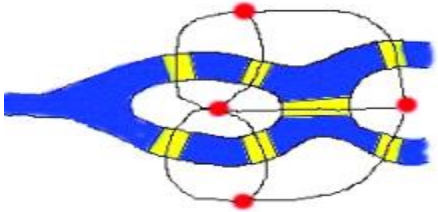
引入

- 图论是一个古老的数学分支，它起源于游戏难题的研究。
- 图论的起源可以追源至18世纪,第一篇论文是瑞士数学家欧拉在1736年完成，这篇论文不仅解决了著名的“哥尼斯堡七桥问题”，也使欧拉成为图论的创始人.




天才简史

莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）

- 欧拉，瑞士数学家、自然科学家，18世纪数学界的中心人物。
- 13岁入读巴塞尔大学，15岁大学毕业，16岁获得硕士学位。
- 欧拉写下了886本书籍和论文，其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%，天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%，彼得堡科学院为了整理他的著作，足足忙碌了四十七年。

- 欧拉著作的惊人多产并不是偶然的，他可以在任何不良的环境中工作，他常常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾孩子在旁边喧哗。
- 他那顽强的毅力和孜孜不倦的治学精神，使他在双目失明以后， 也没有停止对数学的研究，在失明后的17年间，他还口述了几本书和400篇左右的论文。

图论的应用

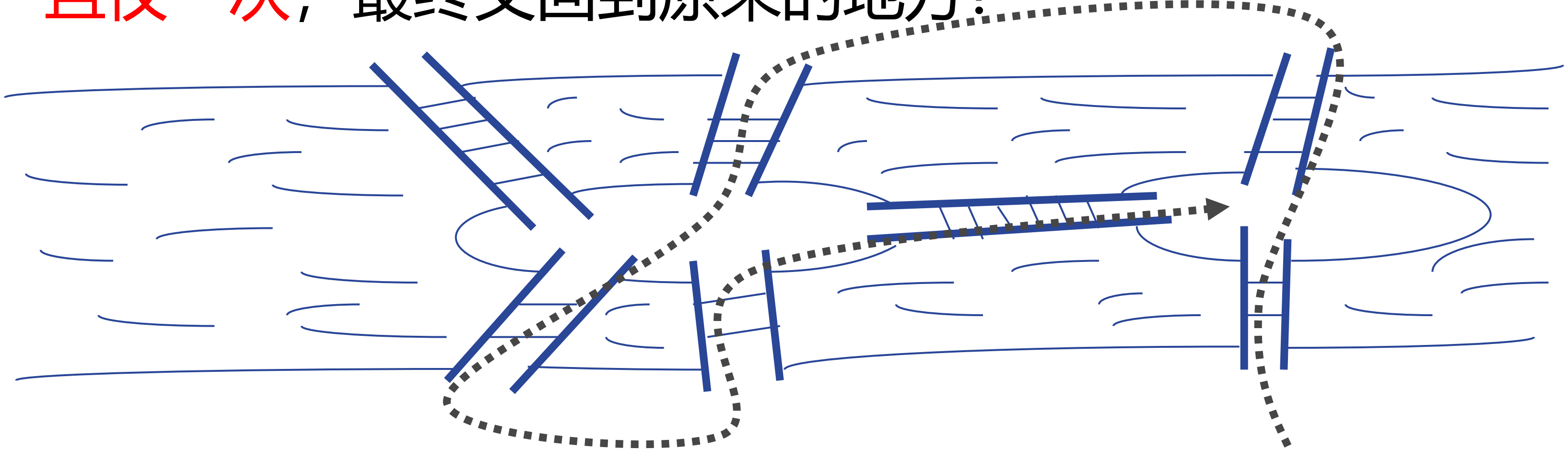
- 图论是一门应用非常广泛内容非常丰富的应用数学分支。
- 图论模型是一类非常重要的数学模型, 现实生活中的许多问题,如网络及信息传播问题，交通网络问题，运输的优化问题，网络可靠性问题，物流管理问题，社会学中某类关系问题，都可以应用图论模型来研究和处理.

图论的应用

- 现实生活中,许多问题都可归结为由点和线组成的图形的问题.
  - 由点代表车站,线代表铁路线,就形成铁路网络图;
  - 点代表路口,线代表街道的城市交通图;
  - 点代表管道接头,线代表管道的自来水供水系统等等.
- 图论正是研究这些由点和线组成的“图形”问题的学科.

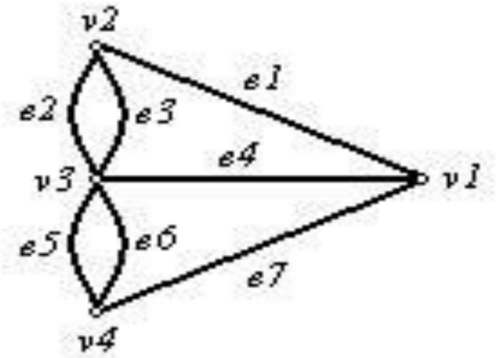
1 哥尼斯堡七桥问题

- 在十八世纪，欧洲哥尼斯堡城的普雷格尔河上建有七座桥，这七座桥把河的两岸和河中的两个岛连接起来，当时有人提出这样的问题：能否从一个地方出发，通过每座桥一次且仅一次，最终又回到原来的地方？



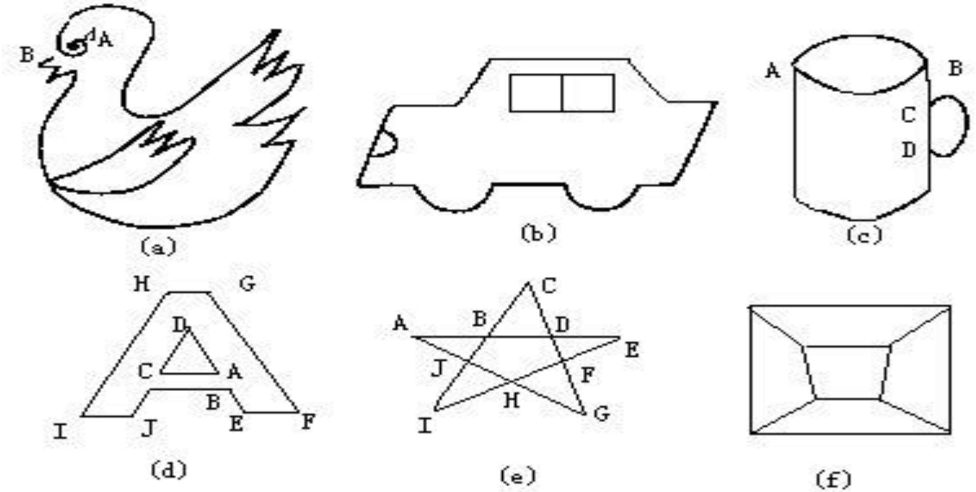
1 哥尼斯堡七桥问题

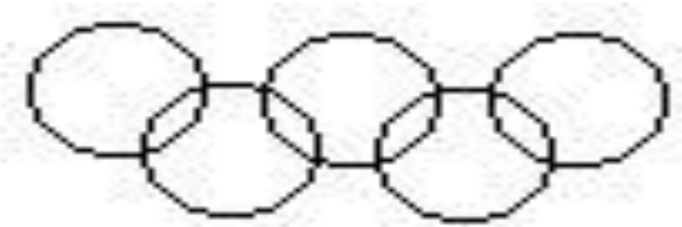
- 1736年<u>欧拉</u>把这个问题抽象成图论问题：用四个点*v*1, *v*2, *v*3, *v*4表示两岸及两个岛(称为顶点)，用两点间的连线*e*1, *e*2, *e*3, *e*4, *e*5, *e*6, *e*7表示桥(称为边)，问题转化为:从任何一个顶点出发，通过每一条边一次且仅一次，最后回到该顶点，是否存在满足条件的走法?



