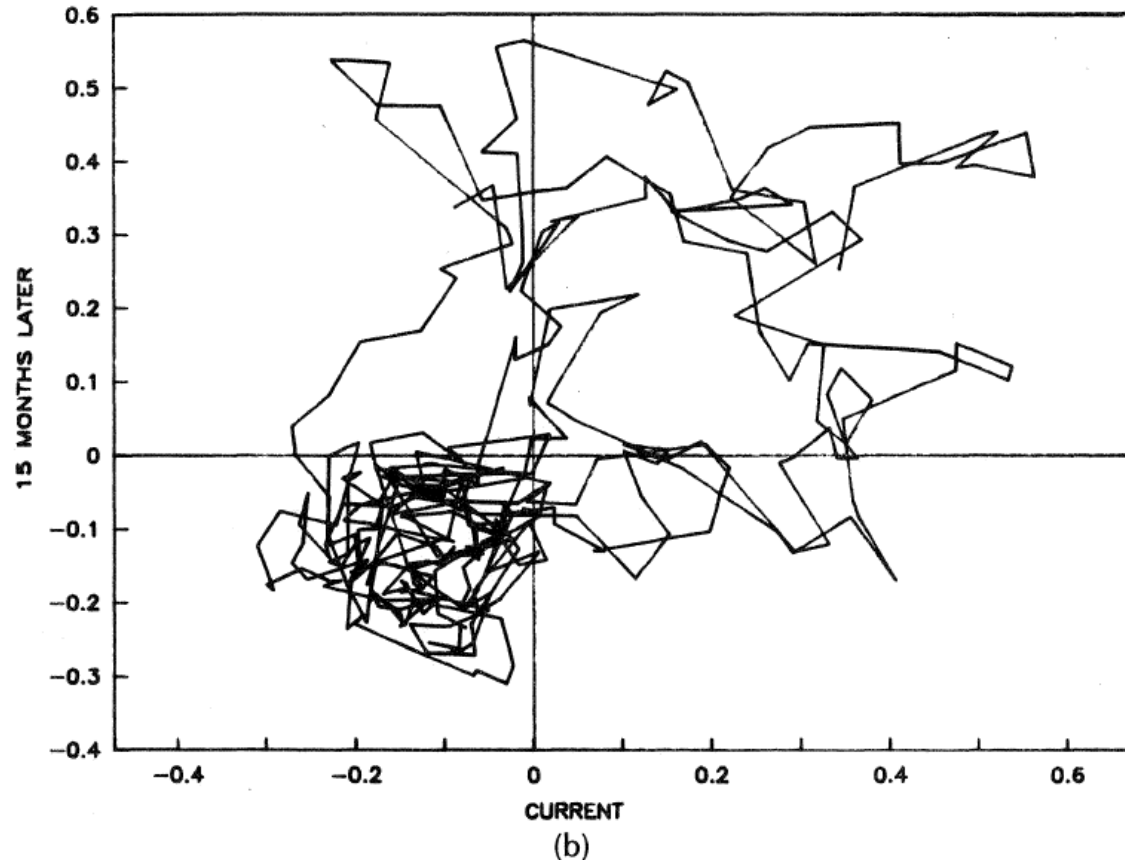


MSCI Japan ㄹ Detrending Price

FIGURE 13.4a MSCI Japanese equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Time series.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Detrending Price



15month time lag를 통한 2-dimensional phase

FIGURE 13.4b MSCI Japanese equity index, loglinear detrended: January 1959–February 1990. Two-dimensional phase portrait.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Fractal Dimensions

Table 13.1 Fractal Dimensions: Equity Indices

| Index | Fractal Dimension |
|--------------|-------------------|
| S&P 500 | 2.33 |
| MSCI Japan | 3.05 |
| MSCI Germany | 2.41 |
| MSCI U.K. | 2.94 |

- S&P 500, MSCI Germany, MSCI U.K 의 경우 3개의 변수로 설명이 되는 2~3 사이의 Fractal Dimension
- MSCI Japan의 경우 4개의 변수가 필요(더 복잡한 Market)
 - 높은 Dimension의 Fractal의 경우, 분석을 위해 더 많은 데이터가 필요함

