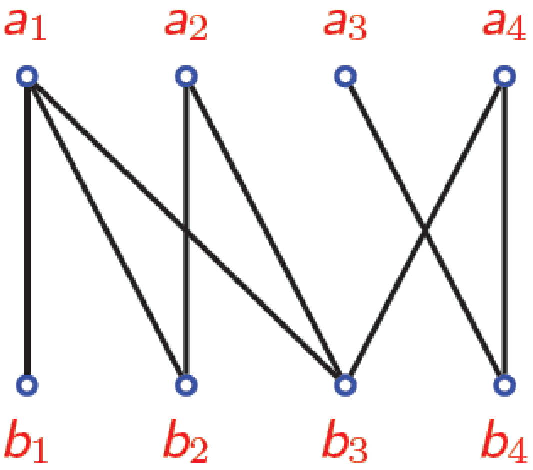
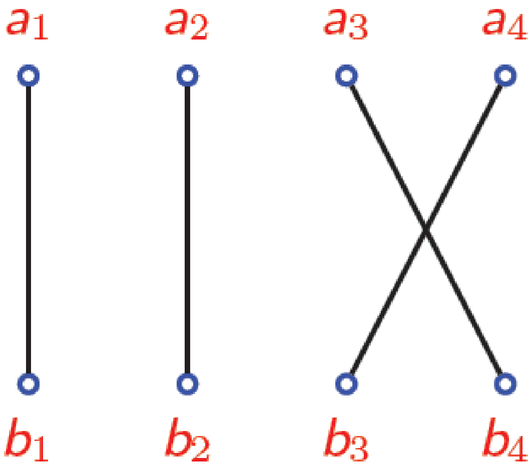
二部图（偶图）

引入

- 有一组工人和一批工作任务作为图中的结点，并根据工人对任务是否熟悉来建立边的连接。在这样的图中，工人之间没有边，工作任务之间也不会有边，所有的边都存在于工人组和任务组之间。这样的图称为**二部图（偶图）**。



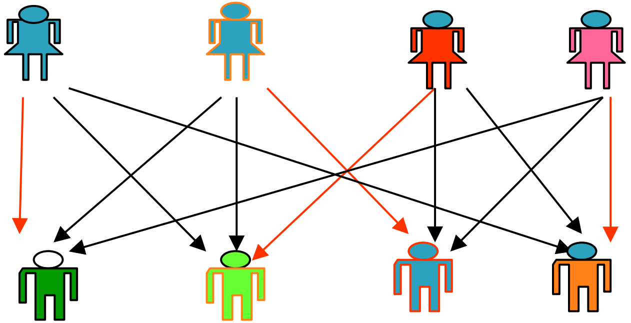


右图就是一种分配方案，称作原图的一个**匹配**。

二部图

定义14.23 设 $G=\langle V,E\rangle$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$\langle V_1,V_2,E\rangle$.

又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.



