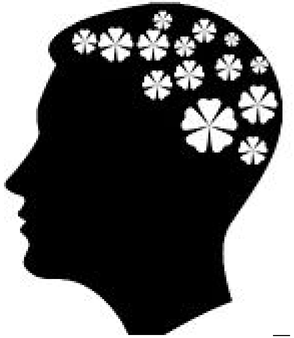
离散数学

DISCRETE MATHEMATICS

温故而知新

- 基本概念--------等值演算---------推理理论

所谓推理，是指从一组前提<u>合乎逻辑</u>地推出结论的思维过程。



第三章 命题逻辑的推理理论

- 推理的形式结构
  - 推理的正确与错误
  - 推理的形式结构
  - 判断推理正确的方法
  - 推理定律
- 自然推理系统P
  - 形式系统的定义与分类
  - 自然推理系统P
  - 在P中构造证明:直接证明法、附加前提证明法、归谬法

3.1 推理的形式结构

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值，$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k$为假，或当$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论.

注意: 推理正确不能保证结论一定正确

定理3.1 由命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_k$ 推B的推理正确当且仅当$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_k\rightarrow B$为重言式

推理的形式结构

1. $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\} \vdash B$

   若推理正确, 记为$\{A_1,A_2,\ldots,A_n\} \vDash B$

2. $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

   若推理正确, 记为$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \Rightarrow B$

3. 前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$

   结论: B

判断推理是否正确的方法:

- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法

推理实例

例1 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是1号，则明天是5号. 今天是1号. 所以, 明天是5号.

(2) 若今天是1号，则明天是5号. 明天是5号. 所以, 今天是1号.

解 设 p：今天是1号，q：明天是5号.

(1) 推理的形式结构: $\boldsymbol{(p\to q)\land p\to q}$

用等值演算法

$$(p\to q)\land p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\lor q)\land p)\lor q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\lor\neg q\lor q \Leftrightarrow 1$$

由定理3.1可知推理正确

推理实例

(2) 推理的形式结构: $\boldsymbol{(p\to q)\land q\to p}$

用主析取范式法

$$
\begin{aligned}
& (p\to q)\land q\to p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\lor q)\land q\to p \\
\Leftrightarrow\ & \neg\ ((\neg p\lor q)\land q)\lor p \\
\Leftrightarrow\ & \neg q\lor p \\
\Leftrightarrow\ & (\neg p\land\neg q)\lor(p\land\neg q)\lor (p\land\neg q)\lor(p\land q) \\
\Leftrightarrow\ & m_0\lor m_2\lor m_3
\end{aligned}
$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A\vee B)$ 附加律
2. $(A\wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A\rightarrow B)\wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A\rightarrow B)\wedge\neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A\vee B)\wedge\neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C) \Rightarrow (A\rightarrow C)$ 假言三段论
7. $(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C) \Rightarrow (A\leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow (B\vee D)$ 构造性二难

   $(A\rightarrow B)\wedge(\neg A\rightarrow B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\neg B\vee\neg D) \Rightarrow (\neg A\vee\neg C)$ 破坏性二难

每个等值式可产生两个推理定律。

如, 由$A\Leftrightarrow\neg\neg A$可产生 $A\Rightarrow\neg\neg A$ 和 $\neg\neg A\Rightarrow A$

推理定理-理解

- 在下列每个论证里使用了什么推理规则
  - 爱丽丝主修数学，因此，爱丽丝主修数学或计算机科学。
  - 杰瑞主修数学和计算机科学，因此，杰瑞主修数学。
  - 若天气下雨，则游泳池将关闭。天气下雨，因此，游泳池关闭。
  - 若今天下雪，则大学将关闭。今天大学没有关闭，因此，今天没有下雪。
  - 若我去游泳，则我将在太阳下停留过久。若我在太阳下停留过久，则我将有晒斑。因此，若我去游泳，则我将有晒斑。

3.2 自然推理系统*P*

在数学、逻辑和计算机科学中，形式语言（Formal Language）是用精确的数学或机器可处理的公式定义的语言。

定义3.2　一个形式系统 I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记$I=<A(I),E(I),A_X(I),R(I)>$, 其中$<A(I),E(I)>$是 I 的形式语言系统, $<A(I),E(I)>$ 是 I 的形式演算系统.

形式系统一般分为两类：

（1）自然推理系统: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$

特点：从任意给定的前提出发，应用系统中的推理规则进行推理演算，最后得到的命题公式是推理的结论（它是有效的结论，可能是重言式，也可能不是重言式）。

【由于这些规则是日常人们思维，特别是数学思维规律的抽象，该系统被称之为自然推理系统】

（2）公理推理系统：只能从若干条给定公理出发，应用系统中的推理规则进行推理演算。推出的结论是系统中的重言式, 称作定理。

【欧几里得公理，牛顿运动定律】

自然推理系统P

定义3.3 自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式（同定义1.6)

3. 推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \to B \quad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \vee B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \wedge B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \to B \quad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \to B \quad B \to C}{\therefore A \to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \vee B \quad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore \neg A \vee \neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$

在自然推理系统P中构造证明

设前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$,结论B及公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$.

