离散数学

DISCRETE MATHEMATICS

温故而知新

- 命题逻辑的基本概念　　？
- 基本概念--------等值演算---------推理理论

引入实例

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

p q r	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

引入实例

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \wedge q) \to r$

p q r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$

第二章 命题逻辑等值演算

- **主要内容**
- 等值式与等值演算
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 可满足性问题与消解法

第二章 命题逻辑等值演算

- **主要内容**
  - 等值式与等值演算
  - 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
  - 联结词完备集
  - 可满足性问题与消解法

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

说明：

•定义中，$A, B, \Leftrightarrow$均为元语言符号

• A或B中可能有哑元出现.

•用真值表可检查两个公式是否等值

等值式实例

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

$p\ \ q\ \ r$	$q\to r$	$p\to(q\to r)$	$p\to q$	$(p\to q)\to r$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

等值式实例

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

p q r	$q\rightarrow r$	$p\rightarrow(q\rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\rightarrow r$
0 0 0	1	1	0	1
0 0 1	1	1	0	1
0 1 0	0	1	0	1
0 1 1	1	1	0	1
1 0 0	1	1	0	1
1 0 1	1	1	0	1
1 1 0	0	0	1	0
1 1 1	1	1	1	1

结论：$p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\rightarrow r$

基本等值式

- 双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
- 幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A,\ A \wedge A \Leftrightarrow A$
- 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A,\ A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C),\ (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
- 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),$

  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- 德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A,\ A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

- 零律　$A\vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A\wedge 0 \Leftrightarrow 0$
- 同一律　$A\vee 0 \Leftrightarrow A$. $A\wedge 1 \Leftrightarrow A$
- 排中律　$A\vee \neg A \Leftrightarrow 1$
- 矛盾律　$A\wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
- 蕴涵等值式　$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$
- 等价等值式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$
- 假言易位　$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg B\rightarrow \neg A$
- 等价否定等值式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow \neg B$
- 归谬论　$(A\rightarrow B)\wedge(A\rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

！特别提示

必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 等值演算的基础：

(1) 等值关系的性质：自反性、对称性、传递性

(2) 基本的等值式

(3) 置换规则

等价代换

3. 置换规则

设 Φ(A) 是含公式 A 的命题公式，Φ(B) 是用公式 B 置换Φ(A) 中所有的 A 后得到的命题公式

若 B⇔A，则 Φ(B)⇔Φ(A)

等值演算的应用举例

(一)证明两个公式等值

例2 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

证 $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$ (蕴涵等值式，置换规则)

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$ (结合律，置换规则)

$\Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\vee r$ (德摩根律，置换规则)

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$ (蕴涵等值式，置换规则)

今后在证明中可以省去置换规则

等值演算的应用举例

（二）证明两个公式不等值

不能直接证明

例3 证明 $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

证

- 方法一 真值表法, 见例1(2)
- 方法二 观察法. 观察到000, 010是左边的成真赋值，是右边的成假赋值
- 方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p\to(q\to r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$$

更容易看出000, 010分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

等值演算的应用举例

（三）判断公式类型: A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\to q)$

(2) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

等值演算的应用举例

解 (1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

$\Leftrightarrow q\wedge\neg(\neg p\vee q)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow q\wedge(p\wedge\neg q)$ (德摩根律)

$\Leftrightarrow p\wedge(q\wedge\neg q)$ (交换律，结合律)

$\Leftrightarrow p\wedge 0$ (矛盾律)

$\Leftrightarrow 0$ (零律)

等值演算的应用举例

(2) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p)$ （蕴涵等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ （交换律）

