# 离散数学

# DISCRETE MATHEMATICS

# 我真的没有时间上学！！

“但是我没有时间上学，”埃迪向劝学员解释道，“我一天睡眠8小时，以每天为24小时计，一年中的睡眠时间加起来大约122天。星期六和星期天不上课，一年总共是104天。我们有60天的暑假。我每天用膳要花3小时--一年就要45天以上。我每天至少还得有2小时的娱乐活动--一年就要超过30天。”

埃迪边说边匆匆写下这些数字，然后他把所有的天数加起来。结果是361。

| | |
|---|---|
| 睡眠(一天8小时) | 122 |
| 星期六和星期天 | 104 |
| 暑假 | 60 |
| 用膳(一天3小时) | 45 |
| 娱乐(一天2小时) | 30 |
| 总 和 | 361天 |


“你瞧，”埃迪接着说，“剩下给我病卧在床的只有4天，我还没有把每年7天的学校假期考虑在内呢!”

# 第二部分 集合论

现代数学（包括离散数学）的“大厦”是建立在集合论的基础之上的，从而集合论也是计算科学的基础。

集合不仅可以用来表示数及其运算，还可以用于非数值信息的表示和处理（如数据的增加、删除、修改、排序及数据间关系的描述等）。集合论在编译原理、开关理论、信息检索、形式语言、数据库与知识库、专家系统、CAD、CAI、人工智能等各个领域中有十分广泛的应用。

本部分从集合的直观概念出发，介绍集合论中的一些基本概念和基本理论，其中包括集合、关系、函数等。

# 第二部分　集合论

许多重要的离散结构是由所谓的对象集构建的集合，如线性表（数组）、图。

- **Chap6 集合代数**
  - 表示、运算与计数
- **Chap7 关系**
  - 表示对象之间联系的有序对集合
- **Chap8 函数**
  - 对整个离散数学起着重要的作用，用以表示算法的计算复杂性、计算对象的数量、研究集合的大小等等。
  - 排序和字符串是特殊类型的函数
  - 程序语言中的函数

# 第六章 集合代数

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 有穷集的计数
- 集合恒等式

# 6.1 集合的基本概念

1. 集合定义

集合没有精确的数学定义

理解：由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素

常见的数集：N, Z, Q, R, C 等分别表示自然数、整数、有理数、实数、复数集合

2. 集合表示法

枚举法----通过列出全体元素来表示集合

谓词表示法----通过谓词概括集合元素的性质

实例：

枚举法 自然数集合 N={0,1,2,3,…}

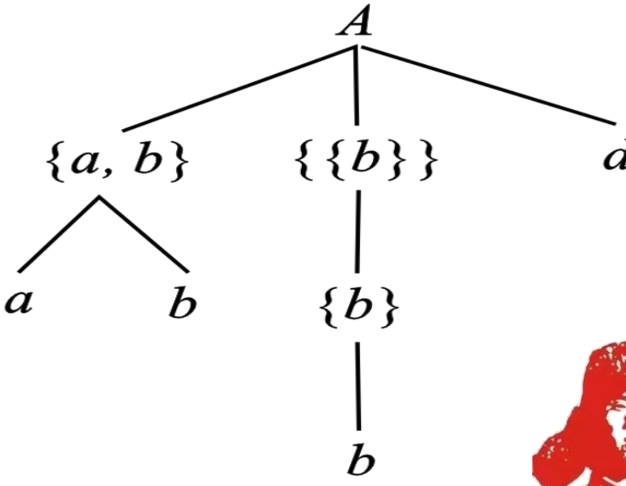
谓词法 $S=\{\, x \mid x$是实数，$x^2-1=0\}$

# 元素与集合

1. 集合的元素具有的性质
   **无序性**：元素列出的顺序无关
   **相异性**：集合的每个元素只计数一次
   **确定性**：对任何元素和集合都能确定这个元素是否为该集合的元素
   **任意性**：集合的元素也可以是集合