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Integrals

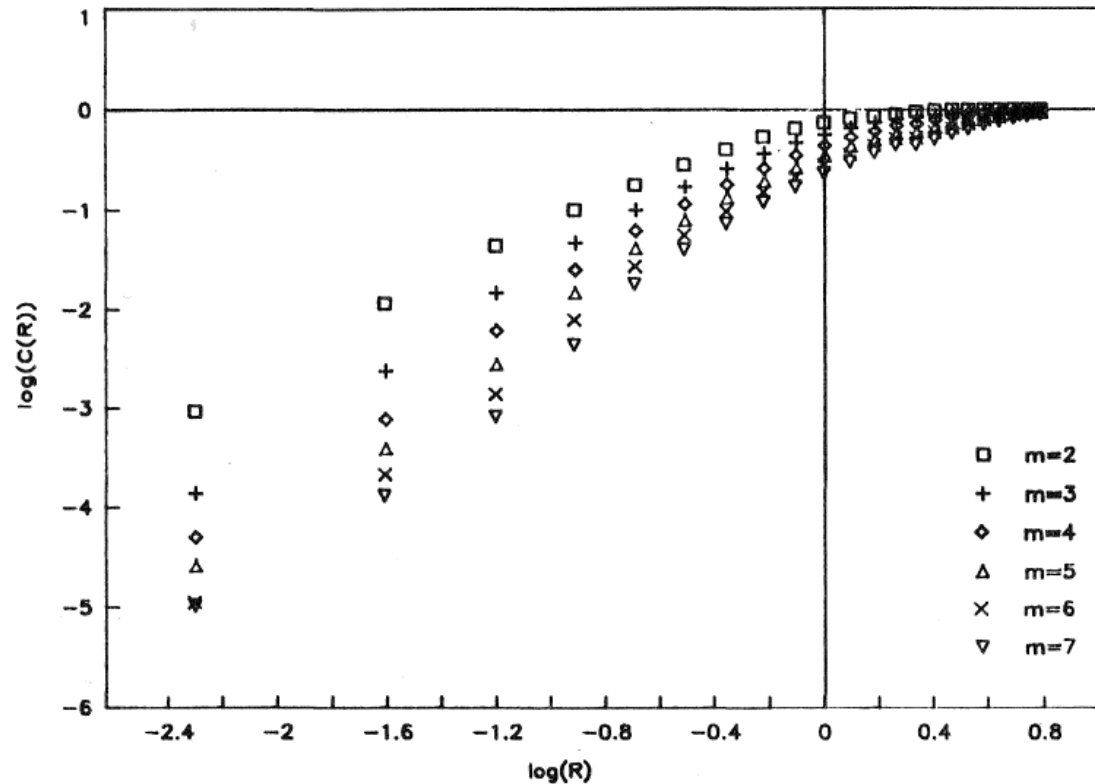


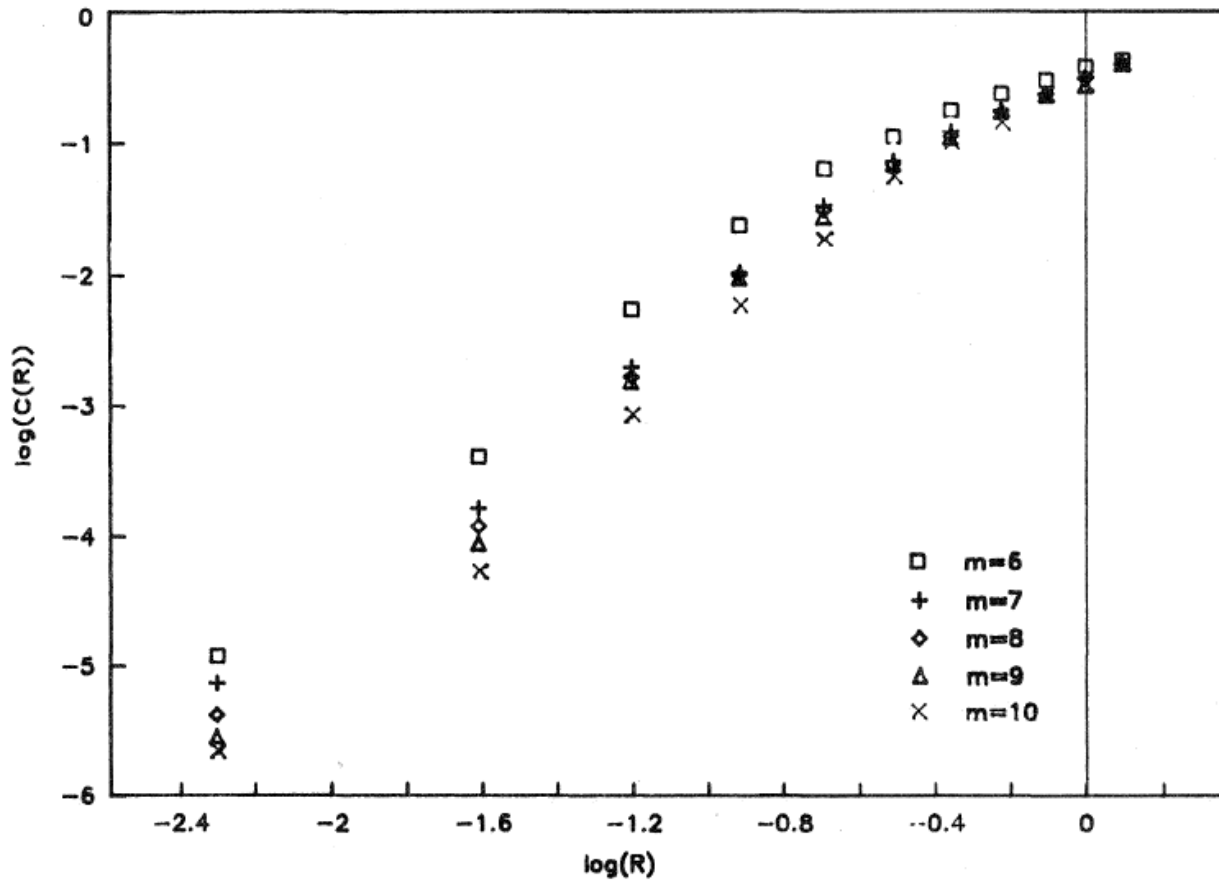
FIGURE 13.5 Correlation integrals: CPI detrended S&P 500. (Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

$$\log(C_m) = D * \log(R) + constant$$

각각의 Embedding Dimension에 대해, 기울기 값이 D 즉, Fractal Dimension

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Integrals



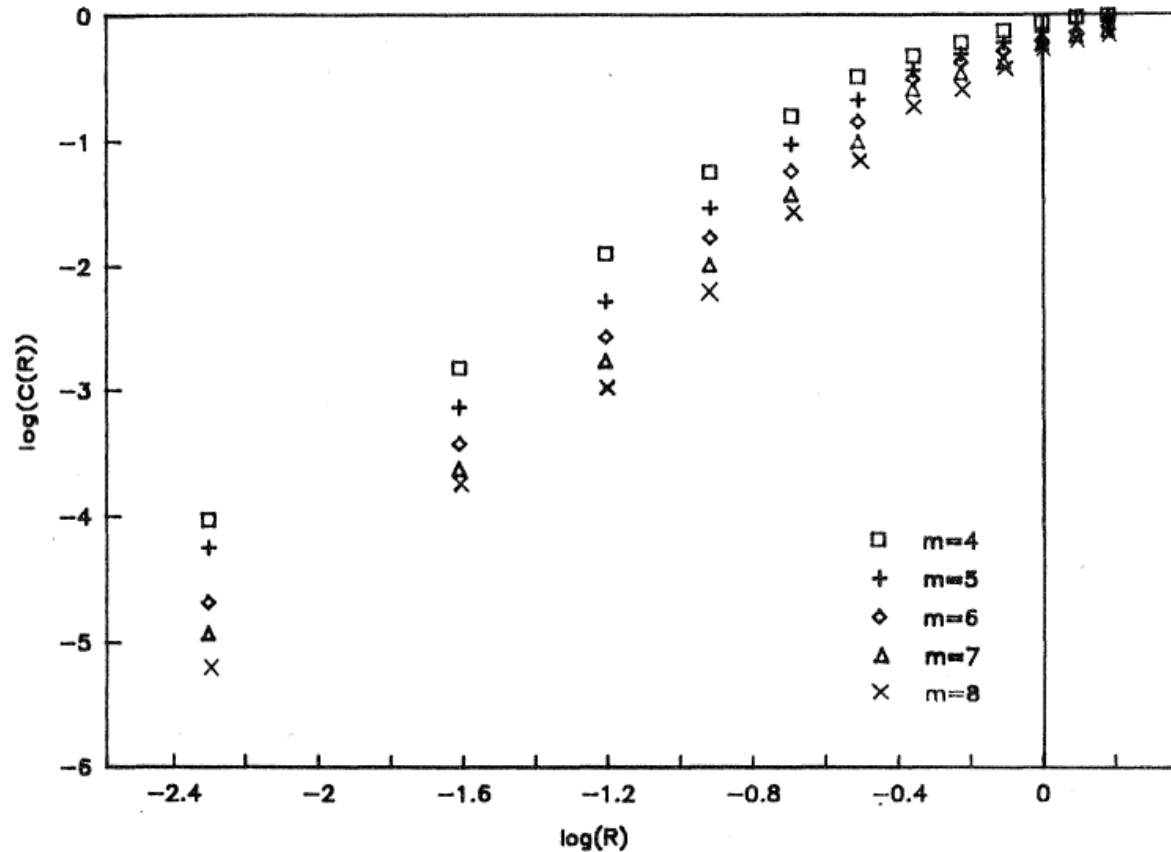
$$\log(C_m) = D * \log(R) + \text{constant}$$

각각의 Embedding Dimension에 대해, 기울기 값이 D 즉, Fractal Dimension

FIGURE 13.6 Correlation integrals: loglinear detrended MSCI U.K. equity index.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Integrals