$\Leftrightarrow 1$

等值演算的应用举例

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q))\wedge r$ （分配律）

$\Leftrightarrow p\wedge 1\wedge r$ （排中律）

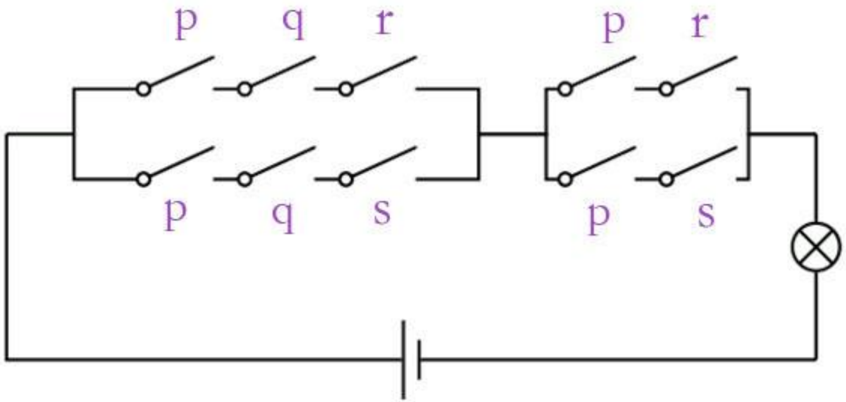
$\Leftrightarrow p\wedge r$ （同一律）

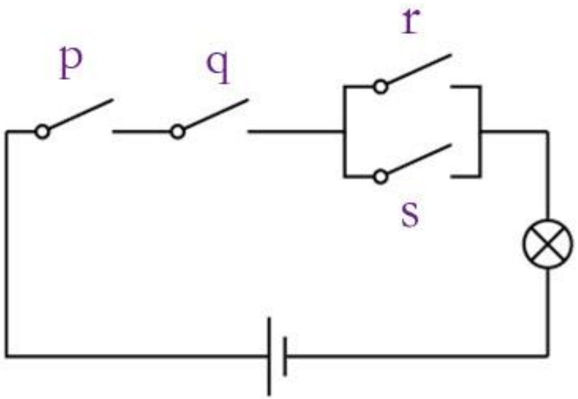
非重言式的可满足式

101和111是成真赋值，000和010等是成假赋值.

等值演算的实际应用1

- 利用命题公式的基本等价关系，化简左图所示开关电路。





$$((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge s)) \wedge ((p \wedge r) \vee (p \wedge s))$$

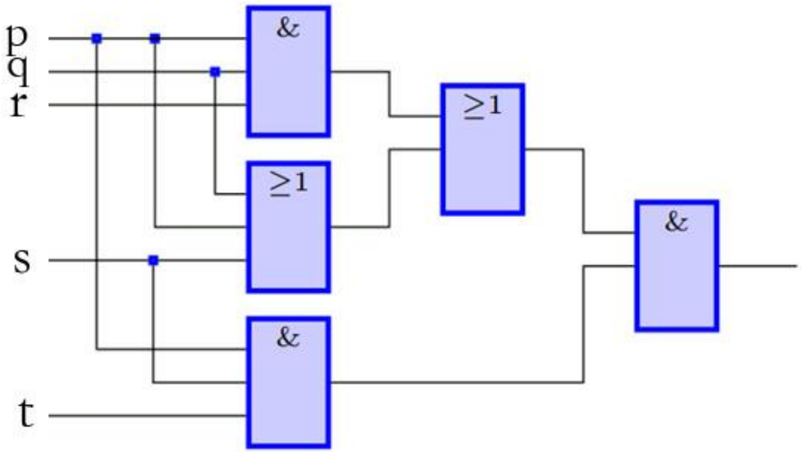
$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge (r \vee s)) \wedge (p \wedge (r \vee s))$$

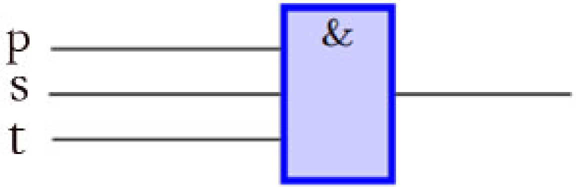
$$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge (r \vee s) \wedge p \wedge (r \vee s)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge q \wedge (r \vee s)$$

等值演算的实际应用2

- 利用命题公式的基本等价关系，化简左图所示逻辑电路。





$$((p \wedge q \wedge r) \vee (p \vee q \vee s)) \wedge (p \wedge s \wedge t)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee s) \wedge (p \wedge s \wedge t)$$

$$\Leftrightarrow p \wedge s \wedge t$$

等值演算的实际应用3

某勘探队有三名队员：甲乙丙。有一天，取得一块矿样，三人判断如下：

甲说：这不是铁，也不是铜；

乙说：这不是铁，是锡；

丙说：这不是锡，是铁。

经实验鉴定后发现，其中：

一人两个判断都正确；

一个人判对一个，判错一个；

另一个人全错了。

根据以上信息判断矿样的种类。

等值演算的实际应用3（解答）

解：令p:矿样是铁，q：矿样是铜，r：矿样是锡。

由题意可得，共有6种情况：

1）甲全对，乙对一半，丙全错：$(\neg p\wedge\neg q)\wedge((\neg p\wedge\neg r)\vee(p\wedge r))\wedge(r\wedge\neg p)$ ①

2）甲全对，丙对一半，乙全错：$(\neg p\wedge\neg q)\wedge((\neg r\wedge\neg p)\vee(r\wedge p))\wedge(p\wedge\neg r)$ ②

3）乙全对，甲对一半，丙全错：$(\neg p\wedge r)\wedge((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge(r\wedge\neg p)$ ③

4）乙全对，丙对一半，甲全错：$(\neg p\wedge r)\wedge((\neg r\wedge\neg p)\vee(r\wedge p))\wedge(p\wedge q)$ ④

5）丙全对，甲对一半，乙全错：$(\neg r\wedge p)\wedge((\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge(p\wedge\neg r)$ ⑤

6）丙全对，乙对一半，甲全错：$(\neg r\wedge p)\wedge((\neg p\wedge\neg r)\vee(p\wedge r))\wedge(p\wedge q)$ ⑥