2. 元素与集合的关系
   隶属关系：$\in$或者$\notin$

3. 集合的树型层次结构




$d \in A$ , $a \notin A$

一滴水只有放进大海里才永远不会干涸，一个人只有当他把自己和集体事业融合在一起的时候才能最有力量。
----雷锋

# 集合与集合

集合与集合之间的关系：$\subseteq, =, \subset, \nsubseteq, \neq, \not\subset$

定义6.1 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B)$

定义6.2 $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

定义6.3 $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B$

$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$

注意 $\in$ 和 $\subseteq$ 是不同层次的问题

# 思考

- 思考：$\neq$ 和 $\not\subset$ 的定义

# 空集、全集和幂集

1．定义6.4 空集 $\varnothing$： 不含有任何元素的集合

实例：  $\{ x \mid x \in R \wedge x^2+1=0 \}$

定理6.1 空集是任何集合的子集。

证 对于任意集合$A$，

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T \text{ (恒真命题)}$$

推论 $\varnothing$是惟一的

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{ x \mid x \subseteq A \}$

A={1,2,3} P(A)=?

实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，  $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集 $E$：包含了所有集合的集合

全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

# 6.1 集合的基本概念

例1 判断真伪。

(1)$\{x\}\subseteq\{x\}$ (2)$\{x\}\in\{x\}$ (3)$\{x\}\in\{x,\{x\}\}$ (4)$\{x\}\subseteq\{x,\{x\}\}$

(5)$\{x\}\subseteq\{x\}\cup x$ (6)若$x\in A$, $A\in P(B)$, 则$x\in P(B)$

(7)若$x\subseteq A$, $A\subseteq P(B)$, 则$x\subseteq P(B)$

例2求下列集合的幂集合。

(1)$\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ (2)$\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\}$ (3)$\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\}$

**解： (1) $P(\{\varnothing,\{\varnothing\}\})=\{\varnothing, \{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$.**

**(2) $P(\{\varnothing\cup\{\varnothing\}\})=P(\{\{\varnothing\}\})=\{\varnothing,\{\{\varnothing\}\}\}$.**

**(3) $P(\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,1,2\}\})=P(\{\{1,2\}\})=\{\varnothing,\{\{1,2\}\}\}$.**

# 集合代数

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 有穷集的计数
- 集合恒等式

## 6.2 集合的运算

初级运算

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$

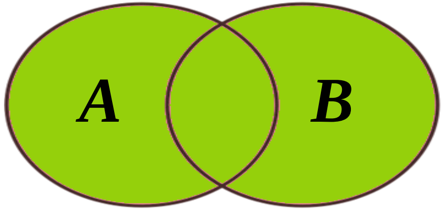
交 $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$

相对补 $A - B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$

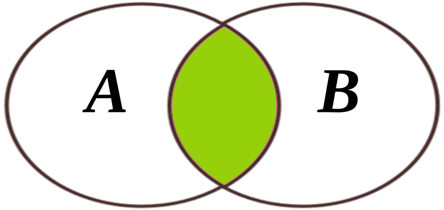
定义6.8 对称差 $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

定义6.9 绝对补 $\sim A = E - A$

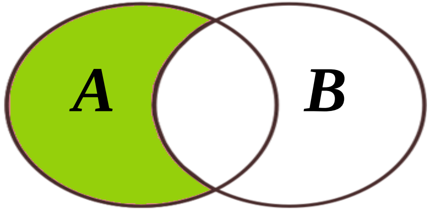
# 文氏图



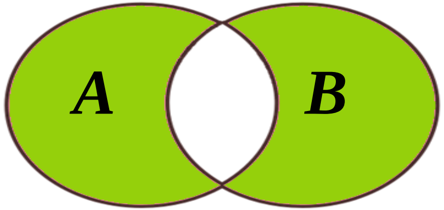

$A \cup B$



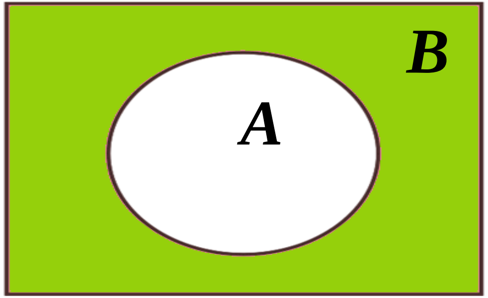

$A \cap B$




$A - B$




$A \oplus B$




$\sim A$

# 几点说明

- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

  $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{ x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_n \}$

