

“CHAOS” Theory

PART ONE

THE NEW PARADIGM

1. Introduction: life Can Be So Complicated
2. Random Walks and Efficient Markets
3. The Failure of the Linear Paradigm
4. Markets and Chaos: Chance and Necessity

CHAOS Theory

■ 카오스(Chaos) 이론

- 1963년에 Lorenz에 의해서 기상예측을 위한 컴퓨터 시뮬레이션 과정에서 우연히 발견된 Chaos는 고전물리학에서 설명할 수 없었던 자연현상들을 설명할 수 있게 함
- 그 동안 확률적 현상으로만 여겨졌던 현상들에 대하여 새로운 과학적 패러다임의 가능성을 부여하는 의의
- 카오스이론과 프랙탈
 - 카오스 현상을 그래프로 나타내면 프랙탈이 나타남
 - 카오스는 무작위하게 움직이는 것처럼 보이지만 사실은 숨은 질서가 존재하는 비선형 결정론적 과정이며, 일반적으로는 결정론적인 과정(deterministic process)에 일어나는 확률적 운동(stochastic motion)으로 정의할 수 있음
 - 즉 어떤 시스템이 결정론적인 법칙에 따라 움직이고 있지만, 매우 불규칙하고 동시에 불안정한 행태로 인하여 먼 미래의 상태를 예측할 수 없는 현상을 의미함

1. Introduction: life Can Be So Complicated

1. Introduction: life Can Be So Complicated

- 자연에서 규칙을 찾아내려는 노력의 일환
 - 달력, 시계, 사전, 책, 신문 등
 - 지식의 조직화를 이루기 위한 노력 발생한 Human Creations
 - 위와 같은 Human Creations로 인해, 원인은 분명히 있으나 그 미래를 예측할 수 없는 영역이 생김
 - 예측 불가능한 영역의 예
 - 날씨
 - 자연을 수치로 표현하기 위한 Human Creations의 노력을 근본적인 무질서함
 - 사회문제
 - 사회문제는 자연적으로 해결되지 못하며, 매일 무수한 문제가 발생
 - 이를 해결하기 위해 법이라는 틀이 필요
 - 자본시장(Capital market)
 - 자본시장은 우리의 손으로 만들었지만, 어떻게 움직이는지 알지 못함

1. Introduction: life Can Be So Complicated

- 많은 사람들이 이와 같은 무질서한 것들에 대한 해결책을 제시하기 위해 노력
 - 그 결과는?
 - 문제에 대한 해결보다는, 더 많은 가정과 더 많은 새로운 문제들을 낳는 결과
 - 예측이 맞았더라도, 이는 '단기간'의 성과
 - 실제로는 노력의 결과로 생긴 많은 Theory들이 제시한 것보다도 훨씬 '작은 변화'로도 훨씬 큰 미래의 변화가 있음을 확인하는 성과
 - 과거의 연구 방법의 문제 → 다음 페이지에서 설명
 - 그렇지만, 주식시장이 Random Walk처럼 움직이는 것은 아니라는 증거를 확인
 - 무엇인가 큰 변화(혹은 outlier)가 있을 때, 이에 따르는 변화를 보임
 - 심한 악재 혹은 호재가 생겼을 경우, 당연히 이 영향을 반영함
 - 연관관계가 없지 않으며, 완전한 Random Walk는 아니라는 사실을 확인

1. Introduction: life Can Be So Complicated

과거 자본시장 Forecasting의 문제점

1. Equilibrium

- 자본시장은 Supply & Demand와 마찬가지로의 Equilibrium으로 이루어지지 않음
- 사람들의 기대치와 심리가 반영되어, Dynamic한 형태를 보임
 - 위의 Dynamic은 다음페이지에서 부터 주요하게 다룰 내용
- 그러나 사람들은, Equilibrium을 토대로 예측을 진행해옴

2. Time

- Markets has no memory, or limited memory.
 - 시장은 영원히 기억하지 못함. 아주 먼 과거의 정보에 따라서는 영향을 받지 않음
 - 예를 들어, 10년 후 이자율이 어떻게 변할지는 현재 값과 크게 영향이 없음
- 그러나 사람들은 고찰 없이 과거의 경험을 토대로, 미래를 예측하려는 경향이 있음
 - 2개 먼 시점 사이의 Identical한 부분을 간과해옴
 - Turning Point에 대한 연구가 필요

1. Introduction: life Can Be So Complicated

■ Dynamics!