则①∨②∨③∨④∨⑤∨⑥ $\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

而这块矿石不可能既是铜又是锡，所以是铁。

等值演算的实际应用4

- 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

解 令命题 p：男管家说的是真话； q：厨师说的是真话； r：园丁说的是真话；s：杂役说的是真话。 将上述已知条件符号化并列出真值表，选取真值结果全为真的行如下表：

p	q	r	s	$p \to q$	$\neg(q \wedge r)$	$\neg(\neg r \wedge \neg s)$	$s \to \neg q$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1

可见，我们能确定 p， q 必然为假，但无法确定 r 和 s的值，因而侦探只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。

等值演算的实际应用4

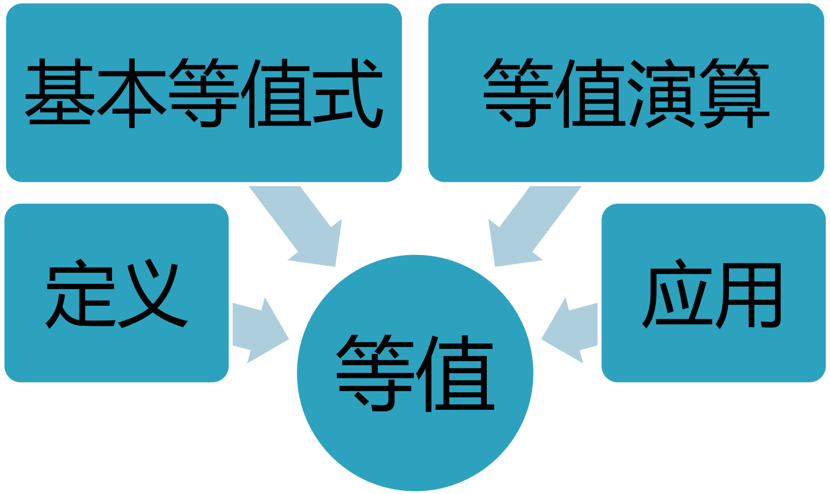
- 侦探调查了罪案的四位证人。从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。侦探能判定这四位证人分别是在说谎还是在说真话吗？解释你的推理。

解 令命题 p：男管家说的是真话； q：厨师说的是真话； r：园丁说的是真话；s：杂役说的是真话。

$$A=(p\to q)\wedge\neg(q\wedge r)\wedge\neg(\neg r\wedge\neg s)\wedge(s\to\neg q)$$

可见，我们能确定 p， q 必然为假，但无法确定 r 和 s的值，因而侦探只能判定男管家和厨师在说谎，但无法判定园丁与杂役谁在说真话。

课堂小结



作业

- 习题2 第4题

  用等值演算方法证明等值式
- 等值演算过程中有没有遇到什么问题，如何解决?


THANK
YOU

引入

- 证明两个公式等值，比如 $p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$
- 真值表的替代方法，基于命题公式的一种标准形式。

第二章 命题逻辑等值演算

- **主要内容**
  - 等值式与等值演算
  - 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
  - 联结词完备集
  - 可满足性问题与消解法

2.2 析取范式与合取范式

基本概念

(1) 文字——**命题变项**及其**否定**的总称

(2) 简单析取式——有限个**文字**构成的析取式

$p,\ \neg q,\ p\vee\neg q,\ p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——有限个**文字**构成的合取式

$p,\ \neg q,\ p\wedge\neg q,\ p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个**简单合取式**组成的析取式

$p,\ \neg p\wedge q,\ p\vee\neg q,\ (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个**简单析取式**组成的合取式

$p,\ p\vee\neg q,\ \neg p\wedge q,\ (p\vee q)\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

范式概念

说明:

- 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
- 形如 $p\wedge\neg q\wedge r$，$\neg p\vee q\vee\neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

命题公式的范式

定理2.3（范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

命题公式的范式-求公式A的范式的步骤

(1) 消去A中的→, ↔ （若存在）

$$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

(2) 否定联结词¬的内移或消去

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(3) 使用分配律

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$ 求合取范式

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$ 求析取范式

求公式的范式

例5 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$

(2) $(p \to \neg q) \to r$

求公式的范式

(1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$　　(2) $(p \to \neg q) \to r$

解 (1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$　　(消去→)

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee \neg r$　　(结合律)　既是析取范式，又是合取范式

(2) $(p \to \neg q) \to r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \to r$　　(消去第一个→)

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee r$　　(消去第二个→)

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r$　　(否定号内移——德摩根律)　析取范式

$\Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$　　(∨对∧分配律)　合取范式

范式的性质

定理2.1 (1) 一个简单析取式是**重言式**当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

(2) 一个简单合取式是**矛盾式**当且仅当它同时含有某个命题变项和它的否定式.

定理2.2 (1) 一个析取范式是**矛盾式**当且仅当它每个简单合取式都是矛盾式.

(2) 一个合取范式是**重言式**当且仅当它的每个简单析取式都是重言式.