  $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{ x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_n \}$

- $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

- $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$

# 广义运算

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10　广义并　$\cup A = \{\, x \mid \exists z\,(\, z \in A \wedge x \in z\,)\}$

　　　　　广义交　$\cap A = \{\, x \mid \forall z\,(\, z \in A \rightarrow x \in z\,)\}$

实例

$$\cup\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1,2,3\}$$

$$\cap\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}=\{1\}$$

$$\cup\{\{a\}\}=\{a\},\quad \cap\{\{a\}\}=\{a\}$$

$$\cup\{a\}=a,\quad \cap\{a\}=a$$

# 关于广义运算的说明

2. 广义运算的性质

(1) $\cup\varnothing=\varnothing$，$\cap\varnothing$无意义

(2) 单元集$\{x\}$的广义并和广义交都等于$x$

(3) 广义运算减少集合的层次（括弧减少一层）

(4) 广义运算的计算：一般情况下可以转变成初级运算

$$\cup\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$$

$$\cap\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}=A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$$

3. 引入广义运算的意义

可以表示无数个集合的并、交运算，例如

$$\cup\{\{x\} \mid x\in\mathrm{R}\}=\mathrm{R}$$

这里的 R 代表实数集合.

# 运算的优先权规定

1 类运算：初级运算$\cup, \cap, -, \oplus$,

优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算和~运算，

运算由右向左进行

混合运算：2 类运算优先于1 类运算

例3　$A=\{\{a\},\{a,b\}\}$，计算$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$.

解：

$$\cap\cup A\cup(\cup\cup A-\cup\cap A)$$
$$=\cap\{a,b\}\cup(\cup\{a,b\}-\cup\{a\})$$
$$=(a\cap b)\cup((a\cup b)-a)$$
$$=(a\cap b)\cup(b-a)=b$$

# 课堂小结

- 集合论总览

- 集合、元素、特殊集合（空集、全集、幂集）
- 集合的$\cup$, $\cap$, $-$, $\sim$, $\oplus$等运算以及广义$\cup$, $\cap$运算

# 作业

- 习题6 第8题 求幂集


THANK
YOU

# 引入　我真的没有时间上学！！

“但是我没有时间上学，”埃迪向劝学员解释道，“我一天睡眠8小时，以每天为24小时计，一年中的睡眠时间加起来大约122天。星期六和星期天不上课，一年总共是104天。我们有60天的暑假。我每天用膳要花3小时--一年就要45天以上。我每天至少还得有2小时的娱乐活动--一年就要超过30天。”

埃迪边说边匆匆写下这些数字，然后他把所有的天数加起来。结果是361。

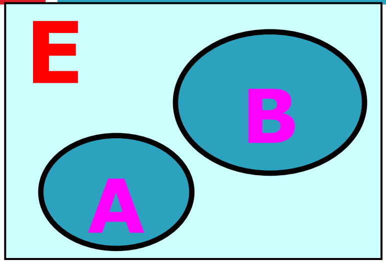
| | |
|---|---|
| 睡眠(一天8小时) | 122 |
| 星期六和星期天 | 104 |
| 暑假 | 60 |
| 用膳(一天3小时) | 45 |
| 娱乐(一天2小时) | 30 |
| 总 和 | 361天 |


“你瞧，”埃迪接着说，“剩下给我病卧在床的只有4天，我还没有把每年7天的学校假期考虑在内呢!”

