离散数学

DISCRETE MATHEMATICS

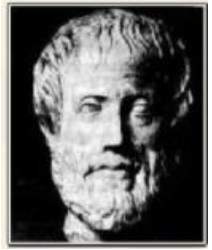
命题逻辑的局限

命题逻辑的特点：

- 在命题逻辑中，基本组成单位是原子命题，并把它看作不可再分解的，而不涉及其内部的逻辑结构。

构造下述推理的证明（苏格拉底三段论）

所有人都会死，苏格拉底是人，所以苏格拉底也会死。



亚里士多德

命题逻辑的局限

（1） 它不能揭示某些有效的论证；

【例】所有的人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

这是简单而有名的苏格拉底三段论，直观地，这是一个有效的论证，但它却无法用命题逻辑予以推证。

（2）无法将具有某种共同属性的命题显示出来。

【例】设 P 表示命题：张辉是大学生　　　　Q 表示命题：李明是大学生

仅仅从命题符号 P 和 Q 看不出张辉和李明都是大学生这一特性。

第四章 一阶逻辑基本概念

- 一阶逻辑命题符号化
  - 个体词、谓词、量词
  - 一阶逻辑命题符号化
- 一阶逻辑公式及其解释
  - 一阶语言
  - 合式公式
  - 合式公式的解释
  - 永真式、矛盾式、可满足式

4.1 一阶逻辑命题符号化

- 个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体
- 个体常项：具体的事务，用a, b, c表示
- 个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示
- 个体域(论域)——个体变项的取值范围
  - 有限个体域，如 $\{a, b, c\}, \{1, 2\}$
  - 无限个体域，如 N, Z, R, …
  - 全总个体域——由宇宙间一切事物组成

谓词

- 谓词——表示个体词**性质**或相互之间**关系**的词
- 谓词常项　如, $F(a)$：a是人
- 谓词变项　如, $F(x)$：x具有性质F
- n（$n\geq1$）元谓词
  - 一元谓词(n=1)—表示**性质**
  - 多元谓词($n\geq2$)—表示事物之间的**关系**

    如, $L(x,y)$：x与 y 有关系 L，$L(x,y)$：$x\geq y$，…
  - 0元谓词—不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

- 例：令P(x)表示语句“x大于3”，P(4)和P(2)是否为命题，真值是什么。

- 例：令Q(x, y)表示语句“x=y+3”，命题Q(1, 2)和Q(3, 0)的真值是什么?

实例1

例1 用0元谓词将命题符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当 $\sqrt{3}$是有理数

(3) 如果2>3，则3<4

解：在命题逻辑中：

(1) p，p为墨西哥位于南美洲（真命题)

(2) $p \rightarrow q$，其中，p:$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{3}$是有理数. 是假命题

(3) $p \rightarrow q$，其中，p：2>3，q：3<4. 是真命题

实例1解答

在一阶逻辑中：

(1) $F(a)$，其中，a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲.

(2) $F(\sqrt{2})\rightarrow G(\sqrt{3})$,

其中，$F(x)$：x是无理数，$G(x)$：x是有理数

(3) $F(2, 3)\rightarrow G(3, 4)$，其中，$F(x, y)$：$x>y$，$G(x, y)$：$x<y$

实例2

例2 若 R (x) 表示 “x 是大学生”，

如果 x 的讨论范围为某大学里的所有在校学生，

则 R(x) 是永真式。

若 x 的讨论范围为某中学里的所有在校学生，

则 R(x) 是永假式。

若 x 的讨论范围为一个剧场中的观众，观众中有大学生也有非大学生，那么，对某些观众而言，R(x) 为真，

对另一些观众而言，R(x) 为假。

实例3

例3 试将 “所有的人都是要死的” 这一命题符号化。

在此例中，怎么表达“所有的”这一概念呢？显然，仅仅用目前所讨论的知识是不行的，在此引入量词来刻划 “所有的”这一概念。

量词

量词——表示数量的词

全称量词$\forall$: 表示所有的.

