27·2·23

VINTI

PRODOTTI DI CONVOLUZIONE

$L^1(\mathbb{R})$ → SPAZIO DI LEBEGUE

$L^1(\mathbb{R})$ INSIEME DELLE FUNZIONI DEFINITE IN $\mathbb{R}$

$$L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt < +\infty \right\}$$

SPAZIO DELLE FUNZIONI ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI IN MODULO

$$L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; \int_{\mathbb{R}} |f_{(x)}|^p < +\infty$$

SPAZIO DELLE FUNZIONI

ASSOLUTAMENTE INTEGRABILI

ALLA POTENZA p

PRENDIAMO LA FUNZIONE

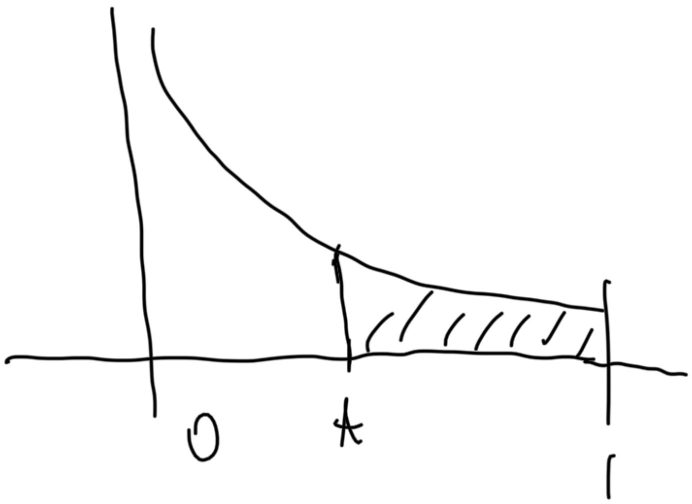
$$- f :]0,1] \to \mathbb{R} \;, \; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

INTEGRALE MODULO

SENZA MODULO

SE INTEGRALE GENERALIZZATO TENDE A 0



$$= \lim_{x \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt =$$

$$\int_x^1 t^{-1/2}\, dt = \lim_{x \to 0^+} \left| 2\sqrt{t} \right|_x^1$$

$$= \lim_{x \to 0^+} 2\left[1 - \sqrt{x}\right] = \boxed{2}$$

LA FUNZIONE $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1([0,1])$

- ADESSO VADO A CALCOLARE

$f(x) \cdot f(x)$

→ QUINDI SE MOLTIPLICO 2 FUNZIONI STA IN $L^1[0,1]$?

$$\int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t} \, dt$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\log t + 1 \right]_0^1$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\underset{\uparrow \atop 0}{\log 1} - \log |x| \right] = +\infty$$

LOG $|X|$ TENDE A $-\infty$

LOG $|X|$ TENDE A $+\infty$

$+\infty$ NON APPARTIENE A L^1

$\rightarrow$ QUINDI

IL PRODOTTO DI 2 FUNZIONI NON APPARTIENE A L^1

PER FAR APPARTENERE IL PRODOTTO A L^1 BISOGNA USARE IL

$\rightarrow$ PRODOTTO DI CONVOLUZIONE!

IN L^p SI DENOTA LA NORMA DI L^p COME

$$\|f\|_p = \left(\int_R |f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

↓

NORMA LP

DEFINIAMO MATEMATICAMENTE PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$\boxed{\text{TEOREMA}}$

SIA $f \in L^1(R)$ E $g \in L^p(R)$

$1 < p < +\infty$

È POSSIBILE DEFINIRE

$$(f * g)(x) = \int_R f(x-y)\, g(y)\, dy$$

PRODOTTO

TRANSLAZIONE

DI CONVOLUZIONE

IL PRODOTTO EREDITA LE MIGLIORI PROPRIETÀ DI f E g

$f \in L^1(\mathbb{R})$ E $g \in L^p(\mathbb{R})$ E $\| f * g \|_p \leq \| f \|_1 \cdot \| g \|_p$

QUINDI IL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE STA IN L' DATA DISUGUAGLIANZA PRECEDENTE

$\boxed{\text{PROPRIETÀ}}$

1) $f * g = g * f$ COMMUTATIVA

2) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

DISTRIBUTIVA

3) $f * (g * h) = (f * g) * h$

ASSOCIATIVA

4) $\tau_a f(x) = f(x + a)$

OPERATORE DI TRASLAZIONE

$\tau_a (f * g) = (\tau_a f) * g$

INVARIANZA PER TRASLAZIONI

È IMPORTANTE FARE LA TRASFORMATA DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

PER QUESTO VIENE USATA LA TFR

TRASFORMATA DI FOURIER

SIA $f \in L^1(\mathbb{R})$

SI PUÒ DEFINIRE $\hat{f}(\lambda)$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