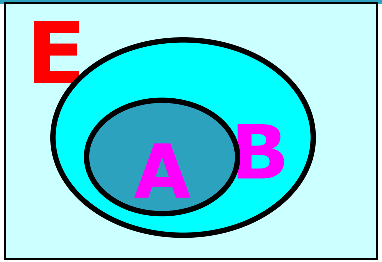
# 集合代数

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 有穷集的计数
- 集合恒等式

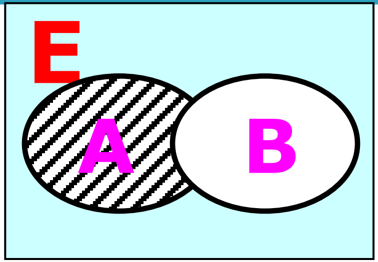
# 6.3 有穷集的计数



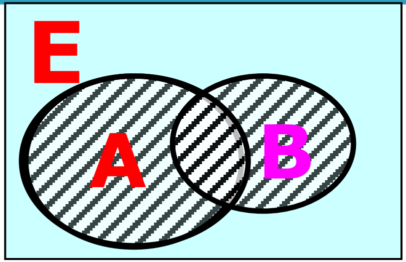

$A \cap B = \phi$



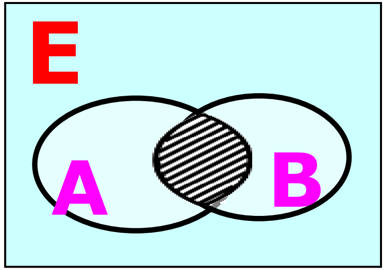

$A \cap B = A$



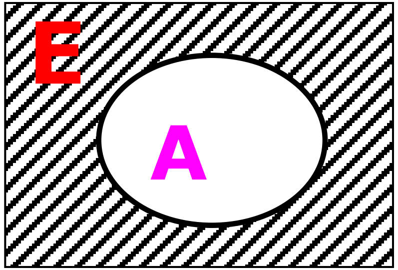

$A - B$



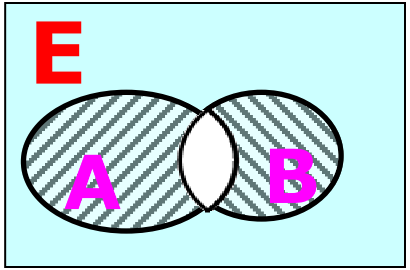

$A \cup B$



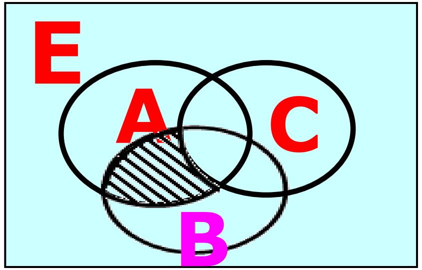

$A \cap B$




$\sim A$

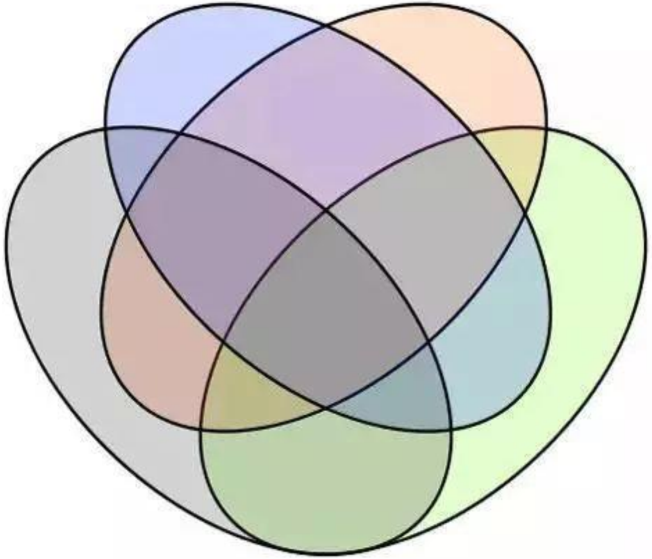



$A \oplus B$




$(A \cap B) - C$

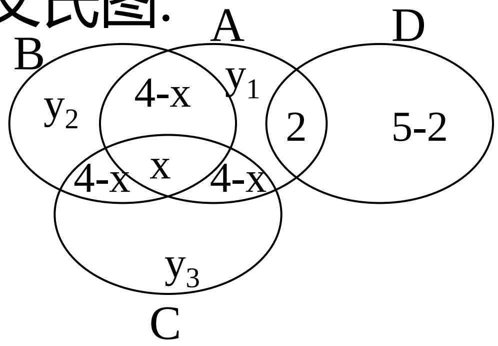
集合间的关系与运算的表示：文氏图(Venn Diagrams)



# 6.3 有穷集的计数

例4 对24名会外国语的科技人员进行掌握外语情况的调查，其统计结果如下：会英、日、德和法语的人分别为13，5，10和9人。其中同时会英语和日语的有2人，会英、德和法语中任两种语言的都是4人。已知会日语的人既不会法语也不会德语，分别求只会一种语言的人数和会三种语言的人数。

解 令A,B,C,D分别表示会英、法、德、日语的人的集合，根据题意得文氏图.