$\forall x$: 对个体域中所有的x

如, $\forall xF(x)$表示个体域中所有的x具有性质F

$\forall x\forall yG(x,y)$表示个体域中所有的x和y有关系G

存在量词$\exists$: 表示存在, 有一个.

$\exists x$: 个体域中有一个x

如, $\exists xF(x)$表示个体域中有一个x具有性质F

$\exists x\exists yG(x,y)$表示个体域中存在x和y有关系G

$\forall x\exists yG(x,y)$表示对个体域中每一个x都存在一个y使得x和y有关系G

$\exists x\forall yG(x,y)$表示个体域中存在一个x使得对每一个y, x和y有关系G

全称量词

- “对一切 x ” 称为全称量词，记为 $(\forall x)$（$\forall$是All中第一个字母的倒写）。

例3　“所有的人都是要死的”

若用 F 表示“是人”、用 G 表示“要死的”，

则命题可符号化为:

$$(\forall x)(F(x) \rightarrow G(x))$$

“$(\forall x)$” 还可表示日常语言中的 “凡 x”、 “对每一个 x ”、 “对所有的 x ” 等用语。

全称量词

"所有的…是…"

应表示为：$(\forall x)\ (A(x) \rightarrow B(x))$，

而不是：$(\forall x)\ (A\ (x) \wedge B(x))$。

这是因为量化断言的真假与个体域有关。这里事先并未规定个体域是什么，因此可以认为 x 的取值范围是一切事物，所以要表达"所有的…是…"，必先假设 x 具有性质 A，这就是 $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ 的形式，不然就不能忠实于原命题。

全称量词

例：“每一个有理数均是实数”是真命题。

若设 $A(x)$ 表示：“x是有理数”，

$B(x)$ 表示：x 是实数，

若将命题“每一个有理数均是实数”符号化为：

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$$

那么当 $x=\sqrt{2}$ 时，$(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$的真值为F，与原命题不符。

存在量词

- 用来表达 “有x”、 “至少有一个x”、 “存在x” 等概念的量词称为存在量词，记为 $(\exists x)$ （$\exists$是Exist 中第一个字母的反写）。

例4 试将命题 “存在一个数满足要求” 符号化。

解：若 $F(x)$ 表示 “ x 是一个数”，

$G(x)$ 表示 “ x 满足要求”，

则命题 “存在一个数满足要求” 符号化为：

$$(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$$

存在量词

对“存在…是…”

应表达成: $(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$,

而不是: $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$。

虽然这里个体域也为一切事物，然而由于“存在着”是一种部分肯定的情况，是指一定有具有性质A与性质B的个体x。因此应该用: $A(x) \wedge B(x)$，而不是: $A(x) \rightarrow B(x)$。

存在量词

例:“有些自然数能被 2 整除” 是真命题。

若设 $A(x)$ 表示 “x是自然数”,

$B(x)$ 表示 “x能被2整除”,

那么 $(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x))$ 显然不合题意。

量词

- 全称量词是对某类个体的全部进行肯定的判断，
- 存在量词是对某类个体的部分有所肯定的判断。

实例5

例 5 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美

(2) 有人用左手写字

个体域分别为

(a) D为人类集合

(b) D为全总个体域

解 (a) (1) $\forall x G(x)$，$G(x)$：x爱美

(2) $\exists x G(x)$，$G(x)$：x用左手写字

(b) $F(x)$：x为人，$G(x)$：x爱美

(1) $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$

(2) $\exists x(F(x) \wedge G(x))$

1. 引入特性谓词$F(x)$

2. (1),(2)是一阶逻辑中两个“基本”公式

实例6

例6 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解：题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或者 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或者 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