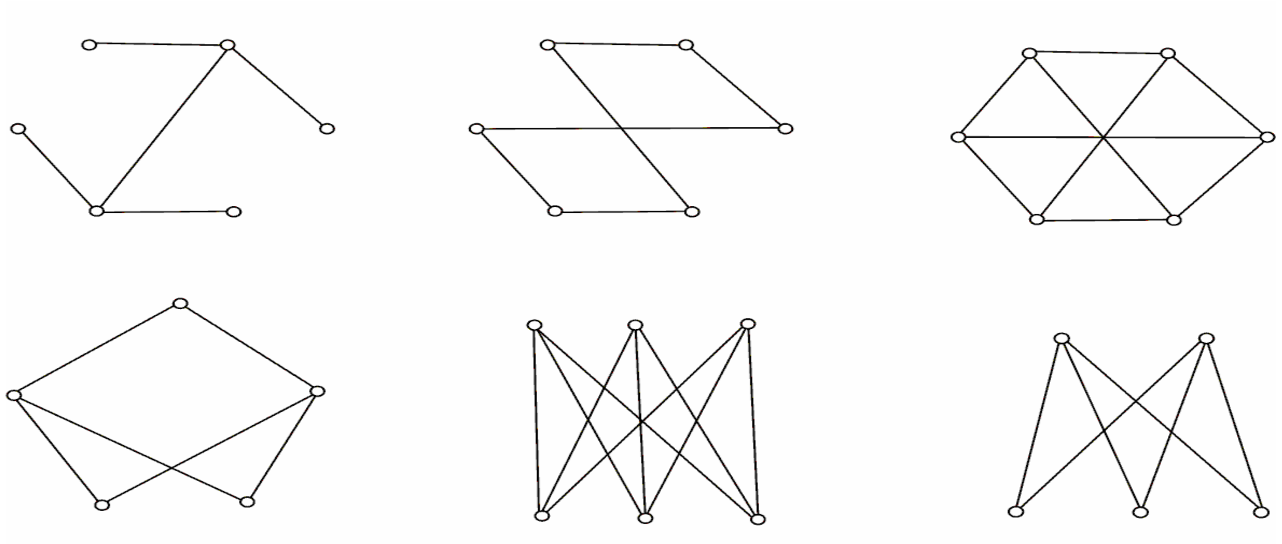
注意，n 阶零图为二部图.

小贴士——二部图的判断

- 找到结点集V的两个互补子集，使得每条边的两个端点都各在一个子集中（或者每个子集中的结点间都无边相连），则该图为二部图。

二部图的判别法

定理14.10 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈.



定理14.10的用途

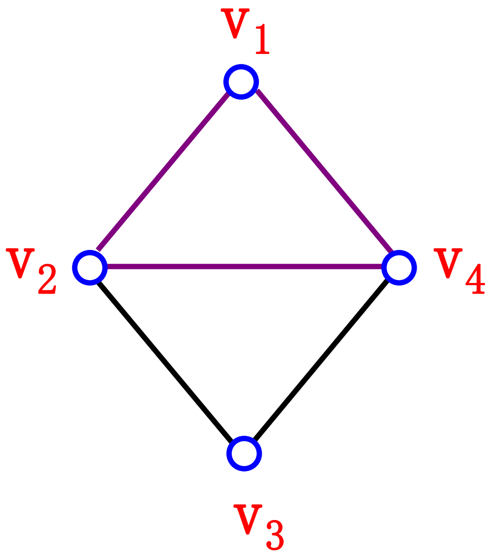
在实际应用中，定理14.10本身使用不多，我们常使用它的逆否命题来判断一个图不是二部图：

无向图G不是二部图的充分必要条件

是**G中存在长度为奇数的回路。**

例如右图中存在长度为3的回路

$v_1v_2v_4v_1$，所以它不是二部图。



匹配

定义 在二部图$G = <V_1, V_2, E>$中，$V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}$，若存在E的子集$E' = \{(v_1, v_1')，(v_2, v_2')，\ldots，(v_q, v_q')$，其中$v_1', v_2', \ldots, v_q'$是$V_2$中的q个不同的结点$\}$，则称G的子图$G' = <V_1, V_2, E'>$为从$V_1$到$V_2$的一个完全匹配(Complete Matching)，简称匹配。

在二部图$G = <V_1, V_2, E>$中，若存在V_1到V_2的单射f，使得对任意$v \in V_1$，都有$(v, f(v)) \in E$，则存在V_1到V_2的匹配。