- 기존의 세계관
 - 존재하는 모든 입자들의 순간적인 위치와 속도, 그리고 상호작용의 법칙성을 안다면 미래의 어느 때라도 우리의 세계 안에 있는 사물의 흐름을 계산해 내는 것이 원칙적으로 가능하다고 믿음
- 실제, 예측 불가능한 비선형계가 대다수를 차지함
 - 비선형 미분방정식
 - Multiple, Unrelated Solutions들로 이루어져, 실제 많이 사용되지는 않고, 주목 받지 못하지만 실제 세상의 대부분 차지함
 - 어떠한 문제에 대해, 하나의 Solution만 존재한다고 생각하고 접근하는 것을 탈피 해야 함
 - 이러한 접근이 바로, Chaos이론의 시작

1. Introduction: life Can Be So Complicated

- Capital Market & Nonlinear dynamic systems
Nonlinear Equation의 예

$$P_{t+1} = a * P_t - a * P_t^2 \quad 0 < a < 4 \text{ 사이의 상수}$$

P_{t+1} : t+1 시점의 Value

P_t : t 시점의 Value

$a * P_t$: Buyer의 effect

$a * P_t^2$: Seller의 Effect

→ 미래의 Value가 현재의 Value에 의해 변하는 함수

→ 그 미래의 Value가 다시 한번 해당 시점의 현재의 Value가 되어 미래를 계산한다는 점에서 Nonlinear Dynamic System의 예라고 할 수 있음

1. Introduction: life Can Be So Complicated

■ Capital Market & Nonlinear dynamic systems

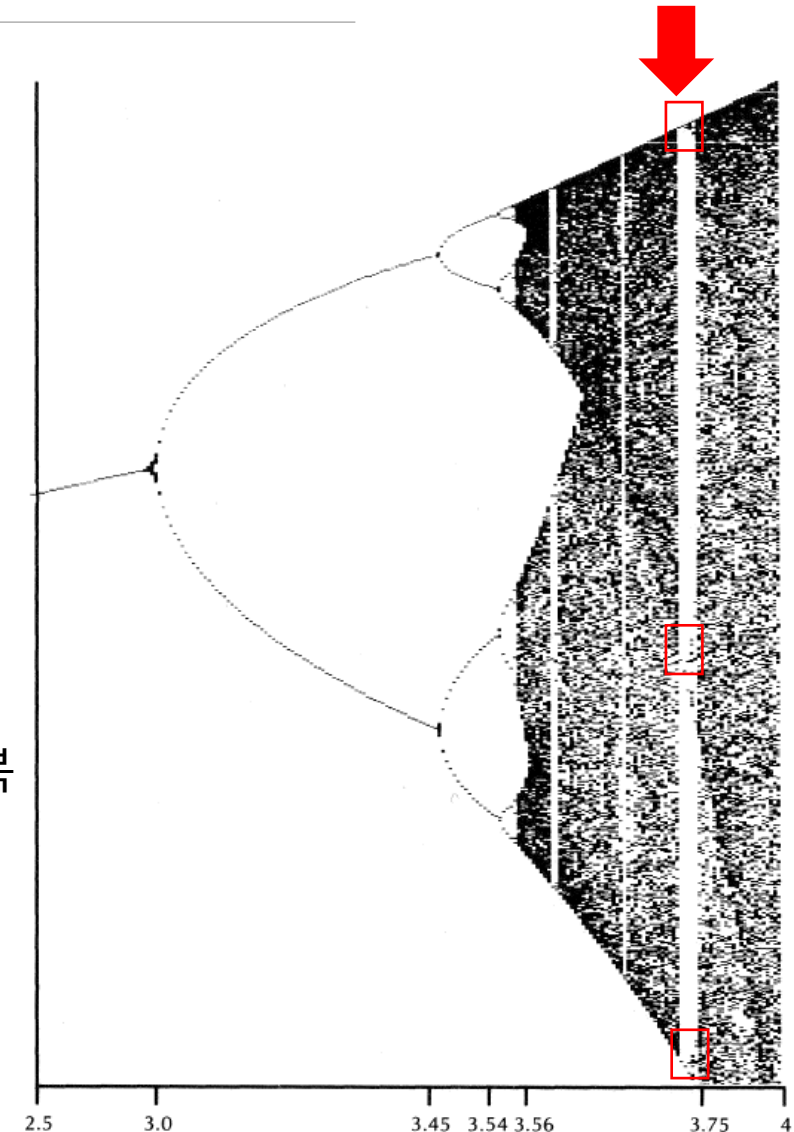
$$P_{t+1} = a * P_t - a * P_t^2 \quad 0 < a < 4 \text{ 사이의 상수}$$

a	P_t	P_{t+1}	a	P_t	P_{t+1}
2	0.3	0.42	2.5	0.300	0.525
2	0.42	0.4872	2.5	0.525	0.623
2	0.4872	0.499672	2.5	0.623	0.587
2	0.499672	0.5	2.5	0.587	0.606
2	0.5	0.5	2.5	0.606	0.597
2	0.5	0.5	2.5	0.606	0.597
2	0.5	0.5	2.5	0.597	0.602
2	0.5	0.5	2.5	0.602	0.599
			2.5	0.599	0.600
			2.5	0.600	0.600
			2.5	0.600	0.600

