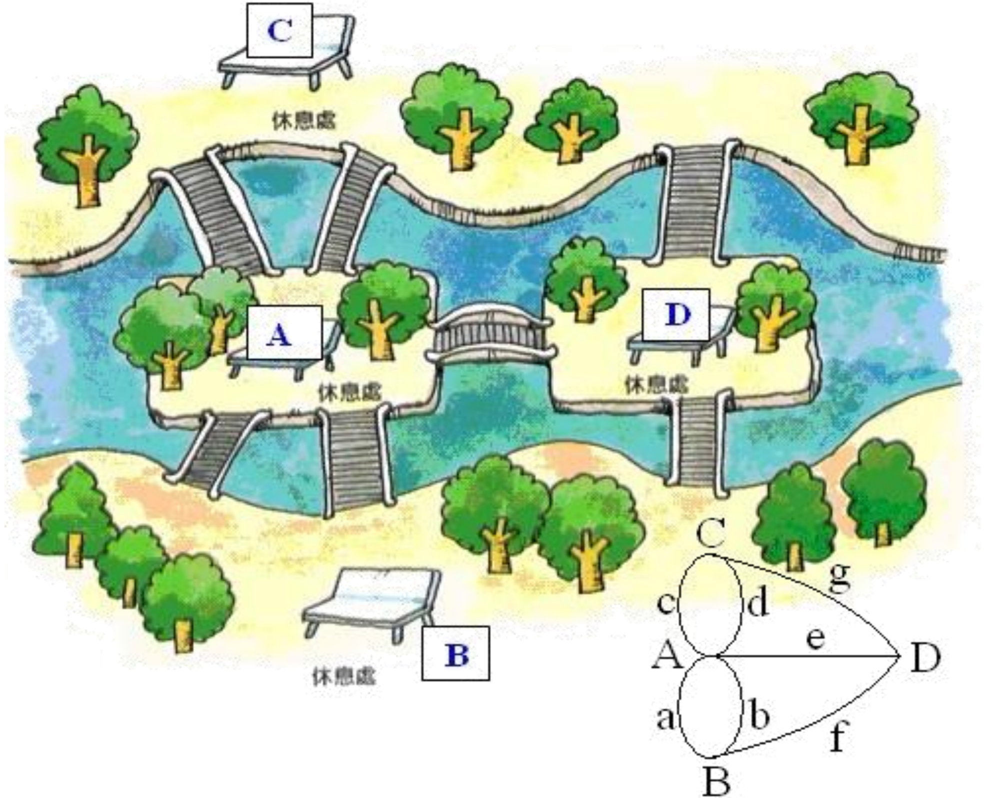
第15章 欧拉图与哈密顿图

- 欧拉图
- 哈密顿图

欧拉图

15.1 欧拉图

哥尼斯堡七桥问题



欧拉图定义

定义15.1

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

规定：平凡图为欧拉图。

欧拉通路和欧拉回路的特征

- 欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路，即为通过图中所有边的简单通路；

- 欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路，即为通过图中所有边的简单回路。

- 如果仅用边来描述，欧拉通路和欧拉回路就是图中所有边的一种全排列。

无向欧拉图的判别法

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

证 若G 为平凡图无问题. 下设G为 n 阶 m 条边的无向图.

必要性 设C 为G 中一条欧拉回路.

(1) G 连通显然.

(2) $\forall v_i \in V(G)$，v_i在C上每出现一次获2度，所以v_i为偶度顶点.

由v_i 的任意性，结论为真.

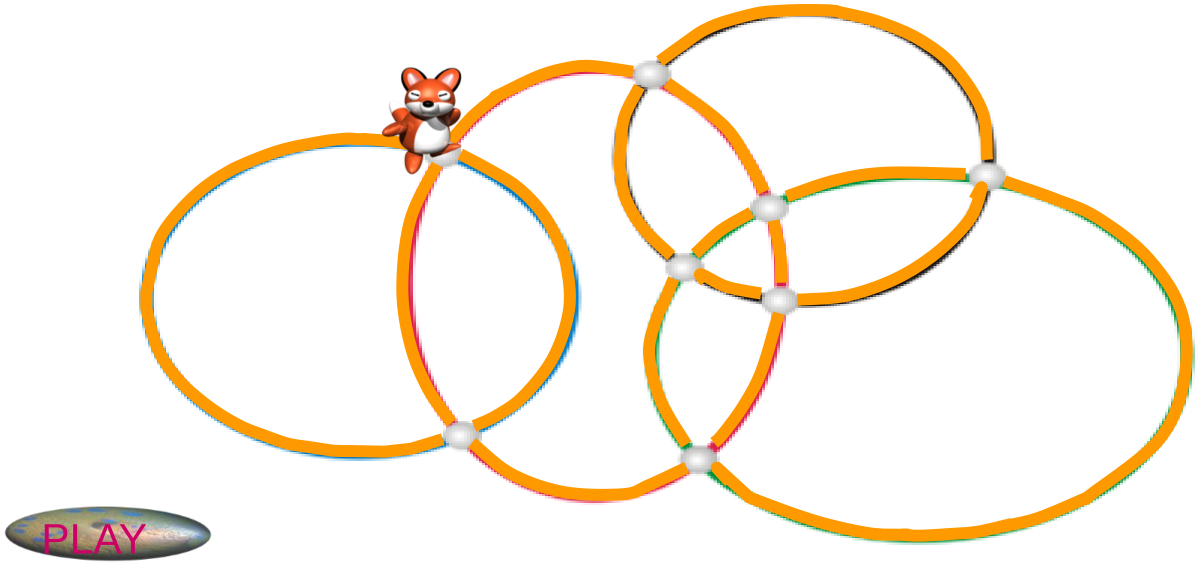
充分性 对边数m做归纳法（第二数学归纳法）.

(1) m=1时，G为一个环，则G为欧拉图.

(2) 设$m \leq k$（$k \geq 1$）时结论为真，$m=k+1$时如下证明（略）

欧拉图示意图

- 从以上证明不难看出：欧拉图是若干个边不重的圈之并.



半欧拉图的判别法

定理15.2 **无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.**

证 必要性简单.

充分性（利用定理15.1）

设u,v为G中的两个奇度顶点，令

$$G'=G\cup(u,v)$$

则G'连通且无奇度顶点，由定理15.1知G'为欧拉图，因而存在欧拉回路C，令

$$\Gamma=C-(u,v)$$

则Γ为G中欧拉通路.

有向欧拉图的判别法

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是**强连通**的且**每个顶点的入度都等于出度**.

本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.4 有向图D是半欧拉图当且仅当D是**单向连通**的，且D中**恰有两个奇度顶点**，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度.

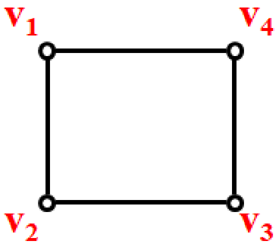
本定理的证明类似于定理15.1.

定理15.5 G是非平凡的欧拉图当且仅当G**是连通的**且为若干个**边不重的圈之并**.

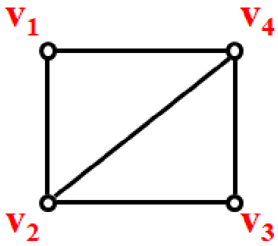
可用归纳法证定理15.5.

例1

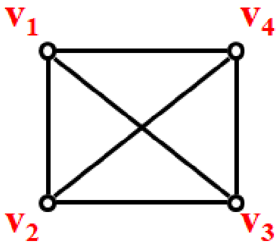
- 判断下面的6个图中，是否是欧拉图？是否存在欧拉通路？



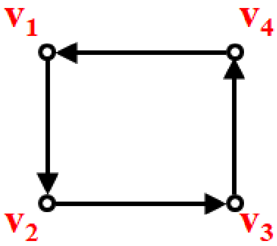
(a)



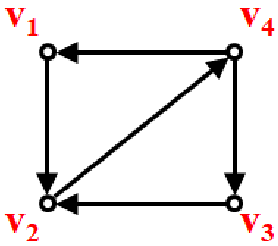
(b)



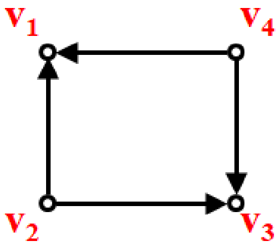
(c)



(d)

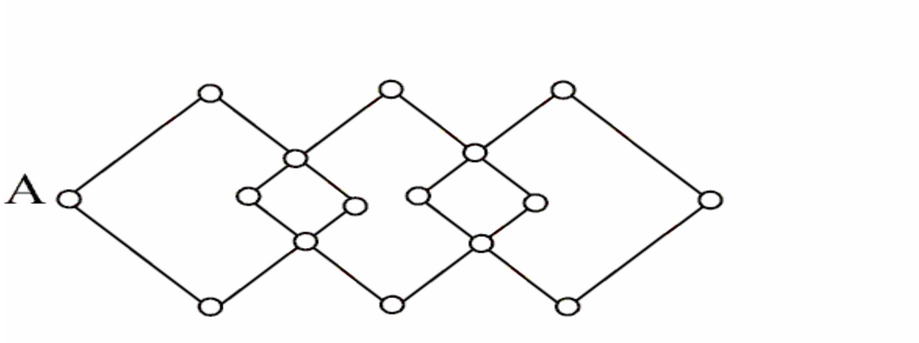


(e)

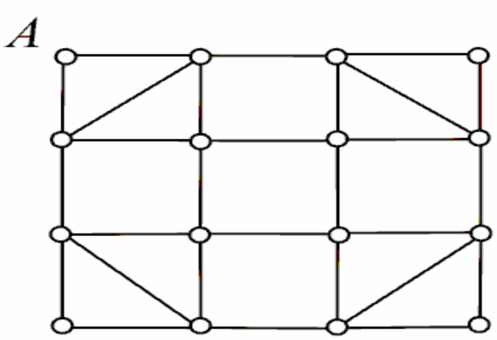


(f)

从*A*点出发，如何一次成功地走出一条欧拉回路来？



(1)



(2)

Fleury算法

(1) 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$.