范式的应用

（一）求公式的成真和成假赋值。

- ✓ $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r)$
- ✓ $\neg p \vee (\neg q \wedge r)$

- 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代**真值表**。

范式的应用

（二）证明两个公式等值

证明 $p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

证 $\quad p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee(\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$

$(p\wedge q)\to r$

$\Leftrightarrow\neg(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow\neg p\vee\neg q\vee r$

所以，$p\to(q\to r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\to r$

范式的应用

（三）证明两个公式不等值

不能直接证明

证明 $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值。

证

- 方法一 真值表法
- 方法二 观察法
- 方法三 先用等值演算化简公式，然后再观察

$$p\to(q\to r) \Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee r$$

$$(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$$

更容易看出000, 010分别是左边的成真赋值和右边的成假赋值

- 方法四 范式？？？

范式的应用

（四）解决实际问题

某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?

范式的应用

解此类问题的步骤：

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式化成析取式（最好是主析取范式）

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

范式的应用

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p \to q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s \vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u \to (p \wedge q)$

范式的应用

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge$$
$$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

（附具体解答参考）

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge$

$(s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$

$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$

$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) = B_3$，则

$B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

课堂拓展

求公式$(p\to q)\leftrightarrow r$的合取范式和析取范式。

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ 合取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ 析取范式

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式，但是不唯一。

课堂拓展

- 命题公式的范式表达并**不唯一**.

  比如对公式 $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ 而言，对应的析取范式有很多：

  - ✓ $p\vee(q\wedge r)$
  - ✓ $(p\wedge p)\vee(q\wedge r)$
  - ✓ $p\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$
  - ✓ $p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$

课堂小结

- 析取范式、合取范式仅含联结词集 $\{\neg, \wedge, \vee\}$，且否定联结词仅出现在命题变元之前。
- 命题公式的析取范式可以指出公式何时为真，而合取范式可以指出公式何时为假，从而能够替代真值表。
- 命题公式的范式表达并不唯一。
- 一般而言，求解范式时，需要进行最后的化简步骤。

作业

- 习题2 第7题 求公式的合取范式和析取范式。
- 考虑如何得到唯一形式的范式


THANK
YOU

引入

求公式$(p\to q)\leftrightarrow r$的合取范式和析取范式。

$(p\to q)\leftrightarrow r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ 合取范式

$(p\to q)\leftrightarrow r$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg p)\vee(r\wedge q)\vee(r\wedge\neg r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge r)\vee(q\wedge r)$ 析取范式

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式，但是不唯一。

范式 →主范式

极小项与极大项

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1 \le i \le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为极小项（极大项）.

*说明:

- n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示.
- 用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示.
- m_i（M_i）称为极小项（极大项）的名称.

实例

- 由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

实例

m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

- 由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

- 主析取范式——由极小项构成的析取范式
- 主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时，

$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ ——主析取范式

$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\vee M_7$——主合取范式

主析取范式与主合取范式

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是惟一的.

求公式主析取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A' = B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式$j$=1,2, … ,$s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j \wedge 1 \Leftrightarrow B_j \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (B_j \wedge p_i) \vee (B_j \wedge \neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i \vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

求公式主合取范式的步骤

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中B_j是简单析取式 $j=1,2, \ldots ,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee 0 \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例6 (1) 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式和主合取范式

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （析取范式） ①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$ ②

r

$\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

（主析取范式）

实例

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （合取范式） ④

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2$ ⑤

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$ ⑥

⑤, ⑥代入④ 并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$

(主合取范式)

主范式的应用

1. 求公式的成真成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值。

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为**重言式** $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项, 记为1.

A为**矛盾式** $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项, 记为0.

A为**非重言式的可满足式**

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例7 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q) \wedge q$ (2) $B \Leftrightarrow p \rightarrow (p \vee q)$ (3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \rightarrow r$

解

(1) $A \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \wedge q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow 0$ 矛盾式

(2) $B \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$ 重言式

(3) $C \Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_5 \vee m_7$ 非重言式的可满足式

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例8 用主析取范式判断以下每一组公式是否等值

(1) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\wedge q)\rightarrow r$

(2) $p\rightarrow(q\rightarrow r)$ 与 $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

解 $p\rightarrow(q\rightarrow r) \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\rightarrow q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

显见，(1)中的两公式等值，而(2)的不等值.

主范式的应用

4. 解实际问题

例9 某单位要从A,B,C三人中选派若干人出国考察, 需满足下述条件:

(1) 若A去, 则C必须去;

(2) 若B去, 则C不能去;

(3) A和B必须去一人且只能去一人.

问有几种可能的选派方案?