1. 최초의 P_t 인, P_0 (본 예제 0.3 사용) 에 a 가 곱해지면서 P_1 생성
2. 다시금 P_1 이 P_t 자리에 Input으로 들어가면서, P_2, P_3 를 생성해감
3. 충분한 시행을 거침
4. P_t 와 P_{t+1} 이 안정되는 특정 시점이 오게 되며, 안정되는 P_t (Value)는 a 값에 따라 다수가 될 수도 있음
→ 위의 표의 경우, a 가 2일 때, 0.5로 / a 가 2.5일 때, 0.6으로 안정화
5. **그러나 a 값이 훨씬 커질 경우에는?**
→ 해가 0.5, 0.6으로 고정되지 않음
→ 예시) a 가 2.5를 초과할 경우, 2개 이상의 해가 나옴, a 가 증가함에 따라, 솔루션 집합이 늘어나며, a 값이 3.75가 되면 완전한 Random 상태의 무한개의 솔루션 집합이 생김

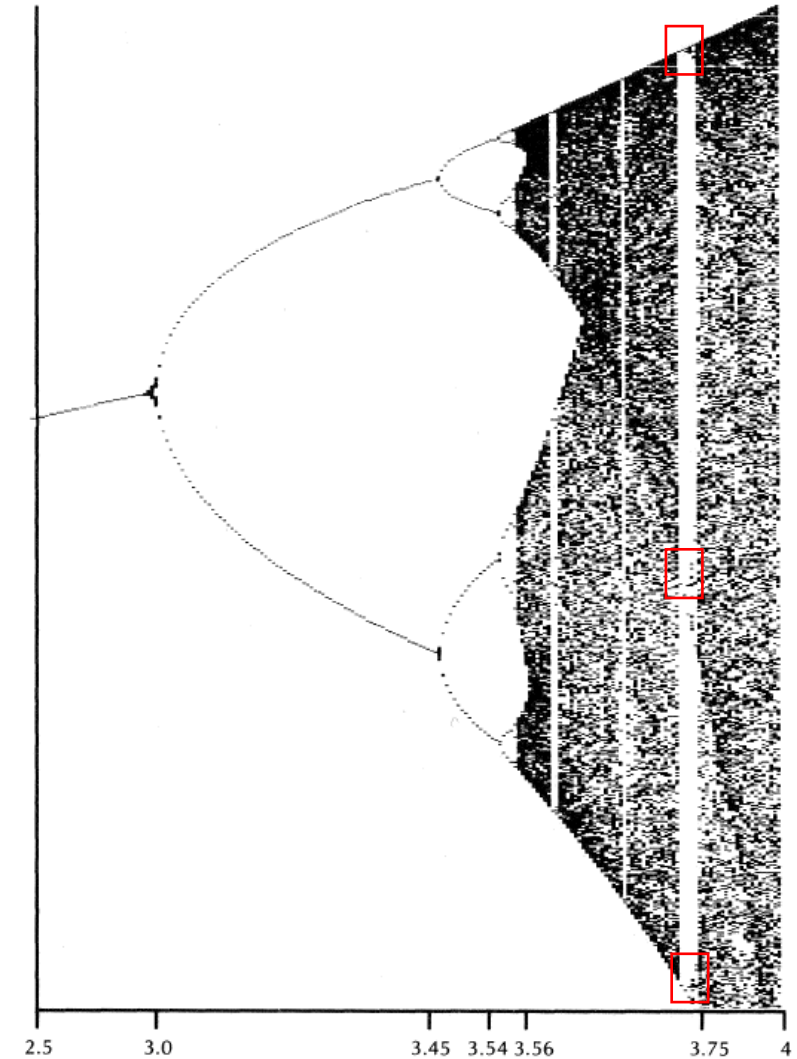
1. Introduction: life Can Be So Complicated

- 앞선 실험을 통해 확인한 내용
 1. 장기간에 걸친 correlations and trends(feedback effect)
→ 어제 일어난 일이 오늘 영향을 미쳐서, 먼 미래를 형성해 나감
 2. Critical Level의 존재(안정성을 잃어가는 특정 한계)
→ 2개 이상의 해가 존재하는 Critical Level이 존재함
(앞선 실험에서의 $a=2.5$)
 3. 프랙탈($a=3.75$ 에서 프랙탈의 형태를 보임)
→ 무한한 경우 속에서 **self similar**한 형태의 반복(화살표)
→ 우측 그림의 3.75부근 하얀 띠 속에, 전체 그림의 모양이 반복됨, 이러한 경우는 System이 Equilibrium을 벗어날 때 생김
 4. Initial Condition에 민감하게 영향을 받음
→ P_0 를 0.3으로 시작, 다른 P_0 라면, 안정화 되는데 다른 시간이 소요됨