(2) 设$P_i = v_0e_1v_1e_2\ldots e_iv_i$已经行遍，如下从$E(G)-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中选取$e_{i+1}$：

(a) e_{i+1}与v_i相关联；

(b) 除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为$G_i = G-\{e_1,e_2,\ldots,e_i\}$中的桥.

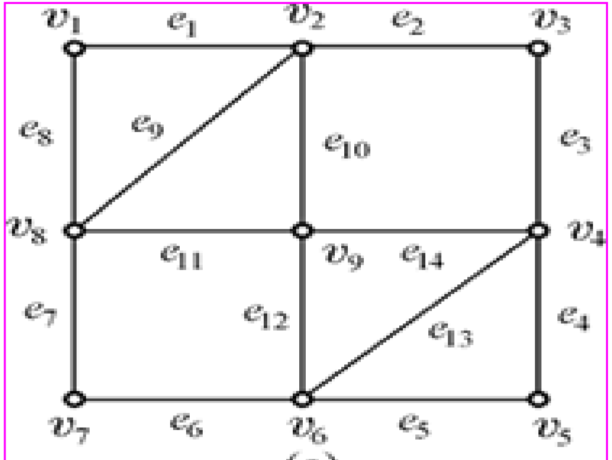
(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止.

可以证明算法停止时所得简单通路 $P_m = v_0e_1v_1e_2\ldots e_mv_m(v_m=v_0)$为$G$ 中一条欧拉回路.

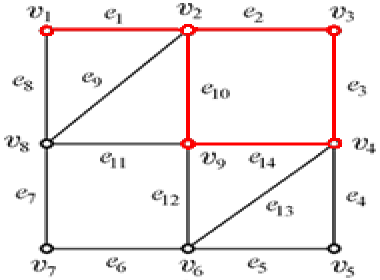
依次选边，每选一条边就从图中删去。选取条件是：与上一条已选取的边关联；除非无别的边可选，否则不能选桥。

例2

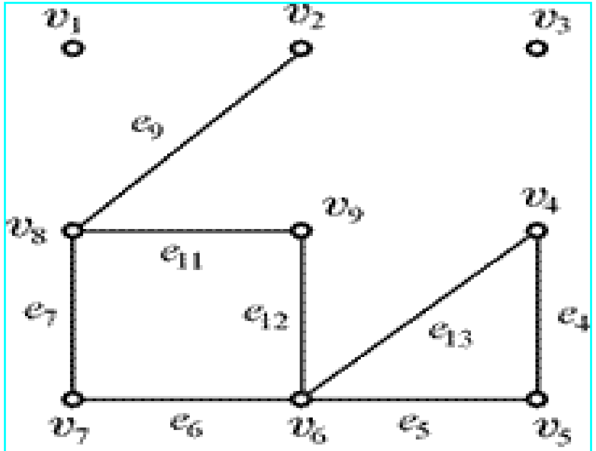
下图(a)是给定的欧拉图G。有人用Fleury算法求G中欧拉回路时，获得简单回路: $v_2e_2v_3e_3v_4e_{14}v_9e_{10}v_2\ e_1v_1e_8v_8e_9v_2$之后，无法遍历了，试分析在哪步他犯了错误?



(a)



(a)



(b)

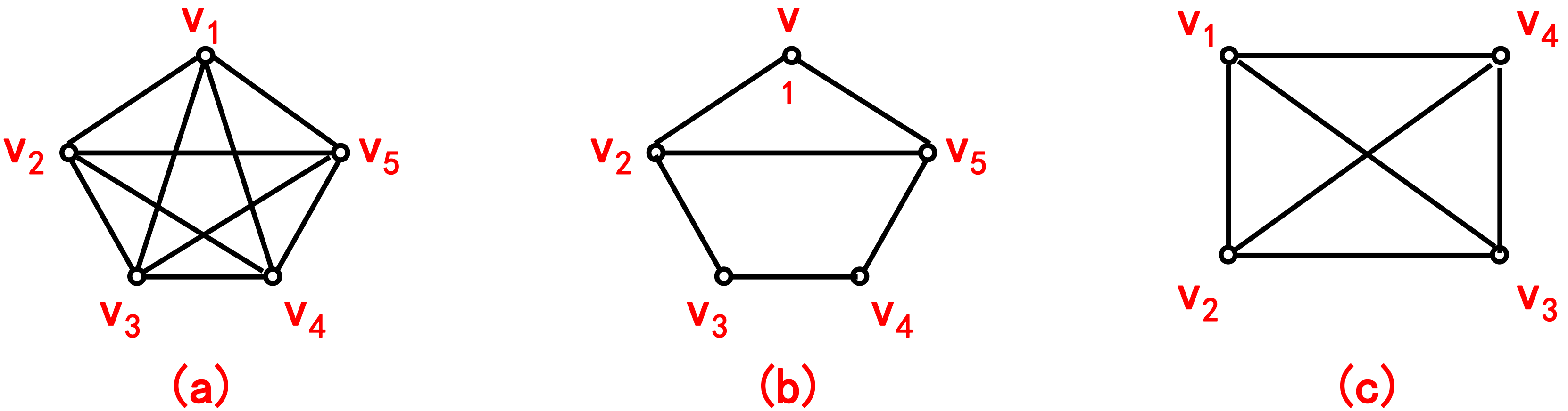
解 此人行遍v_8时犯了 “能不走桥就不走桥”的错误，因此，无法获得欧拉回路。

欧拉图的应用

1、一笔画问题

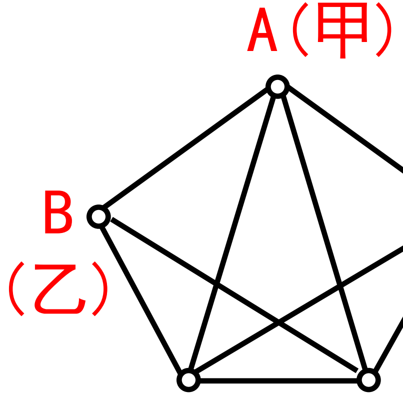
所谓“一笔画问题”就是画一个图形，笔不离纸，每条边只画一次而不许重复，画完该图。

“一笔画问题”本质上就是一个无向图是否存在欧拉通路(回路)的问题。



欧拉图的应用

2、蚂蚁比赛问题 甲、乙两只蚂蚁分别位于图的结点A、B处，并设图中的边长度相等。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发，走过图中所有边最后到达结点C处。如果它们的速度相同，问谁先到达目的地?



解 图中仅有两个度数为奇数的结点B、C，因而存在从B到C的欧拉通路，蚂蚁乙走到C只要走一条欧拉通路，边数为9条，而蚂蚁甲要想走完所有的边到达C，至少要先走一条边到达B，再走一条欧拉通路，因而它至少要走10条边才能到达C，所以乙必胜。