– 欧拉（ ***Euler*** ）图问题

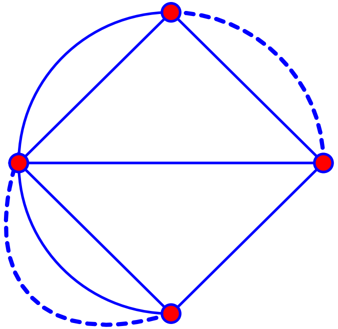
一笔画问题





2 中国邮递员问题

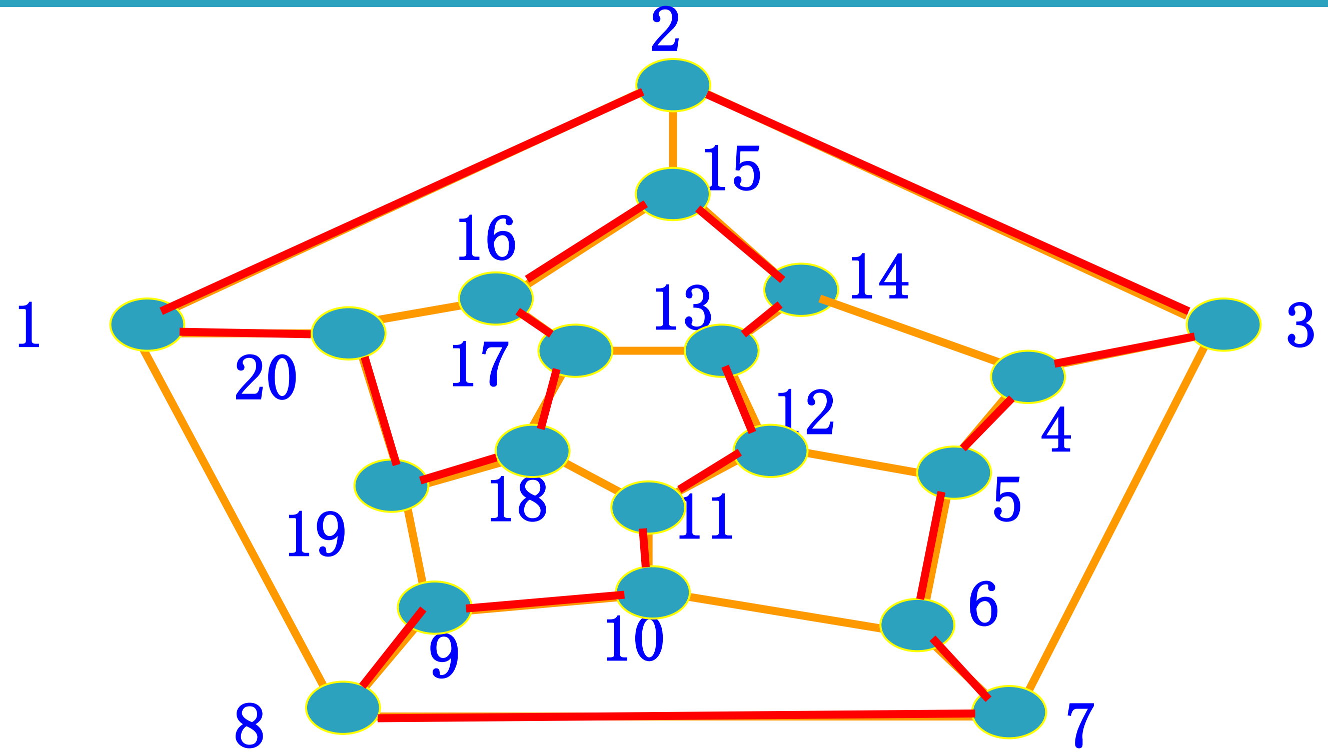
- 中国邮递员问题(*Chinese Postman Problem, CPP*)是由我国管梅谷教授于1962年首先提出并发表的
  - 问题是从邮局出发，走遍邮区的所有街道至少一次再回到邮局，走什么路由才能使总的路程最短？
  - 如整个图构成欧拉回路，*CPP* 问题也就迎刃而解了
  - 若不能构成欧拉回路，则必然有一些街道要被重复走过才能回到原出发点
    - 显然要在奇次点间加重复边
    - 如何使所加的边长度最少
    - 归结为求奇次点间的最小匹配



3 哈密顿周游世界问题

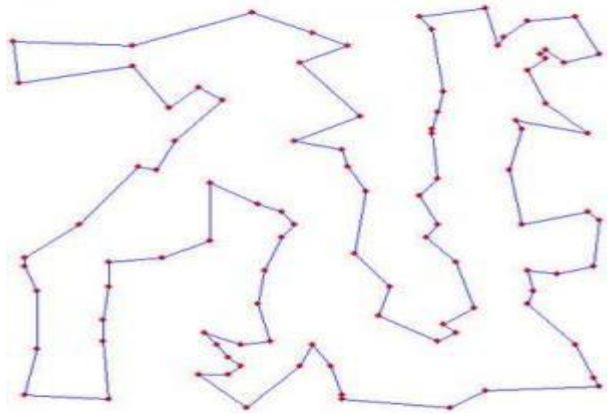
- 英国数学家哈密顿于1856年提出周游世界的问题：
  - 若要周游世界上的二十个名城，且城与城之间只有一条路，则能否把每一个城走且只走一次，最后返回到原地.
  - 该问题可以抽象为图论问题：用20个顶点分别表示20个城市，两个顶点间的连线表示城市间的路，要求找一条从某点出发，经过各个顶点一次且仅一次，最后能否返回到出发点的路线?

哈密顿(Hamilton)图问题


2
15
16
14
1
13
3
17
20
12
4
18
5
19
11
6
9
10
8
7

4 旅行售货员问题

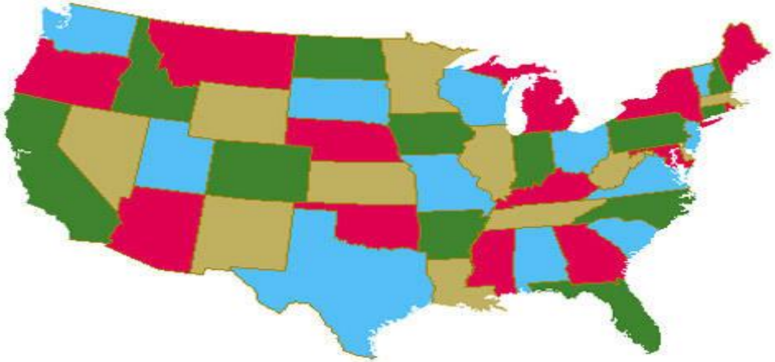
- 一个售货员从他所在的城镇出发,想去若干城镇售货,要求每个城镇仅经过一次,然后返回原地,问怎样安排他的路线才会使通过的总路程最短?
- 该问题可以抽象图论问题为：在一个赋权完全图中,找出一个有最小权的哈密顿(Hamilton)圈.



旅行售货员问题

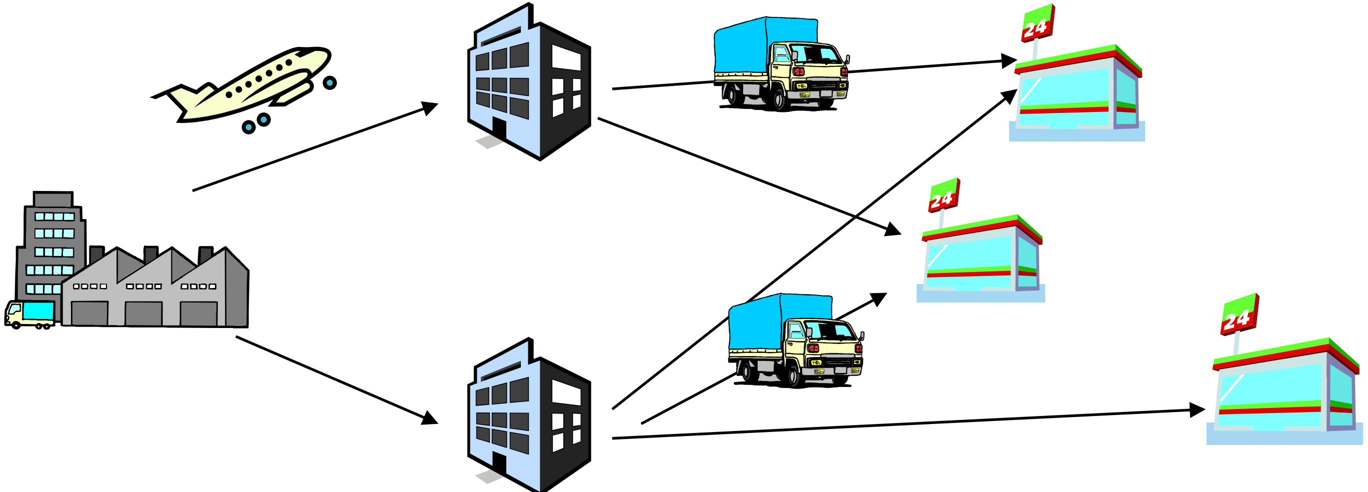
5 四色猜想

- 1840年数学家墨比乌斯首先提出：任何平面上的地图,总可以把其上的国家用四种不同的颜色来染色，并且总使得任何两个相邻的国家颜色不同，这个猜想就是有名的四色猜想.
- 这个问题在理论上还没有证明，但在1976年，美国数学家阿培尔和墨肯在三台百万次的电子数字计算机上用了1200小时验证了它的正确性.