解 记 p:派A去, q:派B去, r:派C去

(1) $p\to r$, (2) $q\to\neg r$, (3) $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

求下式的成真赋值

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

主范式的应用

求A的主析取范式

$$A=(p\to r)\wedge(q\to\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r)\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(r\wedge\neg q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(p\wedge\neg q))$$

$$\vee((r\wedge\neg q)\wedge(p\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(\neg p\wedge q))\vee((r\wedge\neg q)\wedge(\neg p\wedge q))$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

成真赋值:101,010

结论: 方案1 派A与C去, 方案2 派B去

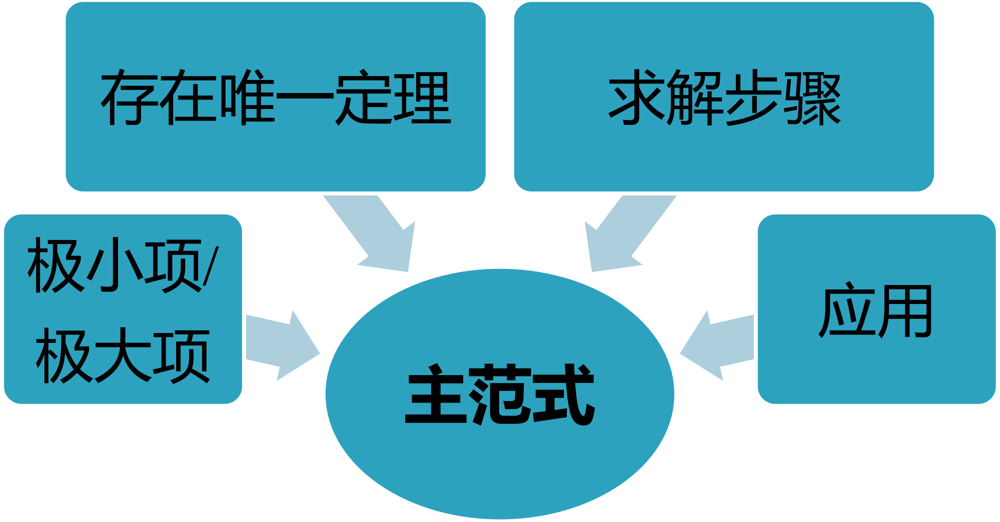
用成真赋值和成假赋值确定主范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知$A= m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求A的主合取范式.

解　A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$

课堂小结



作业

- 习题2 第7题 求公式的主析取范式和主合取范式

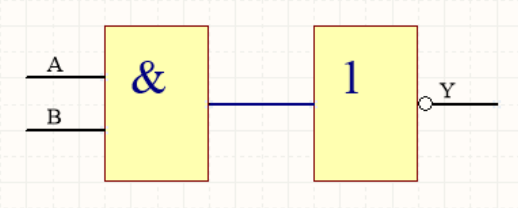
THANK YOU

第二章 命题逻辑等值演算

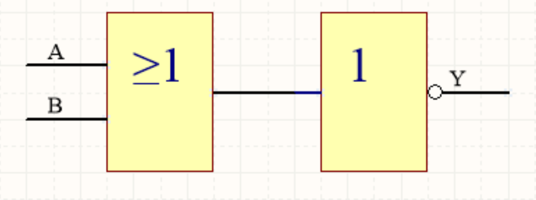
- 主要内容
  - 等值式与等值演算
  - 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
  - 联结词完备集
  - 可满足性问题与消解法

引入实例

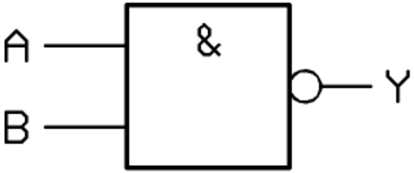
- 逻辑电路设计



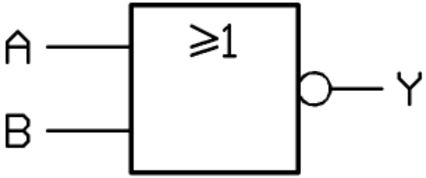
与非门电路图



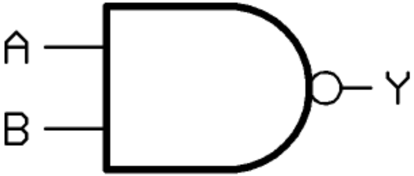
或非门电路图



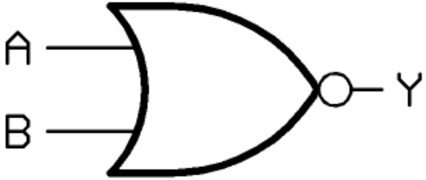
逻辑符号（国标符号）



逻辑符号（国标符号）



逻辑符号（国外符号）



逻辑符号（国外符号）

2.3 联结词的完备集

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$为*n*元真值函数.$\{0,1\}^n=\{00\ldots0, 00\ldots1, \ldots, 11\ldots1\}$，包含$2^{2^n}$个长为*n*的0,1符号串.

*n*个命题变项共可以构成 2^{2^n} 个*n*元真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

真值函数

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

公式与真值函数

- 任何一个含n个命题变项的命题公式A都对应惟一的一个n元真值函数 F , F 恰好为A的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.
- 例如：$p\rightarrow q$, $\neg p\vee q$ 都对应 $\boldsymbol{F}_{13}^{(2)}$

联结词完备集

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n \geq 1)$ 元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是联结词完备集.

若S是联结词完备集, 则任何命题公式都可由S中的联结词表示.