课堂小结

- 欧拉图的定义
- 欧拉图的判定
- 欧拉图的求法
- 欧拉图的应用

作业

- 习题15
  - 第2题 欧拉图的判定

哈密顿图

引入

引入

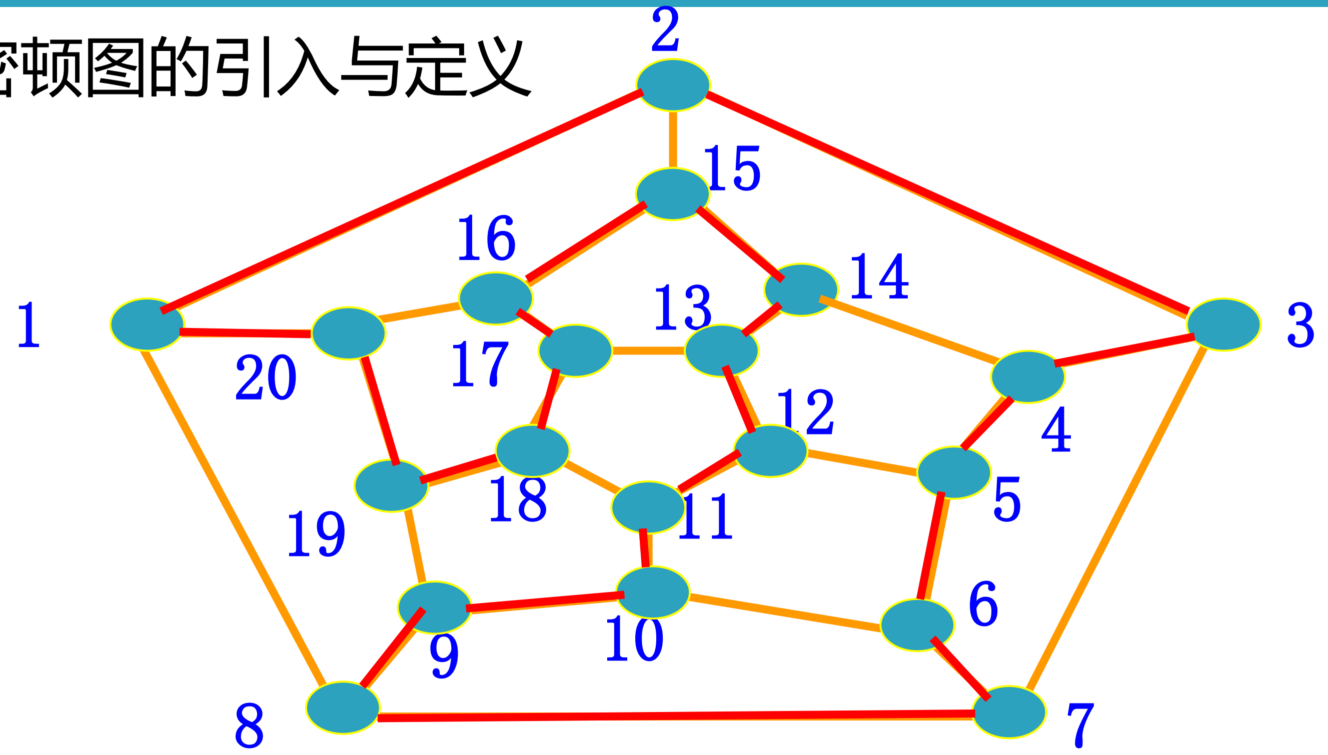
- 哈密顿（William Rowan Hamilton 1805~1865），爱尔兰**数学家、物理学家**、神童、**语言天才**，痴迷诗与哲学。
- 哈密顿3岁随叔叔学习，13岁掌握了欧洲所有语言，15岁即研读拉格朗日和拉普拉斯的力学，17岁起研究开始有成果，21岁大学未毕业时成为皇家天文学家、教授，30岁时获爵士封号。
- 哈密顿发展了新的光学理论和新的动力学理论，把力学和光学看成统一的学问；他把复数看成代数偶，发明了**四元数**，带来了矢量分析。许多用哈密顿命名的内容成了近代物理的基础，包括哈密顿原理、哈密顿量、哈密顿-雅可比方程，等等。

我们从哈密顿学到的...

- 哈密顿天赋异禀，但跟随学问大又懂教育的叔父长大有很大关系。
- 有成就的人须早有**远大的志向**。17岁的哈密顿在致妹妹爱丽莎的信中写道：“多少世代的伟大头脑合力在高处建立起了广大而又美轮美奂的科学殿堂，用不可磨灭的文字在那里刻上了他们的名字；但是这大厦尚未建成，想为其增砖添瓦一点儿也不晚。我还没到达其脚下，但我渴望有一天会攀上顶峰。”
- 什么是不同凡俗？当哈密顿重拾热情研究代数的时候，他写道：“我有别于我的那些伟大的同时代者，我的同行兄弟们，不在于那些短暂的、偶然的事物，而是在于那些**本质的、永恒的事物**上，即在于我研究科学的整个精神与眼界上。”

15.2 哈密顿图

- 哈密顿图的引入与定义



哈密顿图与半哈密顿图

定义15.2

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

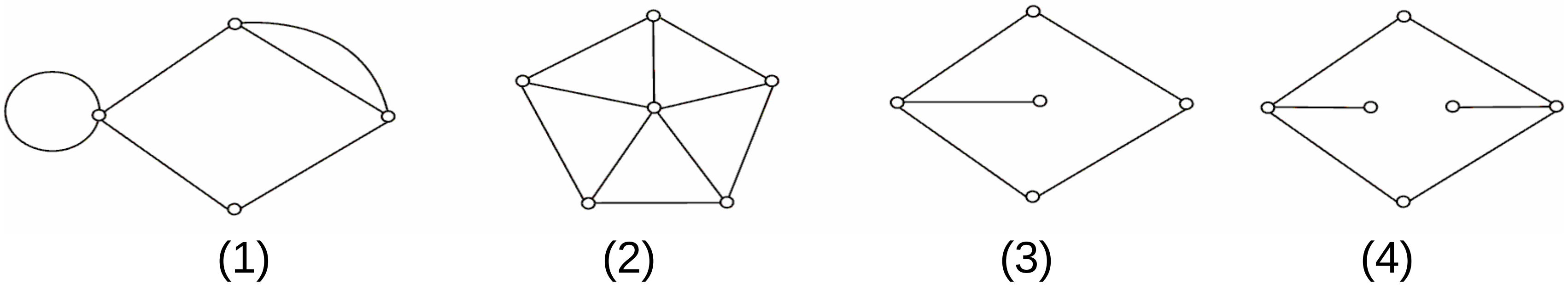
(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

平凡图是哈密顿图.

哈密顿图的实质是能将图中的所有顶点排在同一个圈上

哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中**长度最短**的通路;
哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中**长度最短**的回路。

实例



在上图中，
(1),(2) 是哈密顿图;
(3)是半哈密顿图;
(4)既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么?

无向哈密顿图的一个必要条件

定理15.6 **设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G-V_1) \le |V_1|$**

证 设C为G中一条哈密顿回路

(1) $p(C-V_1) \le |V_1|$

(2) $p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1|$　　（因为$C \subseteq G$）

推论 **设无向图$G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的$V_1 \subset V$且$V_1 \neq \varnothing$均有**

$$p(G-V_1) \le |V_1|+1$$

证 令Γuv为G中哈密顿通路，令$G' = G \cup (u,v)$，则G'为哈密顿图. 于是

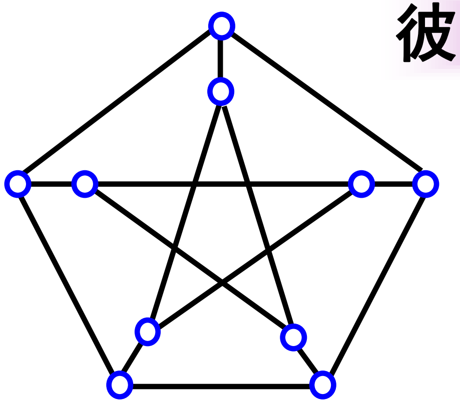
$$p(G-V_1) = p(G'-V_1-(u,v)) \le |V_1|+1$$

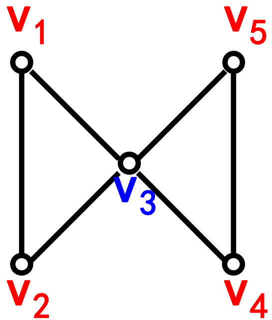
几点说明

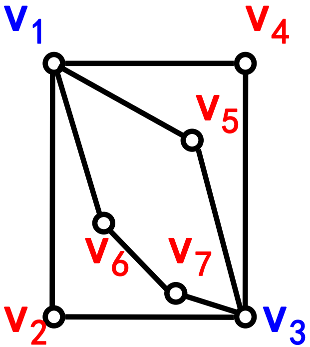
- 定理15.6中的条件是哈密顿图的必要条件，但不是充分条件

定理15.6的逆否命题非常有用。可来判断某些图不是哈密顿图，即：若存在V的某个非空子集V_1使得$p(G-V_1)>|V_1|$，则G不是哈密顿图。

彼得松图







小贴士——判断不是哈密顿图

- 在图中能够找到V的某个非空子集V_1使得

$$p(G - V_1) > |V_1|$$

则G不是哈密顿图；

- 在图中能够找到V的某个非空子集V_1使得

$$p(G - V_1) > |V_1| + 1$$

则G中不存在哈密顿通路。

实例

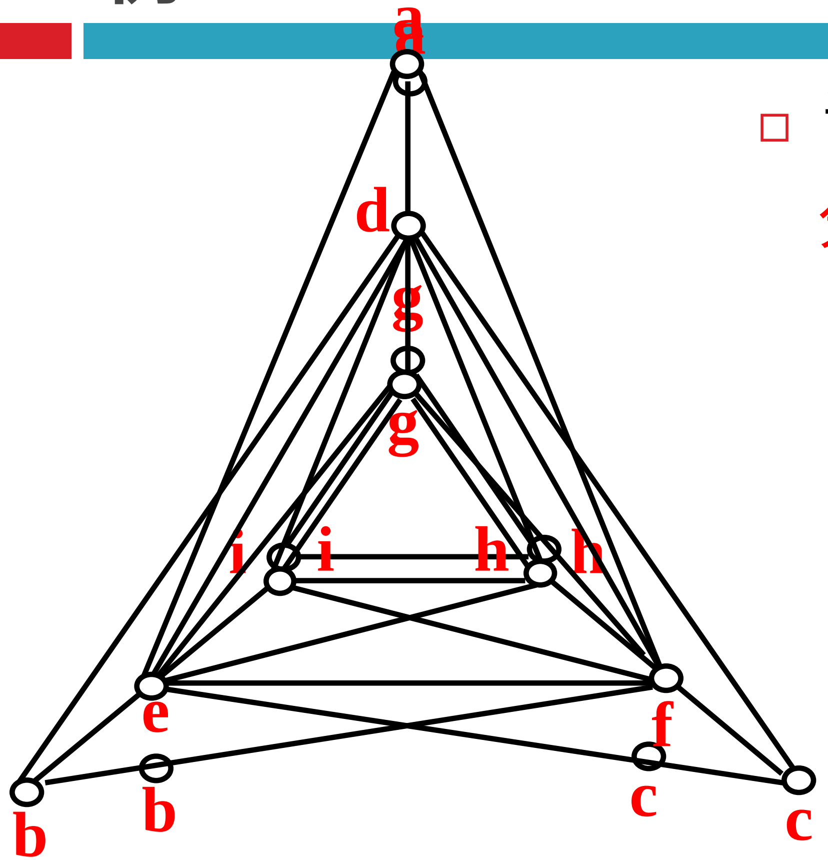
例1 设G为n阶无向连通简单图，若G中有割点或桥，则G不是哈密顿图.