课堂小结

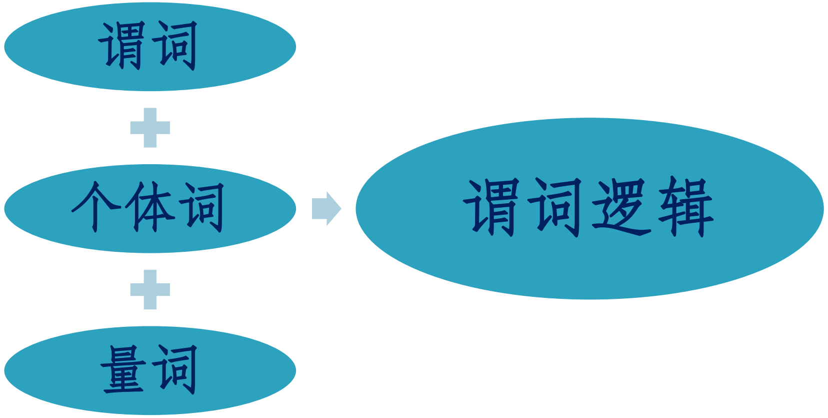
- 命题逻辑的局限
- 谓词逻辑基本概念：谓词、个体词、量词
- 谓词逻辑符号化的两个“基本公式”

作业

- 实例6仔细斟酌理解


THANK
YOU

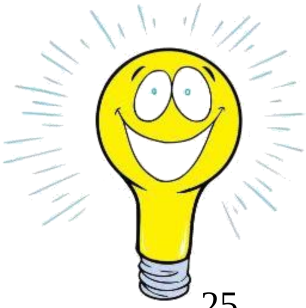
复习引入



- 金子一定闪光， 但闪光的不一定是金子。

设G(x): x 是金子，L(x): x 会闪光

$(\forall x)(G(x)\rightarrow L(x))\wedge(\exists x)(L(x)\wedge\neg G(x))$



实例6

例6 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解： 题目中没给个体域，一律用全总个体域

(1) 令$F(x)$：x为正数，$G(y)$：y为负数， $L(x,y)$：$x>y$

$$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow L(x,y)))$$

或者 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow L(x,y))$

(2) 令$F(x)$：x是无理数，$G(y)$：y是有理数，$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或者 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$

实例7

例7 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 没有不呼吸的人

(2) 不是所有的人都喜欢吃糖

解 (1) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x呼吸

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $F(x)$: x是人， $G(x)$: x喜欢吃糖

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

实例8

例8 设个体域为实数域, 将下面命题符号化

(1) 对每一个数x都存在一个数y使得$x<y$

(2) 存在一个数x使得对每一个数y都有$x<y$

解　$L(x,y):x<y$

(1)　$\forall x\exists yL(x,y)$

(2)　$\exists x\forall yL(x,y)$

注意: $\forall$**与**$\exists$**不能随意交换**

显然(1)是真命题, (2)是假命题

*说明:

(1) 分析命题中表示性质和关系的谓词，要分别符号化为一元和$n(n \geq 2)$元谓词。

(2) 根据命题的实际意义选用$\forall$ 或 $\exists$ 。

(3) 一般来说，当多个量词同时出现时，它们的顺序不能随意调换。

(4) 有些命题的符号化形式不止一种。

量词顺序不可随意更换。如：

在实数域上用L(x,y)表示x+y=10命题为：对于任意的x,都存在y使得x+y=10。

可符号化为： $\forall x \exists y L(x,y)$ 真值为1。

若调换顺序后为： $\exists y \forall x L(x,y)$ 真值为0。

至此，下列推理即可解决：

【例】所有的人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

设：M(x):x是人。D(x):x 是要死的。a:苏格拉底。则符号化为：

$\forall x(M(x)\rightarrow D(x))\wedge M(a)\rightarrow D(a)$

课堂练习1

符号化下面的语句：

天下乌鸦一般黑.