6 网络流问题

□如何制定一个运输计划，使生产地到销售地的产品输送量最大。这就是网络最大流问题。

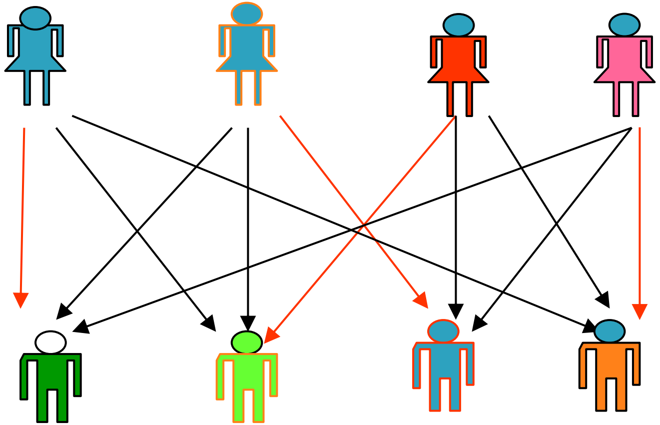


6 网络流问题

- 1956年*Ford*和*Fulkerson*提出了关于网络流问题的一个重要定理。
  - 最大流最小割定理：在任何网络中，最大流的值等于最小割的容量。
  - 由这个定理可以引出求网络最大流的一个算法——标号法。
    - 1970年，*Edmonds*和*Karp*对标号程序加以改进，使之成为一个好的算法。

7 稳定婚姻问题

- 组合数学中有一个著名定理：如果一个村子里每一个女孩都恰好认识k个男孩，并且每一个男孩也恰好认识k个女孩，那么每一个女孩都可以嫁给她认识的一个男孩，并且每一个男孩都可以娶一个他认识的女孩。（k正则二部图，一定存在一个完美匹配）



7 稳定婚姻问题

- 但是这样的安排方法不一定是最好的。假如能找到两对夫妇，彼此都更喜欢对方的配偶，那么这样婚姻有潜在的不稳定性。
- 用图论匹配理论中*Gale-Shapley*算法，可以找到一种婚姻的安排方法，使得没有上述的不稳定情况出现。

经典图论问题小结

- 走所有的边仅一次，并回到起点，如存在该图为欧拉图；
- 走所有的边至少一次，并必须回到起点，为了能回到起点，有时可能会一条路径走两次，但要求总路径最短，为中国邮递员问题
- 走所有的点仅一次，并回到起点：哈密顿周游世界问题
- 走所有的点仅一次，并回到起点，并要求路程最短：旅行售货员问题

课堂小结

- 图论的应用领域

作业

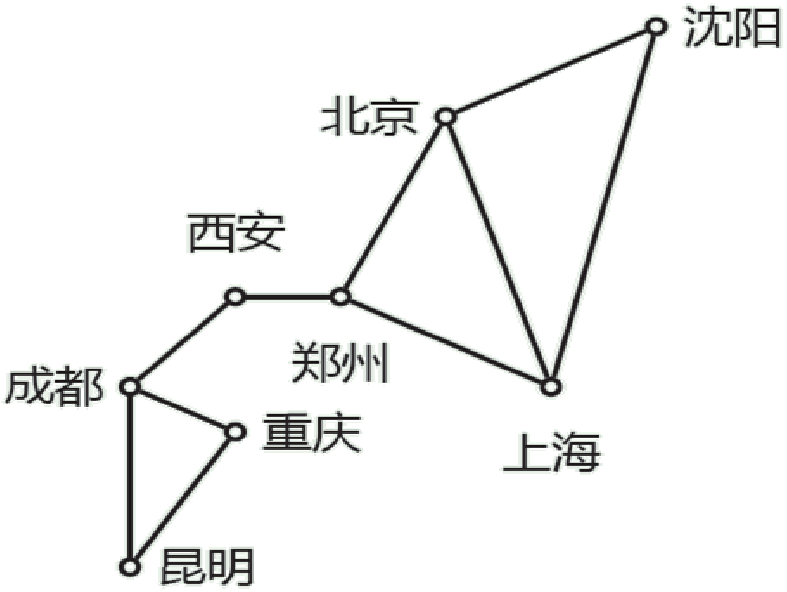
- 图论的应用领域还有哪些？查阅资料总结。


THANK
YOU

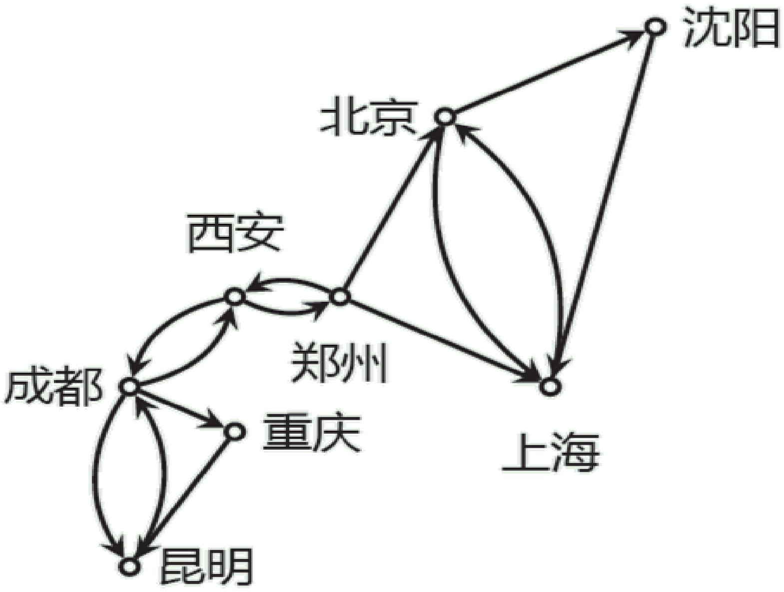
引入

- 图论的应用领域
- 图论的基本概念?