定理2.6 $S = \{\neg, \wedge, \vee\}$是联结词完备集.

证明 由范式存在定理可证

联结词完备集

推论 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

$\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$不是联结词完备集, 0不能用它表示.

它的子集$\{\wedge\},\{\vee\},\{\rightarrow\},\{\leftrightarrow\},\{\wedge,\vee\},\{\wedge,\vee,\rightarrow\}$等都不是

复合联结词

定义2.8 设 p, q 为两个命题

$\neg(p\wedge q)$ 称作p与q的与非式, 记作$p\uparrow q$, 即 $p\uparrow q \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)$, $\uparrow$称为与非联结词

$\neg(p\vee q)$ 称作p与q的或非式, 记作 $p\downarrow q$, 即 $p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$, $\downarrow$称为或非联结词

复合联结词

定理2.7 $\{\uparrow\}$与$\{\downarrow\}$为联结词完备集.

证明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

得证$\{\downarrow\}$为联结词完备集.

对$\{\uparrow\}$类似可证

第二章 命题逻辑等值演算

- 主要内容
- 等值式与等值演算
- 析取范式与合取范式，主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 可满足性问题与消解法

引入实例

例：某公司招聘工作人员，A，B，C三人应试，经面试后公司表示如下想法：

(1)三人中至少录取一人。

(2)如果录取A而不录取B,则一定录取C。

(3)如果录取B，则一定录取C。

求证：公司一定录取C。

命题： P_1、P_2、P_3 和 Q

求证： $P_1 \land P_2 \land P_3$成立，则Q成立，

即：$P_1 \land P_2 \land P_3 \to Q$

反证法：证明$P_1 \land P_2 \land P_3 \land \neg Q$ 是矛盾式（不可满足）

命题公式的可满足性问题可以归结为合取范式的不可满足性问题。

2.4 可满足性问题与消解法

- 不含任何文字的简单析取式称作空简单析取式, 记作λ.
- 规定λ是不可满足的.

文字l的补l^c: 若$l=p$,则$l^c=\neg p$; 若$l=\neg p$,则$l^c=p$.

S:合取范式

$S \approx S'$: S是可满足的当且仅当S'是可满足的

定义2.9 设$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c, 称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为消解文字)的消解式或消解结果, 记作$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$

例如, $\mathrm{Res}(\neg p\vee q\vee r,\ p\vee q\vee\neg s)$

$$= q\vee r\vee\neg s$$

消解规则

定理2.8 $C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1,C_2)$

证　记$C=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=C_1' \vee C_2'$, 其中$l$和$l^c$为消解文字, $C_1=l \vee C_1'$, $C_2=l^c \vee C_2'$, 且C_1'和C_2'不含l和l^c.

假设$C_1 \wedge C_2$是可满足的, α是它的满足赋值, 不妨设$\alpha(l)=1$. C_2必含有文字$l' \neq l$, l^c且$\alpha(l')=1$. C中含有l', 故α满足C.

反之, 假设C是可满足的, α是它的满足赋值. C必有l'使得$\alpha(l')=1$, 不妨设C_1'含l', 于是α满足C_1. 把α扩张到l(和l^c)上:

若$l=p$, 则令$\alpha(p)=0$; 若$l^c=p$, 则令$\alpha(p)=1$. 恒有$\alpha(l^c)=1$, 从而α满足C_2. 得证$C_1 \wedge C_2$是可满足的.

消解规则

$C_1 \wedge C_2 \approx \mathrm{Res}(C_1, C_2)$

注意: $C_1 \wedge C_2$与$\mathrm{Res}(C_1, C_2)$有相同的可满足性, 但不一定等值。

如 $p \vee q \vee r$, $p \vee \neg r$可消解为$p \vee q$。

赋值011

消解序列与合取范式的否证

定义2.10 设S是一个合取范式, $C_1,C_2,\ldots,C_n$是一个简单析取式序列. 如果对每一个$i(1\le i\le n)$, C_i是S的一个简单析取式或者是$\mathrm{Res}(C_j,C_k)(1\le j<k<i)$, 则称此序列是由$S$导出$C_n$的消解序列. 当$C_n=\lambda$时, 称此序列是$S$的一个否证.

推论 **一个合取范式是不可满足的**当且仅当**它有否证**.

例11 用消解规则证明$S=(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q\vee\neg s)\wedge(q\vee s)\wedge\neg q$是不可满足的.

证 $C_1=\neg p\vee q$, $C_2= p\vee q\vee\neg s$, $C_3=\mathrm{Res}(C_1,C_2)=q\vee\neg s$, $C_4=q\vee s$, $C_5=\mathrm{Res}(C_3,C_4)=q$, $C_6=\neg q$, $C_7=\mathrm{Res}(C_5,C_6)=\lambda$, 这是$S$的否证.

消解算法

输入: 合式公式A

输出: 当A是可满足时, 回答 “Yes”; 否则回答 “No”.

