第八章 函数

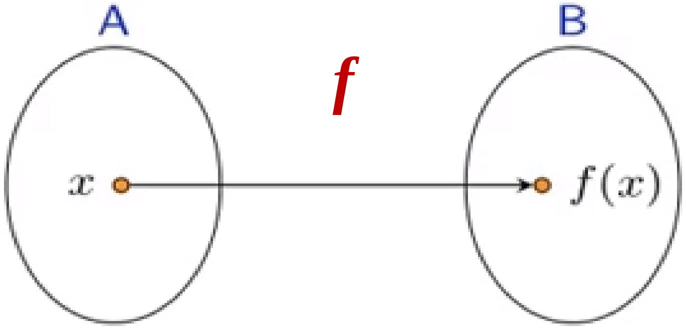
莱布尼茨-函数

- 莱布尼茨，德国哲学家、数学家，是历史上少见的通才，被誉为十七世纪的亚里士多德。
- 微积分　二进制　拓扑学　符号逻辑
- 莱布尼茨首先定义了函数。在他1673年的一部手稿中用到了**function**一词，表示任何一个随着曲线上的点变动而变动的量的纵坐标。

第八章 函数

- 函数：特殊的二元关系

> - 可以把函数看作输入输出关系
> - 它把一个集合（输入集合）的元素变成另一个集合（输出集合）的元素。



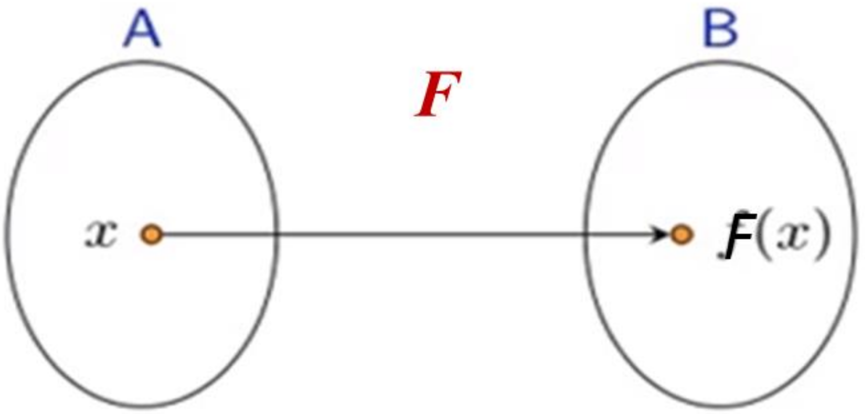
主要内容

- 函数的定义与性质
  - 函数定义
  - 函数性质
- 函数的运算
  - 函数的复合
  - 反函数

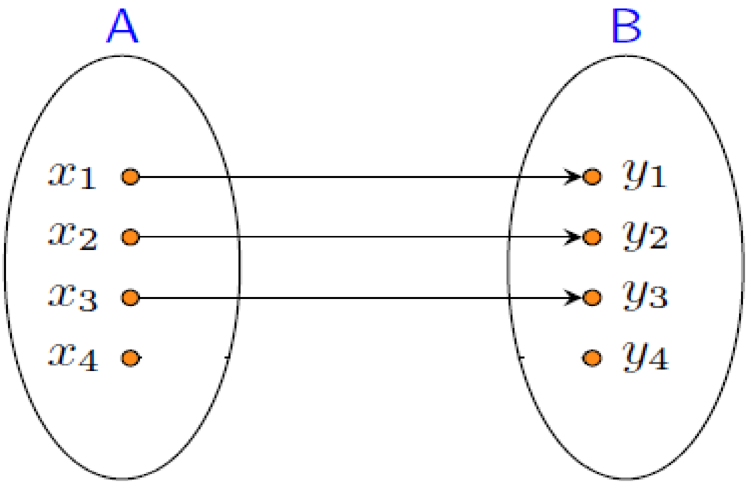
8.1 函数的定义与性质

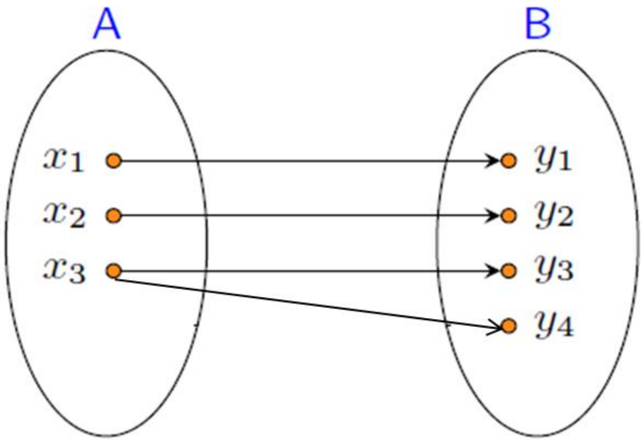
定义8.1 设 F 为二元关系, 若$\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都**存在唯一**的$y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为**函数**。

