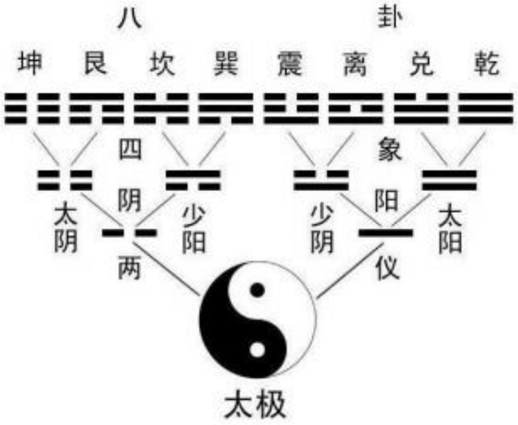
引入

蝴蝶效应

- 亚马逊雨林一只蝴蝶翅膀偶尔振动，也许两周后就会引起美国得克萨斯州的一场龙卷风。

易经

- 太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦生万物。



相关/relative:按照某种规则，确定二个对象或多个对象之间有关系，称这二个对象或多个对象是相关的。

！ 注意:相关性与指定的规则有关。

(1)扑克牌中的方块 k 与梅花 k

同花关系：不相关

同点关系：相关

(2)父子二人

同辈关系：不相关

父子关系：相关

二元关系：二个对象之间相关的关系

多元关系：多个对象之间的关系

无序的二元关系：方块 k 与梅花 k，谁在前，谁在后都还是同点的

有序的二元关系：父子关系，不能交换父与子的次序

如：

（1） a + b = 偶数， a 与 b 是无序的

用 [a,b] 或 (a,b) 表示**无序对**

（2） a ≤ b， a 与 b 是有序的二元关系，叫作 a 相关于 b，记成 a R b，用<a,b>表示**有序对**

（3）无序的二元关系可用有序的二元关系表示

即<a,b>与<b,a>都属于这种二元关系

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.1 有序对与笛卡儿积

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$<x,y>$.

有序对性质:

(1) 有序性 $<x,y>\neq<y,x>$ （当$x\neq y$时）

(2) $<x,y>$与$<u,v>$相等的充分必要条件是

$$<x,y>=<u,v> \Leftrightarrow x=u\wedge y=v.$$

笛卡儿积

定义7.2 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，且

$$A\times B = \{<x,y>|\ x\in A\wedge y\in B\}.$$

例1 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B$

$=\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>,<3,a>,<3,b>,<3,c>\}$

$B\times A$

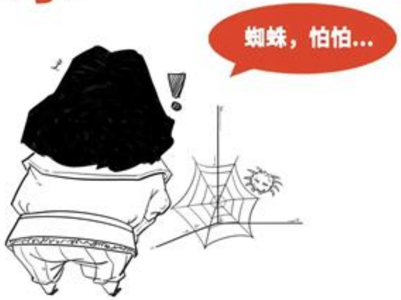
$=\{<a,1>,<b,1>,<c,1>,<a,2>,<b,2>,<c,2>,<a,3>,<b,3>,<c,3>\}$

$A=\{\varnothing\}$, $B=\varnothing$

$P(A)\times A = \{<\varnothing,\varnothing>, <\{\varnothing\},\varnothing>\}$

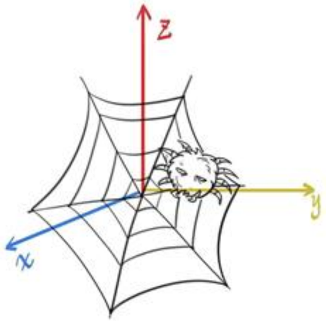
$P(A)\times B = \varnothing$

笛卡尔



传说某天，

笛卡尔看见墙上有蜘蛛。



他突然想到:要是把墙角看作三个数轴，

蜘蛛的位置不就确定出来了么?

于是,直角坐标系就此诞生了。

另外，笛卡尔在哲学上

也很有造诣。

他有句家喻户晓的名言：

我思故我在。

笛卡尔积在数据库中的应用-联合查询

给出三个域： D1=SUPERVISOR ={ 张清玫，刘逸 } D2=SPECIALITY={计算机专业，信息专业} D3=POSTGRADUATE={李勇，刘晨，王敏}

则D1，D2，D3的笛卡尔积为：

D1×D2×D3 ＝ {<张清玫，计算机专业，李勇>，<张清玫，计算机专业，刘晨>，<张清玫，计算机专业，王敏>，<张清玫，信息专业，李勇>，<张清玫，信息专业，刘晨>，<张清玫，信息专业，王敏>， <刘逸，计算机专业，李勇>，<刘逸，计算机专业，刘晨>， <刘逸，计算机专业，王敏>，<刘逸，信息专业，李勇>， <刘逸，信息专业，刘晨>，<刘逸，信息专业，王敏> }

笛卡儿积的性质

(1) 不适合交换律

$$A\times B \neq B\times A \quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$$

(2) 不适合结合律

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing,\ C\neq\varnothing)$$

(3) 对于并或交运算满足分配律

$$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C) \qquad (B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C) \qquad (B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$$

(4) 若 A 或 B 中有一个为空集，则 $A\times B$ 就是空集.

$$A\times\varnothing = \varnothing\times B = \varnothing$$

(5) 若 $|A| = m, |B| = n$, 则 $|A\times B| = mn$

性质证明

证明 $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in A\times(B\cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in B\cup C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in A\times B\vee <x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)
\end{aligned}
$$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

实例

例2

(1) 证明$A=B,C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C = B\times D$是否推出 $A=B,C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
&<x,y>\in A\times C \\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge y\in C \\
\Leftrightarrow\ & x\in B\wedge y\in D \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in B\times D
\end{aligned}
$$

(2) 不一定.反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C = D = \varnothing$, 则$A\times C = B\times D$但是$A \neq B$.

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.2 二元关系

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

如果$<x,y> \in R$, 可记作xRy；如果$<x,y> \notin R$, 则记作$x \not{R}\, y$

A到B的关系与A上的关系

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做A上的二元关系.

例3 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, 那么

$R_1=\{<0,2>\}$， $R_2=A\times B$， $R_3=\varnothing$， $R_4=\{<0,1>\}$

R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系,
R_3 和 R_4 也是A上的二元关系.

$|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2} 个. 所以 A上有 2^{n^2} 个不同的二元关系.

例如 $|A| = 3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

A上重要关系的实例

定义7.5 设 A 为集合,

(1) $\varnothing$是A上的关系，称为空关系

(2) 全域关系 $E_A = \{<x,y>| x\in A \wedge y\in A\} = A\times A$

恒等关系 $I_A = \{<x,x>| x\in A\}$

小于等于关系 $L_A = \{<x,y>| x,y\in A \wedge x\leq y\}$, A为实数子集

整除关系 $D_A = \{<x,y>| x,y\in B \wedge x$整除$y\}$, A为非0整数子集

包含关系 $R_\subseteq = \{<x,y>| x,y\in A \wedge x\subseteq y\}$, A是集合族.

关系的表示

1. 集合表达式

2. 关系矩阵

若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < x_i, y_j > \in R.$$

3. 关系图

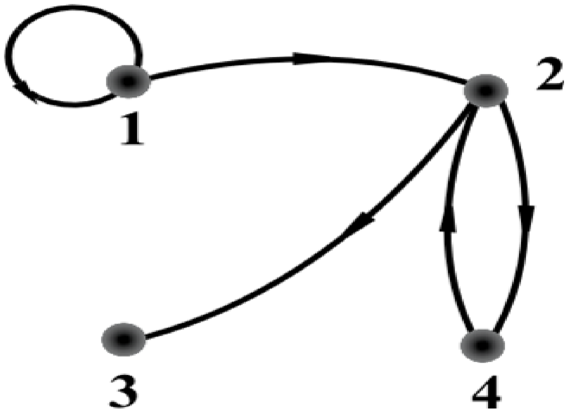
若$A=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是从$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集．如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.

实例

例4

$A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$



关系基本概念小结

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从A到B的关系、A上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图

作业

- 习题7 第9题 列出关系


THANK
YOU

复习引入

- 关系是一种特殊的集合。
- 集合的运算适用于关系吗?
- 关系特有的运算?

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

集合的运算

例：设A和B分别是学校的所有学生和所有课程的集合。假设R1由有序对<a,b>构成，其中a是选修课程b的学生，R2由有序对<a,b>构成，其中课程b是a的必修课。

关系$R1 \cup R2$，$R1 \cap R2$，$R1-R2$，$R2-R1$, $R1 \oplus R2$分别表示什么?

7.3 关系的运算

关系的基本运算

定义7.6 关系的定义域、值域与域分别定义为

$$\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x (\langle x,y\rangle \in R) \}$$

$$\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$$

例5 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,3\rangle\}$, 则

$\mathrm{dom}R=\{1, 2, 4\}$

$\mathrm{ran}R=\{2, 3, 4\}$

$\mathrm{fld}R=\{1, 2, 3, 4\}$

关系运算(逆与合成)

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ \langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ \langle x, z\rangle \mid \exists y\, (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S) \}$$

例6 $R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$R^{-1} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$

$R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$

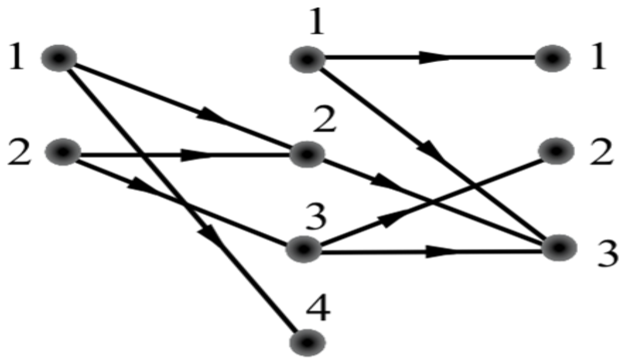
$S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

合成的图示法

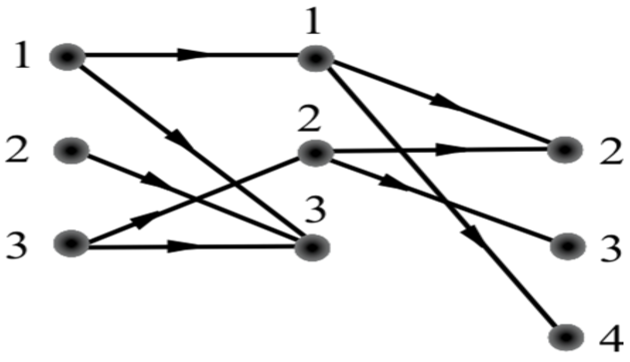
利用图示（不是关系图）方法求合成

$$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$$

$$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,2>, <3,3>\}$$



$R \circ S$



$S \circ R$

实例

- 双亲关系与自身的合成

设R是所有人集合上的双亲关系，$<a,b> \in R$当且仅当a是b的孩子。则$R \circ R$表示什么关系？$R \circ R \circ R$表示什么关系？

关系运算(限制与像)

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R\restriction A$, 其中

$$R\restriction A = \{ \langle x,y\rangle \mid xRy \land x\in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A]=\mathrm{ran}(R\restriction A)$$

说明:

R在A上的限制 $R\restriction A$是 R 的子关系，即 $R\restriction A \subseteq R$

A在R下的像 $R[A]$ 是 $\mathrm{ran}R$ 的子集，即 $R[A]\subseteq \mathrm{ran}R$

实例

例7 设$R=\{<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$, 则

$R\upharpoonright\{1\} = \{<1,2>,<1,3>\}$

$R\upharpoonright\varnothing = \varnothing$

$R\upharpoonright\{2,3\} = \{<2,2>,<2,4>,<3,2>\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$

$R[\varnothing] = \varnothing$

$R[\{3\}] = \{2\}$

例 select * from student where age >20用到了哪个运算?

运算的优先级

注意：
逆运算的优先级高于其他运算，
而所有的关系运算都优于集合运算。

关系运算的性质

关系运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x,y>$, 由逆的定义有

$$<x,y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y,x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x,y>\in F.$$

所以有$(F^{-1})^{-1}=F$.