1. 求A的合取范式S
2. 令$S_0 \leftarrow \varnothing$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, $S_1 \leftarrow S$的所有简单析取式
3. For $C_1 \in S_0$和$C_2 \in S_1$
4.   If C_1, C_2可以消解 then
5.   计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1,C_2)$
6.   If $C=\lambda$ then
7.   输出 “No”, 计算结束
8.   If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
9. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$
10. For $C_1 \in S_1$, $C_2 \in S_1$且$C_1 \neq C_2$
11.   If C_1, C_2可以消解 then
12.   计算$C \leftarrow \mathrm{Res}(C_1,C_2)$
13.   If $C=\lambda$ then
14.   输出 “No”, 计算结束
15.   If $C \notin S_0$且$C \notin S_1$ then
16. $S_2 \leftarrow S_2 \cup \{C\}$
17. If $S_2=\varnothing$ then
18.   输出 “Yes”, 计算结束
19. Else $S_0 \leftarrow S_0 \cup S_1$, $S_1 \leftarrow S_2$, $S_2 \leftarrow \varnothing$, goto 3

消解算法例题

例12 用消解算法判断下述公式是否是可满足的:

$$p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$$

解 $S= p\wedge(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(q\vee r)$

循环1 $S_0=\varnothing$, $S_1=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee q, p\vee\neg q)=p$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee\neg r)=p\vee\neg r$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q\vee r)= p\vee r$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, q\vee r)=q$

$S_2=\{p\vee\neg r, p\vee r, q\}$

循环2 $S_0=\{p, p\vee q, p\vee\neg q, q\vee\neg r, q\vee r\}$, $S_1=\{p\vee\neg r, p\vee r, q\}$, $S_2=\varnothing$

$\mathrm{Res}(p\vee\neg q, q)=p$

$\mathrm{Res}(q\vee\neg r, p\vee r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(q\vee r, p\vee\neg r)=p\vee q$

$\mathrm{Res}(p\vee r, p\vee\neg r)=p$

$S_2=\varnothing$

输出 “Yes”

课堂小结

- 联结词完备集
- 消解法

作业

- 习题2 第27题 联结词完备集
- 习题2 第32题（2） 消解原理证明
- 习题2 第33题（2） 消解原理求解


THANK
YOU

第二章 习题课

□主要内容

- 等值式与等值演算
- 基本等值式（16组，24个公式）
- 主析取范式与主合取范式
- 联结词完备集
- 消解法

基本要求

- 深刻理解等值式的概念
- 牢记基本等值式的名称及它们的内容
- 熟练地应用基本等值式及置换规则进行等值演算
- 理解文字、简单析取式、简单合取式、析取范式、合取范式的概念
- 深刻理解极小项、极大项的概念、名称及下角标与成真、成假赋值的关系，并理解简单析取式与极小项的关系
- 熟练掌握求主范式的方法（等值演算、真值表等）
- 会用主范式求公式的成真赋值、成假赋值、判断公式类型、判断两个公式是否等值
- 会将公式等值地化成指定联结词完备集中的公式
- 会用命题逻辑的概念及运算解决简单的应用问题
- 掌握消解规则及其性质
- 会用消解算法判断公式的可满足性

练习1:概念

1. 设A与B为含n个命题变项的公式，判断下列命题是否为真?

(1) $A\Leftrightarrow B$当且仅当A与B有相同的主析取范式　　真

(2) 若A为重言式，则A的主合取范式为0　　假

(3) 若A为矛盾式，则A的主析取范式为1　　假

(4) 任何公式都能等值地化成$\{\wedge, \vee\}$中的公式　　假

(5) 任何公式都能等值地化成$\{\neg, \rightarrow, \wedge\}$中的公式　　真

说明:

(2) 重言式的主合取范式不含任何极大项,为1.

(3) 矛盾式的主合析范式不含任何极小项, 为0.

(4) $\{\wedge, \vee\}$不是完备集，如矛盾式不能写成$\{\wedge, \vee\}$中的公式.

(5) $\{\neg, \rightarrow\}$是完备集.

练习2: 判断公式类型

2. (1) $(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$

解 用等值演算法求主范式

$$(p\to q)\to(\neg q\to\neg p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee(q\vee\neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(q\vee\neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$$

$$\Leftrightarrow m_2\vee m_1\vee m_3\vee m_0$$

$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow 1$$ 主合取范式

重言式

练习题2(续)

(2) $\neg(p\to q)\wedge q$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$\neg(p\to q)\wedge q$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\wedge q$$

$$\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q$$

$$\Leftrightarrow 0 \qquad \text{主析取范式}$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3 \qquad \text{主合取范式}$$

矛盾式

练习2(续)

(3) $(p \to q) \wedge \neg p$

解 用等值演算法求公式的主范式

$$(p \to q) \wedge \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$$

$$\Leftrightarrow \neg p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1$$ 主析取范式

$$\Leftrightarrow M_2 \wedge M_3$$ 主合取范式

非重言式的可满足式

练习3：求公式的主范式

3．已知命题公式A中含3个命题变项p, q, r，并知道它的成真赋值为001, 010, 111, 求A的主析取范式和主合取范式，及A对应的真值函数.