对于函数F, 如果有 xFy, 则记作 $y=F(x)$, 并称 y 为F 在 x 的**值**.



函数的定义





定义8.2 设F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F\subseteq G \wedge G\subseteq F$$

如果两个函数F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$ 都有$F(x)=G(x)$

请判断下列两个函数相等吗?

函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$

不相等, 因为 $\mathrm{dom}F\subset\mathrm{dom}G$.

从A到B的函数

定义8.3 设A, B为集合, 如果

$$f\text{ 为函数}, \ \mathrm{dom}f=A, \ \mathrm{ran}f\subseteq B,$$

则称 f 为从A到B的函数, 记作 $f: A\to B$.

例 $f: \mathrm{N}\to\mathrm{N}$, $f(x)=2^x$ 是从N到N的函数,

$g: \mathrm{N}\to\mathrm{N}$, $g(x)=2$ 也是从N到N的函数.

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 符号化表示为

$$B^A = \{ f \mid f: A\to B \}$$

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$

$A=\varnothing$, 则$B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则$B^A=\varnothing^A=\varnothing$

实例

例1　设$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 求B^A.

解 $B^A=\{ f_0, f_1, \ldots , f_7\}$, 其中

$f_0 = \{<1,a>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_1 = \{<1,a>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_2 = \{<1,a>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_3 = \{<1,a>,<2,b>,<3,b>\}$

$f_4 = \{<1,b>,<2,a>,<3,a>\}$

$f_5 = \{<1,b>,<2,a>,<3,b>\}$

$f_6 = \{<1,b>,<2,b>,<3,a>\}$

$f_7 = \{<1,b>,<2,b>,<3,b>\}$

函数的判定-实例

给定A, B 和 f, 判断是否构成函数 $f:A\to B$.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$,
$f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$.

(2) A,B同(1), $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$.

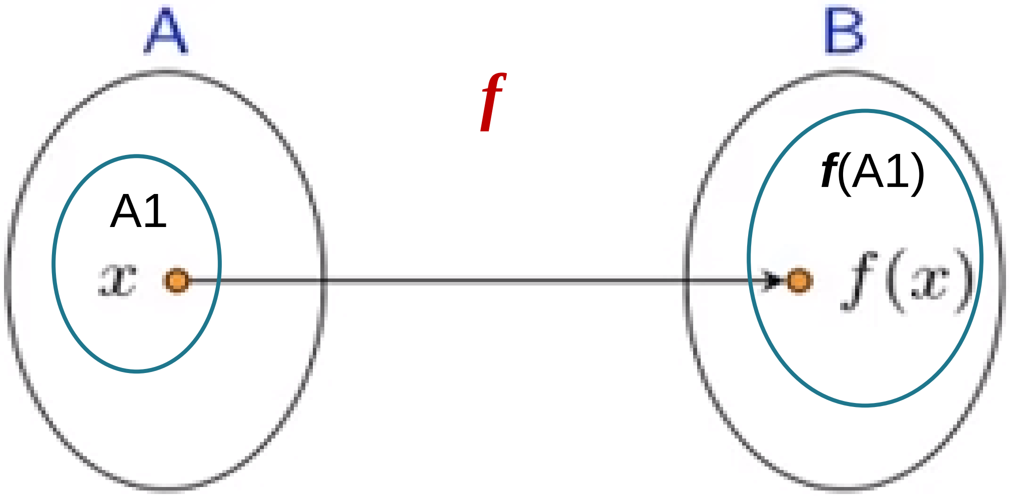
(3) A,B同(1), $f=\{<1,8>,<3,10>,<2,6>,<4,9>\}$.

