研究性问题 I：

现有$n$个对象$I=\{1,2,\dots,n\}$。对任意$i=1,2,\dots,k$，$\sigma_i=(\sigma_1^i,\sigma_2^i,\dots,\sigma_n^i)$为I的一个排列，即$\sigma_i$为一个分量为$I$中不同数的$n$维向量，$\sigma_j^i=l$表示对象$j$在$\sigma_i$中居于第$l$位。$\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k\}$为由$k$个排列组成的排列集合。

对任意两个$n$维向量$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$，$\mathbf{v}=(v_1,v_2,\dots,v_n)$，定义两者的 F 距离为

$$d_F(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{i=1}^{n}|u_i-v_i|.$$

ρ距离为

$$d_\rho(\mathbf{u},\mathbf{v})=\sum_{i=1}^{n}(u_i-v_i)^2.$$

对给定的距离定义$d$，任一排列σ与排列集合$\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k\}$的距离定义为

$$D(\sigma,\Sigma)=\sum_{i=1}^{k}d(\sigma_j,\sigma_i)。$$

现要求对给定的Σ，求排列σ使得σ与Σ的距离最小。记该问题为$I_1$。与问题$I_1$相关的问题是，对给定的Σ，求$n$维实向量$\mathbf{u}$，使得$\mathbf{u}$与Σ的距离最小，记给问题为$I_2$。

由于$I_1$的可行域是$I_2$的可行域的一个真子集，故$I_1$和$I_2$的最优解一般不同。但对$I_2$的任一可行（最优）解$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$，可以将其转化为$I_1$的一个可行解$\sigma_u=(\sigma_1^u,\sigma_2^u,\dots,\sigma_n^u)$，使其满足若$u_j<u_l$，则$\sigma_j^u<\sigma_l^u$。但对$u_j=u_l$的情形，$\sigma_j^u$和$\sigma_l^u$的大小关系无法确定。这一过程称为保序转化。

一些算法可用于求$I_2$的可行解，如中位数法，Borda 法等。但这些算法均无法保证求得$I_1$的可行解。即使可通过保序转化得到$I_1$的可行解，但最优性一般无法保证。

对给定的问题$I_1$的算法A，用

$$r_A=\sup_{\Sigma}\frac{D(\sigma,\Sigma)}{D(\sigma^*,\Sigma)}$$

作为衡量算法优劣的标准。其中σ为应用算法A于排列集合Σ得到的排列，$\sigma^*$为对问题$I_1$，排列集合Σ的最优解。$r_A$一般为一大于 1 的数。$r_A$值越小说明算法的性能越好。在无法得到$r_A$的精确值的情况下，也可求得$r_A$的下界或者上界。

关于$r_A$，目前部分已知结果如下。

| 距离<br>算法 | F 距离 | | ρ距离 | |
|---|---|---|---|---|
| | 下界 | 上界 | 下界 | 上界 |
| 中位数法 | 2 | 2 | 3 | 8 |
| Borda 法 | 3 | 4 | 1 | 1 |

研究性问题：给出 F 距离下 Borda 法和ρ距离下中位数法下界和上界的改进估计。