第十四章 图的基本概念

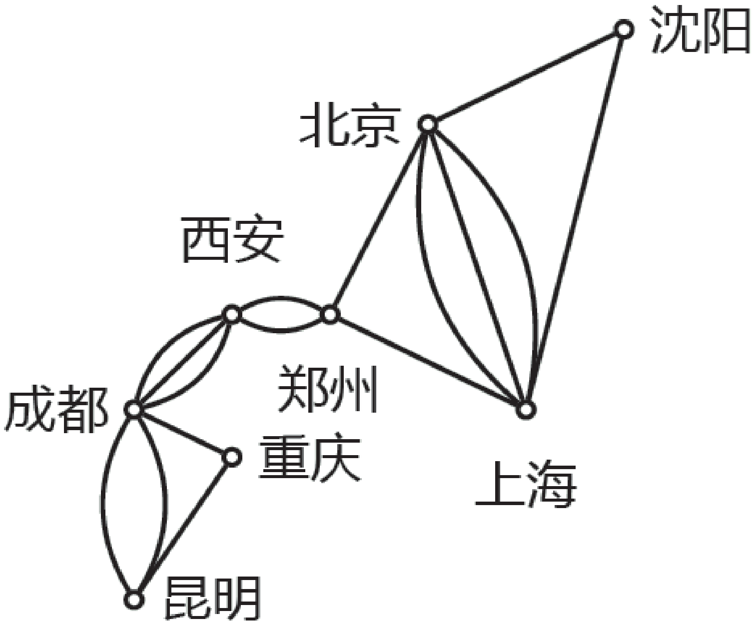


无向图

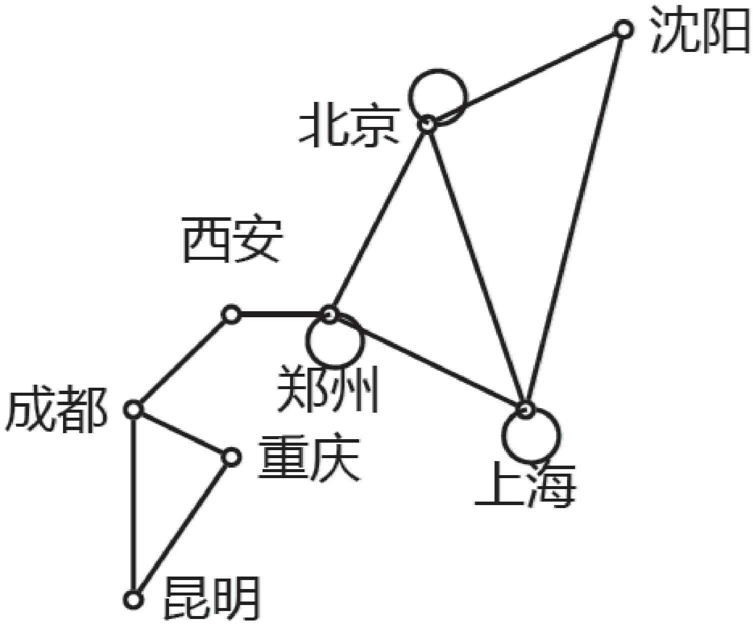


有向图

第十四章 图的基本概念

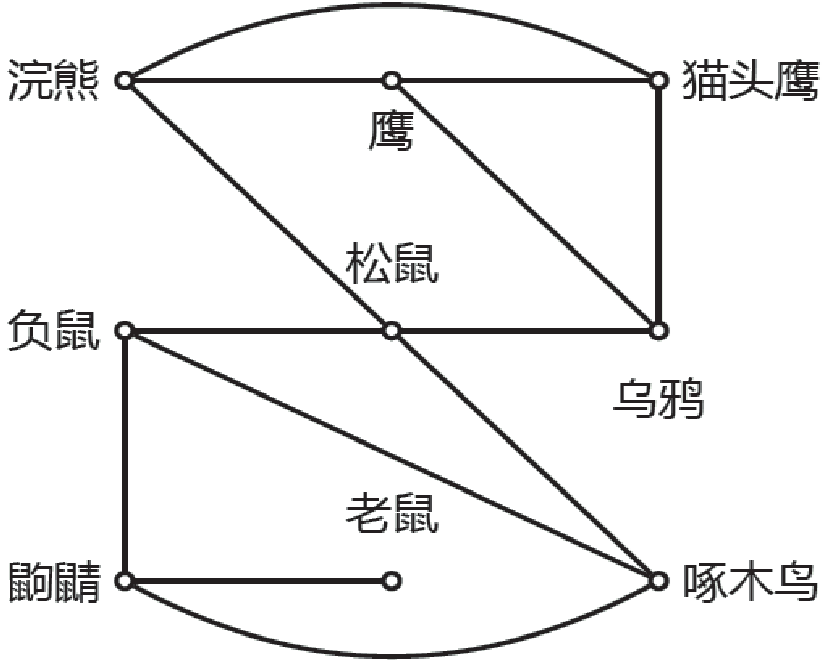


多重图

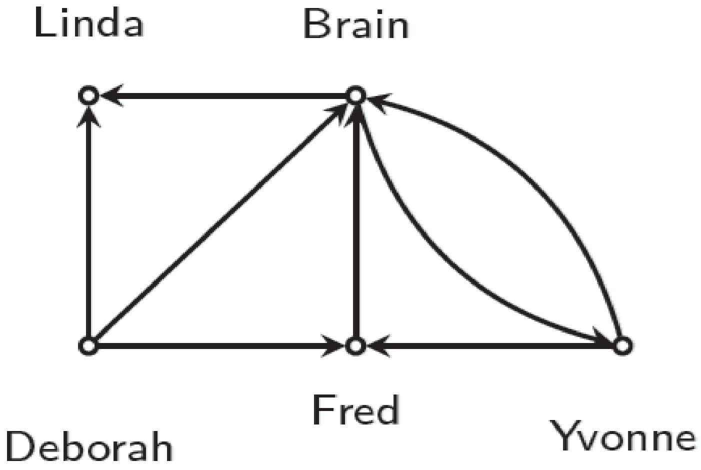


有环图

第十四章 图的基本概念

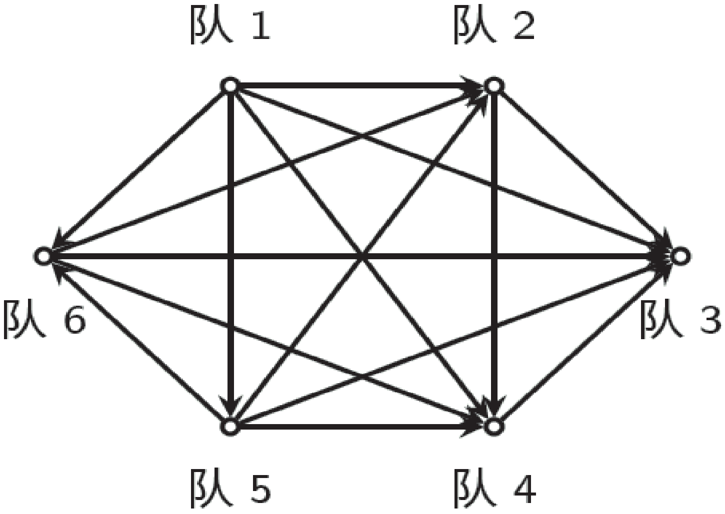


栖息地重叠图



群体影响图

第十四章 图的基本概念



巡回联赛图

$S_1\ a := 0$

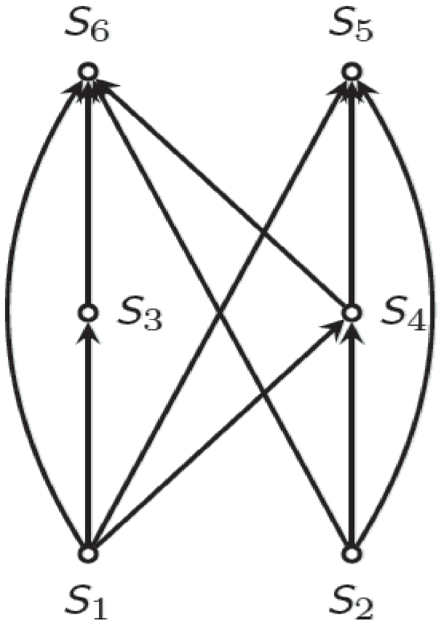
$S_2\ b := 1$

$S_3\ c := a + 1$

$S_4\ d := b + a$

$S_5\ e := d + 1$

$S_6\ e := c + d$



优先图

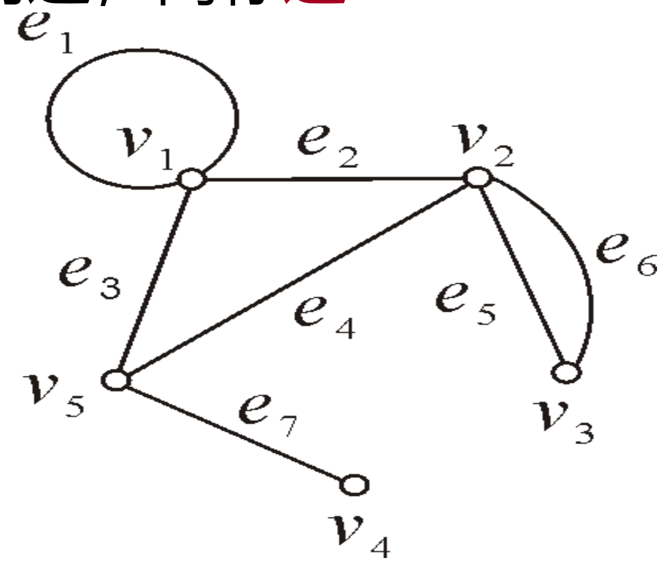
图的定义和相关概念

14.1 图

定义14.1 无向图$G = <V,E>$, 其中

(1) $V \neq \varnothing$为顶点集，元素称为顶点

(2) E为$V\&V$的多重集，其元素称为无向边，简称边



实例

设

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$,

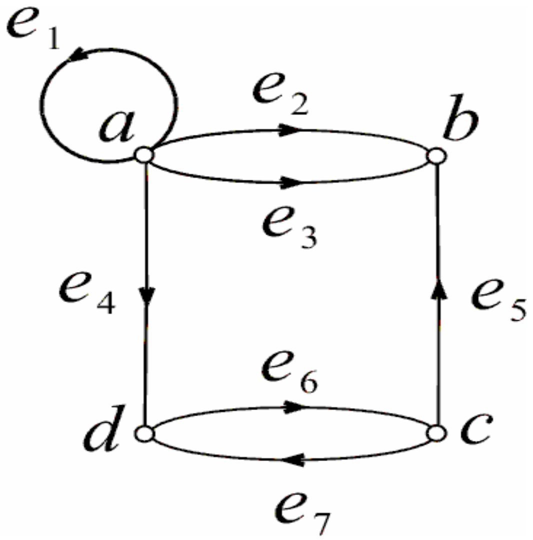
$E = \{(v_1,v_1), (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_2,v_5), (v_1,v_5), (v_4,v_5)\}$