(2) 任取x,

$$x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow \exists y(<y,x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有 $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

关系运算的性质

定理7.2 设F, G, H是任意的关系, 则

(1) $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

(2) $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

证 (1) 任取$<x,y>$,

$$
\begin{aligned}
& <x,y>\in(F\circ G)\circ H \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x,t>\in F\circ G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G) \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,\exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,t>\in G \wedge <t,y>\in H) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge \exists t\,(<s,t>\in G \wedge <t,y>\in H)) \\
\Leftrightarrow\ & \exists s\,(<x,s>\in F \wedge <s,y>\in G\circ H) \\
\Leftrightarrow\ & <x,y>\in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}
$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

证明

(2) 任取$<x,y>$,

$<x,y> \in (F \circ G)^{-1}$

$\Leftrightarrow <y,x> \in F \circ G$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<y,t> \in F \wedge <t,x> \in G)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in G^{-1} \wedge <t,y> \in F^{-1})$

$\Leftrightarrow <x,y> \in G^{-1} \circ F^{-1}$

所以 $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

关系运算的性质

定理7.3 设R为A上的关系, 则

$$R\circ I_A = I_A\circ R = R$$

证　任取$<x,y>$

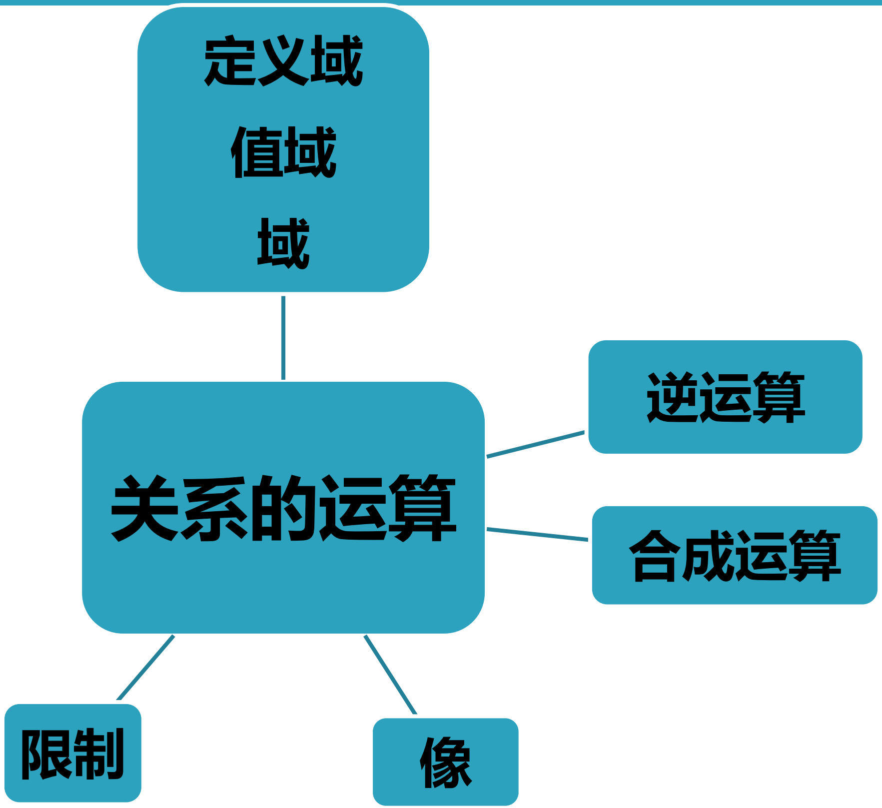
$$<x,y>\in R\circ I_A$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \land <t,y>\in I_A)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \land t=y \land y\in A)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in R$$

关系的运算小结

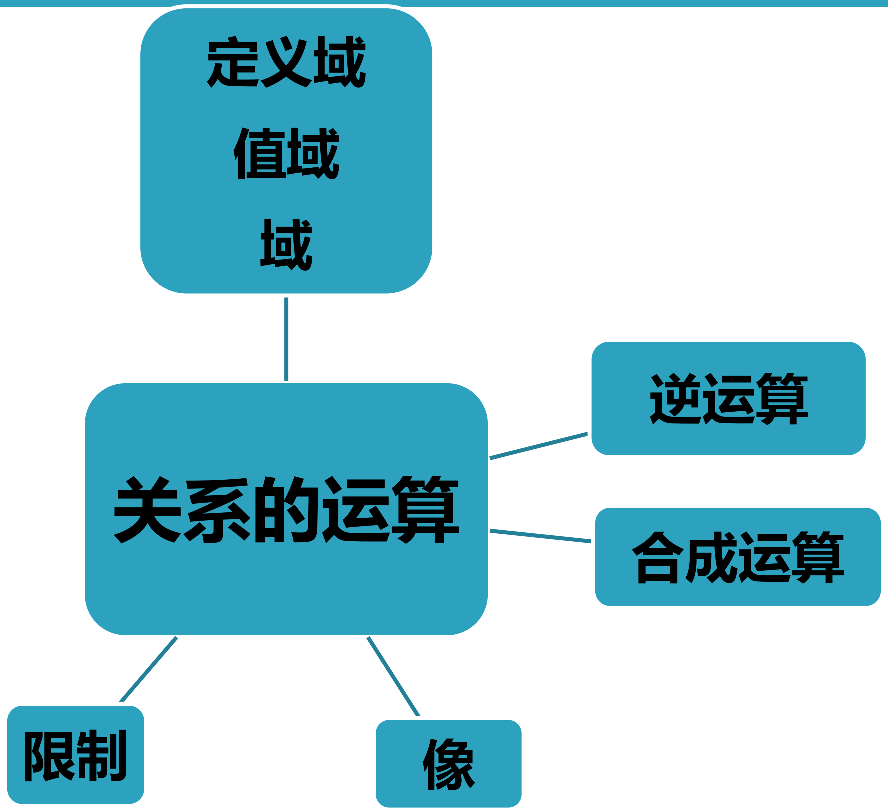


作业

- 习题7 第14题 关系运算
- 习题7 第20题 关系运算性质的证明

THANK YOU

复习引入



关系运算的性质

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$　　(2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G \cap F\circ H$　　(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F \cap H\circ F$

只证 (3) 任取$<x,y>$,

$<x,y> \in F\circ(G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G\cap H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G \wedge <t,y> \in H)$

$\Leftrightarrow \exists t\,((<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G) \wedge (<x,t> \in F \wedge <t,y> \in H))$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G) \wedge \exists t\,(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in H)$

$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G \wedge <x,y> \in F\circ H$

$\Leftrightarrow <x,y> \in F\circ G \cap F\circ H$

所以有 $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G \cap F\circ H$

定理7.4

(1) $F\circ(G\cup H) = F\circ G \cup F\circ H$

(2) $(G\cup H)\circ F = G\circ F \cup H\circ F$

(3) $F\circ(G\cap H) \subseteq F\circ G\cap F\circ H$

(4) $(G\cap H)\circ F \subseteq G\circ F\cap H\circ F$

推广

定理7.4 的结论可以推广到有限多个关系

$$R\circ(R_1\cup R_2\cup \ldots \cup R_n) = R\circ R_1\cup R\circ R_2\cup \ldots \cup R\circ R_n$$

$$(R_1\cup R_2\cup \ldots \cup R_n)\circ R = R_1\circ R\cup R_2\circ R\cup \ldots \cup R_n\circ R$$

$$R\circ(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n) \subseteq R\circ R_1\cap R\circ R_2\cap \ldots \cap R\circ R_n$$

$$(R_1\cap R_2\cap \ldots \cap R_n)\circ R \subseteq R_1\circ R\cap R_2\circ R\cap \ldots \cap R_n\circ R$$

关系运算的性质

定理7.5 设F 为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B) = F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B] = F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B) = F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B] \subseteq F[A]\cap F[B]$

证明

证 只证 (1) 和 (4).

(1) 任取 $<x,y>$

$$<x,y> \in F \restriction (A \cup B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge x \in A \cup B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \wedge (x \in A \vee x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (<x,y> \in F \wedge x \in A) \vee (<x,y> \in F \wedge x \in B)$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \restriction A \vee <x,y> \in F \restriction B$$

$$\Leftrightarrow <x,y> \in F \restriction A \cup F \restriction B$$

所以有 $F \restriction (A \cup B) = F \restriction A \cup F \restriction B$.

证明

(4) 任取y,

$y \in F[A \cap B]$

$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \exists x\,((<x,y> \in F \wedge x \in A) \wedge (<x,y> \in F \wedge x \in B))$

$\Rightarrow \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in A) \wedge \exists x\,(<x,y> \in F \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \wedge y \in F[B]$

$\Leftrightarrow y \in F[A] \cap F[B]$

所以有$F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$.

定理7.5 设F 为关系, A, B为集合, 则

(1) $F\upharpoonright(A\cup B)=F\upharpoonright A\cup F\upharpoonright B$

(2) $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$

(3) $F\upharpoonright(A\cap B)=F\upharpoonright A\cap F\upharpoonright B$

(4) $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

关系运算性质的证明需要注意哪些?

- 红队总结?
- 蓝队总结?

关系运算性质的证明总结

- 1.是集合还是关系?
- 2.利用定义
- 3.双向还是单向
- 4.量词

作业

- 习题7 第20题 关系运算性质的证明

幂运算

复习引入

- 关系的合成运算
  - $R \circ S$
  - $R \circ R$
  - $R \circ R \circ R$
  - $R \circ R \circ R \circ \ldots\ldots$

关系的幂运算

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意:

对于A上的任何关系 R_1 和 R_2 都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$

对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

如何求R^n

- 给定A上的关系R和自然数n,如何求R^n?

1.n-1次右复合计算得到R^n

2.M^n

3.关系图G':顶点集与G同，n步长的路径，加边

幂的求法

例 8 设$A = \{a,b,c,d\}$, $R = \{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>\}$,
求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

解 R 与 R^2的关系矩阵分别是:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

幂的求法

R^3和R^4的矩阵是：

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此$M^4=M^2$, 即$R^4=R^2$. 因此可以得到

$$R^2=R^4=R^6=\ldots, \quad R^3=R^5=R^7=\ldots$$

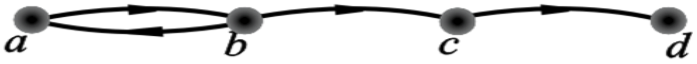
R^0的关系矩阵是

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关系图

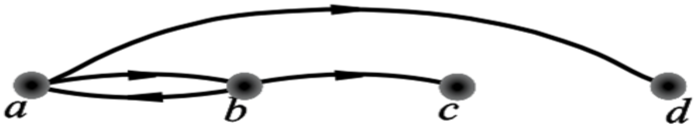
R^0, R^1, R^2, R^3,…的关系图如下图所示.

R^0



R^1

$R^2=R^4=\ldots$



$R^3=R^5=\ldots$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R 是A上的关系, 则存在自然数 s 和t, 使得 $R^s = R^t$.

(R^n的收敛性)

(有穷集上只有有穷多个不同的二元关系)

证明用到**鸽巢原理**。

鸽巢原理（抽屉原理）

- 有10个鸽子要飞进9个格子，则必有一个格子有2只鸽子。
- 定理描述: $n+1$个元素，随机分配到n个集合中，则至少有一个集合含有2个元素。

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A上的关系， $m, n \in \mathrm{N}$, 则 **(指数律)**

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证明用**归纳法**。

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系,若存在自然数 s, t $(s<t)$ 使得 $R^s=R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in$ N有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

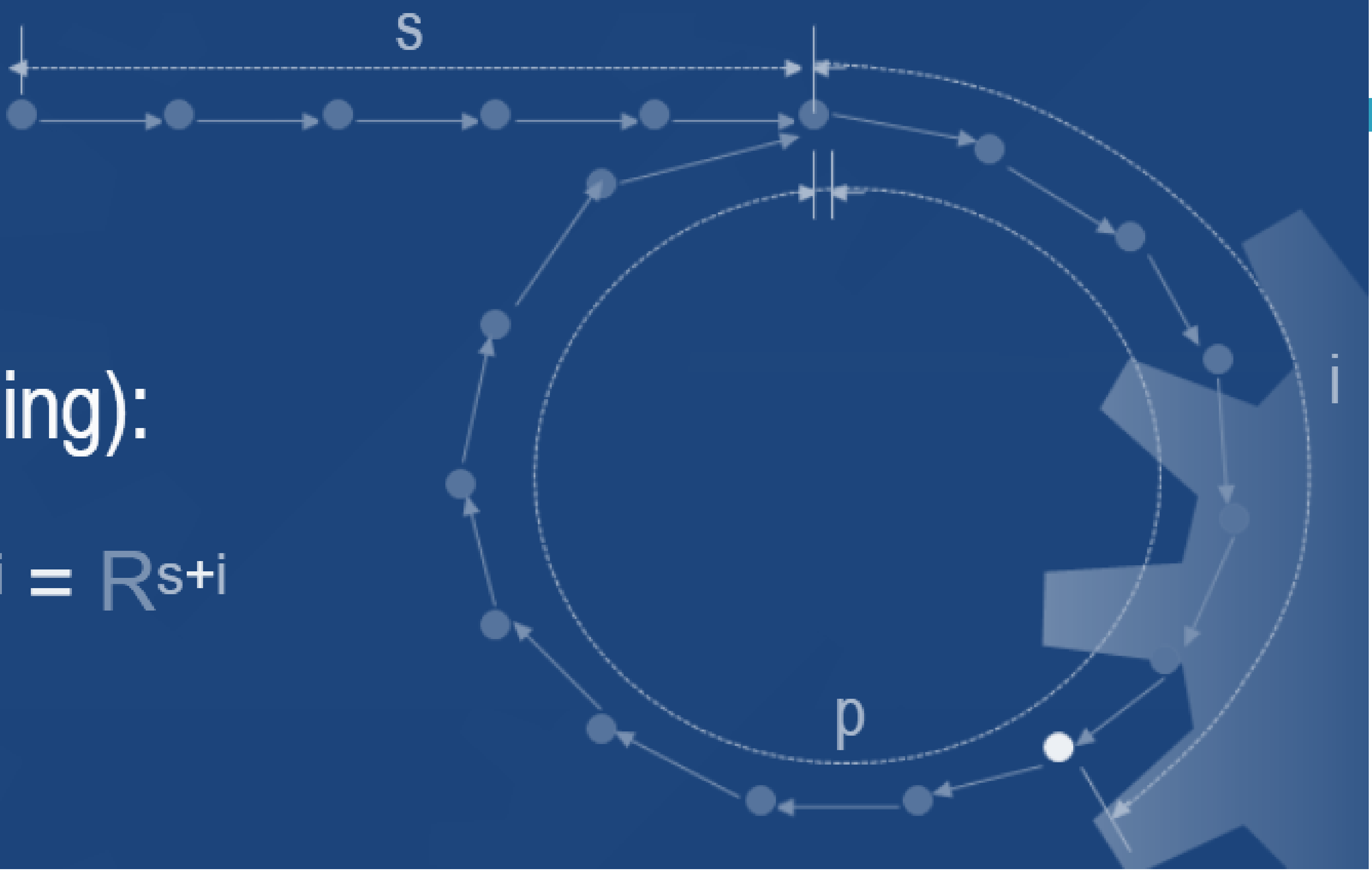
(2) 对任何 k, $i\in$ N有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中 $p = t-s$