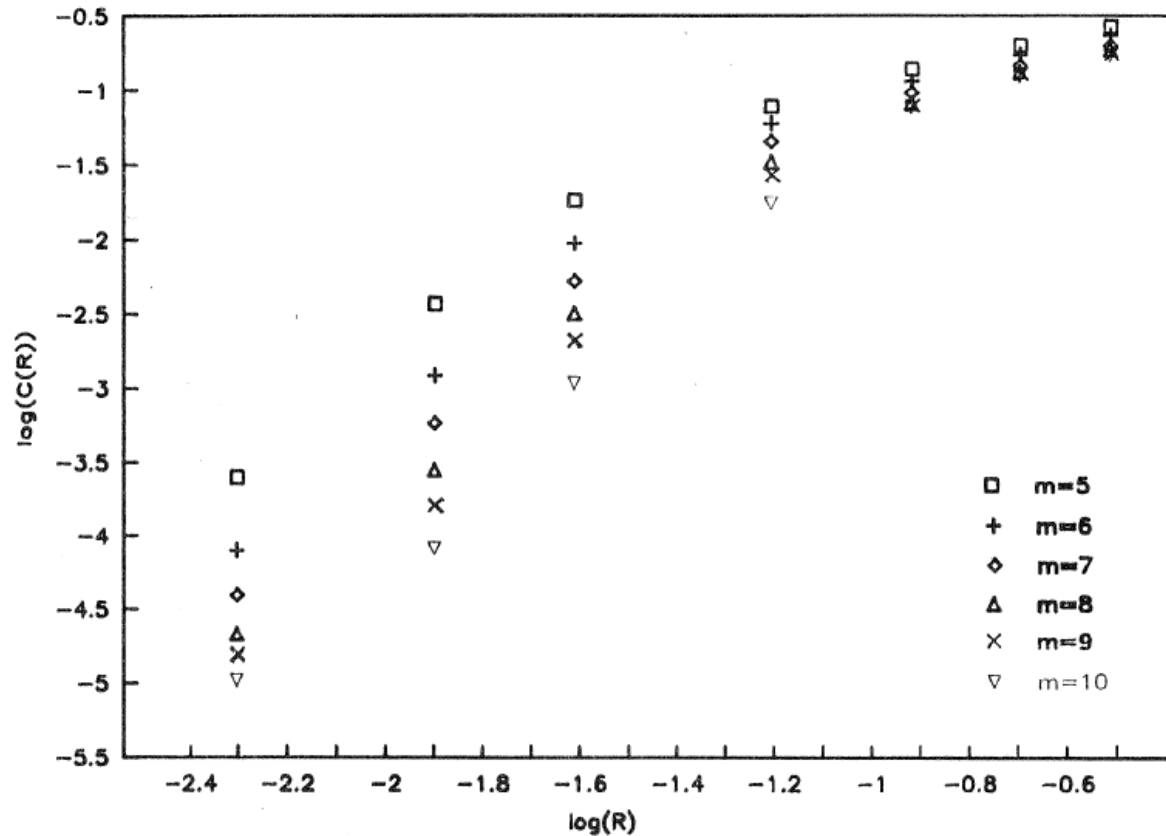
$$\log(C_m) = D * \log(R) + \text{constant}$$

각각의 Embedding Dimension에 대해, 기울기 값이 D 즉, Fractal Dimension

FIGURE 13.7 Correlation integrals: loglinear detrended MSCI German equity index.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Integrals



$$\log(C_m) = D * \log(R) + \text{constant}$$

각각의 Embedding Dimension에 대해, 기울기 값이 D 즉, Fractal Dimension

FIGURE 13.8 Correlation integrals: loglinear detrended MSCI Japanese equity index.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Dimension

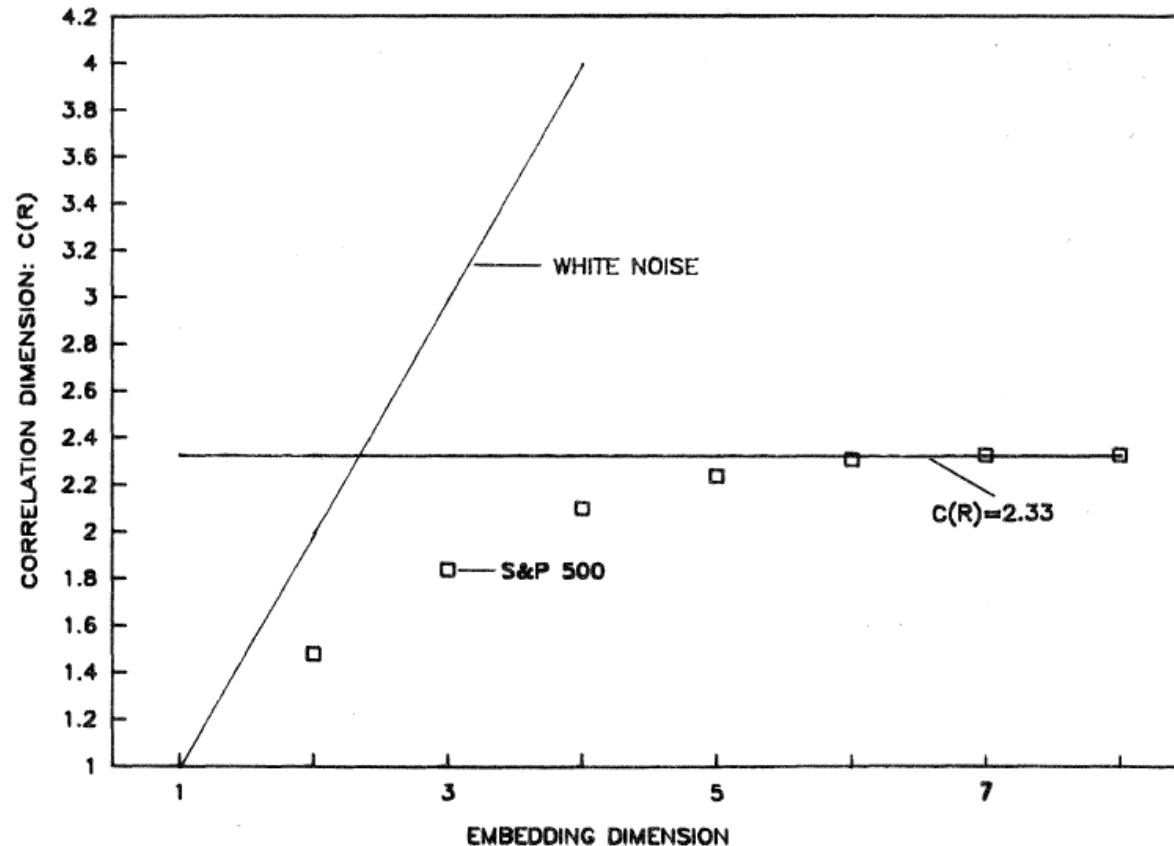


FIGURE 13.9 Convergence of the fractal dimension: CPI detrended S&P 500; $D = 2.33$. (Reproduced with permission of *Financial Analysts Journal*.)

앞의 각각 m 에 대한 기울기를 한번에 표시한 그림

WHITE NOISE는 Random Distribution을 의미함
Gas가 공기 중에 퍼져있는 모형처럼, Random한 상태를 의미, 2차원의 평면에 Gas가 퍼져있는 모형을 생각했을 때, 만약 3차원으로 확장시켰을 경우, 확장된 차원만큼의 Phase Space를 Gas가 채우게 됨

- 2차원 평면의 Gas 모형은 2차원의 D 를 갖게 되고, 3차원 공간의 Gas 모형은 3차원의 D 를 갖게 되는 것처럼, 좌측 그래프에서 WHITE NOISE는 기울기 1의 정확한 선형을 보임
- 반면, Chaos(Deterministically Random 상태)의 경우, 수렴하는 형상을 볼 수 있음