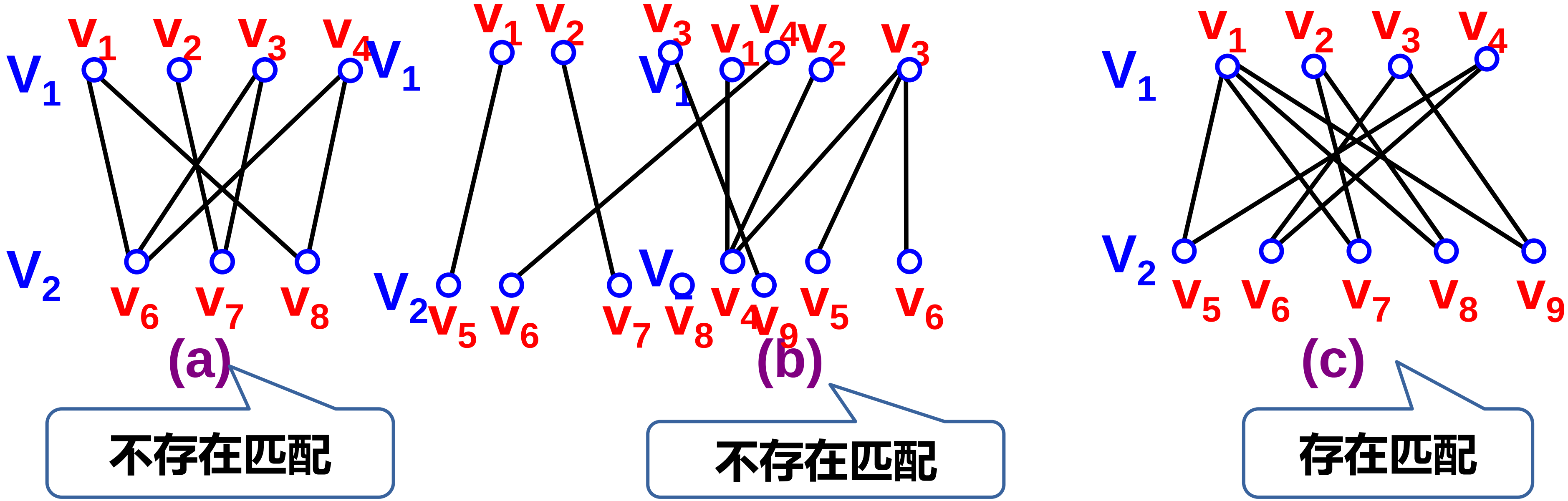
由单射的性质知，不是所有的二部图都有匹配，存在匹配的必要条件是

$$|V_1| \leq |V_2|。$$

然而，这个条件并不是充分条件。

例

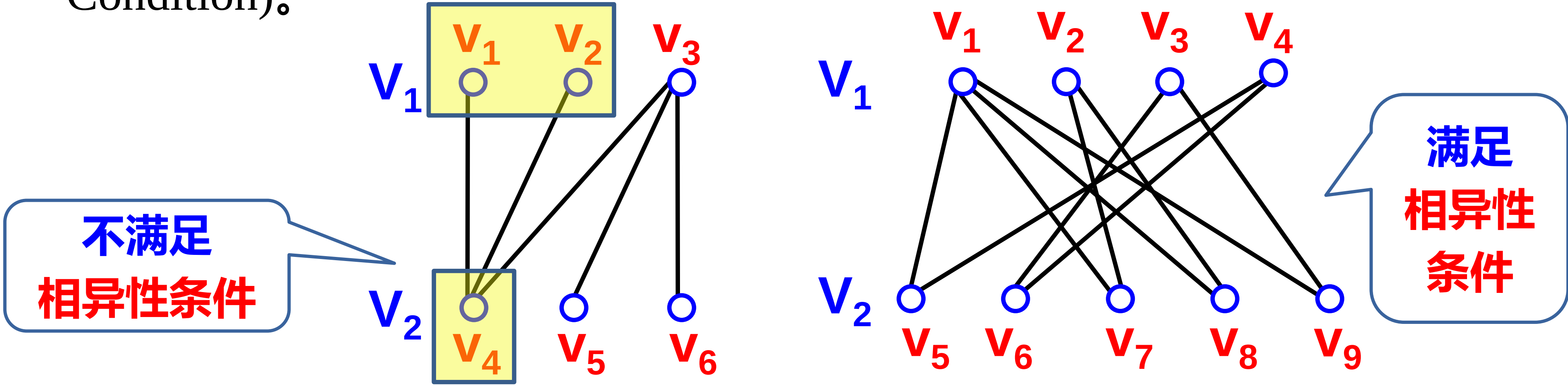
下面的3个二部图哪些存在V_1到V_2匹配？对存在匹配的二部图给出一个匹配。



霍尔定理

定理 （霍尔(Hall)定理） 二部图$G = <V_1, V_2, E>$中存在从V_1到V_2的匹配的充分必要条件是V_1中任意k个结点至少与V_2中的k个结点相邻，$k=1, 2, \ldots, |V_1|$。

该定理也称为婚姻定理，定理中的条件通常称为相异性条件(Diversity Condition)。



定理

设$G = <V_1, V_2, E>$是一个二部图。如果满足条件

（1）V_1中每个结点至少关联t条边；

（2）V_2中每个结点至多关联t条边；

t 条件(t-Condition)

则G中存在从V_1到V_2的匹配。其中t为正整数。

证明 由条件（1）知，V_1中k个结点至少关联tk条边$(1 \le k \le |V_1|)$，

由条件（2）知，这tk条边至少与V_2中k个结点相关联，

于是V_1中的k个结点至少与V_2中的k个结点相邻接

因而满足相异性条

判断t条件非常简单，只需要计算V_1中结点的最小度数和V_2中结点的最大度数即可。

应用-例题

现有三个课外小组：物理组，化学组和生物组，有五个学生s_1, s_2, s_3, s_4, s_5。

（1）已知s_1, s_2为物理组成员；s_1, s_3, s_4为化学组成员；s_3, s_4, s_5为生物组成员。

（2）已知s_1为物理组成员；s_2, s_3, s_4为化学组成员；s_2, s_3, s_4, s_5为生物组成员。

（3）已知s_1即为物理组成员，又为化学组成员；s_2, s_3, s_4, s_5为生物组成员。

在以上三种情况的每一种情况下，在s_1,s_2,s_3,s_4, s_5中选三位组长，不兼职，问能否办到?