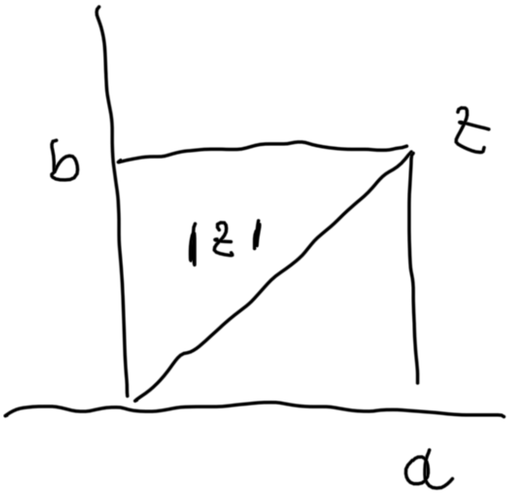
$\hat{f}(\lambda)$ È LA TRASFORMATA DI FOURIER DI f

DOVE $e^{-\lambda x} = \cos(\lambda x) - i \sin(\lambda x)$

z = NUMERO COMPLESSO

$z = a + b$

$$|z| = a^2 + b^2$$



QUINDI $\left| e^{-i\lambda x} \right| = 1$

$$= \left(\cos^2(\lambda x) + \sin^2(\lambda x) \right)^{1/2} = 1$$

DOMANDA ESAME

PERCHÈ f SIA IN L^1 ?

SIA f IN $L^1 \to f \in L^1(\mathbb{R})$

$$|\hat{f}(\lambda)| < +\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

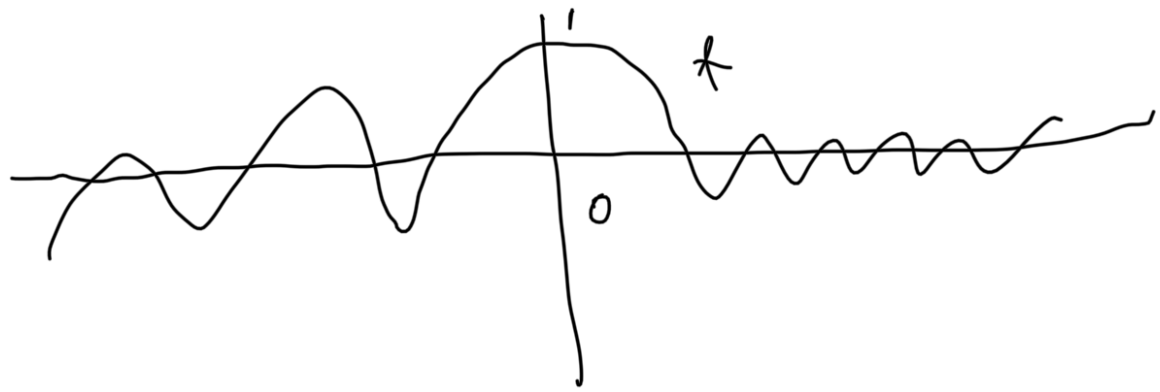
$$|\hat{f}(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} \, dx \right|$$

$$\leq \int |f(x) e^{-i\lambda x}| \, dx$$

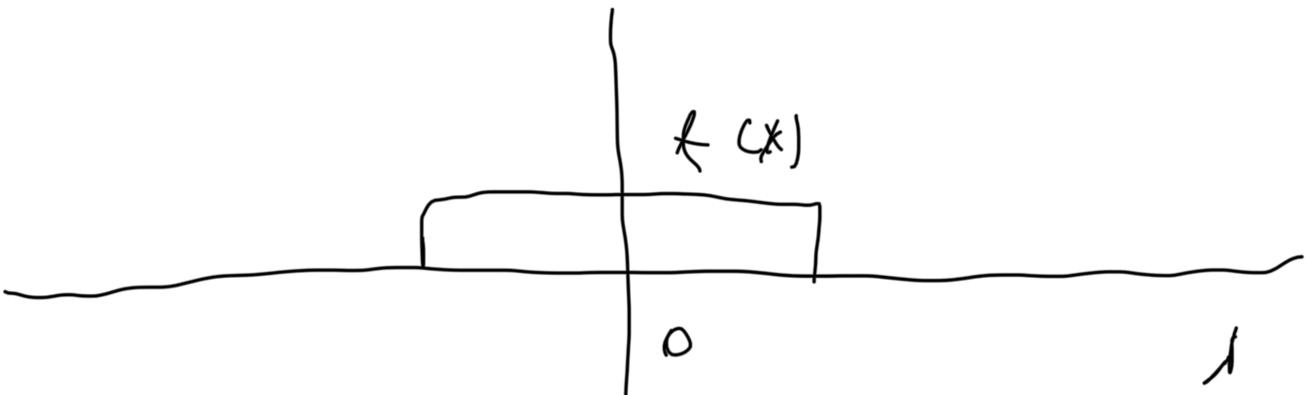
$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-i\lambda x}|}_{1} \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx < +\infty$$

SE $f \in L^1(\mathbb{R})$



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



f = BANDA

f → INTERPRETATO COME FREQUENZA