(3) 令$S = \{R^0,R^1,\ldots,R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in$ N 有$R^q\in$ S

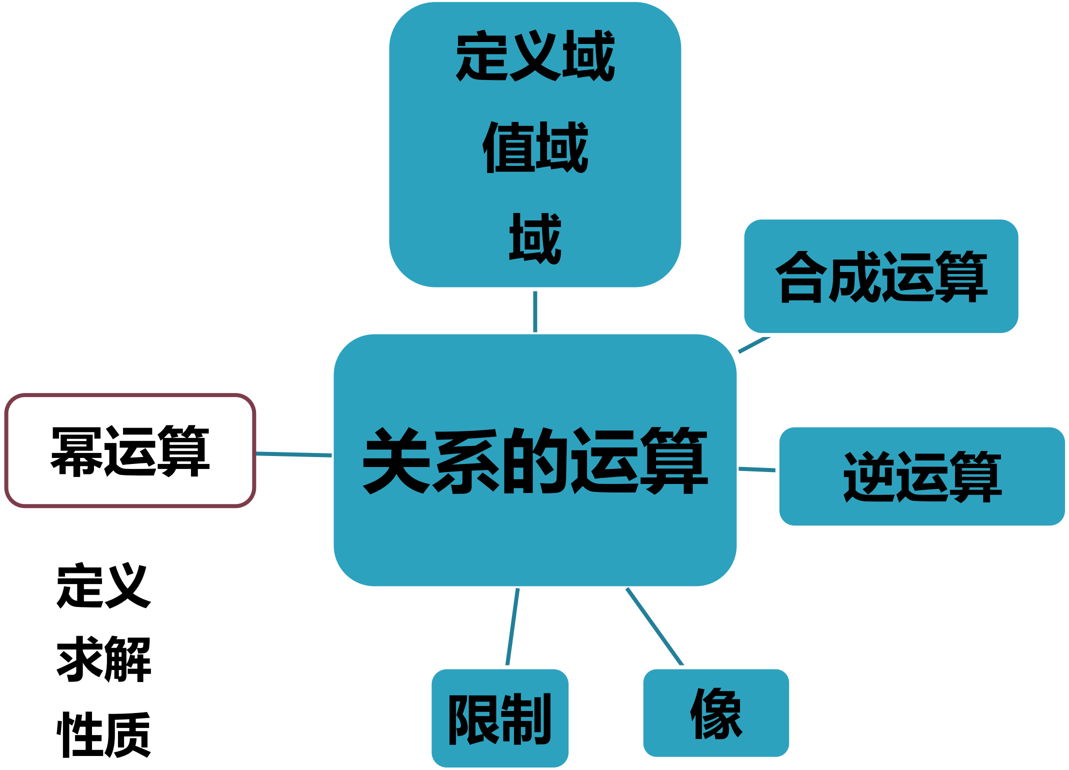
(有穷集上关系R的幂序列具周期性)

泵(pumping):

$$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$



关系的运算小结



作业

- 习题7 第26题（1） 关系的幂运算


THANK
YOU

复习引入

- A（n元集）上有 （**?** ） 个不同的二元关系.
- 如何对关系进行研究?

  -------将关系进行分类

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

7.4 关系的性质

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\in R)$, 则称 R 在 A 上是自反(reflexivity)的.

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow <x,x>\notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反(irreflexivity)的.

实例:

自反：全域关系E_A, 恒等关系I_A, 小于等于关系L_A, 整除关系D_A

反自反：实数集上的小于关系、幂集上的真包含关系.

R是A上的自反关系⇔ $I_A\subseteq R$

R是A上的反自反关系⇔ $I_A\cap R=\varnothing$

如：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1 = \{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2 = \{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$$

$$R_3 = \{<1,3>\}$$

R_2 自反， R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对应的关系图和关系矩阵?

自反 反自反 非自反 区别

- 自反是集合A中所有相等元素都配对一次；
- 反自反不允许出现集合A中相等元素配对；
- 非自反允许出现若干个相等元素配对，但是不能一个不漏的都出现。

***思考：*最大、最小的自反/反自反关系分别是?**

对称性与反对称性

定义7.12 设 R 为 A上的关系,

(1) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \rightarrow \langle y,x \rangle \in R)$, 则称 R 为 A上对称(symmetric)的关系.

(2) 若$\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y \rangle \in R \wedge \langle y,x \rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为A上的反对称(antisymmetric)关系.

实例:

对称关系：A上的全域关系E_A, 恒等关系I_A和空关系$\varnothing$

反对称关系：恒等关系I_A，空关系$\varnothing$.

R 在A上对称$\Leftrightarrow$ $R=R^{-1}$

R 在A上反对称$\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}，R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$$

$$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}，R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$$

R_1：对称和反对称； R_2：只有对称；R_3：只有反对称；
R_4：不对称、不反对称

对应的关系图和关系矩阵?

传递性

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\land <x,y>\in R\land <y,z>\in R\rightarrow <x,z>\in R),$$

则称 R 是A上的传递(transitivity)关系.

实例： A上的全域关系 E_A,恒等关系 I_A和空关系 $\varnothing$，小于等于和小于关系，整除关系，包含与真包含关系

$$\boxed{R\text{ 在}A\text{上传递} \Leftrightarrow R\circ R\subseteq R}$$

设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

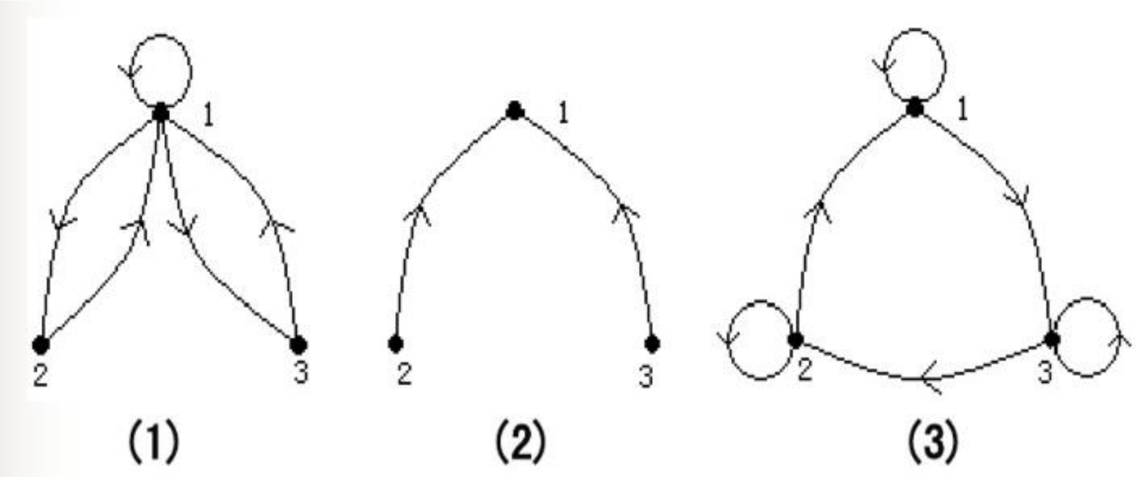
对应的关系图和关系矩阵?

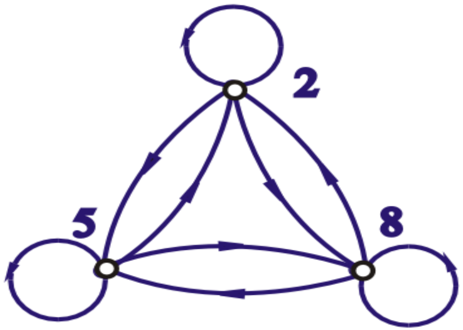
关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

例题

- 例：判断图中关系的性质，并说明理由。





小结

关系的性质：

自反　反自反

对称　反对称

传递

判定

作业

- 习题7 第22题 关系的性质

引入

关系的性质：

自反　反自反

对称　反对称

传递

判定

证明?

关系性质的证明方法

1. 证明R在A上**自反**

   任取x,

   $x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$

   前提　　　　推理过程　　　　结论

2. 证明R在A上**反自反**

   任取x,

   $x \in A \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow \langle x,x \rangle \notin R$

   前提　　　　推理过程　　　　结论

关系性质的证明方法

2. 证明R在A上**对称**

   任取$<x,y>$,

   $<x,y> \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <y,x> \in R$

   前提　　　　　　　　推理过程　　　　　　　　结论

3. 证明R在A上**反对称**

   任取$<x,y>$,

   $<x,y> \in R \wedge <y,x> \in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow x = y$

   前提　　　　　　　　推理过程　　　　　　　　结论

关系性质的证明方法

5. 证明R在A上**传递**

任取$<x,y>,<y,z>$,

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow <x,z>\in R$

前提　　　　推理过程　　　　结论

定义

关系性质成立的充要条件

定理7.9 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

证明

证明 只证(1)、(3)、(4)、(5)

(1) 必要性

任取$<x,y>$, 由于R 在A上自反必有

$$<x,y> \in I_A \Rightarrow x,y \in A \wedge x=y \Rightarrow <x,y> \in R$$

从而证明了$I_A \subseteq R$

充分性.

任取x, 有

$$x \in A \Rightarrow <x,x> \in I_A \Rightarrow <x,x> \in R$$

因此 R 在A上是自反的.

证明

(3) 必要性.

任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R \Leftrightarrow <x,y>\in R^{-1}$

所以 $R = R^{-1}$

充分性.

任取$<x,y>$, 由$R = R^{-1}$得

$<x,y>\in R \Rightarrow <y,x>\in R^{-1} \Rightarrow <y,x>\in R$

所以R在A上是对称的

证明

(4) 必要性. 任取$<x,y>$, 有

$$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow x=y \wedge x,y\in A$$

$$\Rightarrow <x,y>\in I_A$$

这就证明了$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$

充分性.

任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in R \wedge <y,x>\in R \Rightarrow <x,y>\in R \wedge <x,y>\in R^{-1}$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in I_A$$

$$\Rightarrow x=y$$

从而证明了R在A上是反对称的.

证明

(5) 必要性.

任取$<x,y>$有

$<x,y>\in R\circ R$

$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R \wedge <t,y>\in R)$

$\Rightarrow <x,y>\in R$

所以 $R\circ R \subseteq R$

充分性.

任取$<x,y>,<y,z>\in R$, 则

$<x,y>\in R \wedge <y,z>\in R$

$\Rightarrow <x,z>\in R\circ R \Rightarrow <x,z>\in R$

所以 R 在 A上是传递的

关系性质的三种等价条件

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	M^2中1位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	两点之间有边, 是一对方向相反的边	两点之间有边, 是一条有向边	点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边, 则x_i到x_k也有边

关系的性质与关系的运算

例9 设A是集合，R_1，R_2是A上的关系，证明：

(1)若是R_1，R_2自反和对称的，则$R_1 \cup R_2$也是自反和对称的。

(2) 若R_1和R_2是传递的，则$R_1 \cap R_2$也是传递的。

证明: （1） ∵ R_1，R_2是A上的自反关系

$\therefore I_A \subseteq R_1 \wedge I_A \subseteq R_2 \Rightarrow I_A \subseteq R_1 \cup R_2$

∴ $R_1 \cup R_2$ 是A上的自反关系

又∵ R_1，R_2是A上的对称关系

$\therefore R_1 = R_1^{-1} \wedge R_2 = R_2^{-1}$

$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1} = R_1 \cup R_2$

∴ R1∪R2 是A上的对称关系

考虑：若R_1，R_2在A上的自反和对称的，则$R_1 \cap R_2$也是自反和对称的?

(2) $\because$ R_1，R_2是A上的传递关系

$\therefore$ $R_1 \circ R_1 \subseteq R_1 \wedge R_2 \circ R_2 \subseteq R_2$

$\therefore$ $(R_1 \cap R_2) \circ (R_1 \cap R_2)$

$\subseteq R_1 \circ R_1 \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1 \cap R_2 \circ R_2$ （定理7.4）

$\subseteq (R_1 \cap R_2) \cap R_1 \circ R_2 \cap R_2 \circ R_1$

$\subseteq R_1 \cap R_2$

$\therefore$ $R_1 \cap R_2$ 是A上的传递关系

考虑：若R_1，R_2在A上是传递的，则$R_1 \cup R_2$也是传递的吗？

答：不一定。如$A=\{1,2,3\}$, $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$,

$R_2=\{\langle 3,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,2\rangle\}$,则

$R_1 \cup R_2 = \{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

关系的性质和运算之间的联系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
$\boldsymbol{R_1}^{-1}$	√	√	√	√	√
$\boldsymbol{R_1} \cap \boldsymbol{R_2}$	√	√	√	√	√
$\boldsymbol{R_1} \cup \boldsymbol{R_2}$	√	√	√	×	×
$\boldsymbol{R_1} - \boldsymbol{R_2}$	×	√	√	√	×
$\boldsymbol{R_1} \circ \boldsymbol{R_2}$	√	×	×	×	×

例10 设A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}上的关系，R是A上的关系，

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x+y=10\}$$

说明R具有哪些性质。

解：$R=\{\langle 1,9\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}$

易知 既不是自反也不是反自反的

是对称的

不是反对称的

不是传递的。

小结及拓展

关系的性质：

自反　反自反

对称　反对称

传递

判定　证明

闭包?