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Dimension

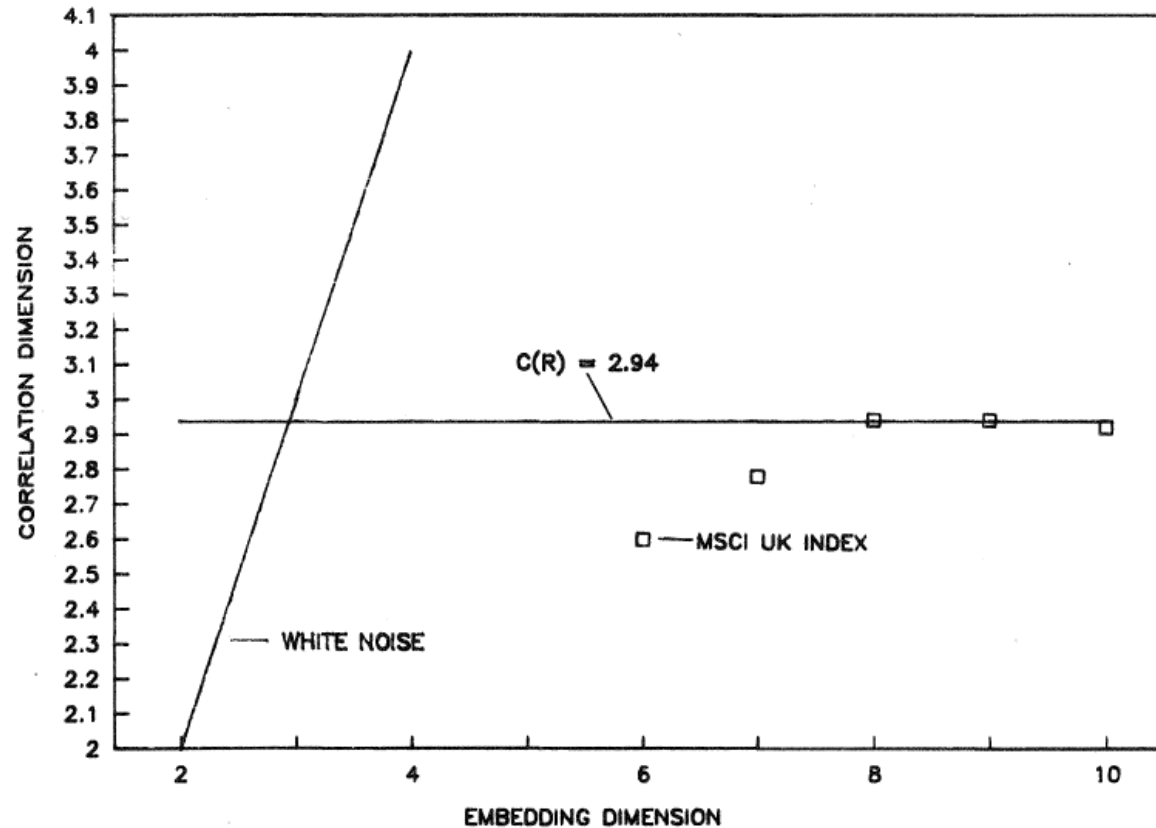


FIGURE 13.10 Convergence of the fractal dimension: loglinear detrended MSCI U.K. equity index; $D = 2.94$.

앞의 각각 m 에 대한 기울기를 한번에 표시한 그림

WHITE NOISE는 Random Distribution을 의미함
Gas가 공기 중에 퍼져있는 모형처럼, Random한 상태를 의미, 2차원의 평면에 Gas가 퍼져있는 모형을 생각했을 때, 만약 3차원으로 확장시켰을 경우, 확장된 차원만큼의 Phase Space를 Gas가 채우게 됨

- 2차원 평면의 Gas 모형은 2차원의 D 를 갖게 되고, 3차원 공간의 Gas 모형은 3차원의 D 를 갖게 되는 것처럼, 좌측 그래프에서 WHITE NOISE는 기울기 1의 정확한 선형을 보임
- 반면, Chaos(Deterministically Random 상태)의 경우, 수렴하는 형상을 볼 수 있음

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Dimension

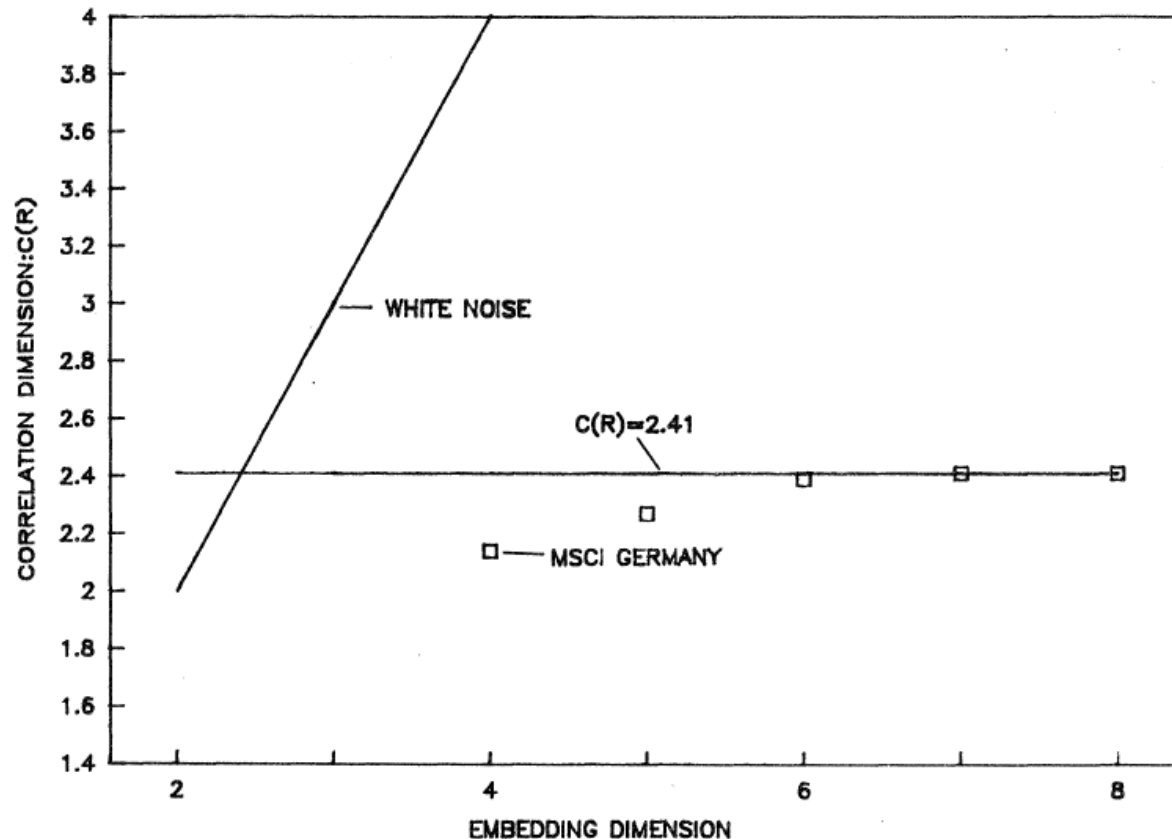


FIGURE 13.11 Convergence of the fractal dimension: loglinear detrended MSCI German equity index; $D = 2.41$.