1. Introduction: life Can Be So Complicated

- Chapter1에서는 본 실험에 대한 최소한의 내용만 확인
 - 이후, 심화된 내용을 다룰 때 자세한 내용을 확인 할 수 있음



1. Introduction: life Can Be So Complicated

- Logistic equation의 프랙탈적인 성질
 - 엄밀히 말하면 프랙탈과 카오스 간에 수학적 연결 고리는 없음
 - 그러나 카오스 시스템을 면밀히 관찰하면 프랙탈의 성질을 발견할 수 있음
Logistic equation도 그 중 하나.
 - 프랙탈의 가장 큰 특징은 자기 닮음(**self-similarity**)인데 chaos system의 일종인 Logistic equation에서도 이와 같은 특징이 발견됨
 - Chaos system이므로 critical point가 존재하는데, 일정 비율의 거리에서는 해가 무한이 많아지다가 갑자기 유한개로 수렴하는 형태를 보임
- 앞에서 살펴본 식이 Logistic Equation의 예

1. Introduction: life Can Be So Complicated

- 주가는 선형성과 효율적 시장 가설
 - 주가가 선형함수를 취한다는 선형가격결정모형은 재무관리의 지배적인 연구결과
 - 자본자산가격결정모형(CAPM)이나 차익가격결정이론(APT)등
 - 효율적 시장 가설(Efficient Market Hypothesis ; EMH)
 - 수익률들 사이에는 아무런 상관관계가 없음
 - 과거의 가격은 현재가격에 이미 반영
 - 현재의 가격변동은 예기치 못한 정보충격의 결과
 - 위의 모형과 이론들은 EMH를 Base로 함, EMH에 대한 자세한 설명은 Chapter 2에서

2. Random Walks and Efficient Markets

2. Random Walks and Efficient Markets

- 효율적 시장가설(Efficient Market Hypothesis, EMH)
 - 시장이 새로운 정보를 빠르고 정확하게 반영하는 경우 정보가 이미 시장가격에 충분히 반영되어 있기 때문에 투자자들은 그 정보를 이용하더라도 비정상적인 초과수익을 얻을 수 없음
- 복잡한 자본시장에서 수학적으로 다루기 쉬운 모델을 생성해 내기 위한 가설
 - 본 가설을 자본시장에 접목시키면, 수많은 가정을 통해 선형적인 식을 만들어낼 수 있음
- 시대별 분석 기법
 - 1920~1940년대
 - Fundamentalists & Technicians가 Market 분석에 지배적
 - 1950년대
 - Quants가 Market 분석에 지배적

2. Random Walks and Efficient Markets

▪ EMH의 발전

- Louis Bachelier

- 1900년 도박을 분석하기 위해 만든 Method를 주가, 채권, 선물, 옵션에 적용
- 자본시장에서 Weiner Process가 Brownian motion이 같음을 처음으로 제시
- 이후, 아인슈타인이 재조명
- 옵션의 Payoff에 대해 최초로 도식화한 인물
- 비너과정과 브라우니안 모션이 모든 정보를 반영한 움직임이라는 데에서 EMH의 시작

- Cootner

- 1964년 The Random Character of Stock Market Prices라는 Volume(책) 집필자
- 동시대에 연구한 학자로, Markowitz, Tobin, Sharpe 등이 있음
- 위의 책에서 효율적시장가설의 아버지 **Eugene FAMA가 EMH에 대해 소개**
 - 시장은 EMH하여, Martingale("Fair Game")하며, 정보를 통해서 수익을 올릴 수 없다고 말함

2. Random Walks and Efficient Markets

■ EMH의 발전

- Osborne

- 1964년 주가가 랜덤워크를 따른다는 내용을 그의 유명한 저서 "Brownian Motion"에서 발표
- 주가의 움직임은 유체 속 움직이는 Particle의 움직임과 유사
- Osborne의 가정들
 - 1) 최소한의 가격 움직임이 필요하다.
 - 2) 1일 거래량이 유한하며, 그 Size는 상관없다.
 - 3) Price와 Value는 연관되어 있다.
 - 4) 두 가지 Stock이 존재할 때, 당연히 더 높은 "Expected Return"을 가진 Stock에 투자해야 한다.
 - 5) Buyer와 Seller는 모든 Opportunity면에서 동등하다.
 - 6) 과거의 정보는 오늘 아무런 의미가 없으며 가격변동은 새로운 정보에 따라 무작위적으로 발생하므로 주식 수익률의 생성과정은 **IID**(independently & identically distributed)를 따름
 - 7) 충분히 많은 관측치를 확보할 수 있다면 중심극한정리(central limited theorem)에 따라 관측 시점의 장단에 관계없이 수익률의 확률분포는 정규분포(normal distribution)를 따름