函数的像和完全原像

定义8.5 设函数 f：$A \to B$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$

(1) A_1在 f 下的像 $f(A_1) = \{ f(x) \mid x \in A_1 \}$，函数的像 $f(A)$

(2) B_1在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)=\{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B_1\}$



函数的像和完全原像

例2 $f:N\to N, f(x)=2x$,则$A_1=\{1,2,3\}$和$A_2= N$在f下的像分别为：

$f(A_1)=\{2,4,6\}$

$f(A_2)=\{x \mid x=2y \wedge y \in N\}$

例3 $A=\{1,2,3\}$ $B=\{0,1\}$ $f:A\to B$且$f(1)=f(2)=0, f(3)=1$

令$A_1=\{1\}$, 则$f(A_1)$的完全原像与A_1是什么关系?

$\because f^{-1}(f(A_1))= f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{0\})=\{1，2\}$

可见 $A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$

课堂小结

- 函数的定义
- 像、完全原像、 B^A

作业

习题八

- 第6题（判定是否为函数）

复习引入

- 函数的定义
- 函数的性质?

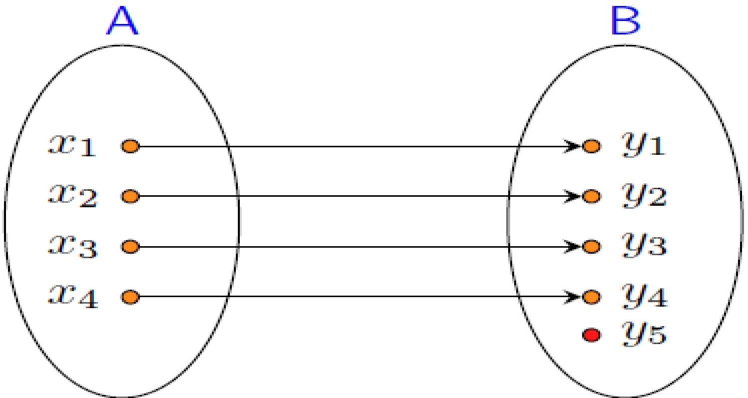
函数的性质

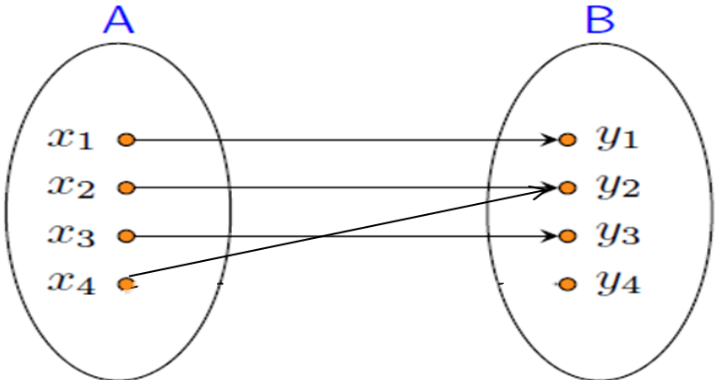
定义8.6 设 f: $A \to B$,

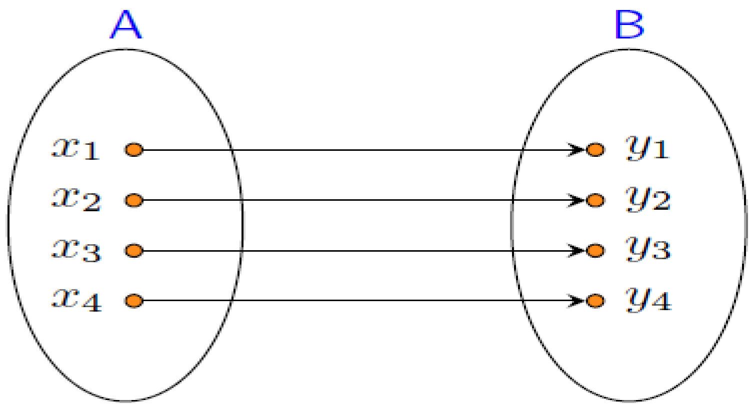
(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$, 则称 $f:A\to B$是满射的

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A\to B$ 是单射的

(3) 若 $f:A\to B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A\to B$是双射的






A
B
x_1
x_2
x_3
x_4
y_1
y_2
y_3
y_4

函数的性质

例4 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

(1) f:R→R, $f(x) = -x^2+2x-1$

(2) f:Z^+→R, $f(x) = \ln x$, Z^+为正整数集

(3) f:R→Z, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

(5) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中R^+为正实数集.