解　A的主析取范式为$m_1 \vee m_2 \vee m_7$

A的主合取范式为$M_0 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$

$p\ q\ r$	F	$p\ q\ r$	F
0 0 0	0	1 0 0	0
0 0 1	1	1 0 1	0
0 1 0	1	1 1 0	0
0 1 1	0	1 1 1	1

练习4：联结词完备集

4．将$A = (p \to \neg q) \wedge r$改写成下述各联结词集中的公式:

(1) $\{\neg, \wedge, \vee\}$

(2) $\{\neg, \wedge\}$

(3) $\{\neg, \vee\}$

(4) $\{\neg, \to\}$

(5) $\{\uparrow\}$

(6) $\{\downarrow\}$

解

(1) $(p \to \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$

(2) $(p \to \neg q) \wedge r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge r$

(3) $(p \to \neg q) \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg r)$

练习4 解答

(4) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(\neg(p\rightarrow\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow \neg((p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg r)$

(5) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow \neg(p\wedge q)\wedge r$

$\Leftrightarrow (p\uparrow q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg\ \neg((p\uparrow q)\wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p\uparrow q)\uparrow r)\uparrow((p\uparrow q)\uparrow r)$

(6) $(p\rightarrow\neg q)\wedge r \Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg p\vee\neg q)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\downarrow\neg q)\downarrow\neg r$

$\Leftrightarrow ((p\downarrow p)\downarrow(q\downarrow q))\downarrow(r\downarrow r)$

说明：答案不惟一

练习5：应用题

5. 某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习. 选派必须满足以下条件:

(1) 若赵去，钱也去.

(2) 李、周两人中至少有一人去

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人.

(4) 孙、李两人同去或同不去.

(5) 若周去，则赵、钱也去.

用等值演算法分析该公司如何选派他们出国?

练习5解答

解此类问题的步骤：

1.设简单命题并符号化

2. 用复合命题描述各条件

3. 写出由复合命题组成的合取式

4. 将合取式化成析取式（最好是主析取范式）

5. 求成真赋值, 并做出解释和结论

练习5解答

解

1. 设简单命题并符号化

设 p: 派赵去，q: 派钱去，r: 派孙去，s: 派李去，u: 派周去

2. 写出复合命题

(1) 若赵去，钱也去 $p \to q$

(2) 李、周两人中至少有一人去 $s \vee u$

(3) 钱、孙两人中去且仅去一人 $(q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)$

(4) 孙、李两人同去或同不去 $(r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)$

(5) 若周去，则赵、钱也去 $u \to (p \wedge q)$

练习5解答

3. 设(1)—(5)构成的合取式为A

$$A = (p\rightarrow q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge$$
$$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\rightarrow(p\wedge q))$$

4. 化成析取式

$$A \Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$$

结论：由上述析取式可知，A的成真赋值为00110与11001，

派孙、李去（赵、钱、周不去）

派赵、钱、周去（孙、李不去）

练习5解答

$A \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r)) \wedge$

$(s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q)) \wedge$

$((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s))$

$B_1 = (\neg p \vee q) \wedge ((q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r))$ （分配律）

$B_2 = (s \vee u) \wedge (\neg u \vee (p \wedge q))$

$\Leftrightarrow ((s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge u))$ （分配律）

$B_1 \wedge B_2 \Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u)$

$\vee (q \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge u)$

再令 $((r \wedge s) \vee (\neg r \wedge \neg s)) = B_3$，则

$B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

练习6:消解法

6. 构造公式$A=(p\vee q)\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg r$的否证, 从而证明它是矛盾式.

解 消解序列:

①	$p\vee q$	A的简单析取式
②	$\neg p\vee q$	A的简单析取式
③	q	①,②消解
④	$\neg q\vee r$	A的简单析取式
⑤	$\neg r$	A的简单析取式
⑥	$\neg q$	④,⑤消解
⑦	λ	③,⑥消解

这是A的一个否证, 从而证明A是矛盾式.

练习7:消解法

7. 用消解法判断下述公式是否是可满足的:

$$(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$$

解　$S=(p\vee\neg q)\wedge(q\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$

第1次循环 $S_0=\varnothing, S_1=\{p\vee\neg q,\ q\vee\neg r,\ \neg q\vee\neg r\},\ S_2=\varnothing$

$p\vee\neg q,\ q\vee\neg r$ 消解得到$p\vee\neg r$

$q\vee\neg r,\ \neg q\vee\neg r$消解得到$\neg r$

$S_2=\{p\vee\neg r, \neg r\}$

第2次循环 $S_0=\{p\vee\neg q,\ q\vee\neg r,\ \neg q\vee\neg r\}, S_1=\{p\vee\neg r, \neg r\},\ S_2=\varnothing$

$S_2=\varnothing$

输出 “Yes”,计算结束.


THANK
YOU