2. Random Walks and Efficient Markets

■ Modern Portfolio Theory(MPT)

- Markowitz가 1952년 발표
- Possible Return의 Distribution에 Variance에 의한 Risk를 메길 수 있음
- 최적 포트폴리오의 조합 Efficient Frontier Line

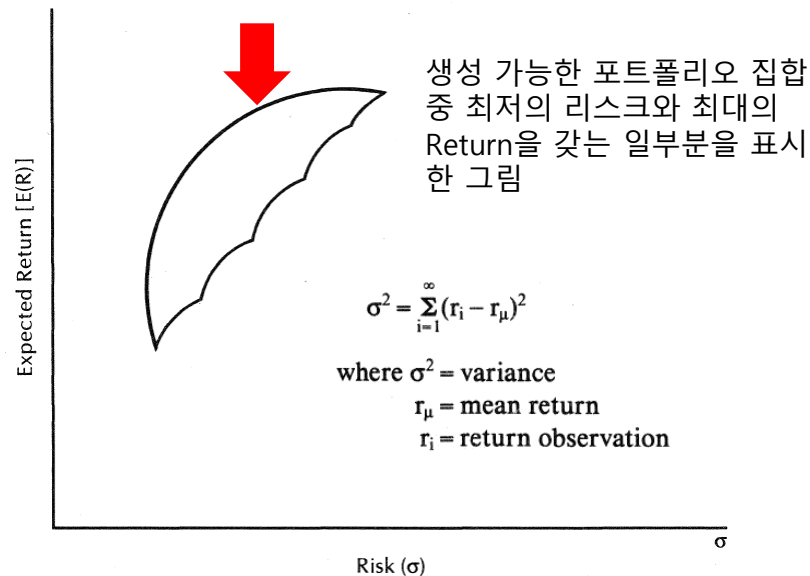


FIGURE 2.1 The efficient frontier.

Sharpe Ratio의 정의
→ 따라서, CML위에 존재하는 모든 포트폴리오들은 같은 샤프지수(Sharpe Ratio)를 가짐

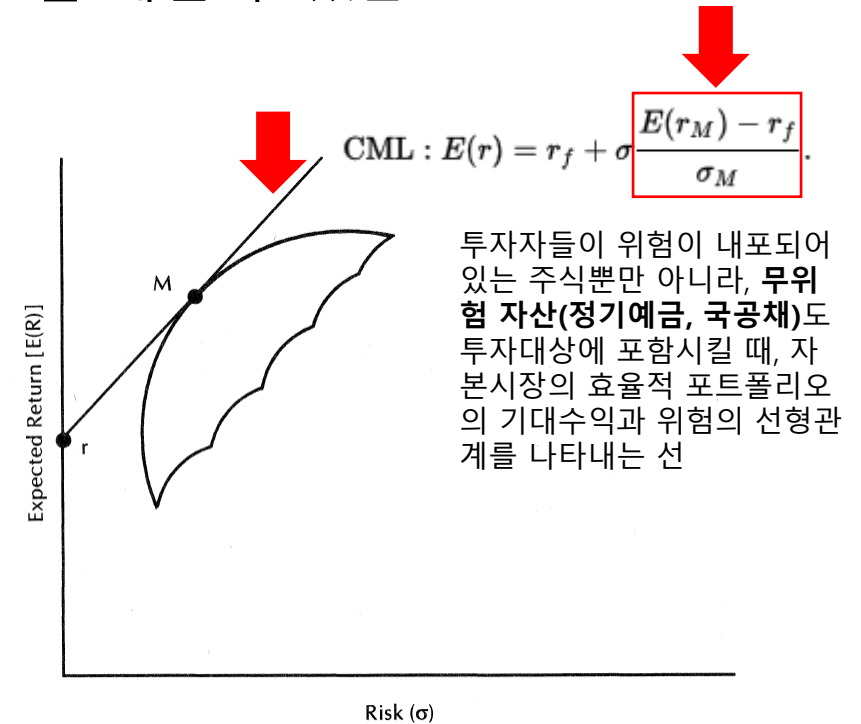


FIGURE 2.2 The capital market line.