证 设v为割点，则 $p(G-v) \geq 2>|\{v\}|=1$.

K_2有桥，它显然不是哈密顿图. 除K_2外，其他有桥的图（连通的）均有割点.

其实，本例对非简单连通图也对.

例2



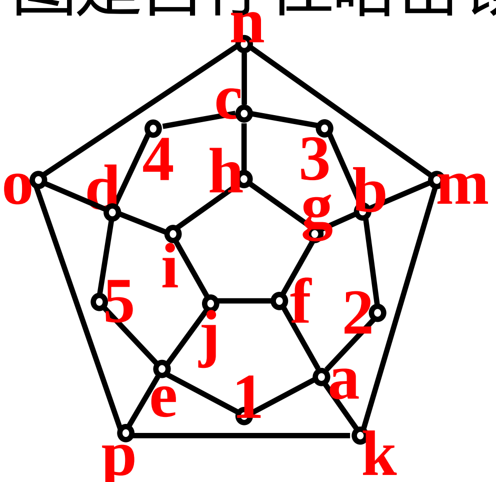
- 证明图中不存在哈密顿回路。

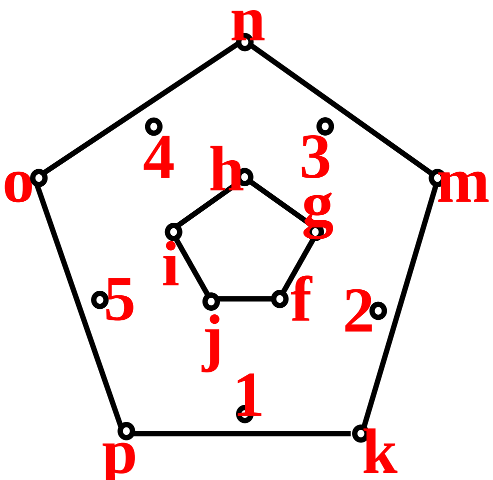
分析 利用定理15.6的逆否命题，寻找V的某个非空子集V_1使得$p(G-V_1) > |V_1|$，则G不是哈密顿图。找到$V_1 = \{d, e, f\}$满足要求。

证明 在图中，删除结点子集 {d, e,f }，得新图，它的连通分支为4个，由定理15.6的逆否命题知，该图不是哈密顿图，因而不会存在哈密顿回路。

例3

- 判断下图是否存在哈密顿回路。





解 在图中，删除结点子集{a, b, c, d, e}，得到的图有7个连通分支，由定理15.6的逆否命题知，该图不是哈密顿图，因而不会存在哈密顿回路。

课堂小结

- 哈密顿图的定义
- 哈密顿图判定的必要条件

作业

- 思考哈密顿图的判定条件

引入

- 哈密顿图的定义
- 哈密顿图判定的必要条件

- 有没有判定的充分条件?
- 如何判定一个图是否哈密顿图?

无向哈密顿图的一个充分条件

定理15.7 **设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有**

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则G 中存在哈密顿通路.

证明线索：

(1) 由(*)证G连通

(2) $\Gamma = v_1v_2\ldots v_l$ 为G中极大路径. 若$l = n$, 证毕.

(3) 否则，证G 中存在过Γ上所有顶点的圈C，由(1) 知C外顶点存在与C上某顶点相邻顶点，从而得比Γ更长的路径，重复(2) –(3)，最后得G中哈密顿通路.

推论

推论 **设G为n (n≥3) 阶无向简单图，若对于G中任意两个不相邻的顶点v_i,v_j，均有**

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n \qquad (**)$$

则G中存在哈密顿回路，从而G为哈密顿图.

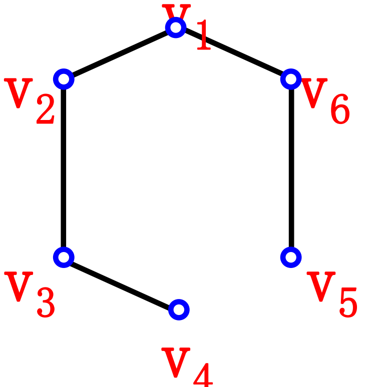
证明线索：由定理15.7得$\Gamma = v_1v_2\ldots v_n$ 为G中哈密顿通路.

若$(v_1,v_n)\in E(G)$，得证. 否则利用（$**$）证明存在过v_1, v_2,…, v_n的圈(哈密顿回路).

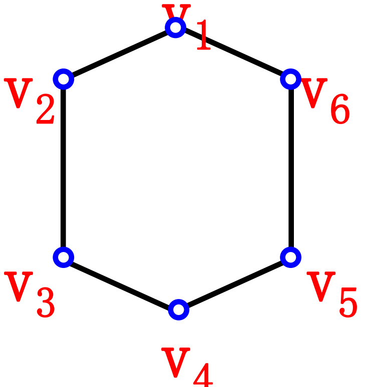
定理15.8 **设u,v为n阶无向简单图G中两个不相邻的顶点，且$d(u)+d(v) \geq n$，则G为哈密顿图当且仅当$G\cup(u,v)$为哈密顿图.**

几点说明

- 定理15.7是半哈密顿图的充分条件，但不是必要条件.
- 长度为n–1（n≥4）的路径构成的图不满足（*）条件，但它显然是半哈密顿图.



- 定理15.7的推论同样不是哈密顿图的必要条件.
- G为长为n的圈，不满足（**）条件，但它当然是哈密顿图.



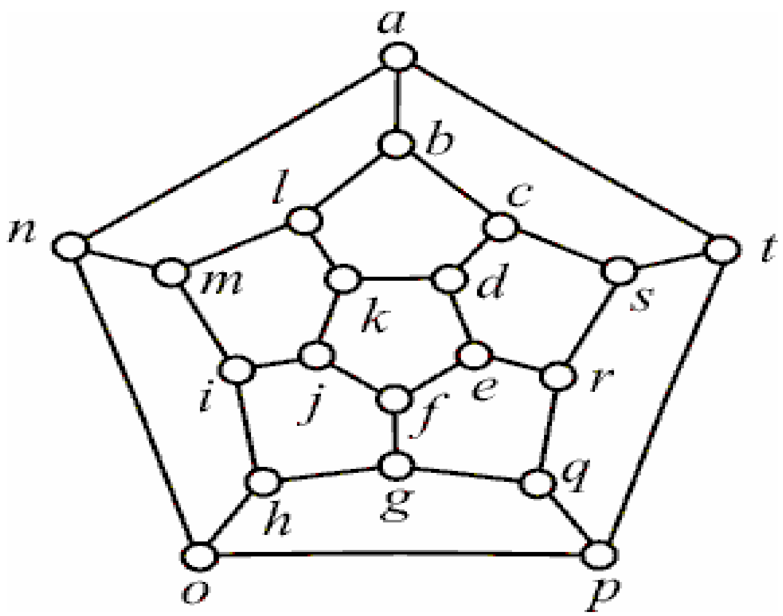
小贴士——哈密顿图的判断

- 任意两个不相邻的结点度数之和$\geq n-1$，则存在哈密顿通路。
- 任意两个不相邻的结点度数之和$\geq n$，则存在哈密顿回路，该图为哈密顿图。

判断某图是否为哈密顿图方法

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题.
总结判断某图是哈密顿图或不是哈密顿图的某些可行的方法.
1. 观察出哈密顿回路.
例4 下图(周游世界问题)
是哈密顿图
易知
a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a
为图中的一条哈密顿回路.

注意，此图不满足定理15.7
推论条件.



判断某图是否为哈密顿图方法

2．满足定理15.7推论的条件（**）．

例5 完全图K_n $(n\geq3)$ 中任何两个顶点u,v，均有

$$d(u)+d(v) = 2(n-1) \geq n \ (n\geq3),$$

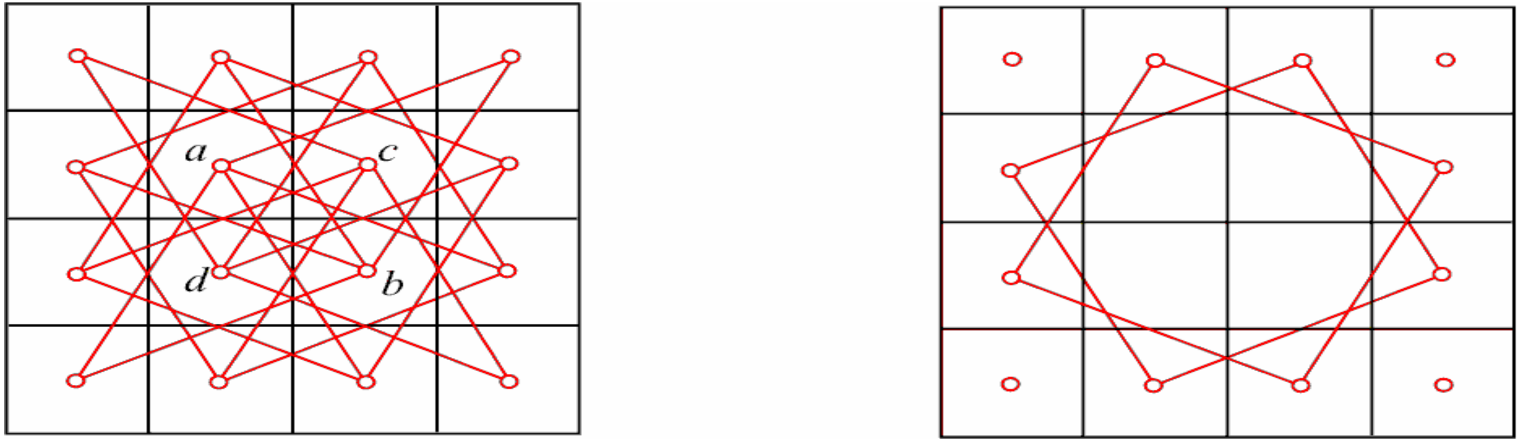
所以K_n为哈密顿图.