例题解答

解

(1) f:R→R, $f(x)=-x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的

(2) f:Z^+→R, $f(x)=\ln x$

是单调上升的, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) f:R→Z, $f(x)=\lfloor x \rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如$f(1.5)=f(1.2)=1$

(4) f:R→R, $f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R

(5) f:R^+→R^+, $f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值 $f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的

实例

例5 给定A, B 和 f, 判断是否构成函数 f:A→B. 如果是, 说明该函数是否为单射、满射、双射的. 并根据要求进行计算.

(1) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9,10\}$,
$f=\{<1,8>,<3,9>,<4,10>,<2,6>,<5,9>\}$.

(2) A,B同(1), $f=\{<1,7>,<2,6>,<4,5>,<1,9>,<5,10>\}$.

(3) A,B同(1), $f=\{<1,8>,<3,10>,< 2,6>,<4,9>\}$.

(4) $A=B=\mathrm{R}$, $f(x)=x^3$

(5) $A=B=\mathrm{R}^+$, $f(x)=x/(x^2+1)$.

(6) $A=B=\mathrm{R}\times\mathrm{R}$, $f(<x,y>)=<x+y, x-y>$, 令
$L=\{<x,y>|x,y\in\mathrm{R}\wedge y=x+1\}$, 计算 $f(L)$.

(7) $A=\mathrm{N}\times\mathrm{N}$, $B=\mathrm{N}$, $f(<x,y>)=|x^2-y^2|$. 计算$f(\mathrm{N}\times\{0\})$, $f^{-1}(\{0\})$

解答

(1) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射也不是满射, 因为 $f(3)=f(5)=9$, 且$7\notin \mathrm{ran}f$.

(2) 不构成 $f:A\to B$, 因为 f 不是函数. $<1,7>\in f$ 且$<1,9>\in f$, 与函数定义矛盾

(3) 不构成 $f:A\to B$, 因为$\mathrm{dom}\, f = \{1,2,3,4\} \neq A$

(4) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的

(5) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为该函数在 $x=1$取极大值 $f(1)=1/2$. 函数不是单调的,且$\mathrm{ran}f\neq R^+$.

(6) 能构成 $f:A\to B$, 且 $f:A\to B$是双射的.

$$f(L) = \{<2x+1,-1>|x\in \mathrm{R}\}=\mathrm{R}\times\{-1\}$$

(7) 能构成 $f:A\to B$, $f:A\to B$既不是单射的也不是满射的. 因为

$$f(<1,1>)=f(<2,2>)=0,\ 2\notin \mathrm{ran}f.$$

$$f(\mathrm{N}\times\{0\}) = \{n^2-0^2|n\in \mathrm{N}\} = \{n^2|n\in \mathrm{N}\}$$

$$f^{-1}(\{0\}) = \{<n,n>|n\in \mathrm{N}\}$$

函数性质的证明方法

1. 证明 f:$A\to B$是满射的方法: 任取 $y\in B$, 找到 x (即给出x的表示)或者证明存在$x\in A$，使得$f(x)=y$.

2. 证明 f:$A\to B$是单射的方法

方法一 $\forall x_1,x_2\in A$,

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow$	…	$\Rightarrow x_1=x_2$
推理前提	推理过程	推理结论

方法二 $\forall x_1,x_2\in A$,

$x_1\neq x_2 \Rightarrow$	…	$\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$
推理前提	推理过程	推理结论

3. 证明 f:$A\to B$不是满射的方法： 找到 $y\in B$, $y\notin \mathrm{ran}f$

4. 证明 f:$A\to B$不是单射的方法：找到 $x_1,x_2\in A$, $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$

函数性质证明实例

例6 设 $f: \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$

证明 f 既是满射的，也是单射的.

证 任取$<u,v>\in \mathrm{R}\times\mathrm{R}$，存在 $<\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}>$

使得

$$f(<\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}>) = <u,v>$$

因此 f 是满射的

对于任意的 $<x,y>$, $<u,v>\in \mathrm{R}\times\mathrm{R}$, 有

$$f(<x,y>) = f(<u,v>) \Leftrightarrow <x+y, x-y> = <u+v, u-v>$$

$$\Leftrightarrow x+y = u+v,\ x-y = u-v \Leftrightarrow x = u,\ y = v$$

$$\Leftrightarrow <x,y> = <u,v>$$

因此 f 是单射的.