设同时会三种语言有x人，只会英、法或德语一种语言的分别是$y_1,y_2,y_3$人。则有

$$
\begin{cases}
y_1+2(4-x)+x+2=13 \\
y_2+2(4-x)+x=9 \\
y_3+2(4-x)+x=10 \\
y_1+y_2+y_2+3(4-x)+x=19
\end{cases}
$$

解方程组得 $x=1,y_1=4,y_2=2,y_3=3.$

# 有穷集合元素的计数

例5　求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6整除，也不能被8整除的数有多少个?

解 方法一：文氏图

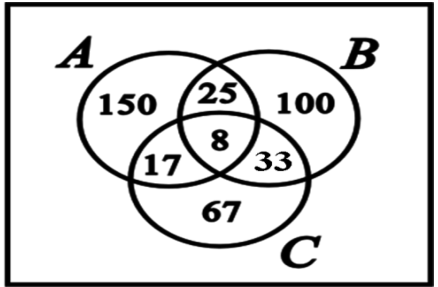
定义以下集合：

$S=\{ x \mid x\in Z \wedge 1\le x\le 1000\}$

$A=\{ x \mid x\in S \wedge x$可被5整除$\}$

$B=\{ x \mid x\in S \wedge x$可被6整除$\}$

$C=\{ x \mid x\in S \wedge x$可被8整除$\}$




$|S| = 1000$

$|A|=\lfloor 1000/5\rfloor=200$, $|B|=\lfloor 1000/6\rfloor=166$,

$|C|=\lfloor 1000/8\rfloor=125$

$|A\cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6)\rfloor = \lfloor 1000/30\rfloor = 33$

$|A\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8)\rfloor = \lfloor 1000/40\rfloor = 25$

$|B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8)\rfloor = \lfloor 1000/24\rfloor = 41$

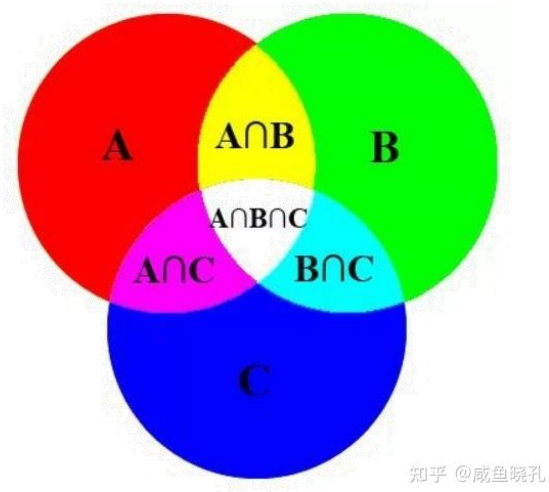
$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8)\rfloor = \lfloor 1000/120\rfloor = 8$