2. Random Walks and Efficient Markets

■ CAPM(자본자산 가격결정 모형)

- EMH와 Markowitz's Portfolio Theory의 결합

- Sharpe가 1964년 발표

- 자본시장이 균형상태를 이룰 때 자본자산의 기대수익과 위험의 관계를 설명
- 균형수익률을 도출해내는 모형으로, 체계적 위험의 지표인 베타에 비례하는 위험프리미엄을 측정하여 균형수익률을 도출함
- SML은 CML과 달리 위험프리미엄의 보상기준이 되는 위험이 총위험이 아닌 체계적위험이며, 따라서 효율적포트폴리오뿐만이 아닌 개별주식과 비효율적포트폴리오의 균형수익률도 측정가능하다는 차이를 지님

- CAPM의 가정

- 1) 거래비용, 수수료, 세금 등이 없다.
- 2) 자산은 무한히 나눌 수 있다.
- 3) 돈을 빌리고, 빌려주는데 제한이 없다.
- 4) 모든 투자자는 동일한 위험의 경우 더 높은 수익률 자산을 선택한다.
- 5) EMH에 의한 정보들이 Equilibrium framework을 이룬다.
- 6) 모든 자산은 시장성을 가진다.(팔려고 하면 마음껏 팔 수 있다.)

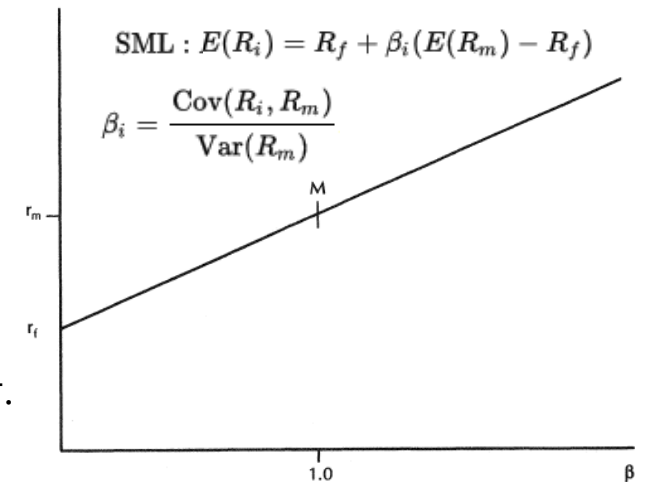


FIGURE 2.3 The security market line.

2. Random Walks and Efficient Markets

■ Summary

1) Rational Investors(합리적인 투자자)

- 모든 투자자는 Mean/Variance Efficiency를 지님
- Risk-averse한 성향을 갖고 최대 높은 기대 수익률을 원함

2) Efficient Markets(효율적 시장)

- 가격은 모든 Public Information을 반영
- 아주 작은 기간인 것을 제외한, 대부분 가격의 움직임은 서로 연관이 없음

3) Random Walks(랜덤 워크)

- Return은 Random walks를 따름
- 따라서, 확률 분포는 Normal or Log-Normal을 따름

3. The Failure of the Linear Paradigm

3. The Failure of the Linear Paradigm

■ Linear Paradigm

- 선형 패러다임은 기본적으로 투자자들은 정보에 대해 선형으로 반응한다는 것
- 즉, 투자자들은 정보가 입수됨에 따라 반응하며, 일련의 사건에 대해 누적적으로 반응하지 않음
- 선형의 관점에는 과거 정보는 이미 주식의 가격에 반영되어 있으므로 합리적 투자자의 개념과 연결되어 있음
- 따라서 선형 패러다임은 수익률이 **근사적으로 정규분포**를 이루고 독립적이어야 한다는 것을 암시함
- 그러나, 실제로는 그렇지 않음

3. The Failure of the Linear Paradigm

- 정규분포 가정에 대한 예외들이 발견
 - EMH를 기반으로 하는 앞선 이론들은 정규분포를 가정하고 있음
 - Osborne(1959)은 주식시장 수익률의 밀도함수를 좌표에 표시했을 때 꼬리 부분에 보다 많은 관찰치가 존재함을 확인
 - 이를 '근사적인 정규분포(approximately normal distribution)' 라고 규정
 - 그러나, 이를 중요하게 생각하지 않았음
 - Mandelbrot(1964)
 - 자본시장의 수익률은 정규분포가 아닌 상태 즉, 평균에서 높은 정점을 갖고, 끝이 두터운 안정적 파레시안 분포(Stable Paretian Distribution)에 대해 이야기
 - 이는 이후, 프랙탈 분포라는 이름으로 불림

3. The Failure of the Linear Paradigm

- Test of Normality

- 1965년 FAMA에 의해 최초 수행
 - Right-hand tail에 비해 Left-hand tail이 더 두꺼웠음
 - Normal distribution에 비해 평균 근처의 peak도 더 높았음
 - 이 형태를 "leptokurtosis"라고 칭함
- 1970년 Sharpe
 - Annual returns를 Normal distribution과 비교했는데, 역시 잘 맞지 않음을 확인