则 $G = <V,E>$为一无向图

有向图

定义14.2 有向图$D=<V,E>$, 只需注意E是$V\times V$ 的多重子集

下图表示的是一个有向图，试写出它的V 和 E



相关概念

1. 图　① 可用G泛指图（无向的或有向的）
   ② $V(G)$, $E(G)$, $V(D)$, $E(D)$
   ③ n阶图
2. 有限图
3. n 阶零图与平凡图
4. 空图——$\varnothing$
5. 用 e_k 表示无向边或有向边
6. 顶点与边的关联关系
   ① 关联、关联次数
   ② 环
   ③ 孤立点
7. 顶点之间的相邻与邻接关系

相关概念

8. 邻域与关联集

① $v \in V(G)$ (G为无向图)

v的邻域 $N(v) = \{u \mid u \in V(G) \wedge (u,v) \in E(G) \wedge u \neq v\}$

v的闭邻域 $\overline{N}(v) = N(v) \cup \{v\}$

v 的关联集 $I(v) = \{e \mid e \in E(G) \wedge e\text{与}v\text{关联}\}$

② $v \in V(D)$ (D为有向图)

v的后继元集 $\Gamma_D^+(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle v,u \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的先驱元集 $\Gamma_D^-(v) = \{u \mid u \in V(D) \wedge \langle u,v \rangle \in E(D) \wedge u \neq v\}$

v的邻域 $N_D(v) = \Gamma_D^+(v) \cup \Gamma_D^-(v)$

v的闭邻域 $\overline{N}_D(v) = N_D(v) \cup \{v\}$

9. 标定图与非标定图

10. 基图

多重图与简单图

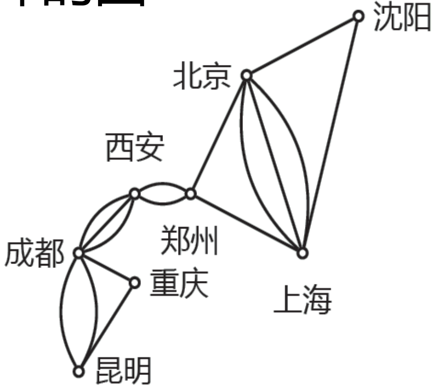
定义14.3

(1) 无向图中的平行边及重数

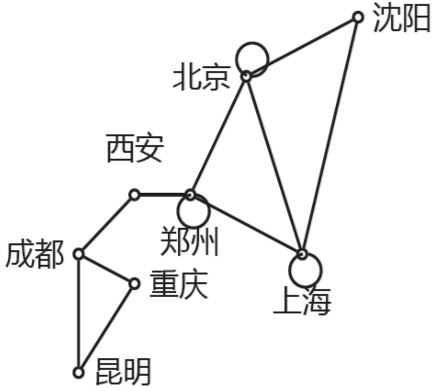
(2) 有向图中的平行边及重数（注意方向性）

(3) 多重图

(4) 简单图：不含平行边也不含环的图



多重图



有环图

握手定理

引入

- 交通运输网络中，关联边的数量较多的结点通常较为繁忙.

- 通信网络中，关联边的数量较多的结点通常是网络的关键结点，一旦出现故障，对整个网络通信的影响会非常大;
- 反之，关联边较少的结点出现故障则不会造成全局性的影响。

顶点的度数

定义14.4

(1) 设$G=<V,E>$为无向图, $\forall v \in V$, $d(v)$——v的度数, 简称度

(2) 设$D=<V,E>$为有向图, $\forall v \in V$,

$d^+(v)$——v的出度

$d^-(v)$——v的入度

$d(v)$——v的度或度数

(3) $\Delta(G)$, $\delta(G)$

(4) $\Delta^+(D)$, $\delta^+(D)$, $\Delta^-(D)$, $\delta^-(D)$, $\Delta(D)$, $\delta(D)$

(5) 奇顶点度与偶度顶点

握手定理

- 握手定理是由欧拉于1736 年最先给出的。
- 如果许多人在见面时握了手，两只手握在一起，被握过手的总次数为偶数。

握手定理

定理14.1 设$G=\lt V,E\gt$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

证 G中每条边 (包括环) 均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，m 条边共提供 $2m$ 度.

定理14.2 设$D=\lt V,E\gt$为任意有向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m, \quad 且 \quad \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(v_i) = m$$

握手定理推论

推论 任何图 (无向或有向) 中，奇度顶点的个数是偶数.

证 设$G=<V,E>$为任意图，令

$$V_1=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为奇数}\}$$
$$V_2=\{v \mid v\in V\wedge d(v)\text{为偶数}\}$$

则$V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$，由握手定理可知

$$2m=\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{v\in V_1}d(v)+\sum_{v\in V_2}d(v)$$

由于$2m$, $\sum_{v\in V_2}d(v)$均为偶数，所以$\sum_{v\in V_1}d(v)$为偶数，但因为V_1中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数.

握手定理应用

例1　无向图G有16条边，3个4度顶点，4个3度顶点，其余顶点度数均小于3，问G的阶数n为几？

解　本题的关键是应用握手定理.

设除3度与4度顶点外，还有x个顶点$v_1, v_2, \ldots, v_x$，则

$$d(v_i) \leq 2,\quad i = 1, 2, \ldots, x,$$

于是得不等式

$$32 \leq 24 + 2x$$

得 $x \geq 4$, 阶数 $n \geq 4+4+3=11$.

课堂小练习

已知无向图G中顶点数n与边数m相等，2度与3度顶点各2个，其余顶点均为悬挂顶点。试求G的边数m。

证 $2m=2*2+3*2+1*（n-4）=n+6=m+6$ 解得 $m=6$

图的度数列

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，

D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

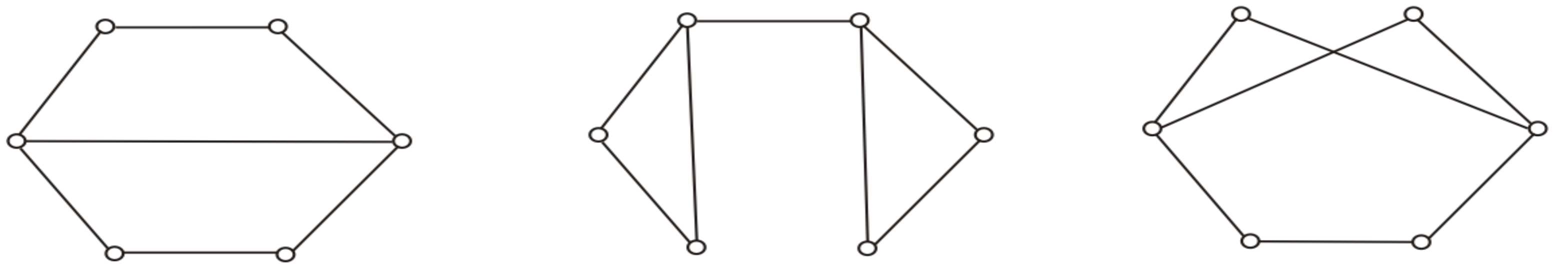
D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

3. 非负整数列$d=(d_1, d_2, \ldots, d_n)$是可图化的，是可简单图化的.

- **(2, 4, 6, 8, 10)** ✓ 可图化
- **(1, 3, 3, 3, 4)** ✓ 可简单图化
- **(2, 2, 3, 4, 5)** ✓ 不是可简单图化的
- **(3, 3, 3, 4)** ✓ 不是可图化的

课堂小练习

数组2, 2, 2, 2, 3, 3能简单图化吗?