如果每一个$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j，或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到，并且$C_l=B$，则称这个公式序列是由$A_1, A_2,\ldots, A_k$推出B的证明。

在自然推理系统P中构造证明

例2 构造下面推理的证明：

若明天是星期一或星期三，我明天就有课．若我明天有课，今天必备课．我今天没备课．所以，明天不是星期一、也不是星期三．

解 (1) 设命题并符号化

设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我明天有课，s：我今天备课

(2) 写出证明的形式结构

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$

直接证明法

(3) 证明

① $r \to s$	前提引入
② $\neg s$	前提引入
③ $\neg r$	①②拒取式
④ $(p \vee q) \to r$	前提引入
⑤ $\neg(p \vee q)$	③④拒取式
⑥ $\neg p \wedge \neg q$	⑤置换

课堂练习1

在命题逻辑的自然推理系统P中构造下面推理的证明：

　　如果马会飞或羊吃草，则母鸡就会是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以羊不吃草。

课堂练习1

解：先将简单命题符号化：p:马会飞, q:羊吃草, r:母鸡是飞鸟，s: 烤熟的鸭子会跑

前提：$p \vee q \rightarrow r$，$r \rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg q$

证明:

(1)	$\neg s$	前提引入
(2)	$r \rightarrow s$	前提引入
(3)	$\neg r$	(1) (2) 拒取式
(4)	$p \vee q \rightarrow r$	前提引入
(5)	$\neg(p \vee q)$	(3)(4) 拒取式
(6)	$\neg p \wedge \neg q$	(5) 置换规则
(7)	$\neg q$	(6) 化简规则

课堂练习2

在自然推理系统P中构造下面推理的证明：

如果今天是周六，我们就到颐和园或圆明园玩. 如果颐和园游人太多，就不去颐和园. 今天是周六，并且颐和园游人太多. 所以，我们去圆明园或动物园玩.

证明：

(1) 设 p：今天是周六，q：到颐和园玩，　r：到圆明园玩，

s：颐和园游人太多　　　　t：到动物园玩

(2) 前提：$p\to(q\vee r)$，$s\to\neg q$，$p\wedge s$

结论：$r\vee t$

课堂练习2

(3) 证明:

① $p\rightarrow(q\vee r)$	前提引入
② $p\wedge s$	前提引入
③ p	② 化简规则
④ $q\vee r$	① ③假言推理
⑤ $s\rightarrow\neg q$	前提引入
⑥ s	② 化简规则
⑦ $\neg q$	⑤ ⑥假言推理
⑧ r	④ ⑦析取三段论
⑨ $r\vee t$	⑧附加

课堂小结

推理的形式结构 → 推理定律 → 推理的证明方法 → 直接证明法

作业

- 习题3 第14题第6小题 在自然推理系统P中构造推理的证明。
- 习题3 第17题 实际问题中，符号化后构造推理的证明。


THANK
YOU

引入

- 上节课的作业

前提： $\neg p \vee r, \neg q \vee s, p \wedge q$

结论： $t \rightarrow r \wedge s$

附加前提证明法

附加前提证明法　适用于结论为蕴涵式

欲证

　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

　结论：$C \rightarrow B$

等价地证明

　前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

　结论：B

理由：

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B$$

附加前提证明法实例

例3 构造下面推理的证明

2是素数或合数. 若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数. 若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数. 所以，如果4是素数，则2是合数.

解 用附加前提证明法构造证明

(1) 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$ 是无理数，s：4是素数

(2) 推理的形式结构

前提：$p \vee q$，$p \rightarrow r$，$r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

附加前提证明法实例

(3) 证明

① s 附加前提引入

② $p \to r$ 前提引入

③ $r \to \neg s$ 前提引入

④ $p \to \neg s$ ②③假言三段论

⑤ $\neg p$ ①④拒取式

⑥ $p \vee q$ 前提引入

⑦ q ⑤⑥析取三段论

归谬法（反证法）

归谬法 (反证法)

欲证

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

做法

在前提中加入$\neg B$，推出矛盾.

理由

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0 \\
\Leftrightarrow\ & A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

归谬法实例

例4　前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\to s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明　用归谬法

① q	结论否定引入
② $r\to s$	前提引入
③ $\neg s$	前提引入
④ $\neg r$	②③拒取式
⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取

证明方法小结

- 直接证明法：由前提出发，利用推理规则，推出B。
- 附加前提证明法：当结论为C->B时，可以将C列入前提中，然后用直接证明法推出B，这里C为附加前提。
- 归谬证明法：将结论B的否定式列入前提中，然后用直接证明法推出矛盾式。

小结

- 推理证明方法
  - 直接证明法
  - 附加前提证明法
  - 归谬法

作业

- 习题3 第15题第2小题 在自然推理系统P中用附加前提法构造推理的证明。
- 习题3 第16题第2小题 在自然推理系统P中用归谬法构造推理的证明。

命题逻辑（chap1、2、3）小结

基本概念

等值演算

推理理论


THANK YOU