3．破坏定理15.6的条件的图不是哈密顿图.

例6 在四分之一国际象棋盘（4×4方格组成）上跳马无解.

在国际象棋盘上跳马有解.

- 令$V_1=\{a, b, c, d\}$, 则 $p(G-V_1) = 6 >4$，由定理15.6可知图中无哈密顿回路.
- 在国际象棋盘上跳马有解，试试看.



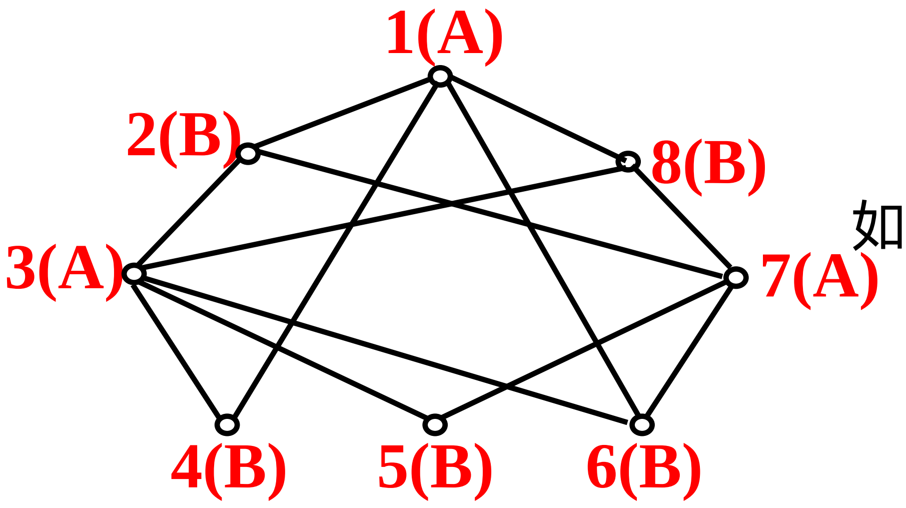
例7

某地有5个风景点，若每个风景点均有2条道路与其他点相通。问游人可否经过每个风景点恰好一次而游完这5处？

解 将5个风景点看成是有5个结点的无向图，两风景点间的道路看成是无向图的边，因为每处均有两条道路与其他结点相通，故每个结点的度数均为2，从而任意两个不相邻的结点的度数之和等于4，正好为总结点数减1。故此图中存在一条哈密顿通路，因此游人可以经过每个风景点恰好一次而游完这5处。

例8

- 证明下图没有哈密顿通路。



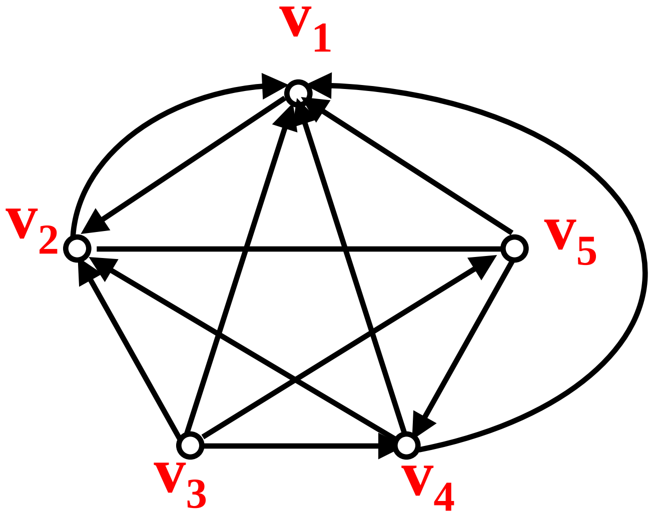
证明 任取一结点如1用A标记，所有与它邻接的结点用B标记。继续不断地用A标记所有邻接于B的结点，用B标记所有邻接于A的结点，直到所有结点都标记完毕。

如果图中有一条哈密顿通路，那么它必交替通过结点A和B，故而标记A的结点与标记B的结点数目或者相同，或者相差1个。然而图中有3个结点标记为A，5个结点标记为B，它们相差两个，所以该图不存在哈密顿通路。

有用结论

- 设G = <V, E>是有n(n≥2)个结点的一些简单有向图。如果忽略G中边的方向所得的无向图中含生成子图K_n，则有向图G中存在哈密顿通路。

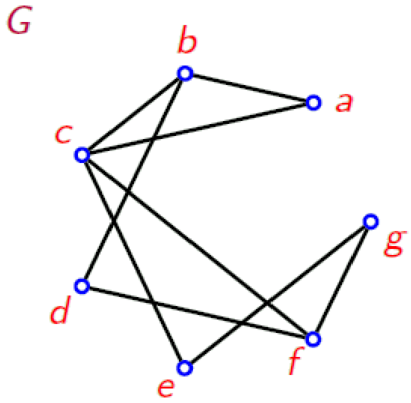
在右图中，它所对应的无向图中含完全图K_5，图中含有哈密顿通路。事实上，通路$v_3v_5v_4v_2v_1$为一条哈密顿通路。

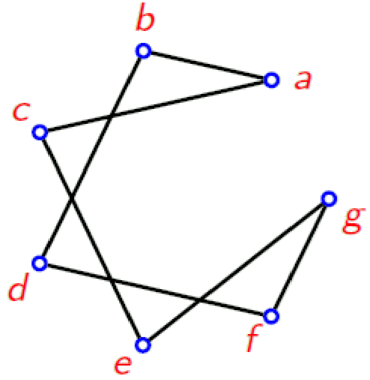


哈密顿图应用实例

- 例9 今有7 个人a,b,c,d,e,f,g，已知：a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；c 会讲英语、意大利语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；f 会讲法语，日语和俄语，g 会讲法语和德语。问能否将这7 个人安排就坐圆桌旁，使得每个人都能与两边的人交谈?

解： 做无向图$G=<V;E>$，V={a,b,c,d,e,f,g} E={(u,v)|u不等于v，且u，v有共同语言。因而问题变成了图中是否存在哈密顿回路，这个回路就是他们的圆桌就坐顺序。





$C=acegfdba$

课堂小结

- 哈密顿图的定义
- 哈密顿图的判定
- 哈密顿图的应用

作业

- 习题15
  - 第13题 哈密顿图的应用
  - 课件 哈密顿图的应用实例（例9）独立完成

最短路问题

引入

『一带一路』中欧班列

“一带一路”是促进共同发展、实现共同繁荣的合作共赢之路，
是增进理解信任、加强全方位交流的和平友谊之路。

秉持四大理念

“一带一路”建设是沿线各国开放合作的宏大经济愿景，
需各国携手努力，朝着互利互惠、共同安全的目标相向而行

努力实现区域基础设施更加完善，安全高效的陆海空通道网络基本形成，互联互通达到新水平

投资贸易便利化水平进一步提升，高标准自由贸易区网络基本形成，经济联系更加紧密，政治互信更加深入

人文交流更加广泛深入，不同文明互鉴共荣，各国人民相知相交、和平友好


中欧铁路通道规划图
西1通道
西2通道
西3通道
西通道
中通道
东通道
陇海线
宁西线

- “一带一路”的不断推进，国际物流需求旺盛，中欧班列的运输组织优化问题，货源集结点选择，口岸站衔接等问题，都会涉及到**最短路径选择**的问题。

哪条路最可靠?最快捷?
哪个生产方案成本最低?
哪个投资计划利润最大?