小结

- 图的定义和相关概念
- 握手定理和推论
- 可图化和可简单图化

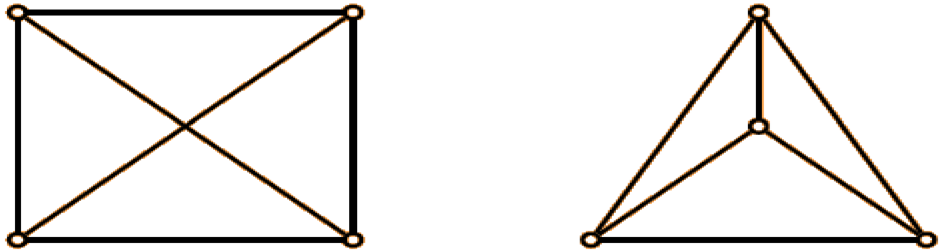
作业

- 习题十四

  第10题 （握手定理）

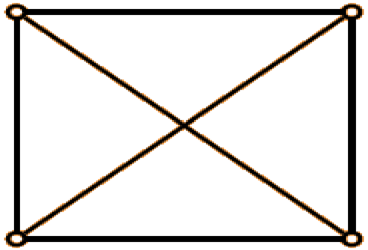
图的同构

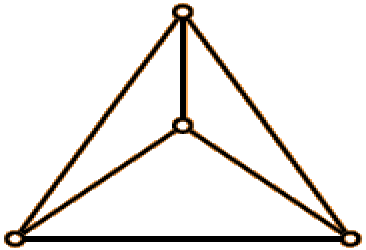
对于同构，形象地说，若图的结点可以任意挪动位置，而边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，一个图可以变形为另一个图，那么这两个图是同构的。



引入

- 图最本质的内容是结点和边的关联关系. 而在实际画图时，由于结点的位置不同，边的长短曲直不同，同一事物间的关系可能画出不同形状的图来。例如下面两个图实际上是同一个图K_4。





- 在化学里经常用图为化合物建模。不同的化合物可能分子式相同但结构不同，这就是**同分异构体**。同分异构体在化学性质上可能有较大不同。

图的同构

定义14.5 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图(两个有向图)，若存在双射函数$f:V_1\to V_2$, 对于$v_i,v_j\in V_1$,

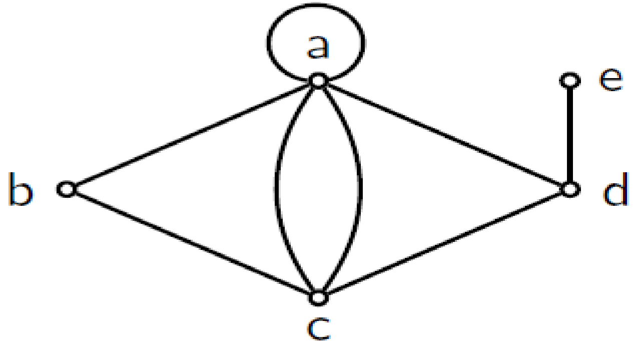
$$(v_i,v_j)\in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i),f(v_j))\in E_2$$

$$(<v_i,v_j>\in E_1 \text{ 当且仅当 } <f(v_i),f(v_j)>\in E_2)$$

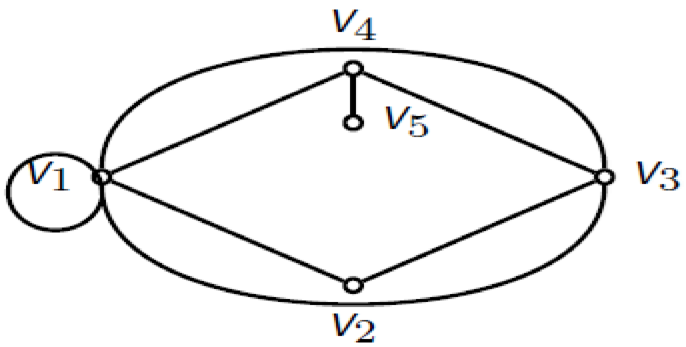
并且, (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i),f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$.

- 图之间的同构关系具有自反性、对称性和传递性

- 判定同构的方法关键就是找到结点间的对应关系，而在两个带有n 个结点的图之间有$n!$ 种可能的一一对应关系。尤其是当n 很大时，判断任意两个图是否同构常常是一件困难的事情。



G_1

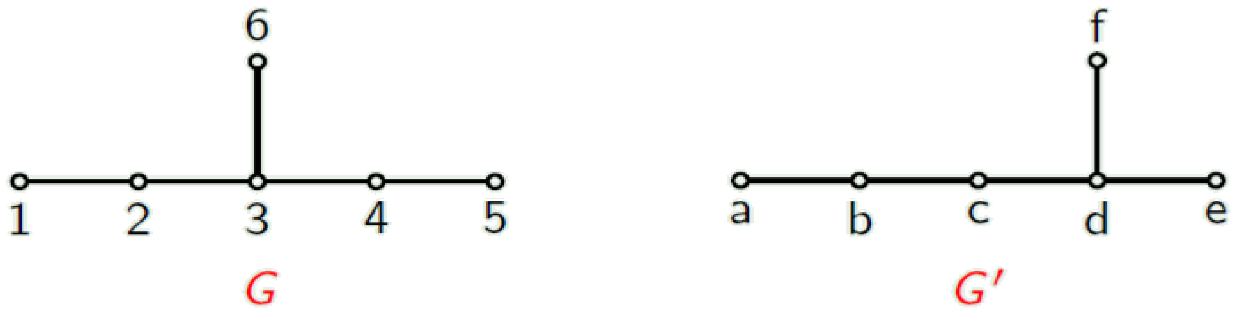


G_2

同构的必要条件

- 同构的**必要条件**：
  - 结点数目相同
  - 边数相同
  - 度数相同的结点数相同

我们可以通过**同构的必要条件**说明两个图不同构。



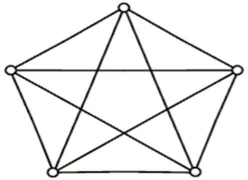
图同构的三个必要条件一定不能作为充分条件来使用。

n 阶完全图与竞赛图

定义14.6

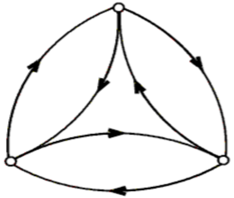
(1) n ($n \geq 1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n.

简单性质：边数 $m = \dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta = \delta = n-1$



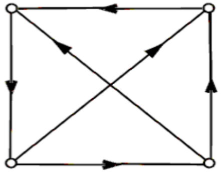
(2) n ($n \geq 1$)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图.

简单性质：$m = n(n-1), \Delta = \delta = 2(n-1), \Delta^+ = \delta^+ = n-1$



(3) n ($n \geq 1$) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图.

简单性质：边数 $m = \dfrac{n(n-1)}{2}, \Delta = \delta = n-1$

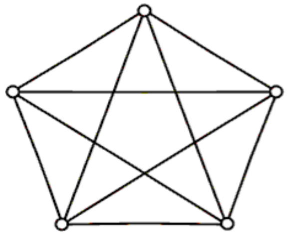


n 阶 k 正则图

定义14.7　n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

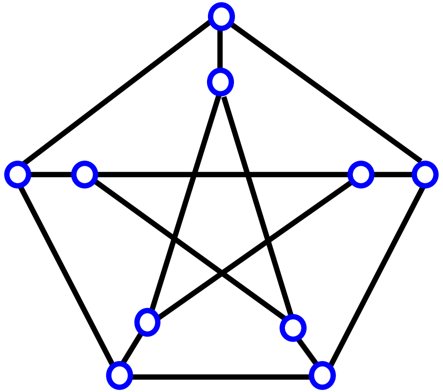
简单性质：边数（由握手定理得）　$m = \dfrac{nk}{2}$

K_n是 n–1正则图



K_5

彼得松图



子图

定义14.8 $G=<V,E>, G'=<V',E'>$

(1) $G' \subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图

(2) 若$G' \subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

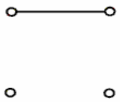
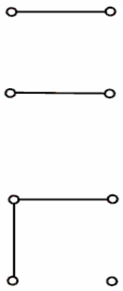
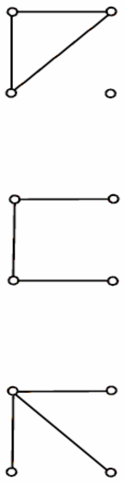
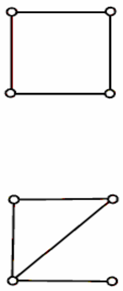
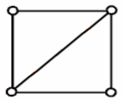
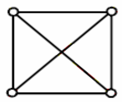
(3) 若$V' \subset V$或$E' \subset E$，称G'为G的真子图

(4) V'（$V' \subset V$且$V' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$

(5) E'（$E' \subset E$且$E' \neq \varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

实例

例2 画出K_4的所有非同构的生成子图

m	0	1	2	3	4	5	6
							

补图

定义14.9 设$G=<V,E>$为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的**补图**，记作 $\overline{G}$.

若$G\cong\overline{G}$，则称G是**自补图**.

课堂小结

- 图的同构
- 完全图
- 子图和补图

作业

- 理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图的概念以及它们的性质及相互之间的关系

通路和连通性

有多少种方式可从日照到达北京?

- 有多少种方式可从日照到达北京?
- 报文有多少种方式可从A计算机发送到距离很远的B计算机?