解

用c_1, c_2, c_3分别表示物理组、化学组和生物组。令

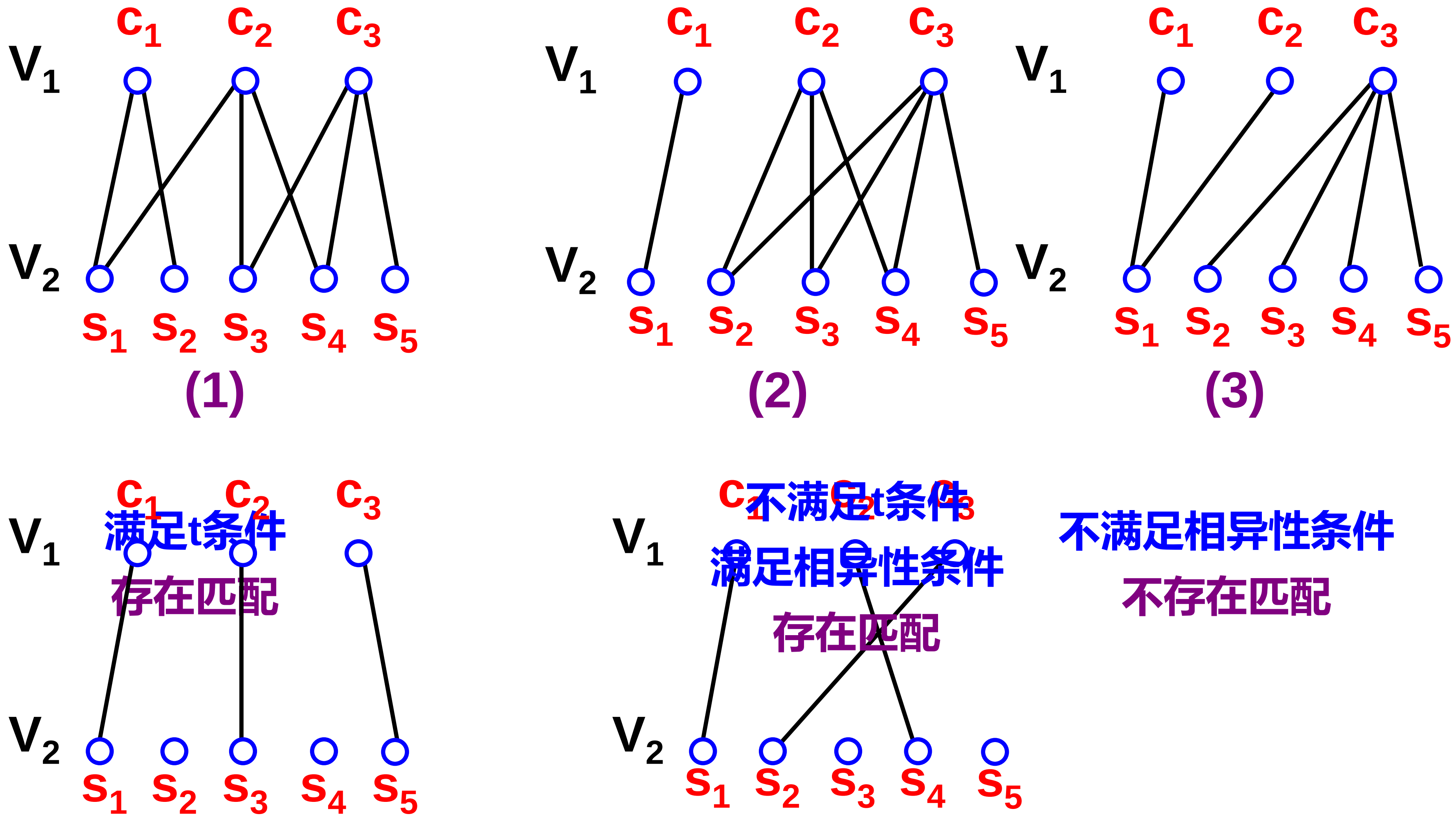
$$V_1 = \{c_1, c_2, c_3\},$$

$$V_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

以V_1，V_2为互补结点子集，以

$$E = \{(c_i, s_j) \mid c_i \in V_1, s_j \in V_2 \text{且} c_i \text{中有成员} s_j\}$$

为边集，构造二部图。



c1 c2 c3
V1
V2
s1 s2 s3 s4 s5
(1)
(2)
(3)
满足t条件
存在匹配
不满足t条件
满足相异性条件
存在匹配
不满足相异性条件
不存在匹配

小结

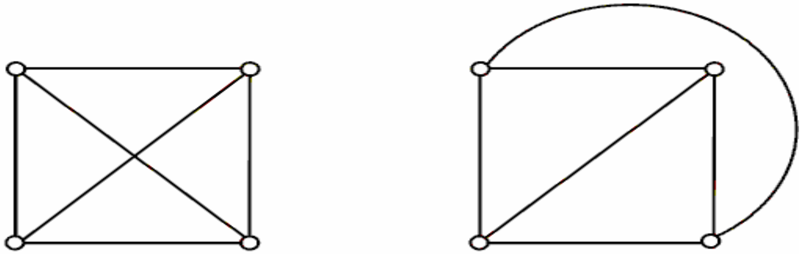
- 二部图的定义
- 二部图的判定
- 二部图的匹配

作业

- 理解二部图匹配的应用

平面图

如果能够把一个无向图G 的所有结点和边画在平面上，使得任何两边都不会在非结点处交叉，则称G 为平面图(plane Graph)，否则称G 为非平面图。



引入

- 很多时候，我们需要避免图中的边在非端点位置交叉。例如在印制电路板和集成电路中，我们需要避免导线发生交叉，这会导致短路。
- 又如在建筑布线时，也要注意尽量不能发生交叉，因为这会导致信号传输时的电磁干扰。