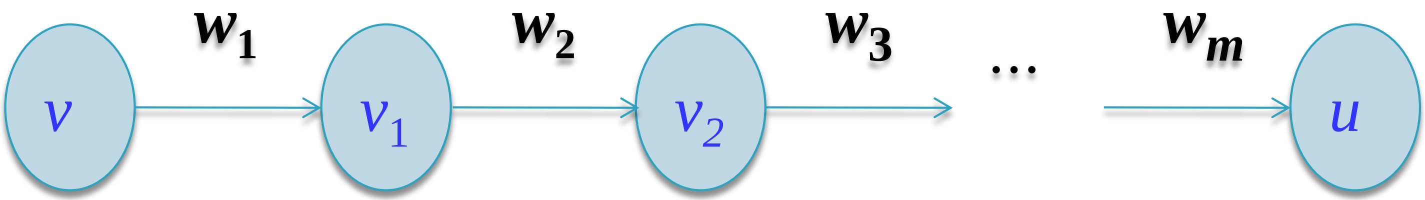
最短路问题

最短路径定义

带权图$G = <V,E,W>$

- 对任意两个可连通顶点u,v，路径上的权值之和定义为该路径的路径长度或称带权路径长度。
- 路径长度最短的那条路径称为最短路径。

源点



路径长度=$w_1 + w_2 + \ldots + w_m$

路径：（v，v_1，v_2，…，u）

求最短路的算法

最短路问题

- 就是从给定的带权图中找出给定点（源点）到各点或任意两点之间距离最短的一条路．

- Dijkstra算法：从给定点到其余顶点的最短路
- Floyd算法：任意两点间的最短路

1972年图灵奖
1989年计算机科学教育杰出贡献奖

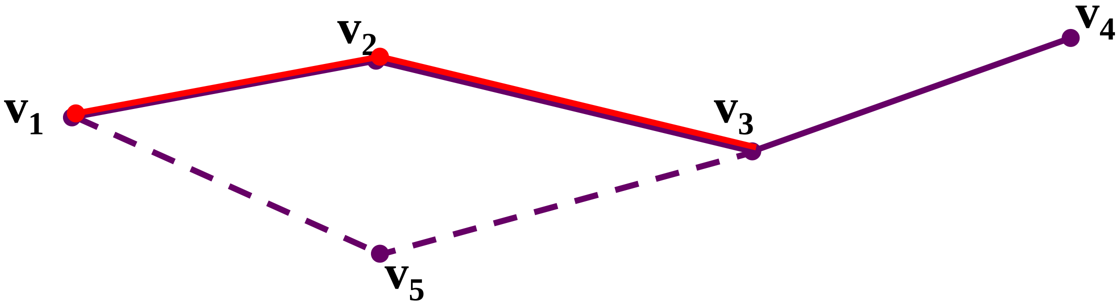
Dijkstra主要成就

1 提出“goto有害论”；
2 提出信号量和PV原语;
3 解决了“哲学家聚餐”问题;
4 Dijkstra最短路径算法和银行家算法的创造者;
5 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者;
6 THE操作系统的设计者和开发者;
与D. E. Knuth并称为我们这个时代最伟大的计算机科学家的人。

Dijkstra算法思想

- 最短路的任一节也是最短路吗？

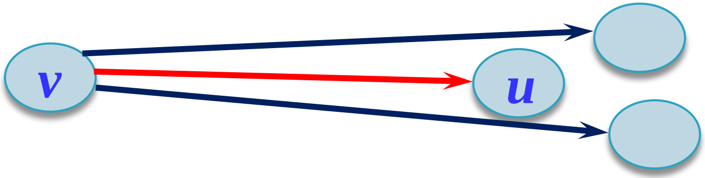
假定$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_4$是$v_1 \rightarrow v_4$的最短路，则$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$一定是$v_1 \rightarrow v_3$的最短路。



Dijkstra算法思想

- 最短路是一条路，且最短路的任一节也是最短路 （贪心策略）

每次找到离源点最近的一个顶点，然后以该顶点为中心进行扩展，最终得到源点到其余所有点的最短路径。



Dijkstra算法设计

- 如何存放最短路径长度：

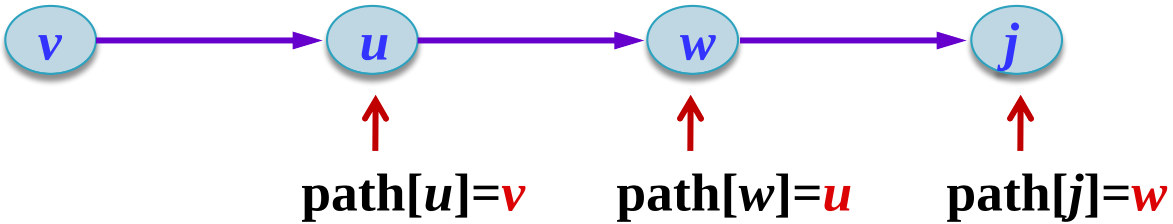
用一维数组dist存储！

dist[j]表示 源点⇨顶点j 的最短路径长度。

如dist[2]=12表示 源点⇨顶点2 的最短路径长度为12。

- 如何存放最短路径：

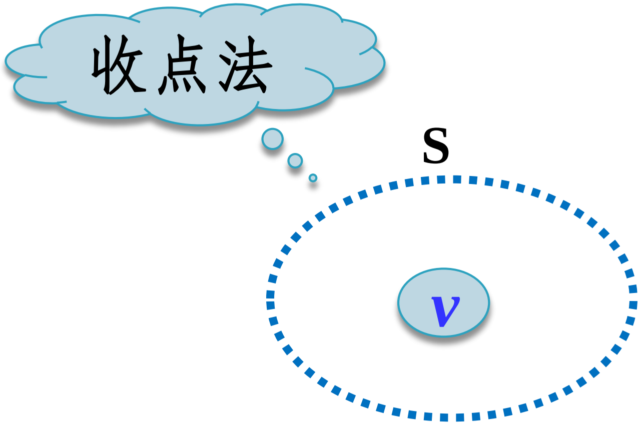
用一维数组path来保存（前驱顶点）



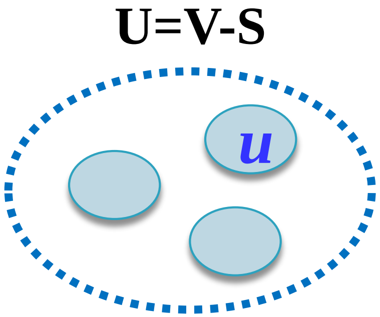
对应的最短路径为：$v \rightarrow u \rightarrow w \rightarrow j$

Dijkstra算法设计

- 设G=<V,E,W>是一个带权有向图， 把图中顶点集合V分成两组：
- 第1组为已求出最短路径的顶点集合（用S表示）。
- 第2组为其余未求出最短路径的顶点集合（用U表示）。



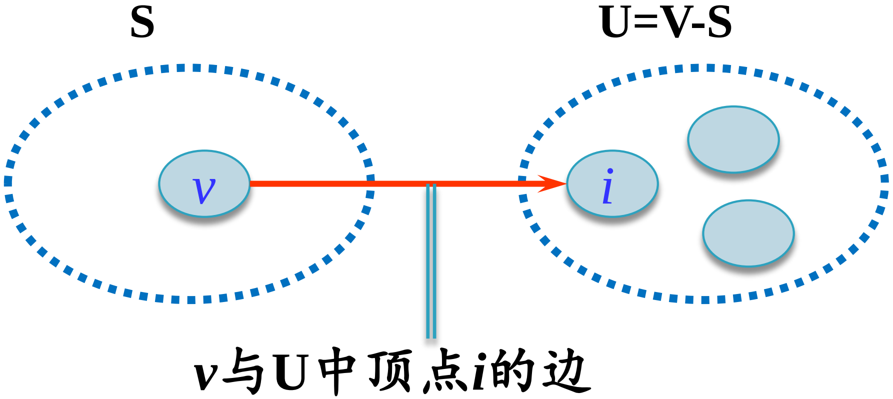
每一步求出源点v到U中一个顶点u的最短路径，并将u移动到S中。直到U为空。

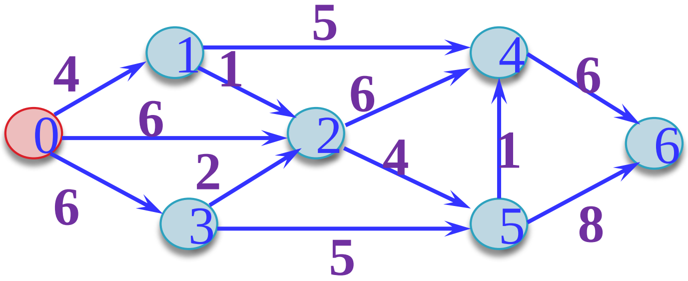


Dijkstra算法设计

（1）初始化

- S只包含源点即S={*v*}，*v*的最短路径为0;
- U包含除*v*外的其他顶点;
- U中顶点*i*距离为边上的权值（若*v*与*i*有边<*v*，*i*>）或∞（若*i*不是*v*的出边邻接点）。