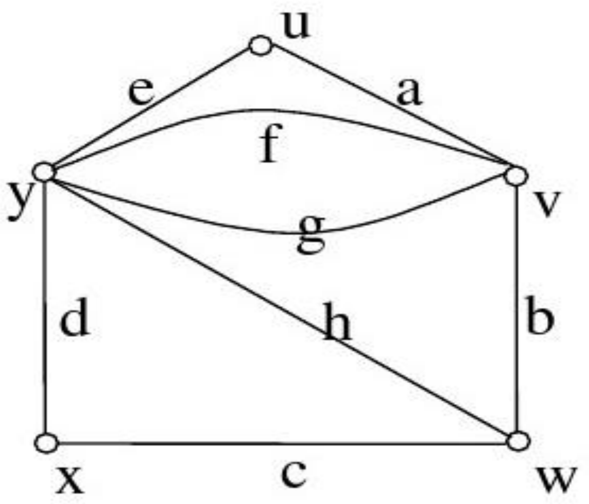
这些问题都可以归结为求图中任何两个结点间有多少条长度为m 的通路的问题。

14.2 通路与回路

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma = v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，$v_{i-1}$, v_i 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路，l 为回路长度.
(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路
(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ中所有顶点各异，则称Γ为初级通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，所有的顶点各不相同且所有的边各异，则称Γ为初级回路(圈)
(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

- uavfyfvgyhwbv　通路
- wcxdyhwbvgy　简单通路
- xcwhyeuav　初级通路（路径）
- ueyhwbvau　初级回路（圈）



几点说明

通路表示法：

① 定义表示法

② 只用边表示法

③ 只用顶点表示法（在简单图中）

④ 混合表示法

环（长为1的圈）的长度为1，两条平行边构成的圈长度为2，无向简单图中，圈长≥3，有向简单图中圈的长度≥2.

14.3 图的连通性

无向图的连通性

(1) 顶点之间的连通关系：$G=<V,E>$为无向图

① 若 v_i 与 v_j 之间有通路，则 $v_i \sim v_j$

② ~是V上的等价关系 $R=\{<u,v> \mid u,v \in V$且$u \sim v\}$

(2) G的连通性与连通分支

① 若$\forall u,v \in V$，$u \sim v$，则称G连通

② $V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，称$G[V_1], G[V_2], \ldots,G[V_k]$为连通分支，其个数 $p(G)=k$ $(k \geq 1)$；

$k=1$，G连通

短程线与距离

(3) 短程线与距离

① u与v之间的短程线：$u \sim v$，u与v之间长度最短的通路

② u与v之间的距离：$d(u,v)$——短程线的长度

③ $d(u,v)$的性质：

$d(u,v) \geq 0$, $u \nsim v$时$d(u,v)=\infty$

$d(u,v)=d(v,u)$

$d(u,v)+d(v,w) \geq d(u,w)$

无向图的连通度

定义14.16 $G=<V,E>$, $V'\subset V$

V'为点割集——$p(G-V')>p(G)$且有极小性

v为割点——$\{v\}$为点割集

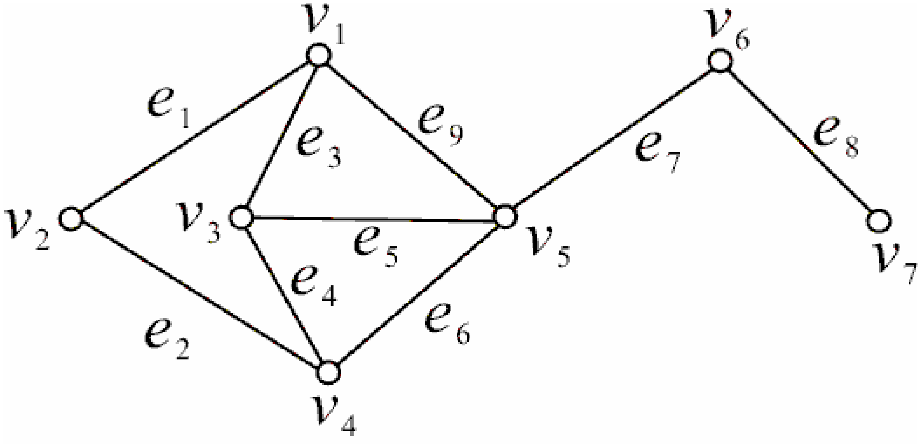
定义14.17 $G=<V,E>$, $E'\subseteq E$

E'是边割集——$p(G-E')>p(G)$且有极小性

e是割边（桥）——$\{e\}$为边割集

点割集与割点

例3　$\{v_1,v_4\}$，$\{v_6\}$是点割集，v_6是割点. $\{v_2,v_5\}$是点割集吗? $\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$是边割集吗?



几点说明:

- K_n中无点割集，N_n中既无点割集，也无边割集，其中N_n为 n 阶零图.
- 若G 连通，E'为边割集，则 $p(G-E')=2$，V'为点割集，则 $p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

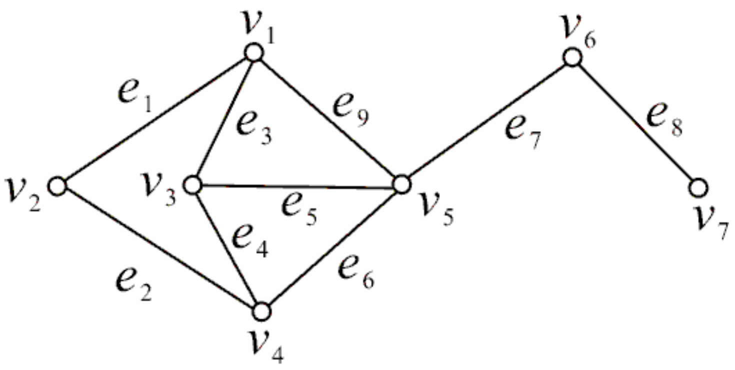
定义14.18 G为连通非完全图

点连通度— $\kappa(G) = \min\{\, |V'| \mid V'\text{为点割集}\,\}$

规定 $\kappa(K_n) = n-1$

若G非连通，$\kappa(G) = 0$

若 $\kappa(G) \geq k$，则称G为 k-连通图



定义14.19 设G为连通图

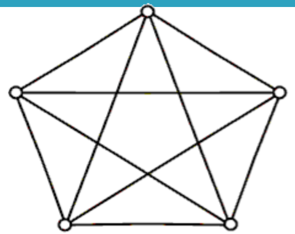
边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'| \mid E'\text{为边割集}\}$

若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

若$\lambda(G) \geq r$，则称G是 r 边-连通图

图中，$\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图 和 1边-连通图

几点说明



K_5

- $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$, 则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图
- 若$\lambda(G)=r$, 则G是1-边连通图，2-边连通图，…，r-边连通图

有向图的连通性

定义14.20 $D=<V,E>$为有向图

$v_i \to v_j$ （v_i 可达 v_j） ——v_i到v_j有通路

$v_i \leftrightarrow v_j$ （v_i与v_j相互可达）

v_i到v_j的短程线与距离

类似于无向图中，只需注意距离表示法的不同

(无向图中**$d(v_i,v_j)$**，有向图中**$d<v_i,v_j>$**) 及 $d<v_i,v_j>$无对称性

有向图的连通性及分类

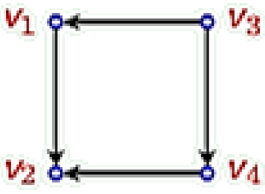
定义14.22 $D=\langle V,E\rangle$为有向图

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

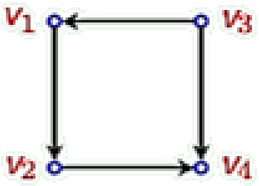
D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

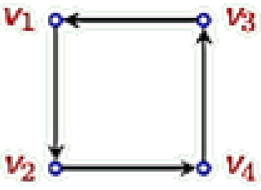
易知，强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通



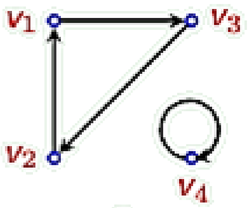
G_1



G_2



G_3



G_4

有向图的连通性及分类

- 判别法

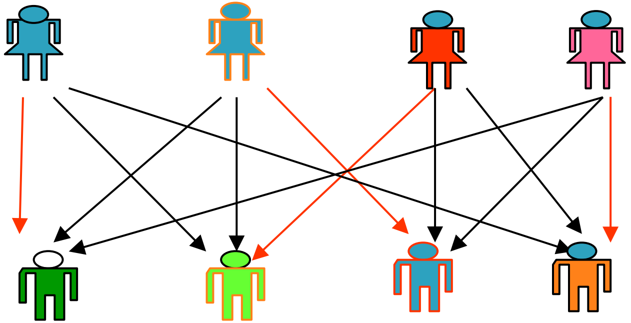
定理14.8 D强连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理14.9 D单向连通当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

二部图

定义14.23 设 $G=\langle V,E\rangle$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图(或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$\langle V_1,V_2,E\rangle$.

