一、考虑下面的平行机排序问题。现有 m 台完全相同的机器 $M_1, M_2, \cdots, M_m$，工件 J_j 的加工时间为 $p_j, j=1,\cdots,n$，每个工件需在其中一台机器上不间断地加工一次。目标函数为极小化 $\sum_{i=1}^{m} n_i P_i$，这里 n_i 为在 M_i 上加工的工件数目，P_i 为在 M_i 上加工的工件加工时间总和。

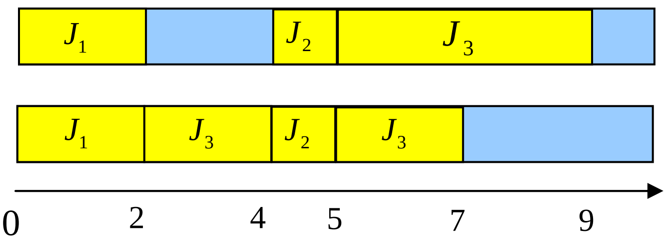
（1）给出该问题在实际中的一个应用，并说明该问题与 $Pm\|\sum C_j$ 不等价；

（2）证明必存在一最优解满足下述性质：对任意 i，在 M_i 上加工的任一工件的加工时间均不小于在 M_{i+1} 上加工的任一工件的加工时间；

（3）设 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n$。令 $C_{j,k}$ 表示由 k 台机器，工件 $J_1, \cdots, J_j$ 组成的实例的最优值，建立由诸 $C_{j,k-1}$ 推出 $C_{j,k}$ 的递推关系式，进而给出求解上述问题的动态规划。

二、考虑下面的单台机排序问题 $1|r_j|\sum C_j$。工件 $J_j, j=1,\ldots,n$ 的加工时间为 p_j，准备时间为 r_j，工件 J_j 的开始加工时间不能小于准备时间。与之相关的另一个排序问题为 $1|r_j, pmpt|\sum C_j$，在该问题中，任一工件 J_j 可在加工一段时间后中断加工，并在一段时间后恢复加工该工件的剩余部分。对任意排序 σ^A，用 $C_j(\sigma^A)$ 表示工件 J_j 在 σ^A 中的完工时间。

例如，对实例 $n=3$，工件准备时间和加工时间分别为 $r_1=0, p_1=2,$ $r_2=4, p_2=1,$ $r_3=1, p_3=4$。上图为 $1|r_j|\sum C_j$ 的可行解，下图为 $1|r_j, pmpt|\sum C_j$ 的可行解。



（1）设 σ^P 为 $1|r_j, pmpt|\sum C_j$ 的最优排序。将工件重新编号使得 $C_1(\sigma^P) \le C_2(\sigma^P) \le \ldots \le C_n(\sigma^P)$。试证明：$C_j(\sigma^P) \ge \sum_{k=1}^{j} p_k$，$j=1,\ldots,n$；

（2）考虑下面的基于 σ^P 的 $1|r_j|\sum C_j$ 的算法。将工件按照它们在 σ^P 中完工时间由小到大的顺序加工。试给出为使排序可行，工件 J_j 的最小开工时间。记按上述方法得到的可行排序为 σ^N，试证明：$C_j(\sigma^N) \le 2C_j(\sigma^P)$，$j=1,\ldots,n$；

（3）试给出（2）中算法求解 $1|r_j|\sum C_j$ 的最坏情况比的一个上界；

（4）试给出求 σ^P 的多项式时间算法。