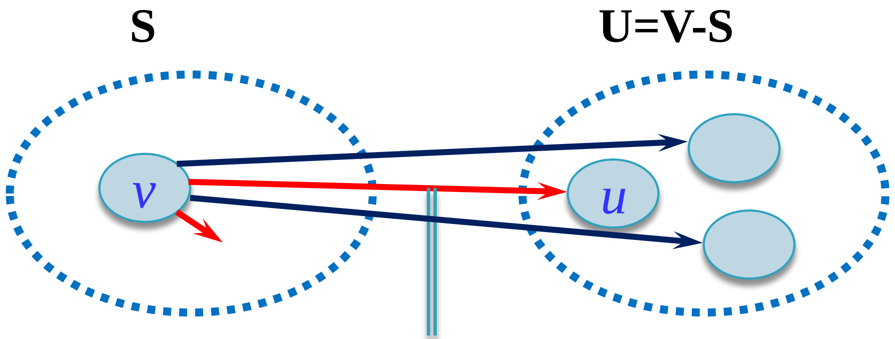




Dijkstra算法设计

（2）选顶点

从U中选取一个距离v最近的顶点u，把u加入S中（该选定的距离就是源点v ⇨ u的最短路径长度）。



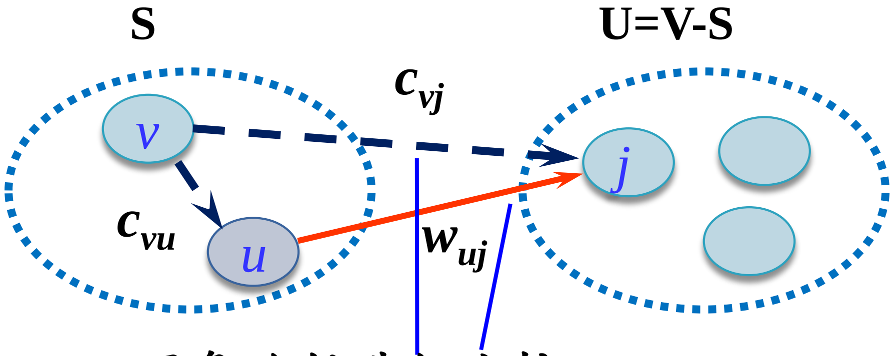
v与U中顶点u的边最小

Dijkstra算法设计

（3）修距离

以u为中间点，修改U中各顶点j的最短路径长度

若从源点v到顶点j（$j \in$ U）的最短路径长度（经过顶点u）比原来最短路径长度（不经过顶点u）短，则修改顶点j的最短路径长度。

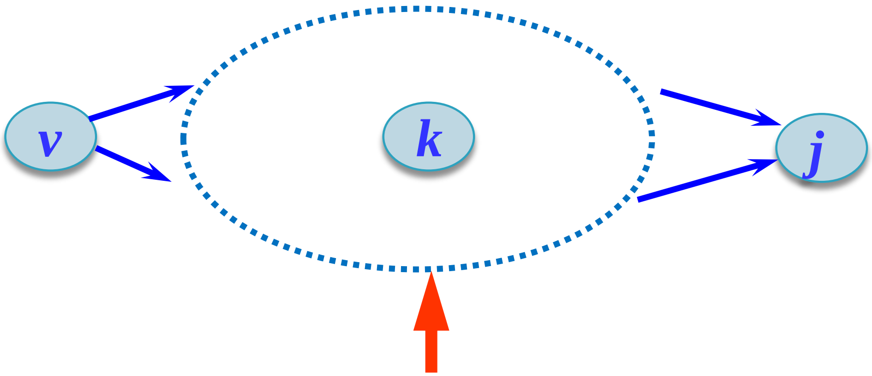


两条路径进行比较：
若经过u的最短路径长度更短，则修正

顶点$v \Rightarrow j$的最短路径长度＝MIN($c_{vu}+w_{uj}$，c_{vj})

Dijkstra算法设计

（4）重复步骤（2）和（3）直到所有顶点都包含在S中。



考虑中间其他所有顶点k，通过比较得到$v \Rightarrow j$的最短路径

小结

- 最短路问题
- 最短路算法
- Dijkstra算法
  - 算法思想
  - 算法设计

作业

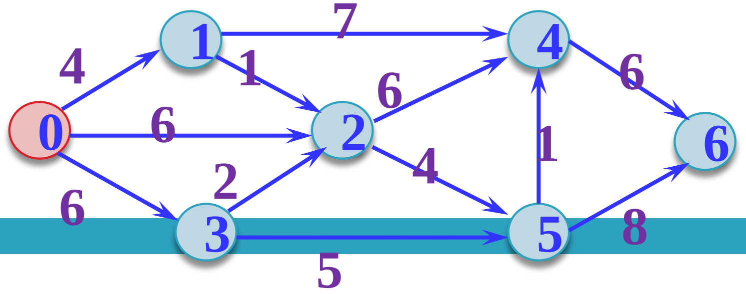
- Dijkstra算法的流程

引入

- Dijkstra算法思想
- Dijkstra算法设计

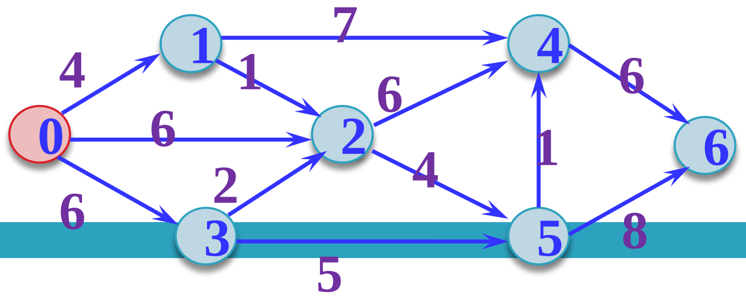
- 实例?
- 应用?

实例演示

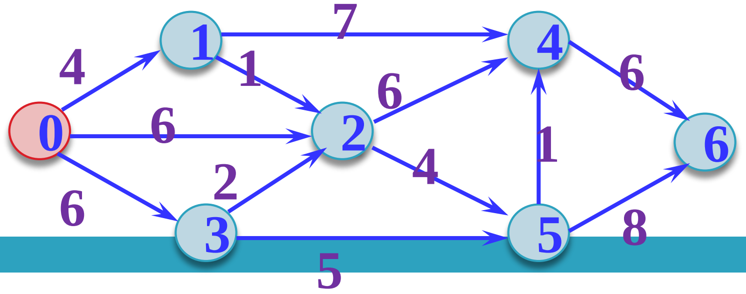


S	U	dist[]	path[]
		0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6
{0}	{1,2,3,4,5,6}	{0, 4, 6, 6, ∞, ∞, ∞}	{0, 0, 0, 0, -1, -1, -1}
		最小的顶点：1	
{0,1}	{2,3,4,5,6}	{0, 4, 5, 6, 11, ∞, ∞}	{0, 0, 1, 0, 1, -1, -1}
		最小的顶点：2	
{0,1,2}	{3,4,5,6}	{0, 4, 5, 6, 11, 9, ∞}	{0, 0, 1, 0, 1, 2, -1}

实例演示



S	U	dist[]	path[]
		0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6
{0,1,2}	{3,4,5,6}	{0, 4, 5, 6, 11, 9, ∞}	{0, 0, 1, 0, 1, 2, -1}
		最小的顶点：3	
{0,1,2,3}	{4,5,6}	{0, 4, 5, 6, 11, 9, ∞}	{0, 0, 1, 0, 1, 2, -1}
		最小的顶点：5	
{0,1,2,3,5}	{4,6}	{0, 4, 5, 6, 10, 9, 17}	{0, 0, 1, 0, 5, 2, 5}



实例演示

S	U	dist[]	path[]
		0 1 2 3 4 5 6	0 1 2 3 4 5 6
{0,1,2,3,5}	{4,6}	{0, 4, 5, 6, 10, 9, 17}	{0, 0, 1, 0, 5, 2, 5}
		最小的顶点：4	
{0,1,2,3,5,4}	{6}	{0, 4, 5, 6, 10, 9,16}	{0, 0, 1, 0, 5, 2, 4}
		最小的顶点：6	
{0,1,2,3,5,4,6}	{}	{0, 4, 5, 6, 10, 9, 16}	{0, 0, 1, 0, 5, 2, 4}

$\underbrace{\{0, 4, 5, 6, 10, 9, 16\} \quad \{0, 0, 1, 0, 5, 2, 4\}}_{\text{最终结果}}$

从源点0 ⇨4的最短路径长度为10

最短路径为：0→1 →2 →5 →4

其他最短路呢?

最短路问题的简单应用

例 (多阶段决策问题) 设备更新问题：企业使用一台设备，每年年初，企业领导就要确定是购置新的，还是继续使用旧的.若购置新设备，就要支付一定的购置费用；若继续使用，则需支付一定的维修费用.现要制定一个五年之内的设备更新计划，使得五年内总的支付费用最少.

已知该种设备在每年年初的价格为：

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
11	11	12	12	13

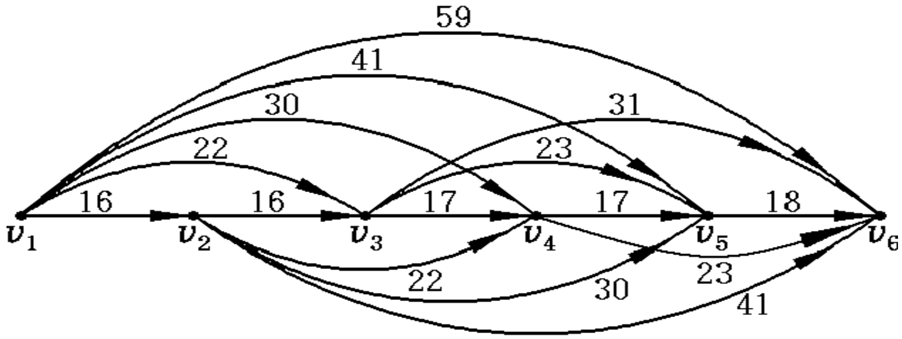
使用不同时间设备所需维修费为：

使用年限	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
维修费	5	6	8	11	18

最短路问题的简单应用

分析：设b_i表示设备在第i年年初的购买费，c_i表示设备使用i年后的维修费，$V=\{v_1, v_2, \dots, v_6\}$,点$v_i$表示第$i$年年初购进一台新设备，虚设一个点$v_6$表示第5年年底. $E=\{v_iv_j \mid 1\le i<j\le 6\}$.

$$F(v_iv_j)=b_i+\sum^{j-i}c_k$$



求v_1到v_6的最短路问题.

$$F(v_1v_4)=b_1+\sum_{k=1}^{4-1}c_k$$

$$=11+5+6+8$$

最终求得 最短路是$v_1v_3v_6$和$v_1v_4v_6$.