3. The Failure of the Linear Paradigm

■ Test of Normality

- 1990년 Turner and Weigel
 - 1928년~1990년 S&P Index의 Volatility를 검증
 - 위와 유사하게, Fat tail과 더 높은 Mean부근 분포 확인

1928~1989년 S&P 500의 5-day return Frequency 분포

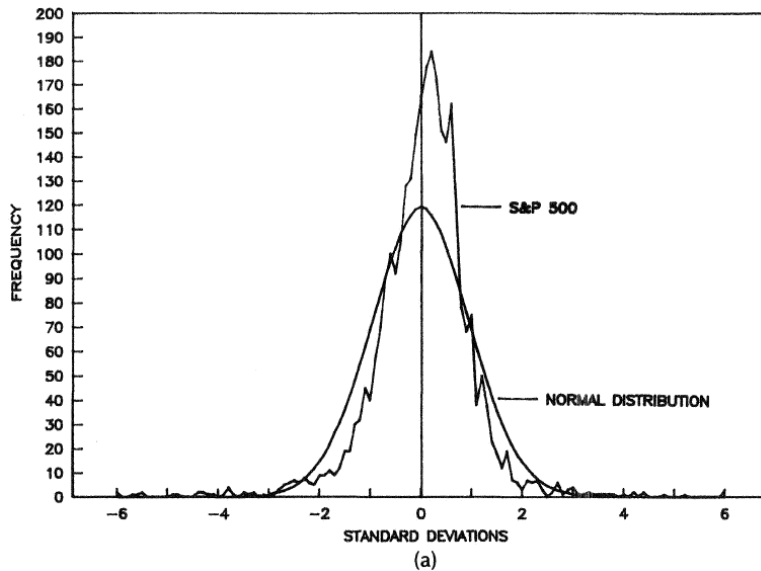


FIGURE 3.1a Frequency distribution of S&P 500 5-day returns, January 1928–December 1989: Normal vs. actual returns.

Normal과의 차이값 분포(실제-normal)

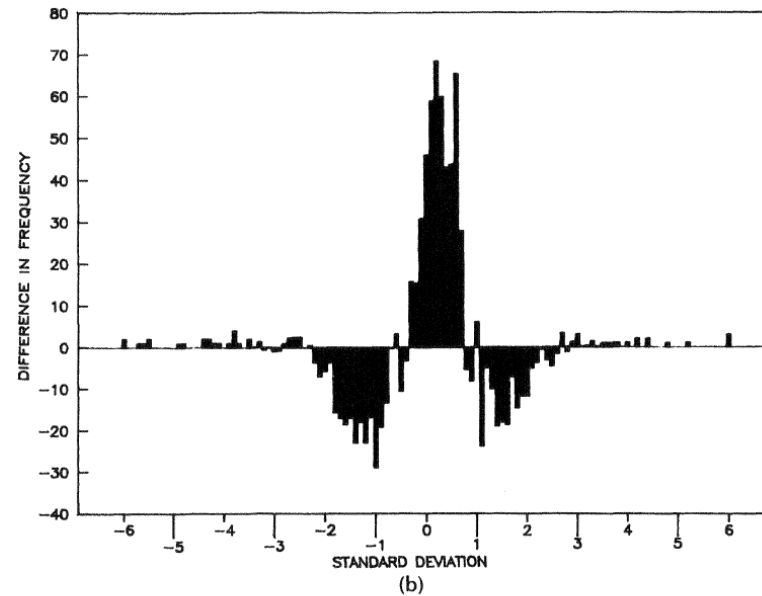


FIGURE 3.1b Difference in frequency, S&P 500 5-day returns: Normal.

Table 3.1 Volatility Study: Daily S&P 500 Returns, 1/28–12/89

Decade	Mean	Standard Deviation	Skewness	Kurtosis
1920s	0.0322	1.6460	-1.4117	18.9700
1930s	-0.0232	1.9150	0.1783	3.7710
1940s	0.0100	0.8898	-0.9354	10.8001
1950s	0.0490	0.7050	-0.8398	7.8594
1960s	0.0172	0.6251	-0.4751	9.8719
1970s	0.0062	0.8652	0.2565	2.2935
1980s	0.0468	1.0989	-3.7752	79.6573
Overall	0.0170	1.1516	-0.6338	21.3122

Adapted from Turner and Weigel (1990).