앞의 각각 m 에 대한 기울기를 한번에 표시한 그림

WHITE NOISE는 Random Distribution을 의미함
Gas가 공기 중에 퍼져있는 모형처럼, Random한 상태를 의미, 2차원의 평면에 Gas가 퍼져있는 모형을 생각했을 때, 만약 3차원으로 확장시켰을 경우, 확장된 차원만큼의 Phase Space를 Gas가 채우게 됨

- 2차원 평면의 Gas 모형은 2차원의 D 를 갖게 되고, 3차원 공간의 Gas 모형은 3차원의 D 를 갖게 되는 것처럼, 좌측 그래프에서 WHITE NOISE는 기울기 1의 정확한 선형을 보임
- 반면, Chaos(Deterministically Random 상태)의 경우, 수렴하는 형상을 볼 수 있음

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Correlation Integrals

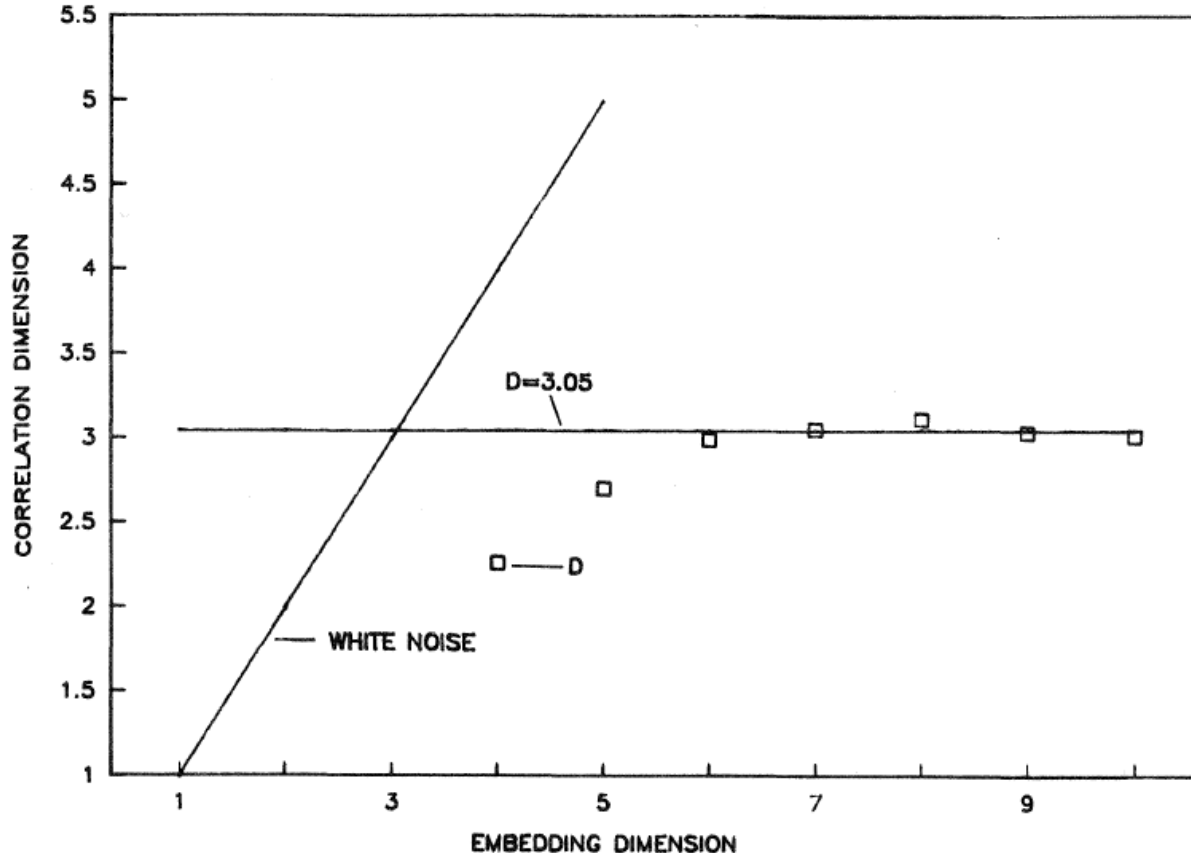


FIGURE 13.12 Convergence of the fractal dimension: loglinear detrended MSCI Japanese equity index; $D = 3.05$.

앞의 각각 m 에 대한 기울기를 한번에 표시한 그림

WHITE NOISE는 Random Distribution을 의미함
Gas가 공기 중에 퍼져있는 모형처럼, Random한 상태를 의미, 2차원의 평면에 Gas가 퍼져있는 모형을 생각했을 때, 만약 3차원으로 확장시켰을 경우, 확장된 차원만큼의 Phase Space를 Gas가 채우게 됨

- 2차원 평면의 Gas 모형은 2차원의 D 를 갖게 되고, 3차원 공간의 Gas 모형은 3차원의 D 를 갖게 되는 것처럼, 좌측 그래프에서 WHITE NOISE는 기울기 1의 정확한 선형을 보임
- 반면, Chaos(Deterministically Random 상태)의 경우, 수렴하는 형상을 볼 수 있음

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

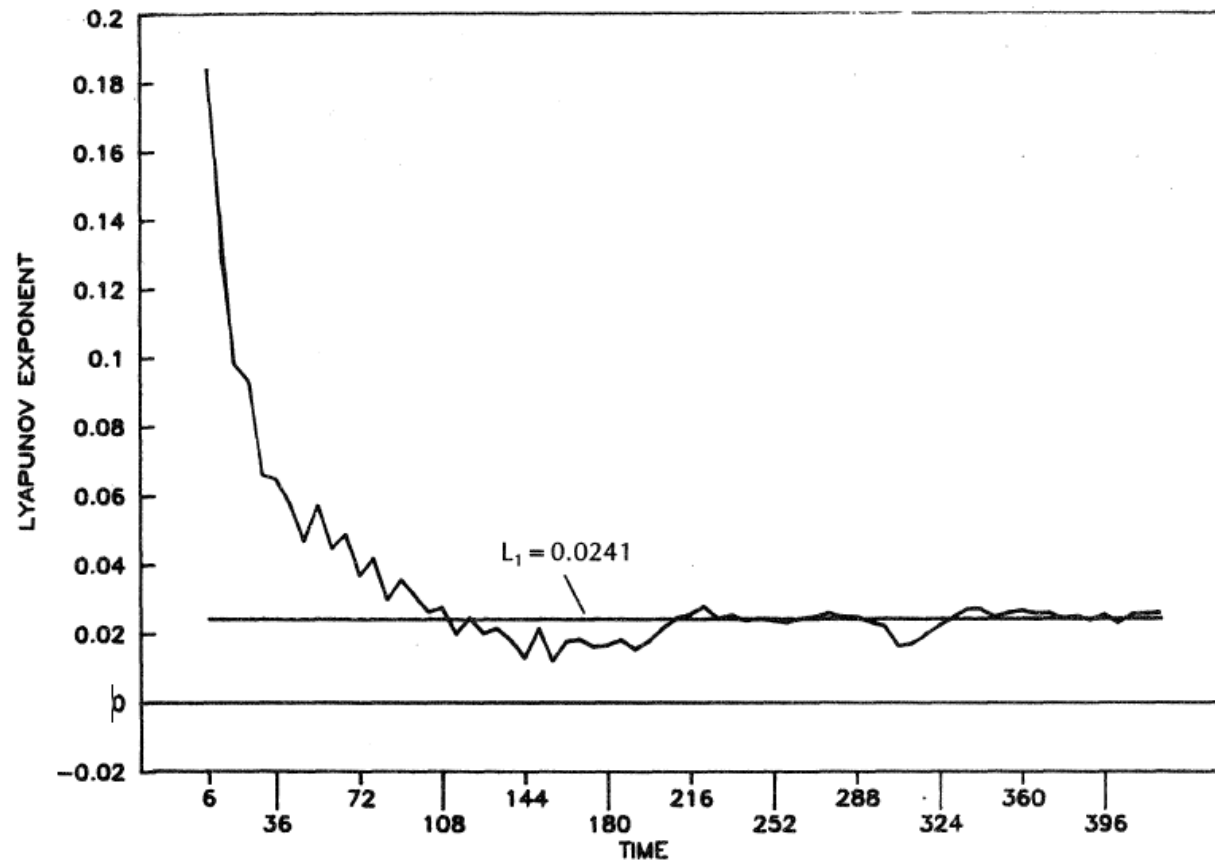


FIGURE 13.13 Convergence of the largest Lyapunov exponent: CPI detrended S&P 500, monthly returns; $L_1 = 0.0241$ bit/month.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