令$F(x)$: x 是乌鸦，　$G(x, y)$: x 与 y 一般黑,

则命题符号化为

$(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x, y))$

或 $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x, y))$

课堂练习2

符号化下面一组语句：
所有狮子都是凶猛的；有些狮子不喝咖啡；所以有些凶猛的动物不喝咖啡。

解： 令$P(x)$： x 是狮子， $Q(x)$:x 是凶猛的，$R(x)$:x 喝咖啡，

假定所有动物的集合为个体域，则命题符号化为

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$;
$(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$;
$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

课堂练习3

符号化下面一组语句:
所有的蜂鸟都五彩斑斓；没有大鸟以蜜为生；不以蜜为生的鸟都色彩单调；所以蜂鸟都是小鸟。

解：令P(x)： x 是蜂鸟， Q(x)： x 是大鸟，R(x)： x 是以蜜为生的鸟，S(x)： x 五彩斑斓，

假定鸟类集合为个体域，命题符号化为

$(\forall x)(P(x)\rightarrow S(x))$;

$\neg(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$;

$(\forall x)(\neg R(x)\rightarrow\neg S(x))$;

$(\forall x)(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$.

课堂练习4（例题4.5）

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解： 令$F(x)$：x是兔子，$G(y)$：y是乌龟，$H(x,y)$：x比y跑得快，$L(x,y)$：x与y跑得同样快，$N(x,y)$：$x\neq y$。

（1）$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

或$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

（2）$\exists x(F(x)\wedge\forall y(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

或 $\exists x\forall y\ (F(x)\wedge(G(y)\rightarrow H(x,y)))$

（3）$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

（4）$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge F(y)\wedge N(x,y)\wedge L(x,y))$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge N(x,y)\rightarrow\neg L(x,y))$

课堂小结

- **谓词逻辑命题符号化**

（1）分析命题中表示性质和关系的谓词，要分别符号化为一元和$n(n \geq 2)$元谓词。

（2）根据命题的实际意义选用$\forall$ 或 $\exists$ 。

（3）一般来说，当多个量词同时出现时，它们的顺序不能随意调换。

（4）有些命题的符号化形式不止一种。

作业

- 习题4 第5题 在一阶逻辑中命题符号化


THANK
YOU

引入

命题 “周红的父亲是教授”：

- 若令 P(x): x 是教授, F(x, y): x 是 y 的父亲； c:周红，则符号化为

  $(\forall x)(F(x, c) \rightarrow P(x))$

- 若令 f(x): x 的父亲, P(x): x 是教授,c:周红，则符号化为

  $P(f(c))$

函数可用于表达**个体词之间的转换关系**，给谓词逻辑中的个体词表示带来了很大的方便。

4.2 一阶逻辑公式及解释

定义4.1 设L是一个非逻辑符号集合, 由L生成的一阶语言L 的字母表包括下述符号:

非逻辑符号

(1) 个体常项符号: $a, b, c, \ldots, a_i, b_i, c_i, \ldots, i \geq 1$

(2) 函数符号: $f, g, h, \ldots, f_i, g_i, h_i, \ldots, i \geq 1$

(3) 谓词符号: $F, G, H, \ldots, F_i, G_i, H_i, \ldots, i \geq 1$

逻辑符号

(4) 个体变项符号: $x, y, z, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, i \geq 1$

(5) 量词符号: $\forall, \exists$

(6) 联结词符号: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(7) 括号与逗号: (,　),　,

一阶语言$\mathscr{L}$的项与原子公式

定义4.2 L 的项的定义如下：

(1) 个体常项和个体变项是项.

(2) 若$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是任意的$n$元函数，$t_1, t_2, \ldots, t_n$是任意的$n$个项，则$\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项.

(3) 所有的项都是有限次使用(1),(2)得到的

如，a, x, $x+y$, $f(x)$, $g(x,y)$等都是项

定义4.3 设$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$是L 的任意n元谓词，$t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是L 的任意n个项，则称$R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是L 的原子公式.