实例

例7　对于给定的集合A和B构造双射函数 $f:A\to B$

(1) $A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

(2) $A=[0,1]$, $B=[1/4,1/2]$

(3) $A=Z$, $B=N$

(4) $A=[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, $B=[-1,1]$

解答

(1) $A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令 $f:A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

解答

(2) 令 f:[0,1]→[1/4,1/2], $f(x)=(x+1)/4$

(3) 将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

Z：	0	–1	1	–2	2	–3	3 …
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
N：	0	1	2	3	4	5	6 …

这种对应所表示的函数是：

$$f\colon\ \mathrm{Z} \to \mathrm{N},\ f(x)=\begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

(4) 令 f:[π/2,3π/2]→[–1,1]　　$f(x)$ = sin$x$

某些重要函数

定义8.7

(1)设 $f:A\to B$, 如果存在$c\in B$使得对所有的 $x\in A$都有 $f(x)=c$, 则称 $f:A\to B$是常函数.

(2) 称 A上的恒等关系I_A为A上的恒等函数, 对所有的$x\in A$都有 $I_A(x)=x$.

(3) 设$<A, \preccurlyeq>$, $<B, \preccurlyeq>$为偏序集， $f:A\to B$

如果对任意 $x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$, 则称 f 为单调递增的;

如果对任意$x_1, x_2\in A$, $x_1\prec x_2$, 有$f(x_1)\prec f(x_2)$, 则称 f 为严格单调递增的.

某些重要函数

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_A{}' : A\rightarrow\{0,1\}$定义为

$$\chi_A{}'(a)=1,\ a\in A'$$
$$\chi_A{}'(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g:A\rightarrow A/R$$
$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射

课堂小结

- 函数的定义
- 函数的性质：判定 证明
- 像、完全原像、B^A

作业

习题八

- 第6题（判定是否为函数及判断函数的性质）

函数的运算

复习引入

- 函数的定义
- 函数的性质
- 运算?

8.2 函数的复合与反函数

- 主要内容
  - 复合函数基本定理
  - 函数的复合运算与函数性质
  - 反函数的存在条件
  - 反函数的性质

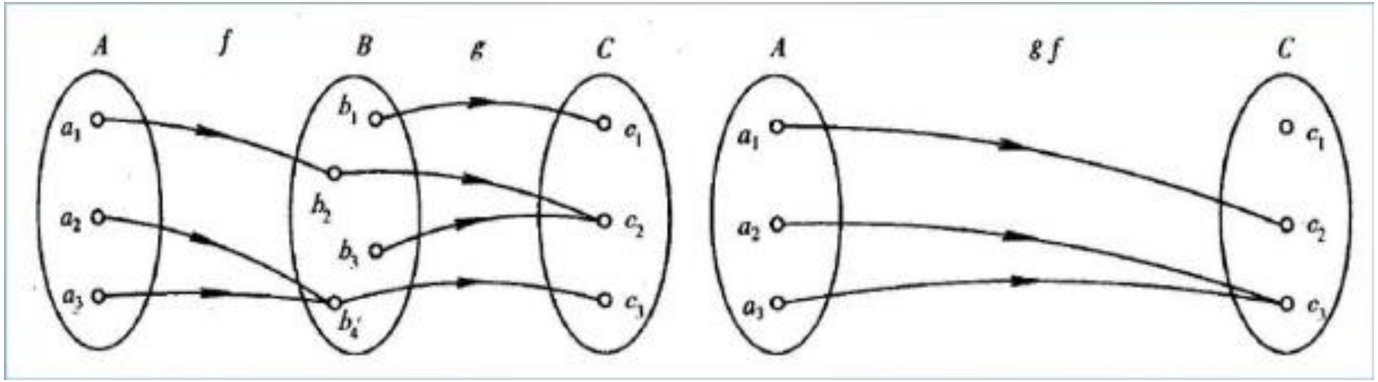
函数的复合运算

复合函数基本定理

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$



复合函数基本定理

定理8.1 设F, G是函数, 则$F\circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x|x\in \mathrm{dom}F\wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有$F\circ G(x)=G(F(x))$

证 先证明$F\circ G$是函数.