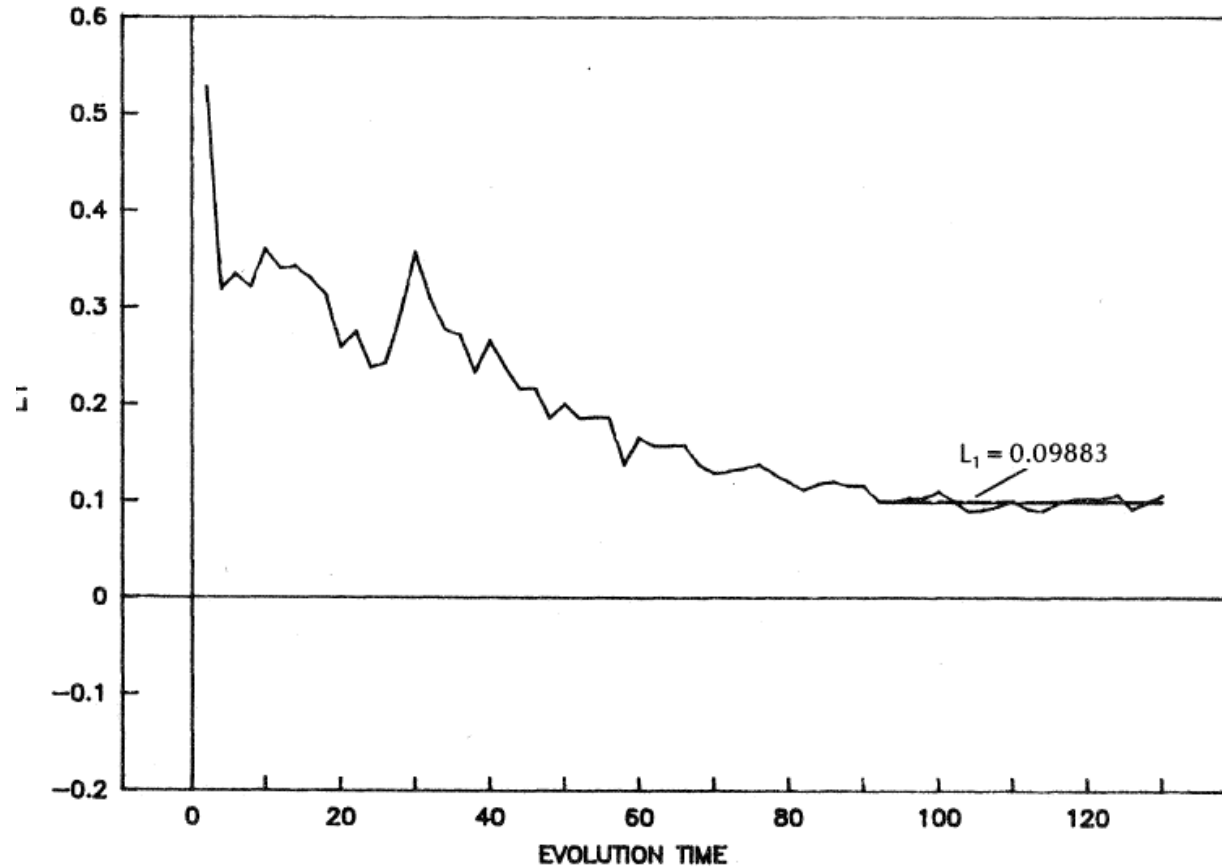


FIGURE 13.14 Convergence of the largest Lyapunov exponent: CPI detrended S&P 500, 90-day returns; $L_1 = 0.09883$ bit/90 days.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

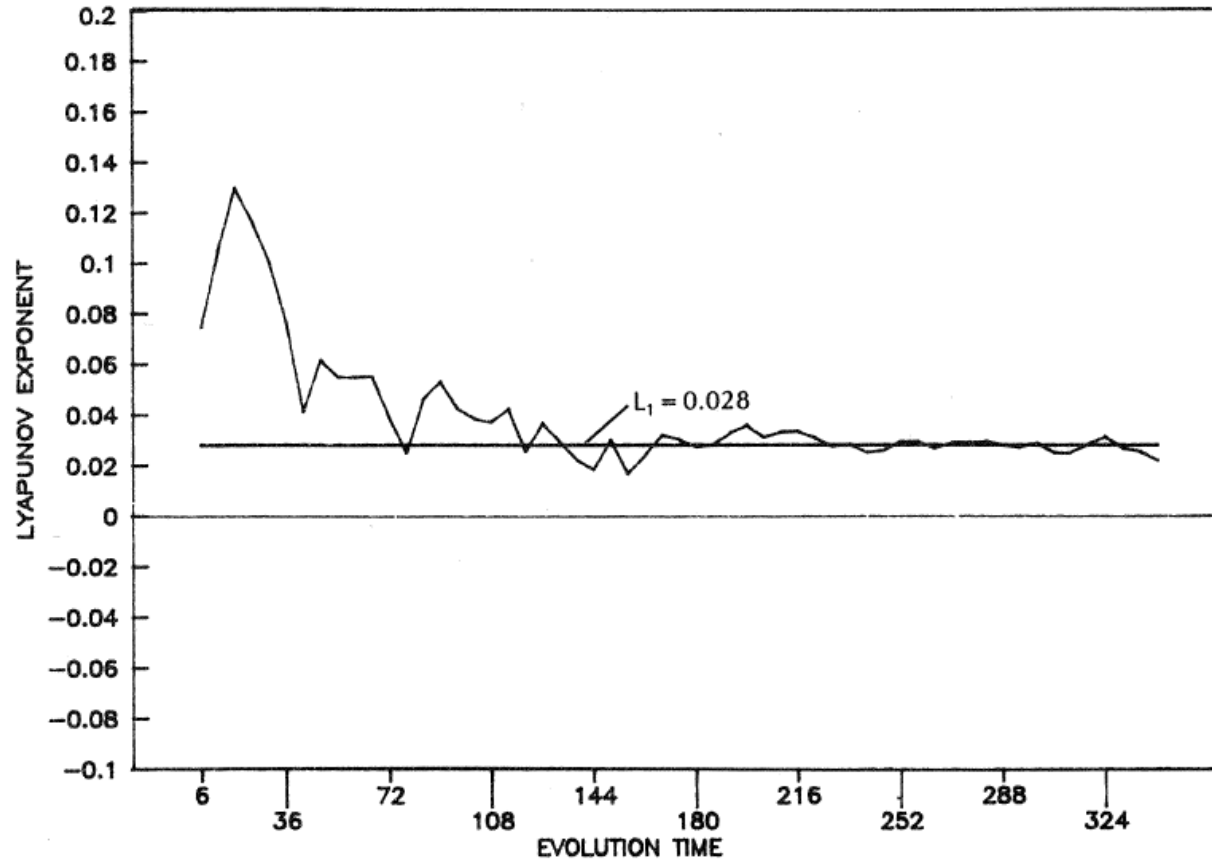


FIGURE 13.15 Convergence of the largest Lyapunov exponent: loglinear detrended MSCI U.K. equity index; $L_1 = 0.028$ bit/month.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