判断： $\boldsymbol{F(x, y), F(f(x1, x2), g(x3, x4))}$

一阶语言$\mathscr{L}$的公式

定义4.4 L 的合式公式（简称公式）定义如下：

(1) 原子公式是合式公式.

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是 合式公式

(4) 若A是合式公式，则$\forall xA$, $\exists xA$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)—(4)形成的符号串才是合式公式.

判断： $F(x)$

$F(x)\vee\neg G(x,y)$

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

$\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$

封闭的公式

定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和 $\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现的.

分析：

$\forall x(F(x,y)\rightarrow G(x,z))$

$\exists x(F(x,y,z)\rightarrow \forall y(G(x,y)\wedge H(x,y,z)))$

$\forall x(F(x) \rightarrow G(y)) \rightarrow \exists y(H(x)\wedge L(x,y,z))$

封闭的公式

定义4.6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式.

判断：

$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$ ✓

$\exists x(F(x) \wedge G(x,y))$

公式的解释

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言, $\mathscr{L}$的解释I由4部分组成:

(a) 非空个体域 D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$, 有一个 $\overline{\boldsymbol{a}}\in D_I$, 称 $\overline{\boldsymbol{a}}$为$a$在$I$ 中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$, 有一个D_I上的n元函数 $\overline{\boldsymbol{f}}:\boldsymbol{D}_I^n\rightarrow\boldsymbol{D}_I$, 称 $\overline{\boldsymbol{f}}$为$f$ 在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$, 有一个D_I上的n元谓词常项 $\overline{\boldsymbol{F}}$, 称 $\overline{\boldsymbol{F}}$为$F$在$I$中的解释.

设公式A, 取个体域D_I, 把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释 $\overline{a}$、$\overline{f}$、$\overline{F}$, 将A中自由出现的个体变项符号x替换为σ (x)，称所得到的公式A'为A在I和σ下的解释, 或A在I和σ下被解释成A'.

I下的赋值σ：对每一个个体变项x指定D_I中的一个值σ (x)。

实例

例10 给定解释 I 如下：

(a) 个体域 D=R

(b) $\bar{a}=0$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y$, $\bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

写出下列公式在I下的解释, 并指出它的真值.

(1) $\exists xF(f(x,a),g(x,a))$ $\exists x(x+0=x\cdot 0)$ 真

(2) $\forall x\forall y(F(f(x,y),g(x,y))\rightarrow F(x,y))$

$\forall x\forall y(x+y=x\cdot y\rightarrow x=y)$ 假

(3) $\forall xF(g(x,y),a)$

$\forall x(x\cdot y=0)$ 真值不定, 不是命题

为使公式成为命题，需要指定自由出现的个体变项y的值。
若指定y=0，则公式的含义是，任意的实数乘0都是0，这是真命题。
若指定y=1，则公式的含义是，任意的实数乘1都是0，这是假命题。
（解释下的赋值）

公式的类型

定义4.8 若公式A在任何解释和该解释下的任何赋值下下均为真, 则称A为**永真式**(逻辑有效式). 若A在任何解释和该解释下的任何赋值下均为假, 则称A为**矛盾式**(永假式). 若至少有一个解释和该解释下的一个赋值使A为真, 则称A为**可满足式**.

给定解释和解释下的赋值，任何公式都被解释成命题。

*说明：

永真式为可满足式，但反之不真

判断公式是否是可满足的(永真式, 矛盾式)是不可判定的

命题逻辑中呢?

代换实例

定义4.9 设A_0是含命题变项 $p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i $(1\le i\le n)$ 处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

例如，$F(x)\to G(x)$, $\forall xF(x)\to\exists yG(y)$等都是$p\to q$的代换实例.

定理4.1 重言式的代换实例都是永真式，
矛盾式的代换实例都是矛盾式.

实例

例11 判断下列公式中，哪些是永真式，哪些是矛盾式?