作业

- 习题7 第22题 关系的性质


THANK
YOU

复习引入

设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$上的关系，R是A上的关系，

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x+y=10\}$$

说明R具有哪些性质。

解：$R=\{\langle 1,9\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 9,1\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}$

易知 既不是自反也不是反自反的

是对称的

不是反对称的

不是传递的。

要让其具备某个性质，需要添加哪些有序对呢?

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

闭包定义

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

如何构造关系的闭包呢? → 关系表达式 / 关系矩阵 / 关系图

集合形式下关系闭包的求解方法

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

集合形式下关系闭包的求解方法

定理7.10提供了一种集合表示形式下关系闭包的求解方法。

例如:设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$,则

$r(R) = R \cup R^0 = \{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>, <c,c>, <d,d>, <b,b>,<a,a>\}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{<a,b>, <b,a>, <b,c>, <c,d>, <d,b>, <c,b>, <d,c>, <b,d>\}$

$t(R)= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ ***(甚不方便)***

求t(R)的推论

推论 设R为有穷集$A(|A|=n)$上的关系，则存在正整数r使得

$$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup \ldots \cup R^r$$

关系矩阵形式下闭包的求解方法

当关系用关系矩阵表示时，相应闭包求法为：

(1) $M_r = M+E$

(2) $M_s = M+M'$

(3) $M_t = M+M^2+M^3+\ldots$

其中M为R的关系矩阵，E是单位矩阵，M'是M的转置矩阵.

例11 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$,则

$$M_r=M+E=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_s=M+M`=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$M_t=M+M^2+M^3+\ldots=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

关系图形式下闭包的求法

设$R, r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别为G, G_r, G_s, G_t,则G_r, G_s, G_t与G的顶点集相等，除了G的边以外依据下列方法添加新的边：

(1)考察G的每个顶点,如果没有环就加上一个环,最终得到的是G_r 。

(2)考察G的每一条边，如果有一条x_i到x_j的单向边，$i \neq j$，则在G中加一条x_j到x_i的反方向边，最终得到G_s 。

(3)考察G的每个顶点x_i,找出从x_i出发的所有2步,3步,…,n步长的路径(n为G中的顶点数).设路径的终点为$x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}$，如果没有从$x_i$到$x_{jl}$ ($l=1,2, \ldots, k$)的边，就加上这条边，最终得到G_t 。

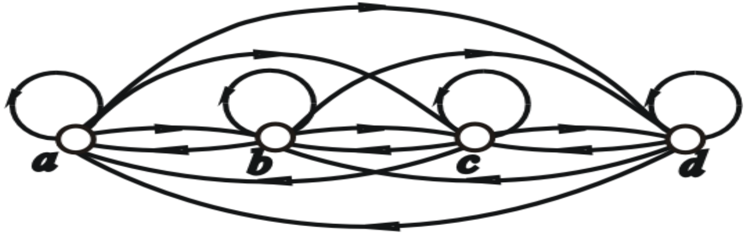
实例

例12　设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

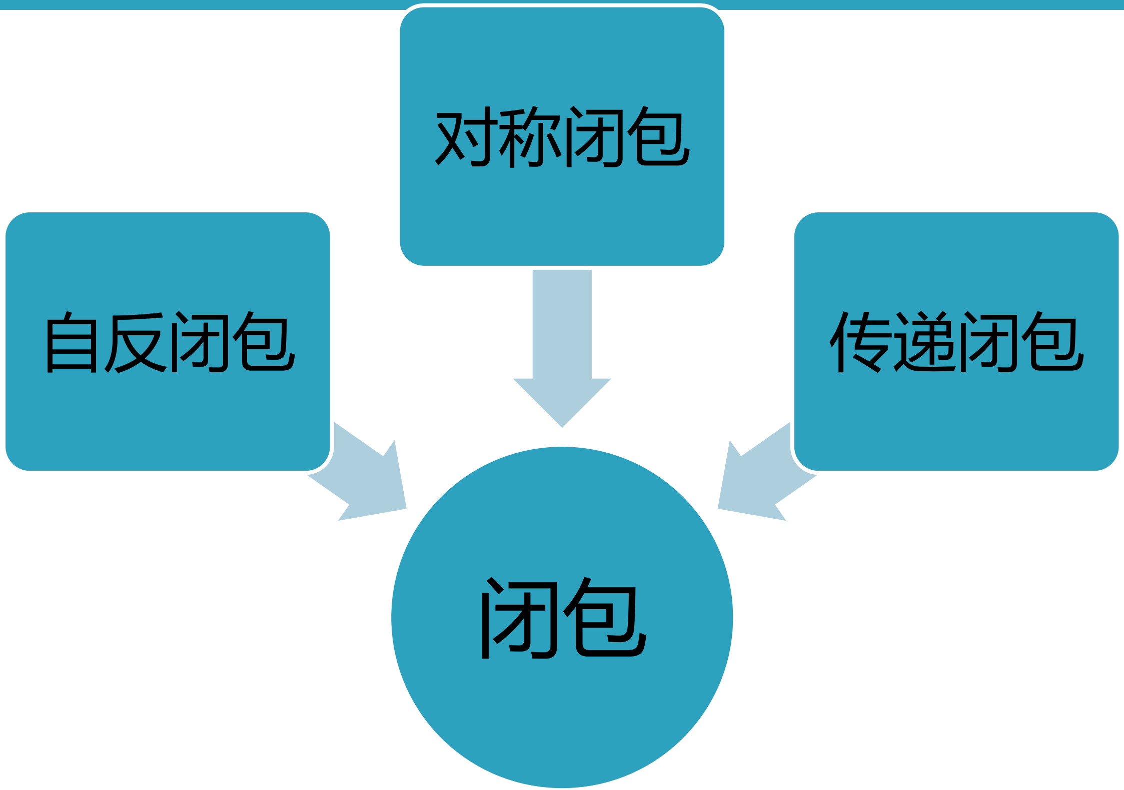
***r*(*R*)**

***s*(*R*)**



***t*(*R*)**

小结



作业

- 习题7 第26题 求关系的闭包

复习引入

- 关系闭包的定义
- 关系闭包的求解：集合表达式，关系矩阵，关系图
- 传递闭包的求法是难点

集合形式下关系闭包的求解方法

定理7.10 设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup R^0$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

证明

证 只证(1)和(3).

(1) 由$I_A=R^0\subseteq R\cup R^0$知 $R\cup R^0$是自反的, 且满足$R\subseteq R\cup R^0$

设R''是A上包含R的自反关系, 则有$R\subseteq R''$和$I_A\subseteq R''$. 从而有$R\cup R^0\subseteq R''$.

$R\cup R^0$满足闭包定义, 所以$r(R)=R\cup R^0$.

(3) 先证 $R\cup R^2\cup\ldots\subseteq t(R)$成立.

用归纳法证明对任意正整数n 有$R^n\subseteq t(R)$.

$n=1$时有$R^1=R\subseteq t(R)$. 假设$R^n\subseteq t(R)$成立, 那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y>\in R^{n+1}=R^n\circ R \Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in R^n \wedge <t,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t>\in t(R) \wedge <t,y>\in t(R)) \Rightarrow <x,y>\in t(R)$$

这就证明了$R^{n+1}\subseteq t(R)$. 由归纳法命题得证.

证明

再证 $t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup \ldots$成立, 为此只须证明$R \cup R^2 \cup \ldots$传递.

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$$<x,y> \in R \cup R^2 \cup \ldots \wedge <y,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\ (<x,y> \in R^t) \wedge \exists s(<y,z> \in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,z> \in R^t \circ R^s\ )$$

$$\Rightarrow \exists t\ \exists s\ (<x,z> \in R^{t+s}\ )$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \cup R^2 \cup \ldots$$

从而证明了$R \cup R^2 \cup \ldots$是传递的.

关系矩阵形式下闭包的求解方法

当关系用关系矩阵表示时，相应闭包求法为：

(1)$M_r = M+E$

(2) $M_s = M+M'$

(3) $M_t = M+M^2+M^3+\ldots$

其中M为R的关系矩阵，E是单位矩阵，M’是M的转置矩阵.

传递闭包

Warshall算法——一种求M_t的算法

考虑n+1个矩阵的序列$M_0,M_1,\ldots M_n$，矩阵M_k的i行j列的元素为$M_k[i,j]$。

对于k=0,1,…,n, $M_k[i,j]=1$当且仅当在R的关系图中，存在一条从x_i到x_j的路径，并且这条路径除端点外中间只经过$\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$中的结点。

例12　设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>,<d,b>\}$, $t(R)$利用沃舍尔算法求解。

关系闭包的应用-拓展思考

- 在一个道路网络上连接有5个城市，分别标记为a,b,c,d,e。城市之间连接的道路是单向的

有 $a \to b, b \to c, c \to a, c \to e, d \to e$， $e \to b$ 。

对每个城市求出从它出发能够到达的所有其它城市。

小结

- ✓ 闭包的关系表达式证明
- ✓ 传递闭包的求法

作业

- 关系闭包的应用-拓展思考

复习引入

- 关系闭包的定义
- 关系闭包的求解：集合表达式，关系矩阵，关系图
- Warshall算法
- 关系闭包的应用?

关系闭包的应用

- 在一个道路网络上连接有5个城市，分别标记为a,b,c,d,e。城市之间连接的道路是单向的

有 $a \to b, b \to c, c \to a, c \to e, d \to e$， $e \to b$ 。

对每个城市求出从它出发能够到达的所有其它城市。

参考解答

令$A=\{a,b,c,d,e\}$,定义A上的关系R， $<a,b>\in R \Leftrightarrow$从$a$到$b$有一条直接的道路。则$R=\{<a,b>,<b,c>,<c,a>,<c,e>,<d,e>,<e,b>\}$,则$t(R)$就是$A$上的连通关系。

$<a,b>\in t(R) \Leftrightarrow$从$a$可达$b$。

而$\{a\}$在$t(R)-I_A$下的像就是从城市a出发可达的其它城市的集合。

$t(R)=\{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<a,e>,<b,a>,<b,b><b,c>,<b,e>,<c,a>,<c,b>,<c,c>,<c,e>,<d,a>,<d,b>,<d,c>,<d,e>,<e,a>,<e,b>,<e,c>,<e,e>\}$

$(t(R)-I_A)[\{a\}]=\{b,c,e\}$

$(t(R)-I_A)[\{b\}]=\{a,c,e\}$

$(t(R)-I_A)[\{c\}]=\{a,b,e\}$

$(t(R)-I_A)[\{d\}]=\{a,b,c,e\}$

$(t(R)-I_A)[\{e\}]=\{a,b,c\}$

闭包的性质

定理7.11 设R是非空集合A上的关系，则

(1) R是自反的 $\Leftrightarrow$ r(R)=R

(2) R是对称的 $\Leftrightarrow$ s(R)=R

(3) R是传递的 $\Leftrightarrow$ t(R)=R

证明：(1) 先证明 “=>”

由自反闭包定义知，$R \subseteq r(R)$

又 ∵ R是自反的 且$R \subseteq R$,再由自反闭包定义知，$r(R) \subseteq R$

∴ r(R)=R

再证明 “<=”

对于任意x，$\forall x \in A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in I_A \Rightarrow \langle x,x \rangle \in r(R) \Rightarrow \langle x,x \rangle \in R$

∴ R是自反的。

(2) 先证明“=>”

由对称闭包定义知，$R \subseteq s(R)$

又 ∵ R是对称的 且$R \subseteq R$,再由对称闭包定义知，$s(R) \subseteq R$

∴ $s(R)=R$

再证明“<=”

对于任意$<x,y>$，$<x,y> \in R \Rightarrow <x,y> \in s(R)$

$\Rightarrow <y,x> \in s(R) \Rightarrow <y,x> \in R$

∴ R是对称的。

(3) 先证明 “=>”　由传递闭包定义知，$R \subseteq t(R)$

又 ∵ R是传递的且$R \subseteq R$,再由传递闭包定义知,$t(R) \subseteq R$

∴ $t(R)=R$

再证明 “<=”

对于任意$<x,y>,<y,z>$，

$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R \Rightarrow <x,y> \in t(R) \wedge <y,z> \in t(R)$

$\Rightarrow <x,z> \in t(R) \Rightarrow <x,z> \in R$

∴ R是传递的。

闭包的性质

定理7.12 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且$R_1 \subseteq R_2$则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$ (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$ (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

证明：(1) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \cup I_A \subseteq R_2 \cup I_A \Rightarrow r(R_1) \subseteq r(R_2)$