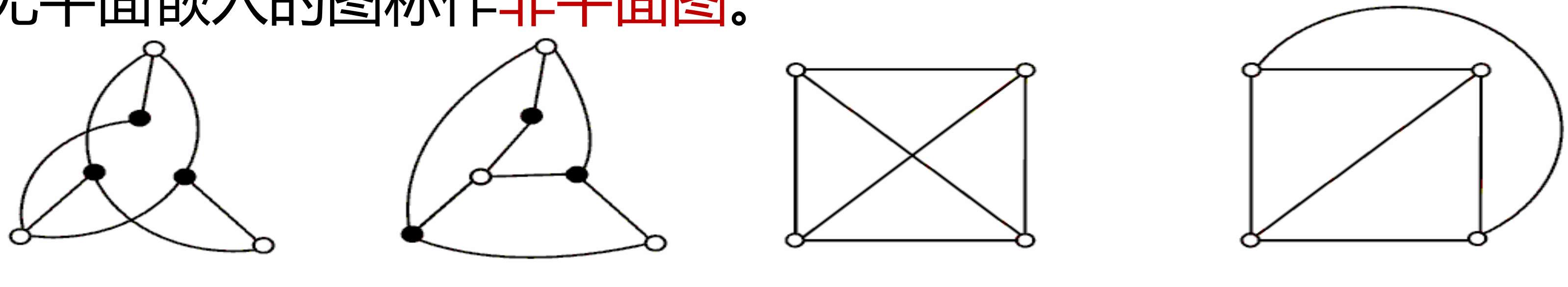
15. 3 平面图的基本概念

定义17.1

如果能将无向图G画在平面上使得除顶点外无边相交，则成G为可平面图，简称为平面图。

画出的无边相交的图称作G的平面嵌入。

无平面嵌入的图称作非平面图。



(1) (2) (3) (4)

在图中，(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入.

简单结论

(1) K_5, $K_{3,3}$都不是平面图（待证）

(2) 设$G'\subseteq G$，若G为平面图，则G'也是平面图.

(3) 设$G'\subseteq G$，若G'为非平面图，则G也是非平面图.

(4)$K_n(n\geq 6)$，$K_{3,n}(n\geq 4)$ 都是非平面图.

(5) 平行边与环不影响平面性.

平面图(平面嵌入)的面与次数

定义15.4

(1) G的面——由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域

(2) 无限面或外部面——（可用R_0表示）——面积无限的面

(3) 有限面或内部面（可用$R_1, R_2, \ldots, R_k$等表示）——面积有限的面

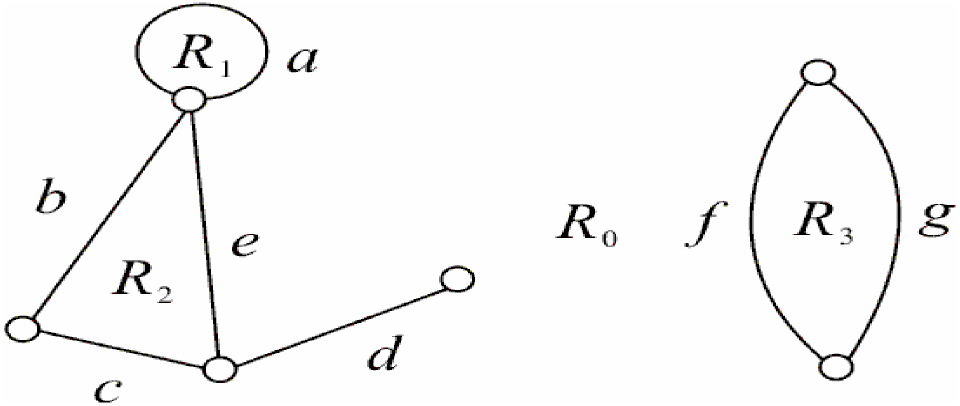
(4) 面 R_i 的边界——包围R_i的回路组

(5) 面 R_i 的次数——R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示

面的概念也可以用下面形象的说法加以描述：
假设我们把一个平面图的平面表示画在平面上，然后用一把小刀，沿着图的边切开，那么平面就被切成许多块，每一块就是图的一个面。更确切地说，平面图的一个面就是平面的一块，它用边作边界线，且不能再分成子块。

平面嵌入的面

- 平面图有4个面，$\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$. 请写各面的边界.