(1) $\forall xF(x)\rightarrow(\exists x\exists yG(x,y)\rightarrow\forall xF(x))$

重言式 $p\rightarrow(q\rightarrow p)$ 的代换实例，故为永真式.

(2) $\neg(\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y))\wedge\exists yG(y)$

矛盾式 $\neg(p\rightarrow q)\wedge q$ 的代换实例，故为永假式.

(3) $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

解释I_1: 个体域N, $F(x)$:x>5, $G(x)$: x>4, 公式为真

解释I_2: 个体域N, $F(x)$:x<5, $G(x)$:x<4, 公式为假

结论: 非永真式的可满足式

练习1

1. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式:

(1)$\exists x(F(x) \wedge G(x))$

解释1: D_1=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是素数， 真

解释2: D_2=N，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数， 假

(2)$\forall x \forall y(F(x) \wedge G(y) \rightarrow H(x,y))$

解释1: D_1=Z，$F(x)$:x是正数，$G(x)$: x是负数，$H(x,y)$:$x>y$ 真

解释2: D_2=Z，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，$H(x,y)$:$x>y$ 假

练习2

2. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\to\exists yG(y)$

$(A\to B)\wedge A\to B$的代换实例

(2) $\forall x(F(x)\to(F(x)\vee G(x)))$

设I是任意的一个解释, 对每一个$x\in D_I$,

$F(x)\to(F(x)\vee G(x))$恒为真

练习3（例4.10）

3. 证明下列公式为永真式:

(1) $\forall xF(x)\rightarrow \exists xF(x)$

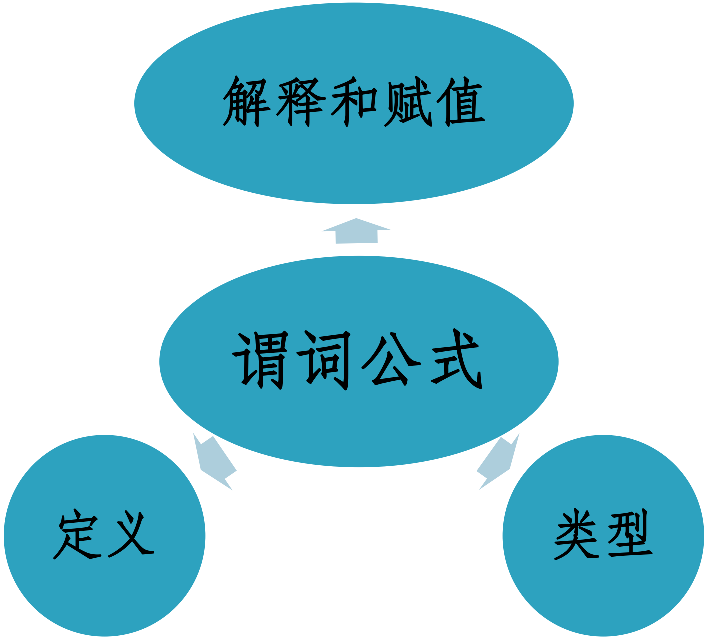
(2) $\forall xF(x)\rightarrow F(y)$

(3) $\forall xF(x)\rightarrow F(c)$

(4) $F(y)\rightarrow \exists xF(x)$

(5) $F(c)\rightarrow \exists xF(x)$

课堂小结



作业

- 习题4 第11题 判断公式的类型


THANK
YOU

第四章 习题课

- 主要内容
- 个体词、谓词、量词
- 一阶逻辑命题符号化
- 一阶语言$\mathscr{L}$
  - 项、原子公式、合式公式
- 公式的解释
  - 量词的辖域、指导变元、个体变项的自由出现与约束出现、闭式、解释
- 公式的类型
  - 永真式(逻辑有效式)、矛盾式(永假式)、可满足式

基本要求

- 准确地将给定命题符号化
- 理解一阶语言的概念
- 深刻理解一阶语言的解释
- 熟练地给出公式的解释
- 记住闭式的性质并能应用它
- 深刻理解永真式、矛盾式、可满足式的概念, 会判断简单公式的类型