(2) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^{-1} \subseteq R_2^{-1} \Rightarrow R_1 \cup R_1^{-1} \subseteq R_2 \cup R_2^{-1} \Rightarrow s(R_1) \subseteq s(R_2)$

(3) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^2 \subseteq R_2^2$

$R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^3 \subseteq R_2^3$

……

$\Rightarrow R_1 \cup R_1^2 \cup R_1^3 \cup \ldots \subseteq R_2 \cup R_2^2 \cup R_2^3 \cup \ldots$

$\Rightarrow t(R_1) \subseteq t(R_2)$

闭包的性质

定理7.13 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若 R是自反的，则s(R)和t(R)也是自反的。

(2) 若 R是对称的，则r(R)和t(R)也是对称的。

(3) 若 R是传递的，则r(R)也是传递的。

证明：(只证明1)

(1) $\because$ R是自反的 $\therefore$ $I_A \subseteq R \Rightarrow I_A \subseteq R \cup R^{-1} \Rightarrow I_A \subseteq s(R)$

$\therefore$ s(R) 是自反的。

$\because$ R是自反的 $\therefore$ $I_A \subseteq R \Rightarrow I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \Rightarrow I_A \subseteq t(R)$

$\therefore$ t(R) 是自反的。

闭包的性质

- 若关系R是自反或对称的，则关于R的闭包运算依旧是自反或对称的。
- 但若关系R是传递的，则关于R的闭包运算不一定是传递的。如：

  $A=\{1,2,3\}$, $R=\{<1,3>\}$,

  $r(R)=\{<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,3>\}$是传递关系,

  $s(R)=\{<1,3>,<3,1>\}$不是传递关系。

闭包的性质

- 如果需要进行多个闭包运算，比如求R的自反、对称、传递的闭包 $tsr(R)$，运算顺序如下：

$$tsr(R) = rts(R) = trs(R)$$

为了不失去传递性，传递闭包运算应该放在对称闭包运算的后边。

关系的闭包小结

- ✓ 闭包的定义
- ✓ 闭包的求解
  --关系表达式，关系矩阵（warshall算法），关系图
- ✓ 闭包的应用
- ✓ 闭包的性质

作业

- 将关系闭包的应用实例独立完成。

在一个道路网络上连接有5个城市，分别标记为a,b,c,d,e。城市之间连接的道路是单向的

有 $a \to b, b \to c, c \to a, c \to e, d \to e$， $e \to b$ 。

对每个城市求出从它出发能够到达的所有其它城市。


THANK YOU

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

引入

核酸检测时，由于人数众多，我们需要将所有师生分成多个类别，然后将多个类别的师生分成不同时间段来完成检测。

如何进行分类呢?

一种方案是：按照学院分,每个学院分配一个时间段。

可以定义一个关系R: aRb 当且仅当a 和b 在同一学院。

等价关系定义

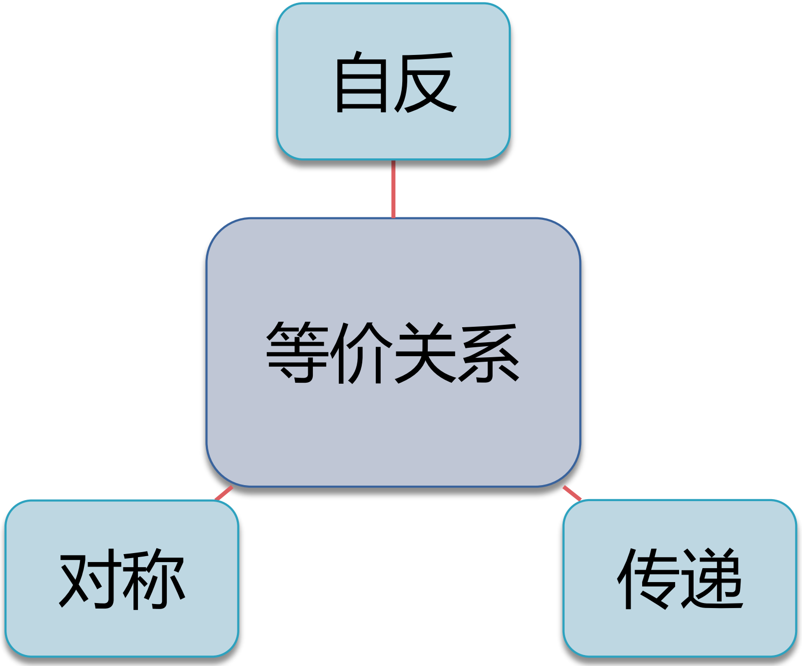
定义7.15 设R为非空集合A上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系.

设 R 是一个等价关系, 若$<x,y>\in R$, 称 x等价于y, 记做$x \sim y$.

判断

- □ 同学院关系
- □ 同宿舍关系
- □ 等于关系
- □ 朋友关系

等价关系的判定和证明



等价关系的证明

例：设R为A上的自反和传递关系，证明是$R\cap R^{-1}$是A上的等价关系。

(1) **自反**　任取x,

$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow <x,x>\in R\wedge<x,x>\in R \Rightarrow <x,x>\in R\wedge<x,x>\in R^{-1}\Rightarrow <x,x>\in R\cap R^{-1}$

(2) **对称**　任取$<x,y>$,

$<x,y>\in R\cap R^{-1} \Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}$

$\Rightarrow <y,x>\in R^{-1}\wedge<y,x>\in R$

$\Rightarrow <y,x>\in R\cap R^{-1}$

(3) **传递**　任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$<x,y>\in R\cap R^{-1} \wedge <y,z>\in R\cap R^{-1}$

$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge<x,y>\in R^{-1}\wedge<y,z>\in R\wedge<y,z>\in R^{-1}$

$\Rightarrow(<x,y>\in R\wedge<y,z>\in R)\wedge(<x,y>\in R^{-1}\wedge<y,z>\in R^{-1})$

$\Rightarrow <x,z>\in R\wedge<x,z>\in R^{-1} \Rightarrow <x,z>\in R\cap R^{-1}$　　所以，$R\cap R^{-1}$是A上的等价关系。

等价关系实例

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系R:

$$R=\{<x,y>|\ x,y\in A\wedge x\equiv y(\text{mod } 3)\}$$

其中$x\equiv y(\text{mod } 3)$叫做 x与 y 模3相等, 即x除以3的余数与y除以3的余数相等.

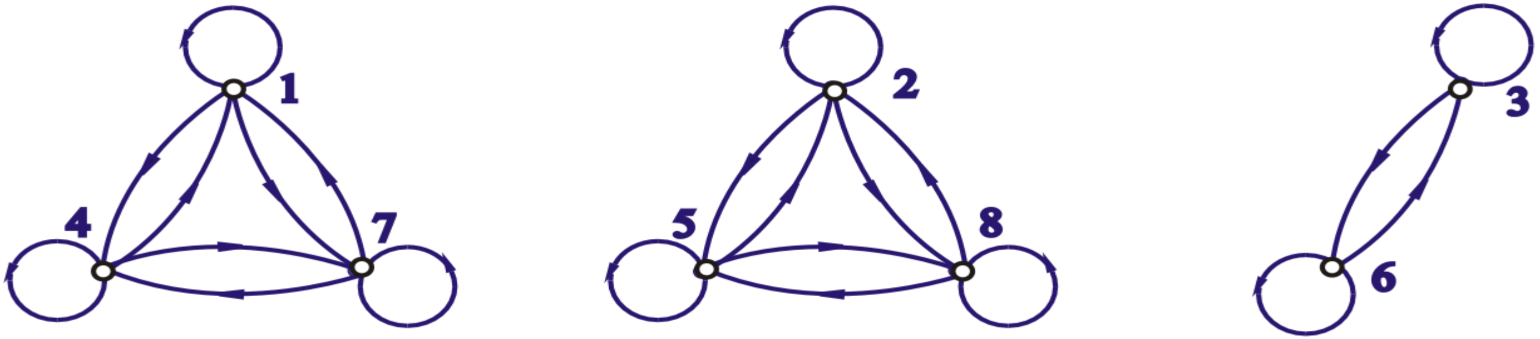
(1) $\forall x\in A$, 有 $x\equiv x\ (\text{mod } 3)$

(2) $\forall x,y\in A$, 若$x\equiv y(\text{mod } 3)$, 则 有$y\equiv x(\text{mod } 3)$

(3) $\forall x,y,z\in A$, 若$x\equiv y(\text{mod } 3)$, $y\equiv z(\text{mod } 3)$, 则 有$x\equiv z(\text{mod } 3)$

R 为A上的等价关系

等价关系实例



模 3 等价关系的关系图

- 集合A中的元素在R下被分成互相独立的三部分
- 同一部分的数两两有关系
- 不同部分的数没有任何关系

等价类

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$，令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$为x关于R的等价类, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$.

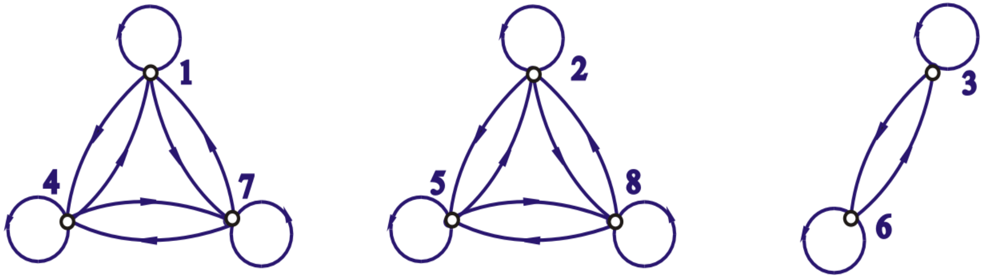
实例 $A=\{1, 2, \ldots, 8\}$上模3等价关系的等价类：

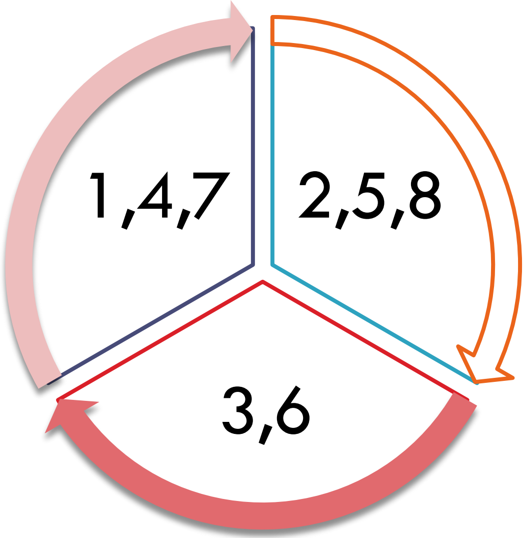
$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

等价类

实例 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$上模3等价关系的等价类：

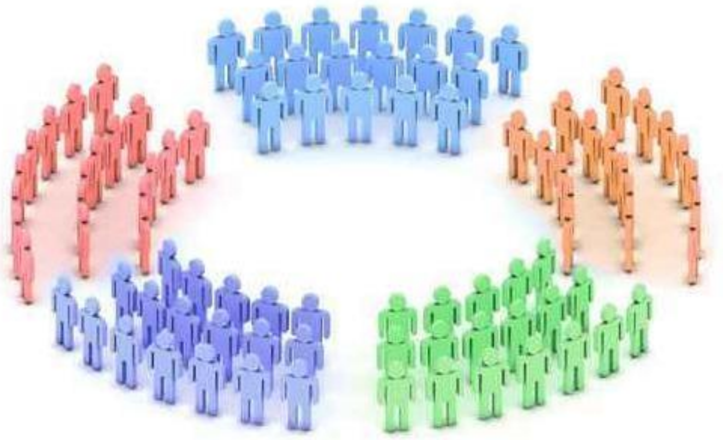
$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\}$$
$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$$
$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$