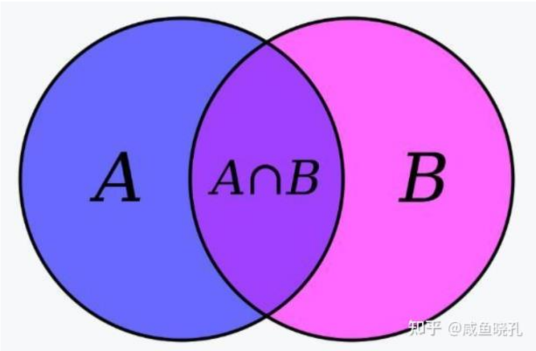
画出文氏图，然后填入相应的数字，解得

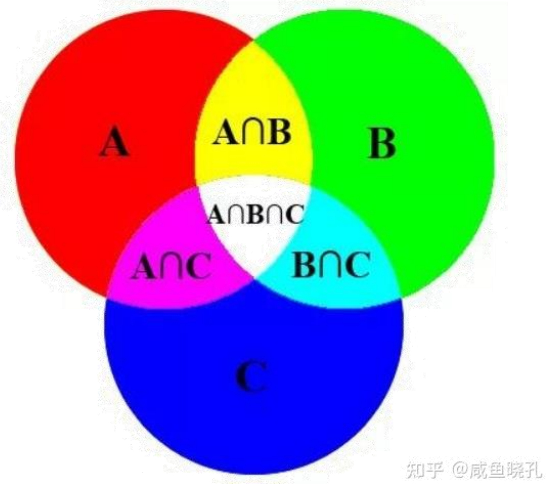
$N=1000 - (200+100+33+67)$

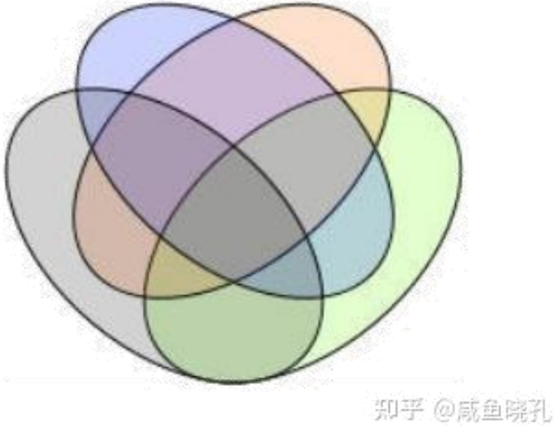
$=600$

# 有穷集合元素的计数




A
A∩B
B
知乎 @咸鱼晓孔


A
A∩B
B
A∩B∩C
A∩C
B∩C
C
知乎 @咸鱼晓孔


知乎 @咸鱼晓孔

# 实例

方法二

$|S| = 1000$

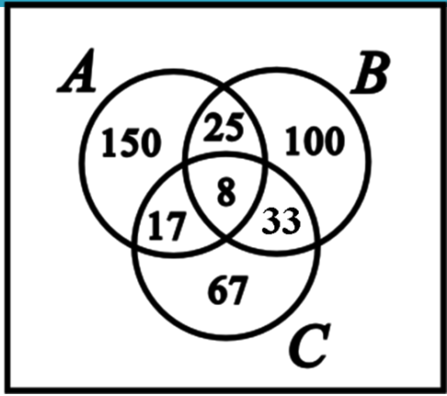
$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\ \ |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166,\ \ |C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$

$|A \cap B| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6) \rfloor = \lfloor 1000/30 \rfloor = 33$

$|A \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,8) \rfloor = \lfloor 1000/40 \rfloor = 25$

$|B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(6,8) \rfloor = \lfloor 1000/24 \rfloor = 41$

$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/\mathrm{lcm}(5,6,8) \rfloor = \lfloor 1000/120 \rfloor = 8$




$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}|$

$= |S| -(|A|+|B|+|C|)+(|A \cap B|+|A \cap C|+ |B \cap C|)- |A \cap B \cap C|$

$= 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8$

$= 600$

# 有穷集合元素的计数

包含排斥原理（容斥原理）

定理6.2　设集合$S$上定义了$n$条性质，其中具有第 $i$ 条性质的元素构成子集$A_i$, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{1\le i\le n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

推论　$S$中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$


➢ 公务员考试中，根据集合的个数，容斥原理问题一般有两集合容斥关系和三集合容斥关系两种类型。

# 集合代数

- 集合的基本概念
- 集合的运算
- 有穷集的计数
- 集合恒等式

# 6.4 集合恒等式-集合算律

1．只涉及一个运算的算律：
交换律、结合律、幂等律

| | $\cup$ | $\cap$ | $\oplus$ |
|---|---|---|---|
| 交换 | $A\cup B=B\cup A$ | $A\cap B=B\cap A$ | $A\oplus B=B\oplus A$ |
| 结合 | $(A\cup B)\cup C$ $=A\cup(B\cup C)$ | $(A\cap B)\cap C=$ $A\cap(B\cap C)$ | $(A\oplus B)\oplus C$ $=A\oplus(B\oplus C)$ |
| 幂等 | $A\cup A=A$ | $A\cap A=A$ | |