因为F, G是关系, 所以$F\circ G$也是关系. 若对某个$x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$有

$xF\circ Gy_1$和 $xF\circ Gy_2$, 则

$$<x, y_1>\in F\circ G\wedge <x, y_2>\in F\circ G$$

$$\Rightarrow \exists t_1(<x,t_1>\in F\wedge <t_1,y_1>\in G)\wedge \exists t_2(<x,t_2>\in F\wedge <t_2,y_2>\in G)$$

$$\Rightarrow \exists t_1\exists t_2(t_1=t_2\wedge <t_1,y_1>\in G\wedge <t_2,y_2>\in G \quad (F\text{为函数})$$

$$\Rightarrow y_1=y_2 \quad (G\text{为函数})$$

所以 $F\circ G$ 为函数

证明

任取x,

$x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$

$\Rightarrow \exists t\ \exists y(<x,t> \in F \wedge <t,y> \in G)$

$\Rightarrow \exists t\ (x \in \mathrm{dom}F \wedge t = F(x) \wedge t \in \mathrm{dom}G)$

$\Rightarrow x \in \{\ x \mid x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\ \}$

任取x,

$x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G$

$<x,F(x)> \in F \wedge <F(x),G(F(x))> \in G$

$\Rightarrow <x,G(F(x))> \in F \circ G$

$\Rightarrow x \in \mathrm{dom}(F \circ G) \wedge F \circ G(x) = G(F(x))$

所以(1) 和(2) 得证

推论

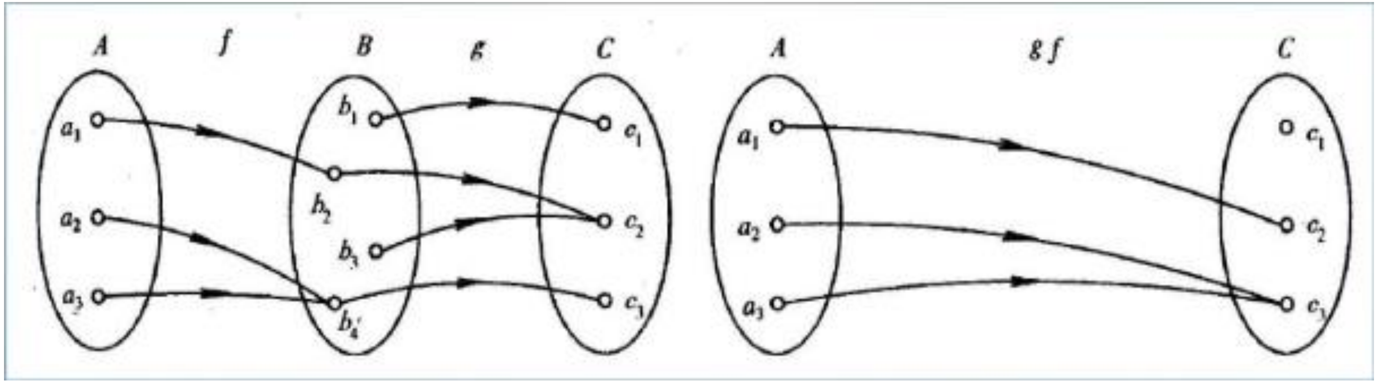
推论1　设F, G, H为函数, 则$(F\circ G)\circ H$和$F\circ(G\circ H)$都是函数, 且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证　由8.1定理和定理7.2复合运算满足结合律得证.

推论2 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则 $f\circ g:A\to C$, 且$\forall x\in A$都有

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$



函数复合与函数性质

定理8.2 设f:A→B, g:B→C

(1) 如果 f:A→B, g:B→C是满射的, 则 $f\circ g$:A→C也是满射的

(2) 如果 f:A→B, g:B→C是单射的, 则 $f\circ g$:A→C也是单射的

(3) 如果 f:A→B, g:B→C是双射的, 则 $f\circ g$:A→C也是双射的

证

(1) 任取$c\in C$, 由g:B→C的满射性, $\exists b\in B$使得 $g(b)=c$.

对于这个b, 由 f:A→B的满射性，$\exists a\in A$使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了$f\circ g$:A→C是满射的

证明

(2) 假设存在$x_1, x_2 \in A$使得　　$f \circ g(x_1)=f \circ g(x_2)$

由合成定理有　　$g(f(x_1))=g(f(x_2))$

因为$g:B \to C$是单射的, 故 $f(x_1)=f(x_2)$. 又由于$f:A \to B$是单射的,

所以$x_1=x_2$. 从而证明$f \circ g:A \to C$是单射的.