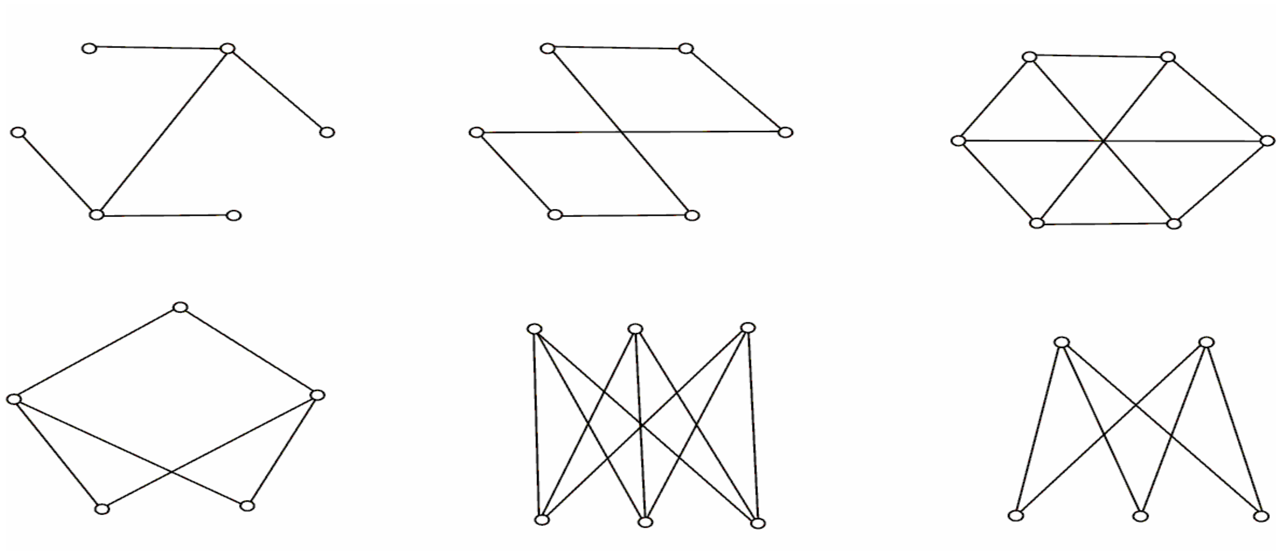
又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.



注意，n 阶零图为二部图.

二部图的判别法

定理14.10 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈.



课堂小结

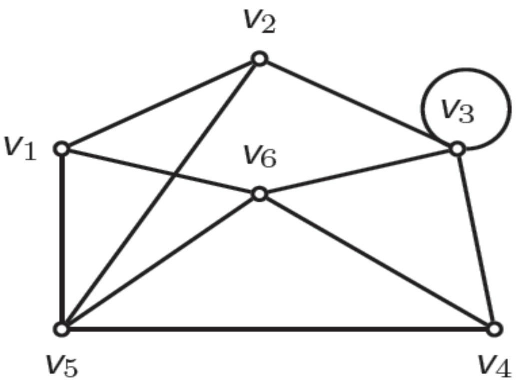
- 通路，简单通路，初级通路
- 图的连通：无向图，有向图

作业

- 习题十四

第21题（点割集，边割集，点连通度，边连通度)

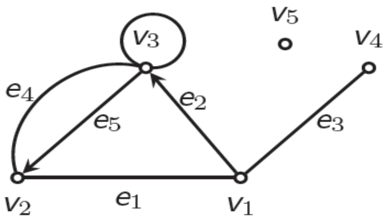
图的矩阵表示



$$A_G = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

引入 图的表示

- 图形表示法的优点是**形象直观**, 但**不适合于大图**.
- 集合表示法的优点是**精确**, 但**抽象不易理解**.



图形表示法

$$
\begin{aligned}
V &= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\
E &= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} \\
& e_1 = (v_1, v_2) \quad e_2 = < v_1, v_3 > \\
& e_3 = (v_1, v_4) \quad e_4 = (v_2, v_3) \\
& e_5 = < v_3, v_2 > \quad e_6 = (v_3, v_3)
\end{aligned}
$$

集合表示法

- 为了便于用代数知识来研究图的性质, 特别是**便于用计算机来处理**，我们引入图的矩阵表示.
- 因为矩阵的存储和处理在计算机中是非常容易的, 从而能够把图的问题变为数字计算问题, 再利用矩阵代数的运算来计算图的通路、回路和其它特征。

14.4 图的矩阵表示

无向图的关联矩阵（对图无限制）

定义14.24 无向图$G=<V,E>$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i与 e_j的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$.

性质

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵（无环有向图）

定义14.25 有向图$D=<V,E>$，令

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n\times m}$为D的关联矩阵，记为$M(D)$.

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

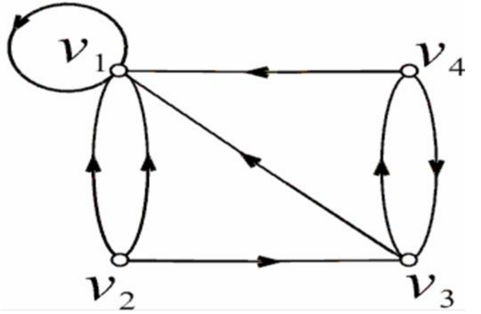
(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i), \quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{-}(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum\limits_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

有向图的邻接矩阵（无限制）

定义14.26 设有向图$D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, 令为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数，称为D的邻接矩阵，记作$A(D)$，或简记为A.



$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ ——— D中长度为1的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ ——— D中长度为1的回路数

邻接矩阵的应用

定理14.11 设 A为有向图 D 的邻接矩阵， $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为顶点集，则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数.

推论 设$B_l=A+A^2+\ldots+A^l$（$l\geq1$），则

B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^{(l)}$为$D$中长度小于或等于 l 的通路数.

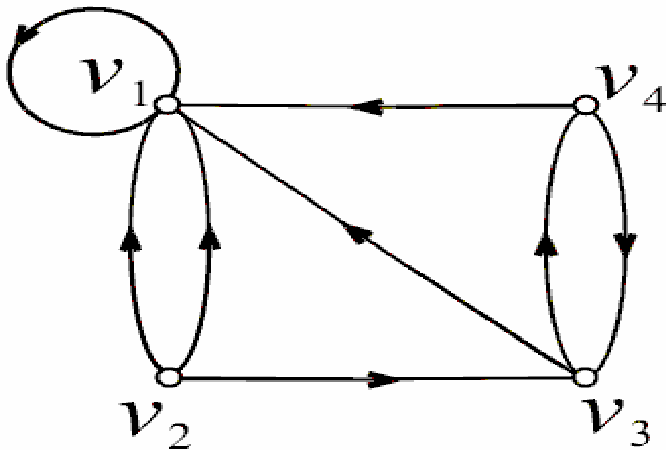
$\sum_{i=1}^{n}b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数

实例

例5 有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路.

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路.

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条.

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路.

有向图的可达矩阵（无限制）

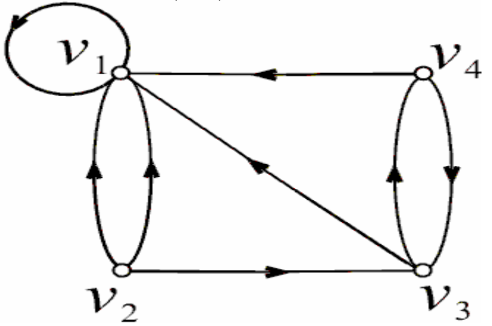
定义14.27 设$D=<V,E>$为有向图. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令

$$p_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P.

由于$\forall v_i\in V$，$v_i\leftrightarrow v_i$，所以$P(D)$主对角线上的元素全为1.

由定义不难看出，D 强连通当且仅当 $P(D)$为全1矩阵.



$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

图的矩阵表示小结

- 关联矩阵
- 邻接矩阵
- 可达矩阵

作业

- 习题十四

第44题（邻接矩阵求通路回路的条数）

第十四章 小结

- 主要内容
  - 无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图；握手定理与推论；图的同构
  - 通路与回路及其分类
  - 无向图的连通性与连通度
  - 有向图的连通性及其分类
  - 图的矩阵表示

基本要求

- 深刻理解握手定理及推论的内容并能灵活地应用它们
- 深刻理解图同构、简单图、完全图、正则图、子图、补图、二部图的概念以及它们的性质及相互之间的关系
- 记住通路与回路的定义、分类及表示法
- 深刻理解与无向图连通性、连通度有关的诸多概念
- 会判别有向图连通性的类型
- 熟练掌握用邻接矩阵及其幂求有向图中通路与回路数的方法，会求可达矩阵

THANK YOU