拓展应用

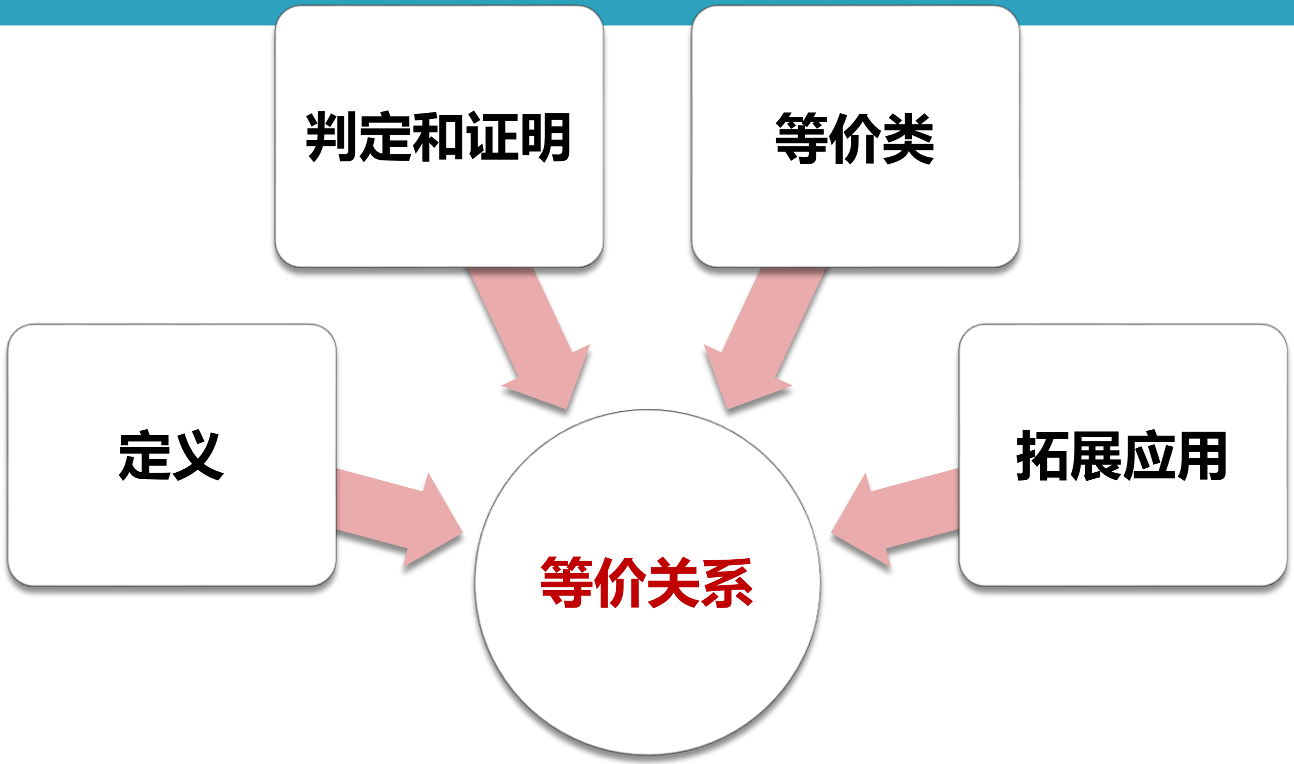
- 物以类聚，人以群分



- 等价类划分（软件测试）

输入条件	有效等价类	编号	无效等价类	编号
年龄	20~39岁	1		
	40~59岁	2		
	1~19岁	3	小于1	12
	60~99岁		大于99	13
性别	‘M’	4	除‘M’和‘F’之外的其它字符	14
	‘F’	5		
婚姻	已婚	6	除‘已婚’和‘未婚’之外的其它字符	15
	未婚	7		
抚养人数	空白	8	除空白和‘无’和数字之外的其它字符	16
	无	9		
	1~6人	10	小于1	17
	6~9人	11	大于9	18

小结



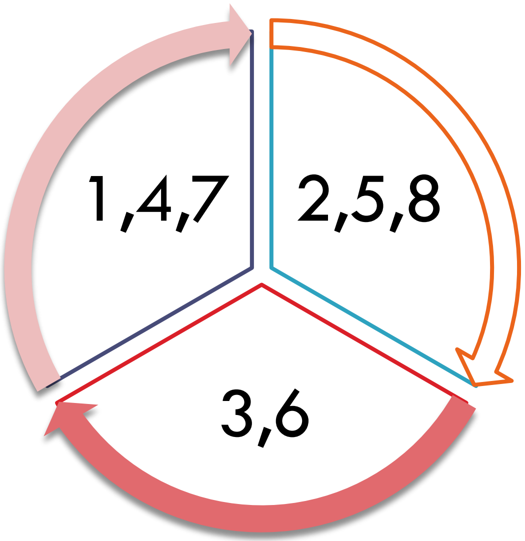
等价关系作业

- 习题七

- 32题（等价关系的判定）

复习引入

等价关系 → 等价类 → 拓展应用



等价类的性质

定理7.14 设R是非空集合A上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A$, $[x]$是A的非空子集

(2) $\forall x,y \in A$, 如果 xRy, 则 $[x] = [y]$

(3) $\forall x,y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$与$[y]$不交

(4) $\cup\{[x] \mid x \in A\} = A$

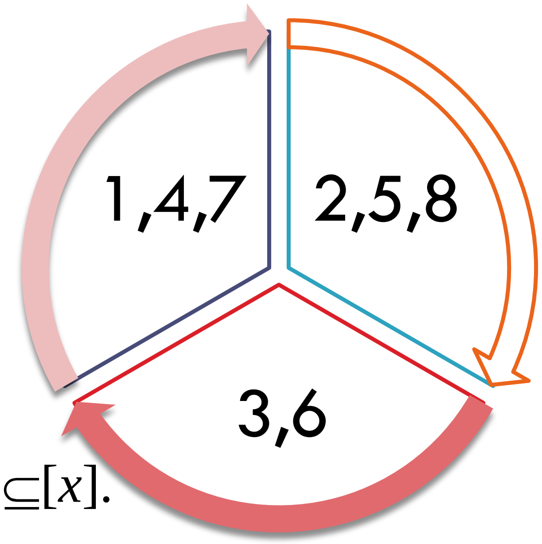
证 (1) 由定义, $\forall x \in A$有$[x] \subseteq A$. 又$x \in [x]$, 即$[x]$非空.

(2) 任取 z, 则有

$$z \in [x] \Rightarrow \langle x,z \rangle \in R \Rightarrow \langle z,x \rangle \in R$$

$$\langle z,x \rangle \in R \wedge \langle x,y \rangle \in R \Rightarrow \langle z,y \rangle \in R \Rightarrow \langle y,z \rangle \in R$$

从而证明了$z \in [y]$. 综上所述必有 $[x] \subseteq [y]$. 同理可证 $[y] \subseteq [x]$. 这就得到了$[x] = [y]$.



证明

(3) 假设 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$, 则存在 $z\in[x]\cap[y]$, 从而有$z\in[x]\wedge z\in[y]$,
即$<x,z>\in R\wedge<y,z>\in R$成立. 根据$R$的对称性和传递性必有
$<x,y>\in R$, 与 $x \not R y$矛盾

(4) 先证$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$. 任取$y$,

$$y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}\Leftrightarrow\exists x(x\in A\wedge y\in[x])$$

$$\Rightarrow y\in[x]\wedge[x]\subseteq A\Rightarrow y\in A$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$

再证$A\subseteq\cup\{[x]\mid x\in A\}$. 任取$y$,

$$y\in A\Rightarrow y\in[y]\wedge y\in A\Rightarrow y\in\cup\{[x]\mid x\in A\}$$

从而有$\cup\{[x]\mid x\in A\}\subseteq A$成立.

综上所述得$\cup\{[x]\mid x\in A\}=A$.

商集与划分

定义7.17 设 R 为非空集合A上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集, 记做A/R,

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$， A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合, 若A的子集族$\pi(\pi \subseteq P(A))$满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y(x,y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块.

划分实例

例13 设 $A = \{ a, b, c, d \}$, 给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$如下:

$\pi_1=\{\{ a, b, c \},\{ d \}\}$

$\pi_2=\{\{ a, b\}, \{ c \}, \{ d \}\}$

$\pi_3=\{\{ a \}, \{ a, b, c, d \}\}$

$\pi_4=\{\{ a, b\}, \{ c \}\}$

$\pi_5=\{\varnothing,\{ a, b \}, \{ c, d \}\}$

$\pi_6=\{\{ a, \{ a \}\}, \{ b, c, d \}\}$

则 π_1和 π_2是A的划分, 其他都不是A的划分.

商集与划分

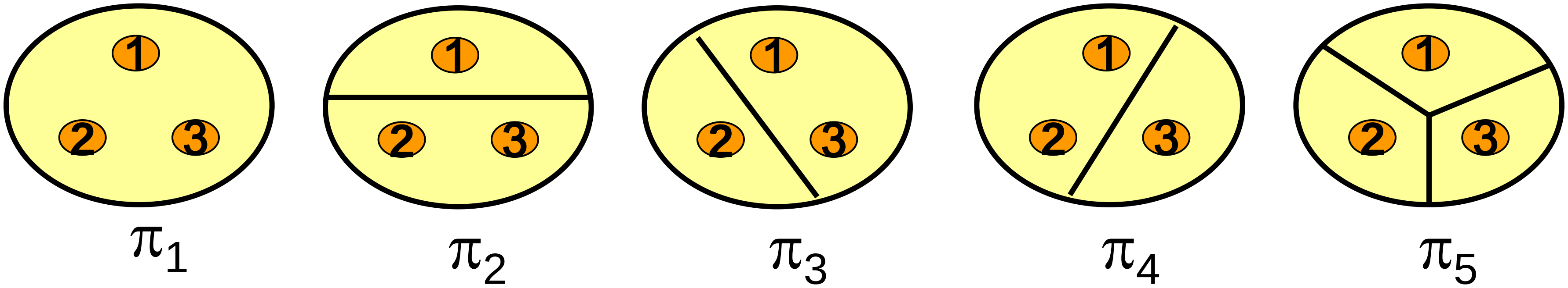
商集A/R是集合A的一个划分。

集合A上的等价关系与A的划分是一一对应的。

同一个集合有多种不同的划分，不同的等价关系导出不同的划分.

实例：给出 $A=\{1,2,3\}$上所有的等价关系。

解　先做出A的划分, 从左到右分别记作 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$.



π_1对应 E_A, π_5 对应 I_A,　π_2, π_3 和 π_4分别对应 R_2, R_3和 R_4.

$$R_2=\{<2,3>,<3,2>\}\cup I_A$$

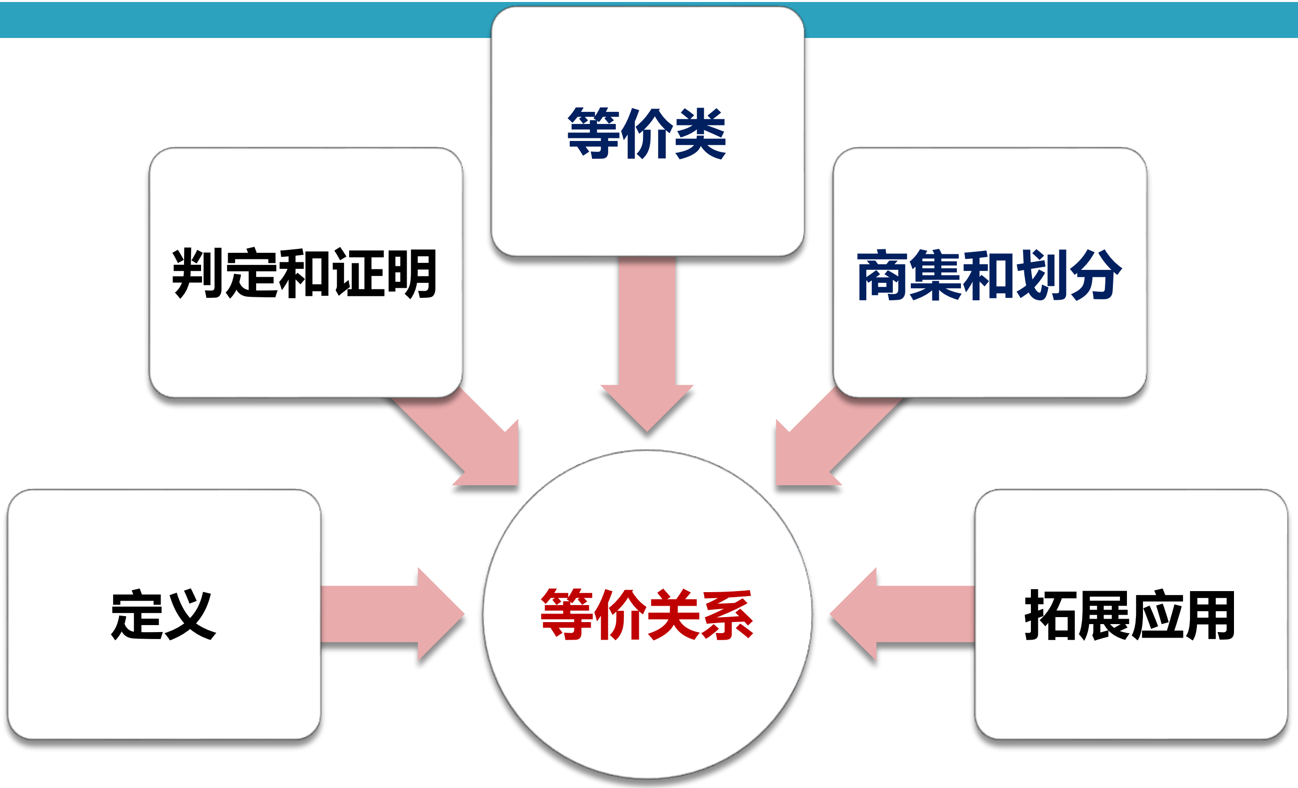
$$R_3=\{<1,3>,<3,1>\}\cup I_A$$

$$R_4=\{<1,2>,<2,1>\}\cup I_A$$

实例拓展

- 给出 $A = \{1,2,3,4\}$ 上所有的等价关系。

小结



等价关系作业

- 习题七

- 36题（等价关系的证明）

第七章 二元关系

- 有序对与笛卡儿积
- 二元关系的定义与表示法
- 关系的运算
- 关系的性质
- 关系的闭包
- 等价关系与划分
- 偏序关系

引入

- 等价关系—分类

- 偏序关系—排序（通常依据事物的自然规律，比如软件工程开发，编写字典等)

定义与实例

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作x"小于或等于" y.