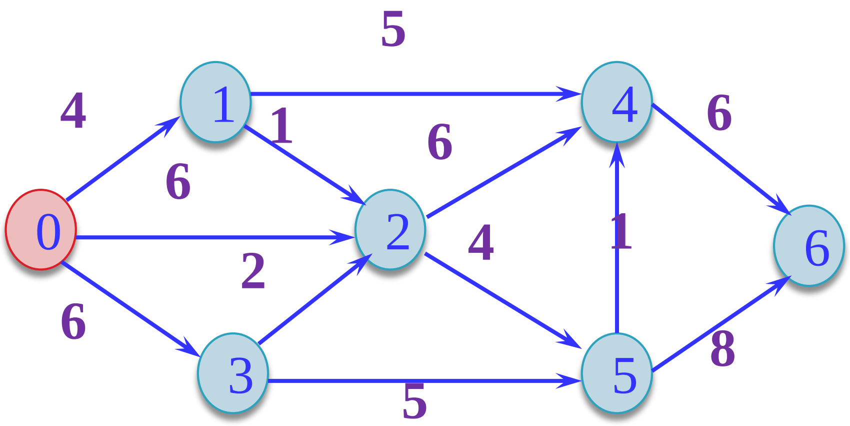
Dijkstra算法分析

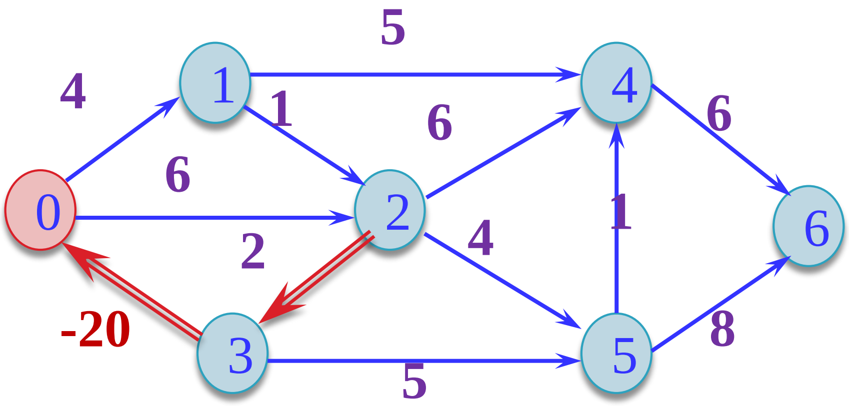
- Dijkstra算法主要用于求解单源最短路径。
- Dijkstra算法只适用于全部权为非负情况?
- Dijkstra算法的时间复杂度?
- 最短路不只是距离，可以是?

算法拓展

□ 权值为负数的情况

Bellman-ford算法





□ 多源最短路径问题

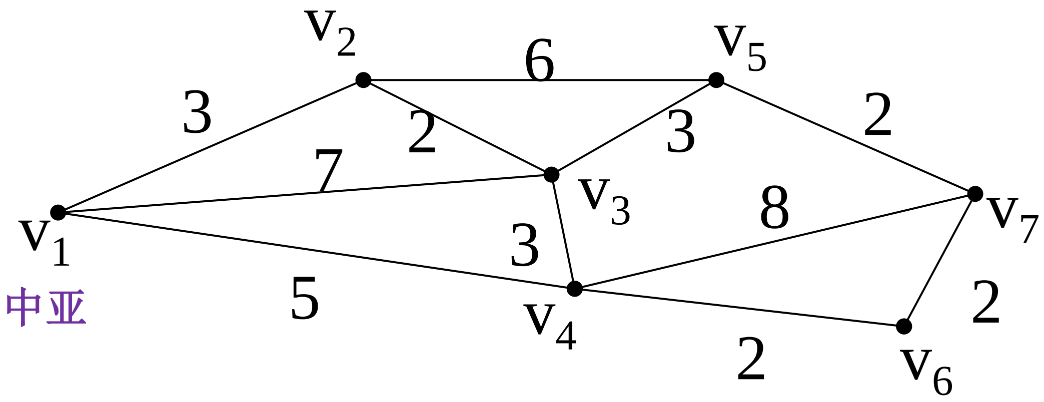
Floyd算法

课堂小练习

- 过去10年来，中亚天然气管道项目一直在为我国27个省市的5亿多人口提供清洁能源。
- 据中国石油西部管道公司2020年2月27日统计，该管道累计已经为中国提供了3112亿立方米的天然气。

课堂小练习

- 假设中亚某地发现大型天然气田，拟规划铺设管路向北京等城市输送，中间跨越多个地区。
- 根据原有设施和地理条件绘制网络图如下，其中弧上赋权为两地间管线铺设成本。从预算成本最低的目标出发，如何规划路线?

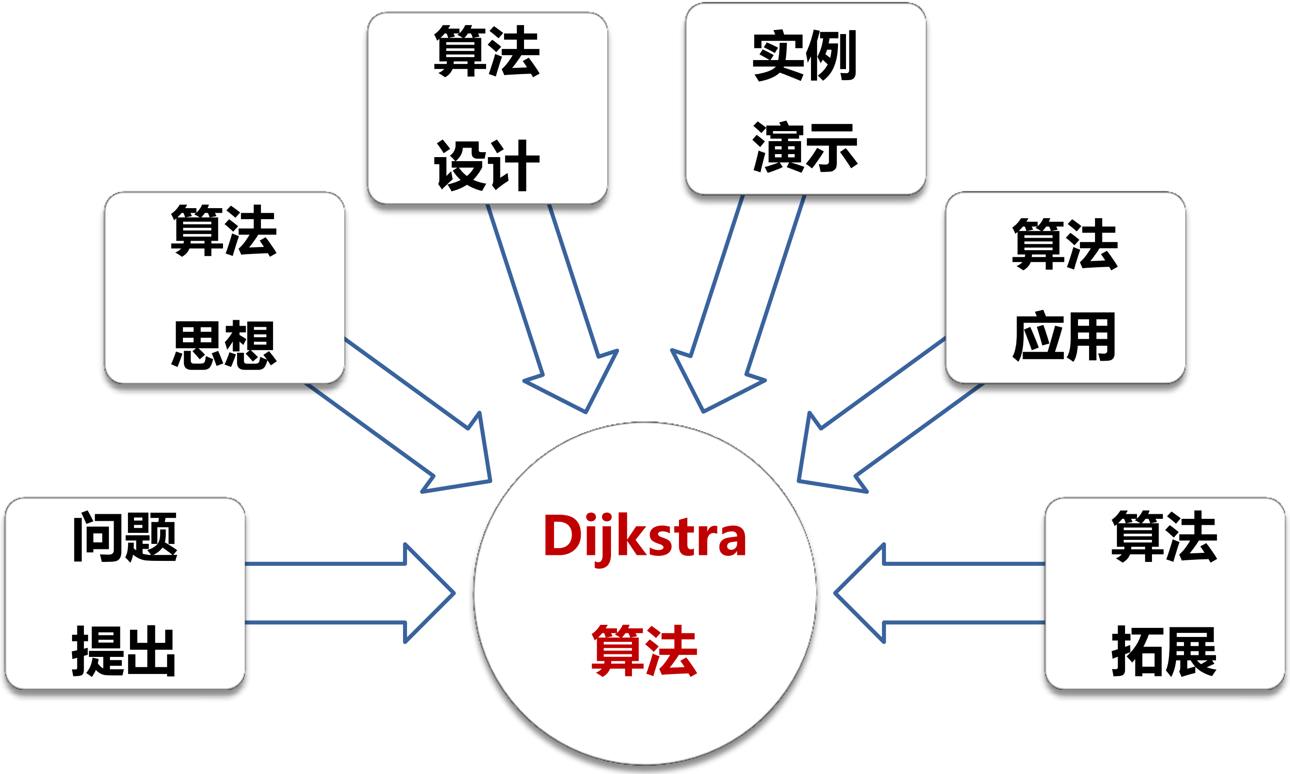


步骤	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
1	$(v_1,0)^{**}$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
2	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{**}$	$(v_1,7)$	$(v_1,5)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
3	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{**}$	$(v_1,5)$	$(v_2,9)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
4	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{**}$	$(v_3,8)$	$(v_1,+\infty)$	$(v_1,+\infty)$
5	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)$	$(v_4,7)^{**}$	$(v_4,13)$
6	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)^{**}$	$(v_4,7)^{*}$	$(v_6,9)$
7	$(v_1,0)^{*}$	$(v_1,3)^{*}$	$(v_2,5)^{*}$	$(v_1,5)^{*}$	$(v_3,8)^{*}$	$(v_4,7)^{*}$	$(v_6,9)^{**}$

- ✓ 要让共建“一带一路”成为造福世界的“一渠活水”，源头就在于持续培养胜任“一带一路”建设要求的各类人才。

- ✓ 我们当代大学生必须脚踏实地，立足国情，刻苦学习专业知识，为推进“一带一路”建设做贡献。

小 结



作业

- 习题15
  - 第22题 最短路的应用


THANK
YOU