# 集合算律

2．涉及两个不同运算的算律：

分配律、吸收律

| | $\cup$与$\cap$ | $\cap$与$\oplus$ |
|---|---|---|
| 分配 | $A\cup(B\cap C)=$<br>$(A\cup B)\cap(A\cup C)$<br>$A\cap(B\cup C)=$<br>$(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | $A\cap(B\oplus C)$<br>$=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ |
| 吸收 | $A\cup(A\cap B)=A$<br>$A\cap(A\cup B)=A$ | |

# 集合算律

3．涉及补运算的算律：

DM律，双重否定律

| | $-$ | $\sim$ |
|---|---|---|
| ***D.M*律** | $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$<br>$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ | $\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$<br>$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$ |
| **双重否定** | | $\sim\sim A=A$ |

# 集合算律

4. 涉及全集和空集的算律：

补元律、零律、同一律、否定律

| | $\varnothing$ | $E$ |
|---|---|---|
| 补元律 | $A\cap\sim A=\varnothing$ | $A\cup\sim A=E$ |
| 零律 | $A\cap\varnothing=\varnothing$ | $A\cup E=E$ |
| 同一律 | $A\cup\varnothing=A$ | $A\cap E=A$ |
| 否定 | $\sim\varnothing=E$ | $\sim E=\varnothing$ |

# 集合恒等式的证明

# 集合证明方法-命题演算法

命题演算证明法的书写规范 (以下的$X$和$Y$代表集合公式)

(1) 证$X \subseteq Y$

任取$x$， $x \in X \Rightarrow \ldots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证$X=Y$

方法一 分别证明 $X \subseteq Y$ 和 $Y \subseteq X$

方法二

任取$x$，$x \in X \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二的格式时，必须保证每步推理都是充分必要的

# 集合证明方法-命题演算法

例6 证明$A\cup(A\cap B) = A$ （吸收律）

证 任取$x$,

$$x\in A\cup(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A\vee x\in A\cap B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B) \Leftrightarrow x\in A$$

因此得 $A\cup(A\cap B) = A$.

例7 证明 $\mathbf{A-B = A\cap\sim B}$

证 任取$x$,

$$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\sim B \Leftrightarrow x\in A\cap\sim B$$

因此得 $A-B = A\cap\sim B$

# 集合证明方法-等式置换法

**例8** 假设交换律、分配律、同一律、零律已经成立，证明吸收律.

证 $A\cup(A\cap B)$

$= (A\cap E)\cup(A\cap B)$ (同一律)

$= A\cap(E\cup B)$ (分配律)

$= A\cap(B\cup E)$ (交换律)

$= A\cap E$ (零律)

$= A$ (同一律)

# 集合恒等式-集合证明方法

命题演算法

等式置换法

# 课堂小结

- 有穷集的计数
  - 文氏图
  - 包含排斥原理
- 集合恒等式证明
  - 命题演算法
  - 等式置换法

# 作业

- 习题6 第20题 有穷集的计数
- 习题6 第23题 包含排斥原理
- 理解集合恒等式证明的两种方法


THANK
YOU

# 复习引入

命题演算法

等式置换法

# 包含等价条件的证明

例9　证明$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \varnothing$

①　②　③　④

证明思路:

确定问题中含有的命题：本题含有命题 ①, ②, ③, ④

确定命题间的关系（哪些命题是已知条件、哪些命题是要证明的结论）：本题中每个命题都可以作为已知条件，每个命题都是要证明的结论

确定证明顺序：①⇒②，②⇒③，③⇒④，④⇒①

按照顺序依次完成每个证明（证明集合相等或者包含）

# 证明（命题演算法 等式置换法）

证明$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A-B=\varnothing$

① ② ③ ④

证 ①⇒②

显然$B\subseteq A\cup B$，下面证明$A\cup B\subseteq B$.