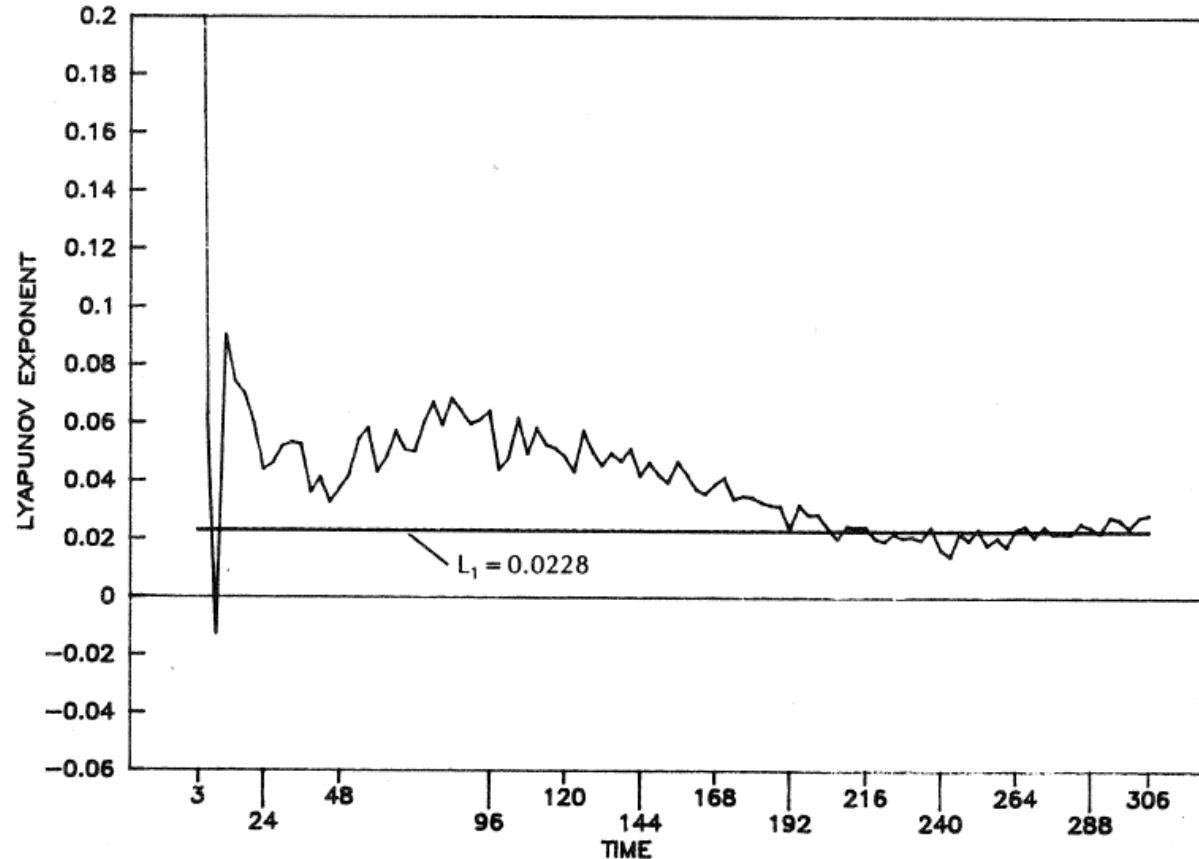


FIGURE 13.16 Convergence of the largest Lyapunov exponent: loglinear detrended MSCI Japanese equity index; $L_1 = 0.0228$ bit/month.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

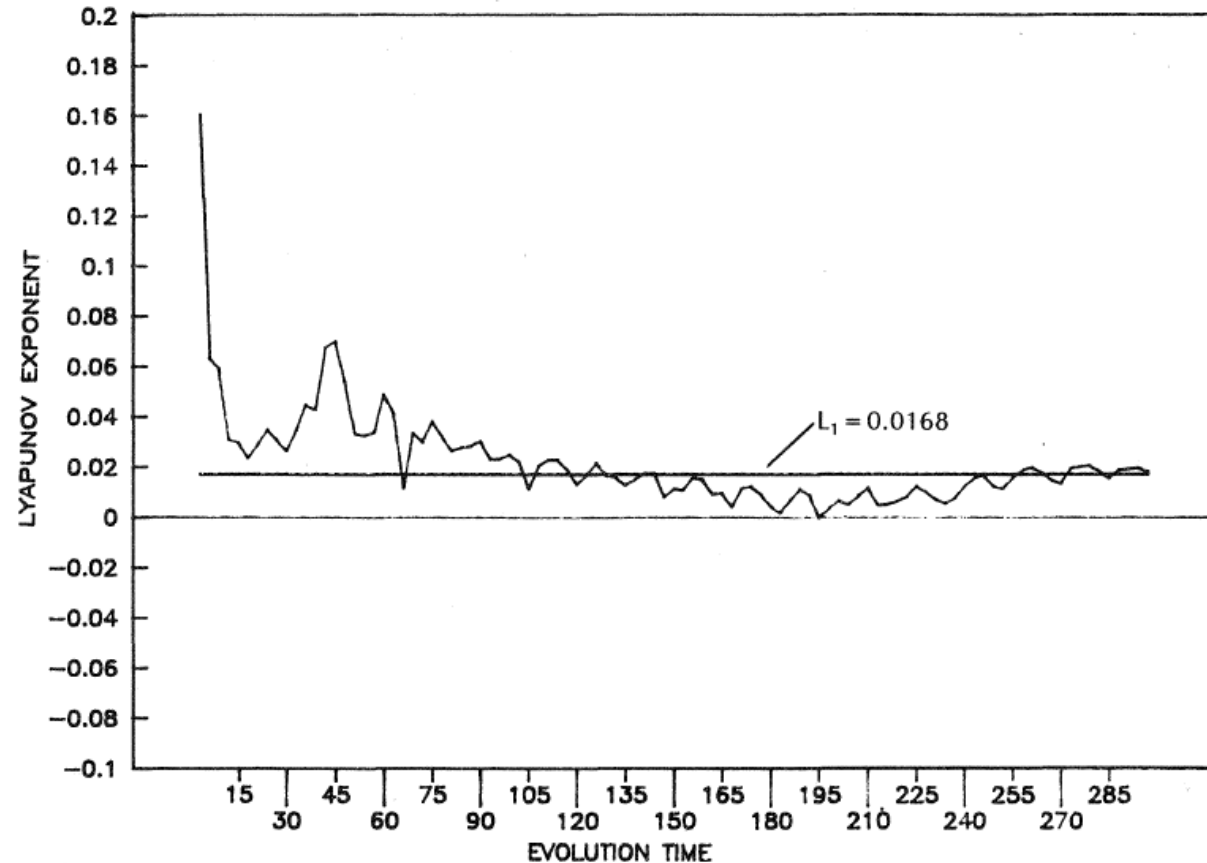


FIGURE 13.17 Convergence of the largest Lyapunov exponent: loglinear detrended MSCI German equity index; $L_1 = 0.0168$ bit/month.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

- 실험결과 만일 L_1 이 안정적으로 수렴하지 않는다면
 - 모수들의 선택에 문제가 있거나
 - 분석자료가 충분한 주기를 갖고 있지 않기 때문
 - 이러한 문제가 없을 경우에도 안정적으로 수렴하지 않는다면
 - 시스템의 비선형이 아니라는 것