欧拉公式

定理 设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n–m+r=2$

(此公式称为欧拉公式)

推论：设G 是一个(n; m) 简单连通平面图，若$m > 1$，则有

$m \leqslant 3n-6$.

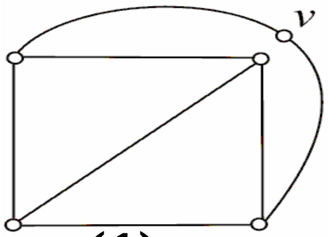
欧拉公式的推论（$m \leqslant 3n-6$）本身可能用处不大，但它的逆否命题却非常有用，可以用它来判定某些图是非平面图。即一个简单连通图，若不满足$m \leqslant 3n-6$，则一定是非平面图。但需要注意，满足该不等式的简单连通图未必是平面图。

平面图的判断

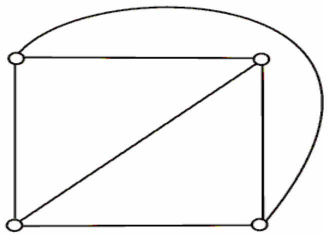
1. 插入2度顶点和消去2度顶点

(1) 消去2度顶点v，见下图中，由(1) 到(2)

(2) 插入2度顶点v，见下图中，从(2) 到(1) .



(1)

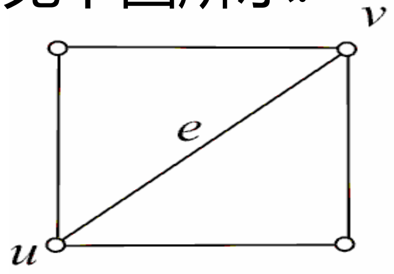


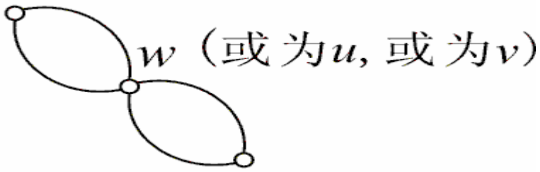
(2)

在图的一条边上插入一个二度的结点，或者关联于一个二度结点的两边，去掉该结点并将该两边合成一边，这均不影响一个图的平面性。

图的同胚

2. 收缩边e，见下图所示.

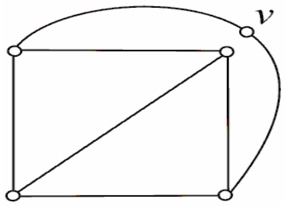


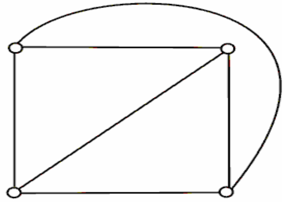


3. 图之间的同胚

定义15.5 若$G_1 \cong G_2$，或经过反复插入或消去2度顶点后所得$G'_1 \cong G'_2$，则称G_1与G_2同胚.

右边两个图同胚





平面图判定定理库拉托夫斯基定理

定理15.10 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中不含与K_5或$K_{3,3}$同胚的子图.

定理15.11 G是平面图 $\Leftrightarrow$ G中无可收缩为K_5或$K_{3,3}$的子图

用库拉图斯基定理证明一个图是平面图是很麻烦的，
一般可以画出它的平面嵌入。

小结

- 平面图及其判定
- 欧拉公式
- 库拉托夫斯基定理

作业

- 习题17
  - 第1题（平面图的判定）

THANK YOU