实例

恒等关系
小于或等于关系
整除关系
包含关系

可比与全序

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow$ $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生:

$x \prec y$ (或 $y \prec x$), $x = y$, x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系, $\forall x,y \in A$, x与y都是可比的,则称R为全序(或线序)关系。

举例：小于或等于关系

整除关系

偏序集

定义7.22 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$一起叫做偏序集, 记作$<A,\preccurlyeq>$.

实例: $<Z,\le>$, $<P(A),R_\subseteq>$

覆盖与哈斯图

定义7.23 $x,y\in A$, 如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$, 则称 y覆盖x.

例如{1,2,4,6}集合上整除关系, 2覆盖1, 4和6覆盖2, 4不覆盖1.

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图。

- 特点:

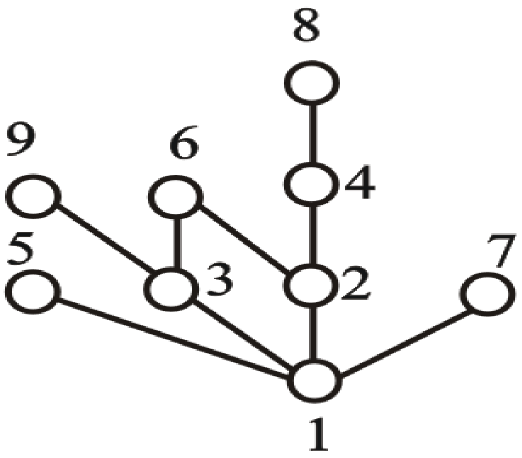
(1) 每个结点没有环

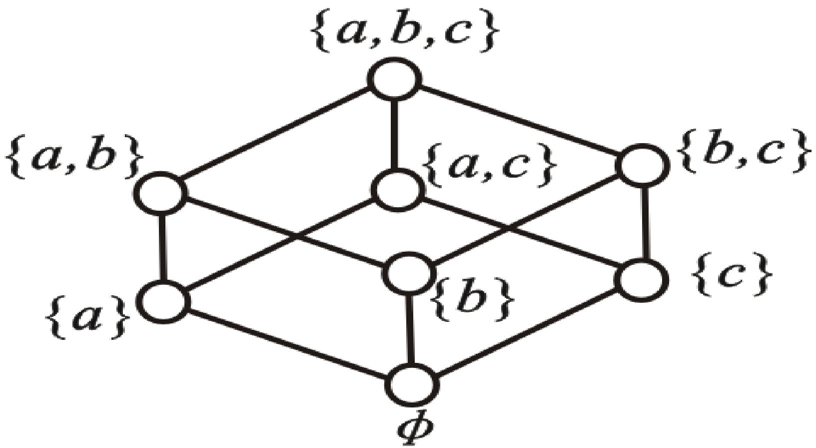
(2) 两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前

(3) 具有覆盖关系的两个结点之间连边

实例

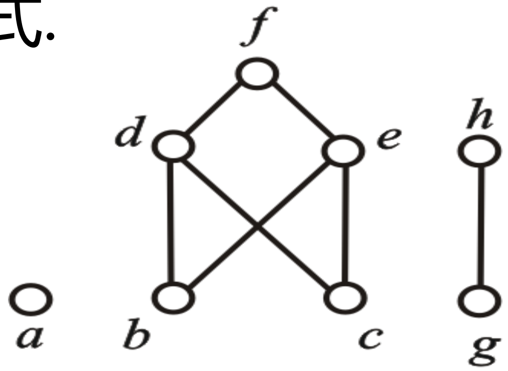
例15 偏序集$<\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除}>$和$<P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}>$的哈斯图.





实例

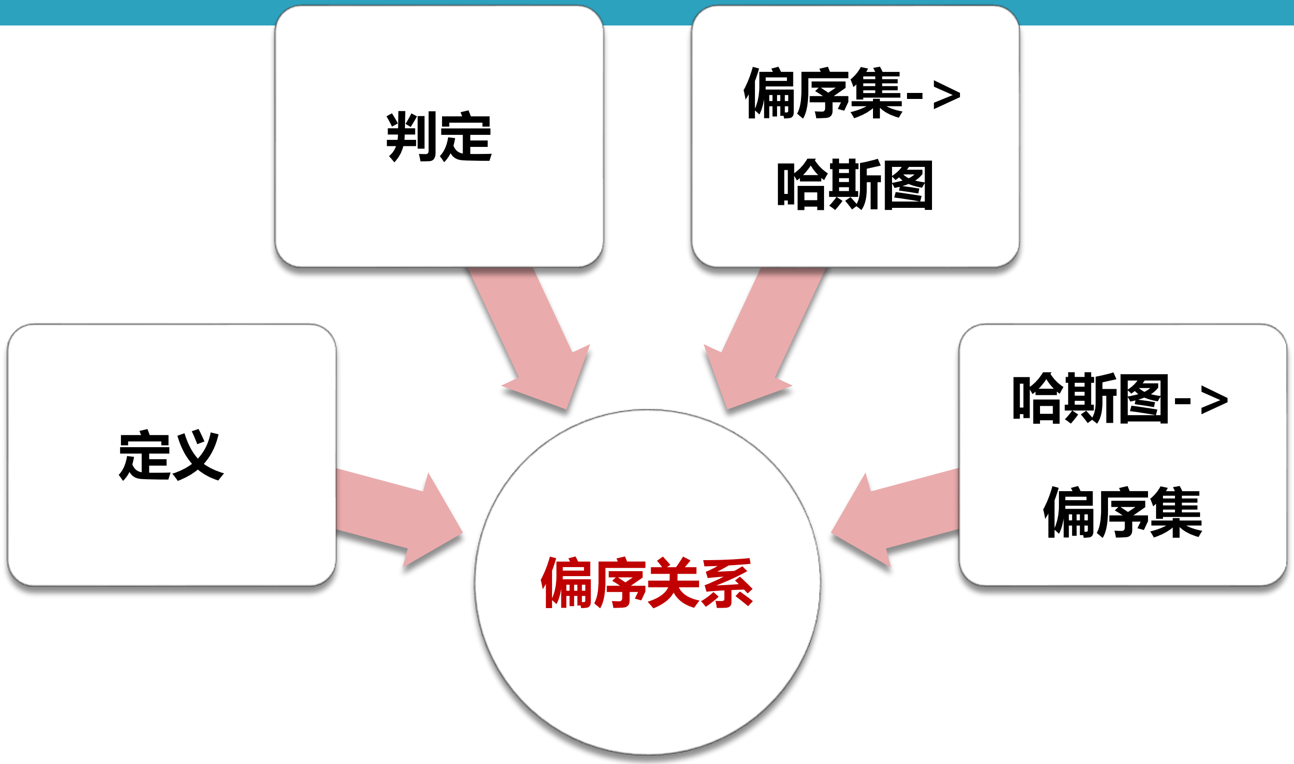
例16 已知偏序集<*A*,*R*>的哈斯图如下图所示, 试求出集合*A*和关系*R*的表达式.



解 $A=\{\, a, b, c, d, e, f, g, h \,\}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

课堂小结



作业

- 习题七

- 43题第1小题（由偏序集求哈斯图）

引入

- 偏序关系
- 哈斯图

偏序集中的特殊元素

定义7.24 设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立, 则称 y 为B的最小元

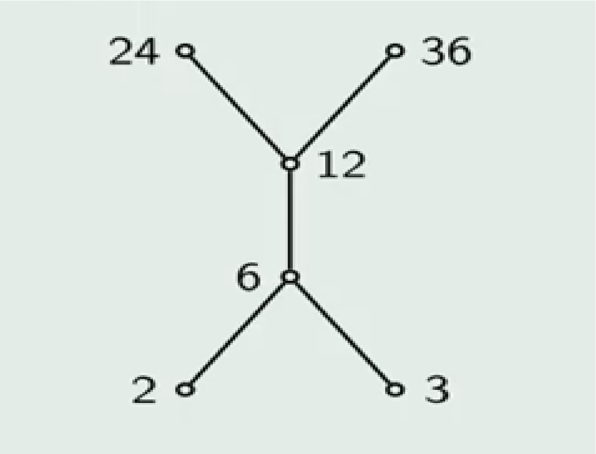
(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立, 则称 y 为B的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立, 则称 y 为B的极大元

实例

- 偏序集$<\{2,3,6,12,24,36\}, R_{整除}>$



- $\{6,12\}$ $\{2,3\}$ $\{24,36\}$ $\{2,3,6,12\}$

偏序集中的特殊元素

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

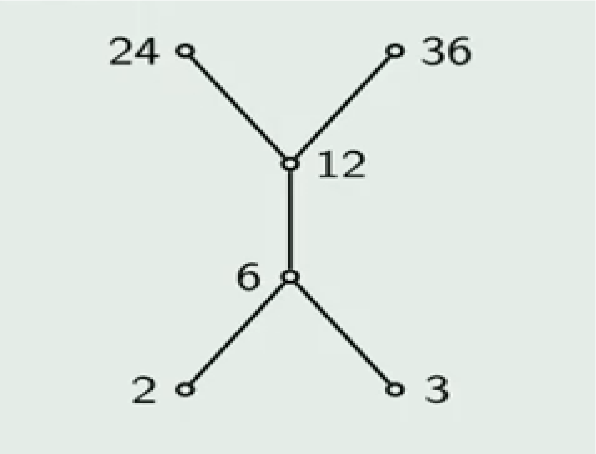
(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C = \{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D = \{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

实例

- 偏序集$<\{2,3,6,12,24,36\}, R_{整除}>$



- $\{6,12\}$ $\{2,3\}$ $\{24,36\}$ $\{2,3,6,12\}$

实例

例17　设偏序集$<A,\preccurlyeq>$，求A的极小元、最小元、极大元、最大元，设$B=\{b,c,d\}$，求B的下界、上界、下确界、上确界.

解:

极小元：a, b, c, g；

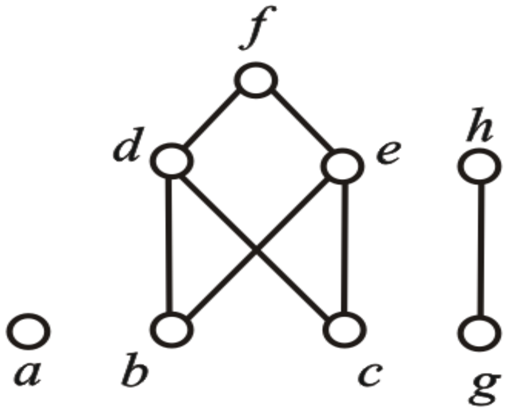
极大元：a, f, h；

没有最小元与最大元.

B的下界和最大下界都不存在；

上界有 d 和 f,

最小上界为 d.



课堂小练习

设偏序集 $<A, R>$ 的哈斯图如图所示.

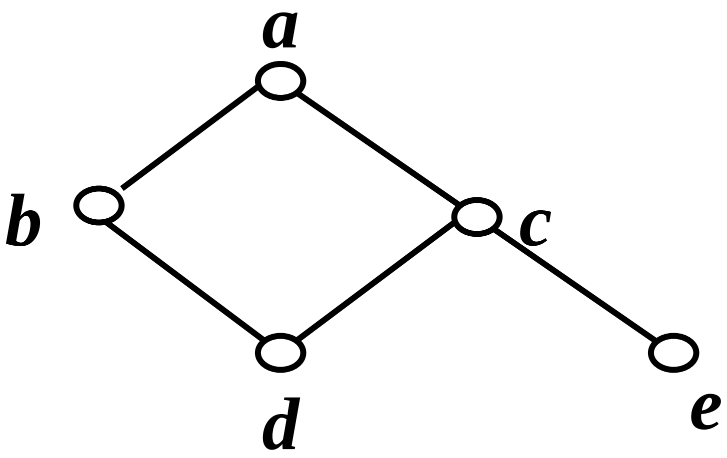
(1) 写出A和R的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元

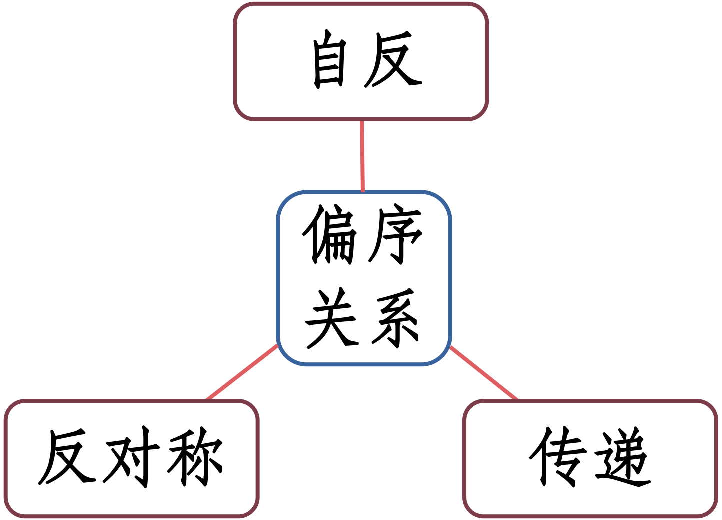
解：(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{<d,b>, <d,a>, <d,c>,$
$<e,c>, <e,a>, <b,a>,$
$<c,a>\}\cup I_A$

(2) 极大元和最大元是a,
极小元是d, e;
没有最小元.