任取$x$,

$$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A\vee x\in B \Rightarrow x\in B\vee x\in B \Leftrightarrow x\in B$$

因此有$A\cup B\subseteq B$. 综合上述②得证. --------命题演算法

②⇒③

$A=A\cap(A\cup B) \Rightarrow A=A\cap B$ (由②知$A\cup B=B$，将$A\cup B$用$B$代入)

--------等式置换法

# 证明（反证法）

③⇒④

假设$A-B\neq\varnothing$, 即$\exists x\in A-B$，那么知道$x\in A$且$x\notin B$. 而

$$x\notin B \Rightarrow x\notin A\cap B$$

从而与$A\cap B=A$矛盾.

④⇒①

假设$A\subseteq B$不成立，那么

$$\exists x(x\in A\wedge x\notin B) \Rightarrow x\in A-B \Rightarrow A-B\neq\varnothing$$

与条件④矛盾.

# 集合恒等式-集合证明方法

命题演算法

等式置换法

反证法

# 练习1

证明 $A \cup B = A \cup C \wedge A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$

解题思路

- 分析命题：含有3个命题：

  $A \cup B = A \cup C$ ，  $A \cap B = A \cap C$,     $B = C$

  ①     ②     ③

- 证明要求

  前提：命题①和②

  结论：命题③

- 证明方法：

  恒等式代入

  反证法

  利用已知等式通过运算得到新的等式

# 解答

方法一：恒等变形法

$$
\begin{aligned}
B &= B\cap(B\cup A) = B\cap(A\cup B) \\
&= B\cap(A\cup C) = (B\cap A)\cup(B\cap C) \\
&= (A\cap C)\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap C \\
&= (A\cup C)\cap C = C
\end{aligned}
$$

方法二：反证法.

假设 $B \neq C$，则存在 $x$ ($x\in B$且$x\notin C$), 或存在 $x$ ($x\in C$且$x\notin B$).

不妨设为前者.

若$x$属于$A$，则$x$属于$A\cap B$ 但$x$不属于$A\cap C$，与已知矛盾；

若$x$不属于$A$，则$x$属于$A\cup B$但$x$不属于$A\cup C$，也与已知矛盾.

# 解答

方法三：利用已知等式通过运算得到新的等式.

由已知等式①和②可以得到

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup C)-(A\cap C)$$

即

$$A\oplus B=A\oplus C$$

从而有

$$A\oplus(A\oplus B)=A\oplus(A\oplus C)$$

根据结合律得

$$(A\oplus A)\oplus B=(A\oplus A)\oplus C$$

由于$A\oplus A=\varnothing$, 化简上式得$B=C$.

# 练习2

2. 判断以下命题的真假，并说明理由.

（1） $A-B=A \Leftrightarrow B=\varnothing$

（2） $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

（3） $A\oplus A=A$

（4） 如果$A\cap B=B$，则$A=E$.

（5） $A=\{x\}\cup x$，则 $x\in A$且$x\subseteq A$.

## 解题思路

- 先将等式化简或恒等变形.
- 查找集合运算的相关的算律，如果与算律相符，结果为真.
- 注意以下两个重要的充要条件
  - $A-B = A \Leftrightarrow A\cap B = \varnothing$
  - $A-B = \varnothing \Leftrightarrow A\subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{A}\cup\mathrm{B} = \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \mathrm{A}$

  如果与条件相符，则命题为真.
- 如果不符合算律，也不符合上述条件，可以用文氏图表示集合，看看命题是否成立.如果成立，再给出证明.
- 试着举出反例，证明命题为假.

# 解答

解

(1) $B=\varnothing$是$A-B=A$的充分条件，但不是必要条件. 当$B$不空但是与$A$不交时也有$A-B=A$.

(2) 这是DM律，命题为真.

(3) 不符合算律，反例如下：

$A=\{1\}$，$A\oplus A=\varnothing$，但是$A\neq\varnothing$.

(4) 命题不为真. $A\cap B=B$的充分必要条件是 $B\subseteq A$，不是$A=E$.

(5) 命题为真，因为 $x$ 既是 $A$ 的元素，也是 $A$ 的子集

# 练习3

证明 $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

# 课堂小结

- 集合恒等式证明

命题演算法 → 等式置换法 → 反证法

# 作业

- 习题6 第31题 集合恒等式的证明

THANK YOU