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ Scrambled VS Unscrambled

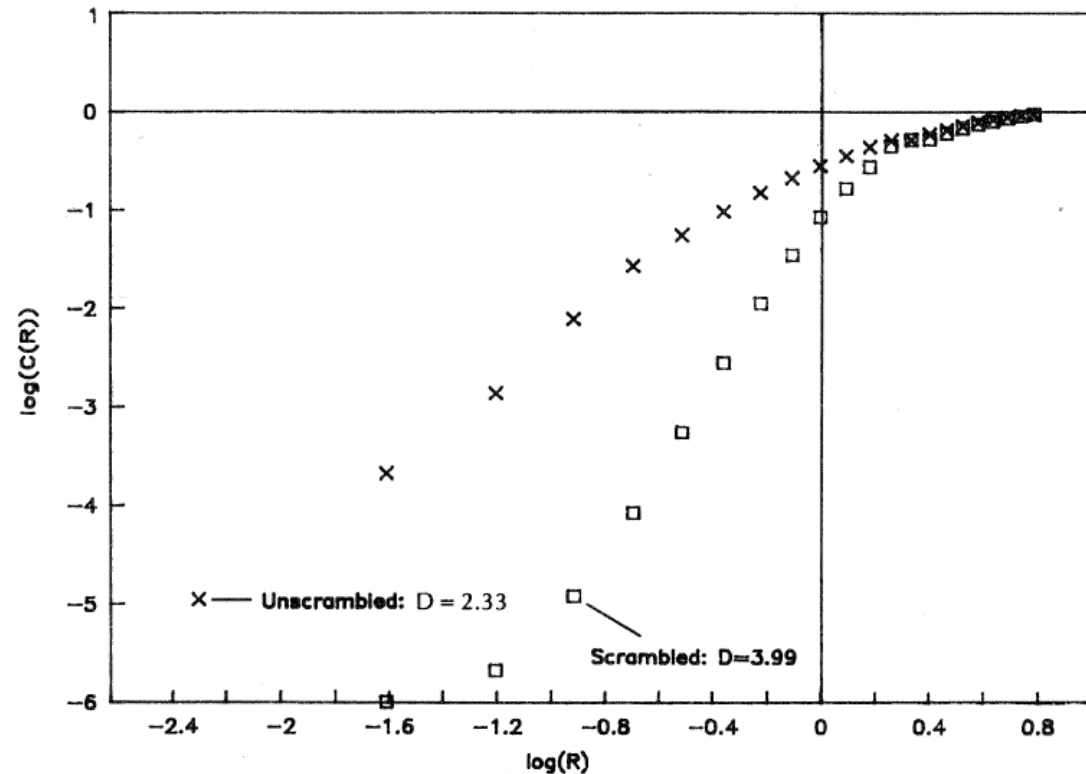


FIGURE 13.18 Scrambled test for correlation integrals: CPI detrended S&P 500; unscrambled $D = 2.33$, scrambled $D = 3.99$.

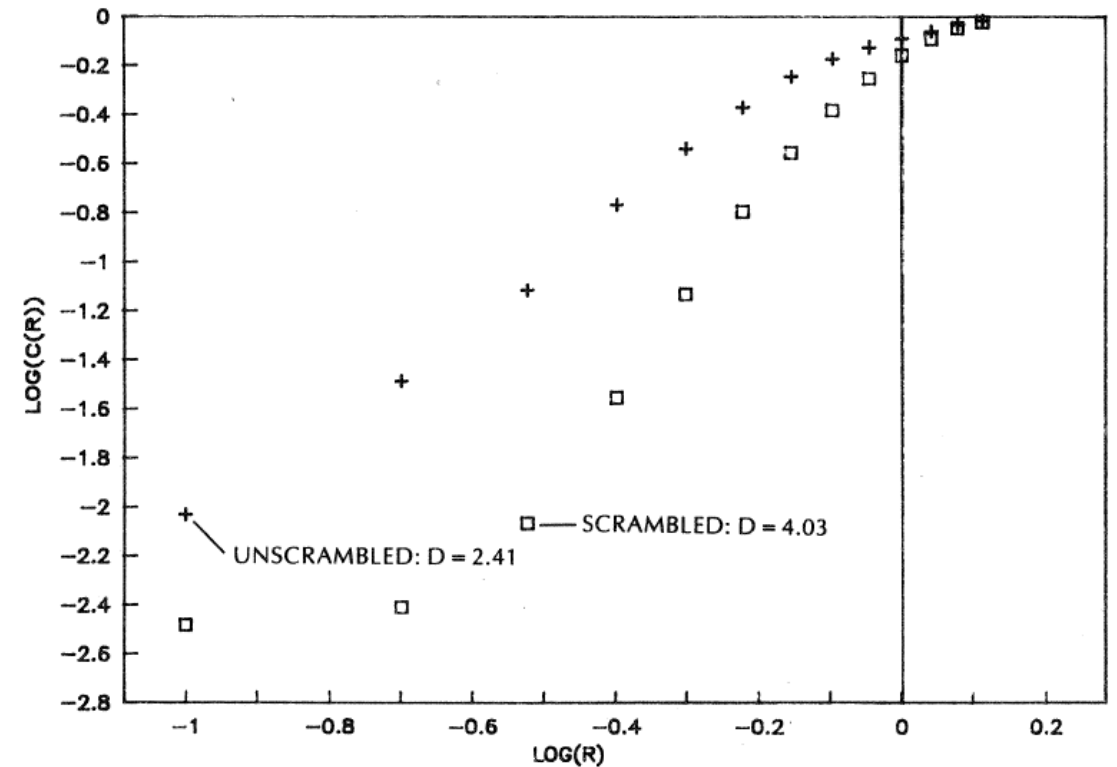


FIGURE 13.19 Scrambled test for correlation integrals: loglinear detrended MSCI German index; unscrambled $D = 2.41$; scrambled $D = 4.03$.

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 최대 리아푸노프 지수

- S&P 500지수의 Lyapunov exponent는 약 0.0241bit/month
- 이는 우리가 1bit의 정확성으로 현 상태를 측정할 수 있다면 1bit의 정확성은 $1\text{bit}/0.0241\text{bit/month}=42\text{month}$ 로써 약 42개월 후에는 지금의 조건을 이용해 미래를 예측하는 것이 불가능
- 이는 결국 평균적인 시장의 주기가 42개월임을 의미
- 이러한 결과는 R/S 분석법으로 알아낸 주기와 비슷
- 그러나 이러한 주기가 삼각함수와 같은 형태의 주기를 의미하는 것이 아님
- 여기서의 주기는 현재 어떤 새로운 정보가 발생했을 때 이 영향이 평균적으로 얼마나 지속되는가를 의미

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 실험의 의미1/2

- 동역학적 분석을 통해 프랙탈 차원의 존재와 초기 조건에 대한 의존성 및 민감도를 측정할 수 있었음
- 일반적으로 금융시장은 2와 3 사이의 프랙탈 차원값을 가지며 이는 금융시장의 동역학을 결정하는 변수가 3개 혹은 4개임을 의미
- 금융시장의 Lyapunov exponent는 양의 특정한 값으로 수렴하며 이는 일정 시간이 흐르면 현재의 정보의 영향력이 소멸됨을 의미
 - 시장이 특정한 기간의 주기를 가짐을 의미
- Lyapunov exponent에 의해 측정된 금융 시장의 주기는 약 42개월인데 이는 R/S 분석법에 의해 도출된 값과 비슷, 이는 금융 시장에 일정 주기가 있음을 더욱 명확히 보여줌

13. Dynamical Analysis of the Capital Markets

■ 실험의 의미2/2

- 분석결과들은 금융 시장이 **비선형 동역학 시스템(Nonlinear Dynamic System)**이라는 것을 강하게 지지
 - 물리학의 동역학 시스템의 경우 관측을 할 경우 어떤 요소가 변수인가를 결정하는 것이 상대적으로 쉬우나 **금융 시장은 변수를 결정하기 힘들**
 - 이는 금융 시장에 영향을 주는 변수는 무척 다양하며 또한 그러한 변수들이 상호간에 결합된 형태로 존재하기 때문
- 금융시장은 복잡계이며 생태계와 유사하기 때문에 끝임 없이 진화함
 - 이는 결국 누군가 현재 상태의 동역학을 정확하게 파악한다 해도 이에 저항하는 다른 시장참여자에 의해 다른 형태로 진화하게 됨을 의미