偏序关系的判定和证明



偏序关系的证明

实例：设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明T为偏序关系.

偏序关系的证明

证 (1) **自反性** 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) **反对称性** 任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) **传递性** 任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

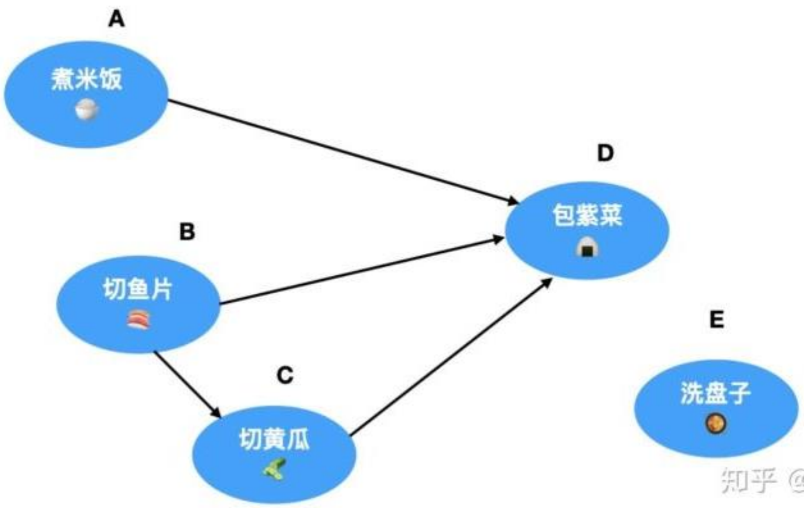
$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

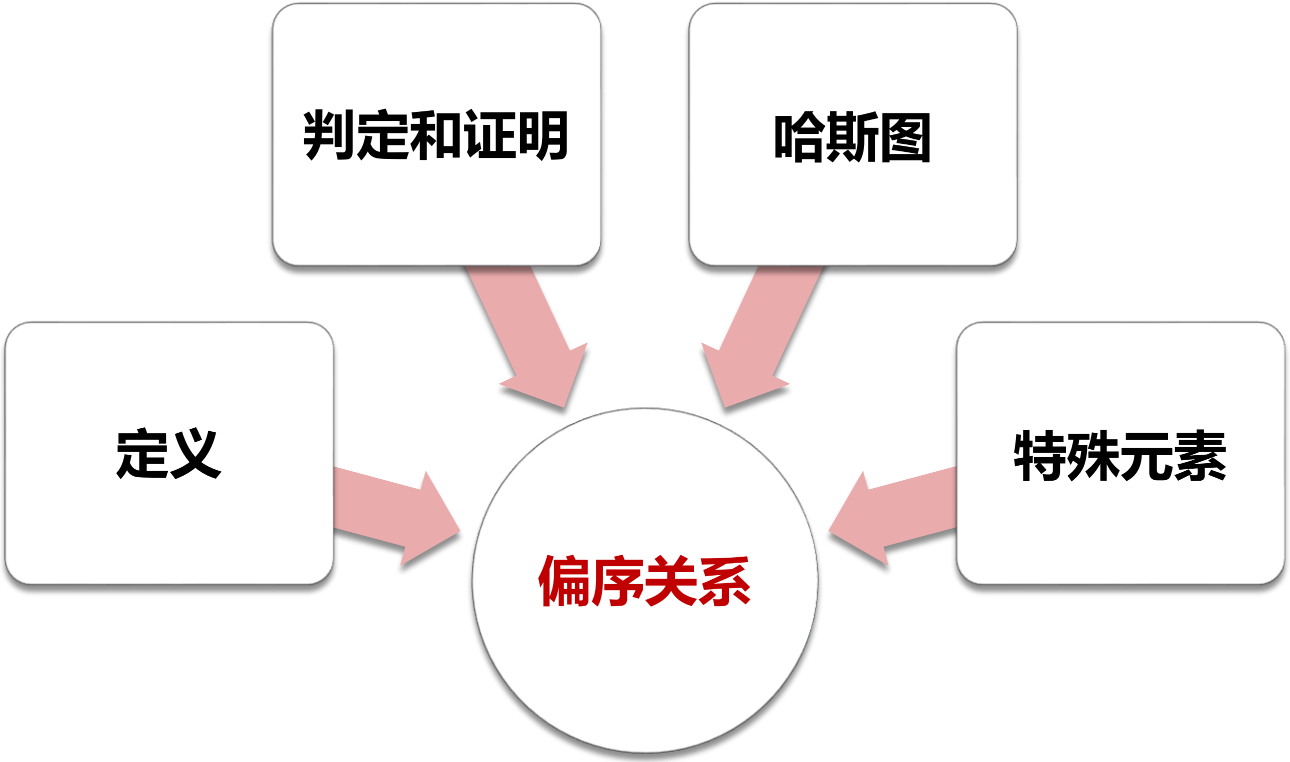
$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

拓展应用

- 调度问题
  - 任务集T，m台相同的机器。
  - t1≺t2,则任务t_1完成以后t_2才能开始工作。
  - 可行调度，最优调度
- 拓扑排序



偏序关系小结



作业

- 习题七

- 46题（偏序关系哈斯图和偏序集中的特殊元素）
- 48题（偏序关系证明）

第七章 习题课

- 有序对与笛卡儿积的定义与性质
- 二元关系、从A到B的关系、A上的关系
- 关系的表示法：关系表达式、关系矩阵、关系图
- 关系的运算：定义域、值域、域、逆、合成、限制、像、幂
- 关系运算的性质: A上关系的自反、反自反、对称、反对称、传递的性质
- A上关系的自反、对称、传递闭包
- A上的等价关系、等价类、商集与A的划分
- A上的偏序关系与偏序集

基本要求

- 熟练掌握关系的三种表示法
- 能够判定关系的性质（等价关系或偏序关系）
- 掌握含有关系运算的集合等式
- 掌握等价关系、等价类、商集、划分、哈斯图、偏序集等概念
- 计算$A\times B$, dom R, ran$R$, fld$R$, R^{-1}, $R\circ S$, R^n , $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$
- 求等价类和商集A/R
- 给定A的划分π，求出π所对应的等价关系
- 求偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元、上界、下界、上确界、下确界
- 掌握基本的证明方法
  - 证明涉及关系运算的集合等式
  - 证明关系的性质、证明关系是等价关系或偏序关系

练习1

1．设$A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{<x,y> \mid x, y \in A$且$x+2y \le 6\}$,

$S = \{<1,2>, <1,3>,<2,2>\}$,

求:

(1) R的集合表达式

(2) R^{-1}

(3) dom R, ran R, fld R

(4) $R \circ S$, R^3

(5) $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$

解答

(1) $R = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>\}$

(2) $R^{-1} = \{<1,1>, <2,1>, <1,2>, <2,2>, <1,3>\}$

(3) $\mathrm{dom}R = \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{ran}R = \{1,2\}$, $\mathrm{fld}R = \{1, 2, 3\}$

(4) $R\circ S = \{<1,2>, <1,3>, <2,2>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

$R^3 = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

(5) $r(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,3>\}$

$s(R) = \{<1,1>,<1,2>,<2,1>, <2,2>, <3,1>, <1,3>\}$

$t(R) = \{<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>\}$

练习2

2．设$A=\{1,2,3,4\}$，在$A\times A$上定义二元关系R：

$$<<x,y>,<u,v>>\in R \Leftrightarrow x+y=u+v,$$

求R导出的划分.

$$A\times A=\{<1,1>, <1,2>, <1,3>, <1,4>, <2,1>, <2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,1>, <3,2>, <3,3>, <3,4>, <4,1>, <4,2>, <4,3>, <4,4>\}$$

根据 $<x,y>$ 中的 $x+y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将A划分成等价类：

$$A/R=\{\{<1,1>\}, \{<1,2>,<2,1>\}, \{<1,3>, <2,2>, <3,1>\}, \{<1,4>, <2,3>, <3,2>, <4,1>\}, \{<2,4>, <3,3>, <4,2>\}, \{<3,4>, <4,3>\}, \{<4,4>\}\}$$

练习3

3.设R是Z上的模 n 等价关系, 即

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y(\mathrm{mod} n),$$

试给出由R确定的Z的划分π.

解　设除以 n 余数为 r 的整数构成等价类 $[r]$，则

$$[r] = \{ kn+r \mid k \in \mathrm{Z} \},\ \ r = 0, 1, \ldots, n-1$$

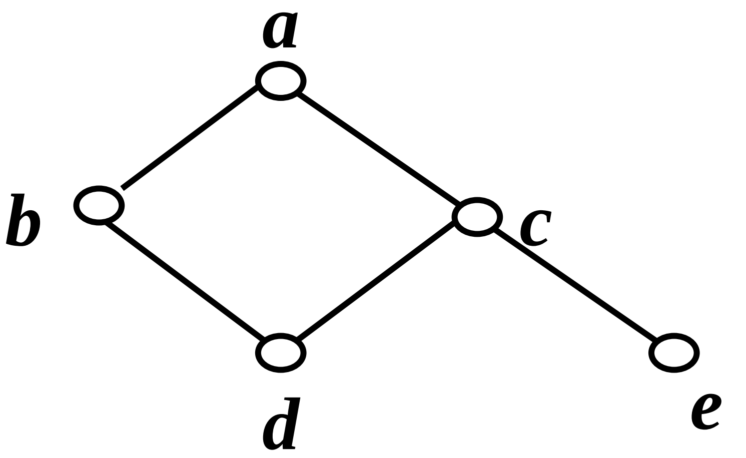
$$\pi = \{ [r] \mid r = 0, 1, \ldots, n-1 \}$$

练习4

4．设偏序集 $\langle A, R\rangle$ 的哈斯图如图所示.

(1) 写出A和R的集合表达式

(2) 求该偏序集中的极大元、极小元、最大元、最小元



解：(1) $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R = \{\langle d,b\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,c\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle\} \cup I_A$

(2) 极大元和最大元是a,

极小元是d, e;

没有最小元.

练习5

5．设R是A上的二元关系， 设

$$S = \{<a,b> \mid \exists c(<a,c>\in R\wedge <c,b>\in R)\}.$$

证明如果R是等价关系，则S也是等价关系。

证(1) 证自反　任取x,

$$x\in A \Rightarrow <x,x>\in R \Rightarrow \exists x\ (<x,x>\in R\wedge <x,x>\in R) \Rightarrow <x,x>\in S$$

(2) 证对称　任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in S \Rightarrow \exists c(<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R)$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<c,x>\in R\wedge <y,c>\in R) \Rightarrow <y,x>\in S$$

(3) 证传递　任取$<x,y>$, $<y,z>$,

$$<x,y>\in S \wedge <y,z>\in S$$

$$\Rightarrow \exists c\ (<x,c>\in R\wedge <c,y>\in R) \wedge \exists d\ (<y,d>\in R\wedge <d,z>\in R)$$

$$\Rightarrow <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R \Rightarrow <x,z>\in S$$

综上，R是A上的等价关系.

练习6

6．设偏序集$<A,R>$和$<B,S>$，定义$A\times B$上二元关系T:

$$<x,y>T<u,v> \Leftrightarrow xRu \wedge ySv$$

证明T为偏序关系.

证 (1) 自反性 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in A\times B \Rightarrow x\in A\wedge y\in B \Rightarrow xRx\wedge ySy \Rightarrow <x,y>T<x,y>$$

(2) 反对称性 任取$<x,y>,<u,v>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<x,y> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRx \wedge vSy$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRx) \wedge (ySv \wedge vSy) \Rightarrow x=u \wedge y=v$$

$$\Rightarrow <x,y>=<u,v>$$

(3) 传递性 任取$<x,y>,<u,v>, <w,t>$

$$<x,y>T<u,v>\wedge<u,v>T<w,t> \Rightarrow xRu \wedge ySv \wedge uRw \wedge vSt$$

$$\Rightarrow (xRu \wedge uRw) \wedge (ySv \wedge vSt) \Rightarrow xRw \wedge ySt$$

$$\Rightarrow <x,y>T<w,t>$$

练习7

7．R,S为A上的关系，证明 $R\subseteq S \Rightarrow t(R) \subseteq t(S)$

证　只需证明对于任意正整数n, $R^n \subseteq S^n$. 对n归纳.

n=1, 显然为真.

假设对于n，命题为真，任取$<x,y>$

$$
\begin{aligned}
& <x,y> \in R^{n+1} \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in R^n \circ R \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in R^n \wedge <t, y> \in R) \\
\Rightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in S^n \wedge <t, y> \in S) \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^n \circ S \\
\Rightarrow\ & <x,y> \in S^{n+1}
\end{aligned}
$$

关系等式或包含式的证明方法

数学归纳法（主要用于幂运算）
证明中用到关系运算的定义和公式, 如:

$$x \in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R)$$

$$y \in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y> \in R)$$

$$<x,y> \in R \Leftrightarrow <y,x> \in R^{-1}$$

$$<x,y> \in R \circ S \Leftrightarrow \exists t\ (<x,t> \in R \wedge <t,y> \in S)$$

$$<x,y> \in R \upharpoonright A \Leftrightarrow x \in A \wedge <x,y> \in R$$

$$y \in R[A] \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \wedge <x,y> \in R)$$

$$r(R) = R \cup I_A$$

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

$$t(R) = R \cup R^2 \cup \ldots$$


THANK
YOU