(3)由(1)和(2)得证.

- 注意：定理8.2的逆命题不为真。

即如果$f\circ g:A\to C$是单射(或满射、双射)的，不一定有 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$都是单射(或满射、双射)的.

实例

- 考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$, $C=\{c_1,c_2,c_3\}$. 令
  $f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_3>\}$
  $g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_3>,<b_4,c_3>\}$
  $f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_3>\}$

那么 $f:A\to B$和$f\circ g:A\to C$是单射的, 但$g:B\to C$不是单射的.

- 考虑集合$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$, $C=\{c_1,c_2\}$. 令
  $f=\{<a_1,b_1>,<a_2,b_2>,<a_3,b_2>\}$
  $g=\{<b_1,c_1>,<b_2,c_2>,<b_3,c_2>\}$
  $f\circ g=\{<a_1,c_1>,<a_2,c_2>,<a_3,c_2>\}$

那么$g:B\to C$ 和 $f\circ g:A\to C$是满射的, 但 $f:A\to B$不是满射的.

反函数

反函数

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系.

(2) 任给**单射**函数 f:$A \to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从ran$f$到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数

(3) 对于**双射**函数 f:$A \to B$, f^{-1}:$B \to A$是从B到A的双射函数.

反函数

定理8.4 设 $f:A\to B$是双射的, 则$f^{-1}:B\to A$也是双射的.

证明思路:

先证明 $f^{-1}:B\to A$，即f^{-1}是函数，且$\mathrm{dom}f^{-1}=B$, $\mathrm{ran}f^{-1}=A$.

再证明$f^{-1}:B\to A$的双射性质.

证明

证 因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且

$$\mathrm{dom}\, f^{-1} = \mathrm{ran} f = B\,,\quad \mathrm{ran}\, f^{-1} = \mathrm{dom} f = A$$

对于任意的 $x \in B = \mathrm{dom}\, f^{-1}$, 假设有$y_1, y_2 \in A$使得

$$<x,y_1> \in f^{-1} \wedge <x,y_2> \in f^{-1}$$

成立, 则由逆的定义有

$$<y_1,x> \in f \wedge <y_2,x> \in f$$

根据 f 的单射性可得$y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的.

若存在$x_1, x_2 \in B$使得$f^{-1}(x_1)= f^{-1}(x_2)=y$, 从而有

$$<x_1,y> \in f^{-1} \wedge <x_2,y> \in f^{-1}$$

$$\Rightarrow <y,x_1> \in f \wedge <y,x_2> \in f \Rightarrow x_1=x_2$$

对于双射函数$f:A \to B$, 称 $f^{-1}:B \to A$是它的反函数.

反函数的性质

定理8.5

(1) 设 $f:A\to B$是双射的, 则 $f^{-1}\circ f = I_B,\ f\circ f^{-1} = I_A$

(2) 对于双射函数 $f:A\to A$, 有 $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A$

证明思路:

根据定理可知 $f^{-1}:B\to A$也是双射的, 由合成基本定理可知

$f^{-1}\circ f:B\to B,\ f\circ f^{-1}:A\to A$，且它们都是恒等函数.

例题

例8 设

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 3 \\ -2 & x < 3 \end{cases}$$

$$g(x) = x + 2$$

求 $f \circ g$, $g \circ f$. 如果f和 g 存在反函数, 求出它们的反函数.

求解

解: $f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 3 \\ 0 & x < 3 \end{cases}$$

$g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$$

f:R→R不是双射的, 不存在反函数.

g:R→R是双射的, 它的反函数是

$$g^{-1}:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\ g^{-1}(x)=x-2$$

函数部分小结及基本要求

- 给定 f, A, B, 判别 f 是否为从A到B的函数
- 判别函数 f:A→B的性质（单射、满射、双射）
- 熟练计算函数的值、像、复合以及反函数
- 证明函数 f:A→B的性质（单射、满射、双射）
- 给定集合A, B，构造双射函数 f:A→B
- **会计算复合函数、双射函数的反函数**

作业

习题八

- 第19题（求函数的复合，判断函数的性质，求反函数)

集合论小结


THANK
YOU