10년 단위의 평균, SD, 비대칭도, 첨도

3. The Failure of the Linear Paradigm

■ The Curious Behavior of Volatility

- 분산은 정규분포 하에서만 안정적이고 유한함
- 변동성 연구는 시간에 따른 안정성의 문제에 초점을 두어옴
 - 정규분포 하에서 5일간 수익률의 분산은 일별 수익률 분산의 5배
 - 따라서, 표준편차는 $T^{1/2}$ 를 따라야 함
 - 그러나, 그렇지 않음
- 수익률 분포가 정규분포를 따르지 않는다 것에 따르는 추가 연구들
 - Turner & Weigel(1990)
 - 월별 및 분기별 수익률의 변동성이 연간 변동성에 비해서 더 크며 일별 변동성은 더 작음을 확인
 - Shiller(1989)
 - 합리적 투자자들의 주식평가는, 보유주식으로부터의 기대 배당에 기초함
 - 실제 가격은, 인플레이션을 감안하더라도 기대배당의 변화보다는 변동성이 더 크게 나타남
 - 'noise traders'와 'smart money traders' 두 가지 형태의 투자자들이 존재
 - noise traders : 합리적인 판단과 정보의 활용 없이 투자하는 사람
 - smart money traders : 충분한 정보의 활용을 통해 합리적인 판단으로 투자하는 사람

3. The Failure of the Linear Paradigm

■ Why The Fat Tails?

- 수익률 분포에 있어서 leptokurtosis한 특성이 나타나는 이유?
- 정보가 순차적이고 연속적으로 나타나는 것이 아니라 간헐적이고 군집(clumps)적으로 나타나기 때문
 - 즉 정보의 분포가 leptokurtosis하기 때문에, 가격변화의 분포 또한 leptokurtosis하다는 것
 - 정보의 간헐적 도착(the infrequent arrival of information)
 - 사람들은 일단 정보를 무시하다가 임계수준에 도달하면 반응
 - 이는 현재는 과거의 영향을 받는 것을 의미하며 EMH에 명백히 위배
- 선형 패러다임은 기본적으로 투자자들은 정보에 대해 선형으로 반응
 - 새로운 패러다임은 투자자들의 정보에 대한 반응이 비선형적
 - 기존의 관점보다 자연스럽게 확장된 것

3. The Failure of the Linear Paradigm

- The Danger of Simplifying Assumptions

EMH를 기반으로하는 Assumptions이 현실에서 적용되기 힘든 이유

- 1) 사람들은 항상 Risk-Averse 하지 않다.
→ 특수한 계약과 같은 특정 상황에서 Risk를 Taking하기도 한다!
- 2) 사람들은 주관적인 성향으로 편향되어있다.
- 3) 사람들은 즉각적으로 모든 정보에 반응하지 않는다.
- 4) 사람은 항상 합리적이지 않다.

- 주식 수익률의 정규분포를 이루지 않았을 때 생길 수 있는 문제

- 상관계수와 t-통계량과 같은 기법들로부터 도출된 해답은 오류가 발생
- 주가와 랜덤워크에 대한 가정 또한 심각한 타격

4. Markets and Chaos: Chance and Necessity

4. Markets and Chaos: Chance and Necessity

- EMH의 Market Behavior 예측의 실패
 - 앞서 살펴본 Chapter2, 3을 통해 확인
 - EMH를 기반으로 하는 CAPM과 같은 모델들은 심각한 결점이 있음
 - 비평가들은, EMH가 투자 매니저, 특히 non-quantitative한 매니저들의 무능함을 대변하고 있다고 말함
 - 이에 대한 수 많은 실험적 결과에도 불구하고, 이 책에서 다룬 내용은 일부분을 다룬 것, 효율적시장에 대한 논란은 계속되고 있음
 - 실제 시장이 효율적이라는 결론적 증거가 거의 없고, 그렇지 않다는 증거도 거의 없기 때문
 - Quants와 Practitioners의 끝나지 않는 싸움

4. Markets and Chaos: Chance and Necessity

■ Can Chance and Necessity Coexist

- Randomness와 Order가 공존할 수 있을까?
 - Noise는 항상 System을 방해하고, 만약 그 Noise에 질서가 있다면, 그것은 지배적인 영향을 미칠 수 있음
 - Technical Analysts는 200-Day Moving Average와 같은 지표가, 그런 Noise를 줄여준다고 말하고 있음
 - Randomness와 Order가 함께 활용된 이론 즉, 새로운 패러다임이 필요
 - 세상은 Static Equilibrium이 아닌, Nonlinear Dynamic System
 - Randomness는 Static order를 만들기 위한 **Determinism**과 함께 공존해야함
 - Determinism : 사물, 현상이 모두 객관적인 연관성을 지닌 채 서로 조건짓고 있다는 학설
 - 따라서, 그 질서(Order)는 Dynamic Process를 따라야 함