练习1

1. 在分别取个体域为

(a) D_1=N　　(b) D_2=R　　(c) D_3为全总个体域

的条件下, 将下面命题符号化，并讨论真值

(1) 对于任意的x，均有

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

解: 设$G(x)$: $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(a) $\forall x G(x)$　　真

(b) $\forall x G(x)$　　真

(c) 又设$F(x)$:x是实数

$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$　　真

练习1(续)

(2) 存在数x，使得 $x+7=5$

解 设$H(x)$：$x+7=5$

(a) $\exists xH(x)$ 假

(b) $\exists xH(x)$ 真

(c) 又设$F(x)$：x为实数

$\exists x(F(x)\wedge H(x))$ 真

本例说明：不同个体域内，命题符号化形式可能不同（也可能相同），真值可能不同（也可能相同）.

练习2

2. 在一阶逻辑中将下列命题符号化

(1) 大熊猫都可爱

设$F(x)$: x为大熊猫，$G(x)$: x可爱

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$$

(2) 有人爱发脾气

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱发脾气

$$\exists x(F(x)\wedge G(x))$$

(3) 说所有人都爱吃面包是不对的

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃面包

$\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$ 或 $\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$

练习2

(4) 没有不爱吃糖的人

设$F(x)$: x是人，$G(x)$: x爱吃糖

$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$ 或 $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$

(5) 任何两个不同的人都不一样高

设$F(x)$:x是人, $H(x,y)$:x与y相同, $L(x,y)$: x与y一样高

$\forall x(F(x)\rightarrow\forall y(F(y)\wedge\neg H(x,y)\rightarrow\neg L(x,y)))$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg H(x,y)\rightarrow\neg L(x,y))$

(6) 不是所有的汽车都比所有的火车快

设$F(x)$:x是汽车, $G(y)$:y是火车, $H(x,y)$:x比y快

$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

练习3

3. 给定解释 I 如下:

(a) 个体域D=N

(b)$\bar{a}=2$

(c) $\bar{f}(x,y)=x+y,\quad \bar{g}(x,y)=x\cdot y$

(d) $\bar{F}(x,y): x=y$

说明下列公式在 I 下的涵义,并讨论真值

(1) $\forall xF(g(x,a),x)$

$\forall x(2x=x)$ 假

(2)$\forall x\forall y(F(f(x,a),y)\to F(f(y,a),x))$

$\forall x\forall y(x+2=y\to y+2=x)$ 假

练习3

(3) $\forall x\forall y\exists zF(f(x,y),z)$

$\forall x\forall y\exists z(x+y=z)$ 真

(4) $\exists x\forall y\forall zF(f(y,z),x)$

$\exists x\forall y\forall z(y+z=x)$ 假

(3),(4)说明∀与∃不能随意交换

(5) $\exists xF(f(x,x),g(x,x))$

$\exists x(x+x=x\cdot x)$ 真

练习4

4. 证明下面公式既不是永真式，也不是矛盾式:

(1)$\exists x(F(x)\wedge G(x))$

解释1: D_1=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是素数, 真

解释2: D_2=N, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数, 假

(2)$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

解释1: D_1=Z, $F(x)$:x是正数, $G(x)$: x是负数, $H(x,y)$:$x>y$ 真

解释2: D_2=Z, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数, $H(x,y)$:$x>y$ 假

练习5

5. 证明下列公式为永真式:

(1) $(\forall xF(x)\to\exists yG(y))\wedge\forall xF(x)\to\exists yG(y)$

$(A\to B)\wedge A\to B$的代换实例

(2) $\forall x(F(x)\to(F(x)\vee G(x)))$

设I是任意的一个解释, 对每一个$x\in D_I$,

$F(x)\to(F(x)\vee G(x))$恒为真

THANK YOU