一、考虑下面的未知容量背包问题。现有n个物品，物品$j, j=1,\cdots,n$的价值为p_j，大小为s_j。不妨设$\frac{p_1}{s_1}\ge\frac{p_2}{s_2}\ge\cdots\ge\frac{p_n}{s_n}$，并记$s_{\max}=\max\limits_{j=1,\cdots,n}s_j$。现有一背包，容量至少为$s_{\max}$。要求在不知道背包容量确切值的情况下，给出物品的一个顺序σ。当按上述顺序将物品逐个放入背包时，可能在待放入某个物品时被告知背包容量已不能接纳，该物品及其后的物品均不再放入。记此时放入物品的总价值为C^{σ}，而能放入该背包的总价值最大的物品子集的总价值为C^*。希望C^{σ}与C^*尽可能接近。

记$k=\min\left\{i\,|\sum_{j=1}^{i}s_j>s_{\max}\right\}$。考虑下面的算法：

若$p_k\le\sum_{j=1}^{k-1}p_j$，则令$\sigma=\{1,2,3,\cdots,k-1,k,k+1,k+2,\cdots,n\}$；

若$p_k>\sum_{j=1}^{k-1}p_j$，则令$\sigma=\{k,1,2,\cdots,k-1,k+1,k+2,\cdots,n\}$。

记物品l是执行上述算法时被告知背包容量已不能接纳的那个物品。

（1）证明：若背包实际容量恰为$s_{\max}$，则$\frac{C^*}{C^{\sigma}}\le 2$；

（2）证明：若$l\le k$，则$\frac{C^*}{C^{\sigma}}\le 2$；

（3）证明：对任意$i>k$，$p_i\le\sum_{j=1}^{i-1}p_j$；

（4）证明：即使$l>k$，仍有$\frac{C^*}{C^{\sigma}}\le 2$。

二、给定正整数集$S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}, s_1\le s_2\le\cdots\le s_n$。记$l(S')$为$S$的子集$S'$中所含元素之和，

$$\sigma(S)=\min\left\{\frac{l(S_1)}{l(S_2)}\,|\,S_1\subseteq S, S_2\subseteq S, S_1\cap S_2=\varnothing, l(S_1)\ge l(S_2)\right\}。$$

求$\sigma(S)$的问题称为**最相近子集问题**。

（1）　若S为**超增集**，即对任意$1\le j\le n-1$，$s_{j+1}>\sum_{i=1}^{j}s_i$，则最相近子集问题是多项式时间可解的。试给出多项式时间算法并证明其最优性；

（2）　设对任意$1\le j\le n-1$，$s_{j+1}\ge\alpha s_j$，这里$\alpha\approx 1.324$为方程$x^3-x-1=0$的正根。但存在$j, 1\le j\le n-1$，使得$s_{j+1}\le\sum_{i=1}^{j}s_i$。记$k$为满足$\sum_{i=k+1}^{j}s_i<s_{j+1}\le\sum_{i=k}^{j}s_i$的整数。令

$$T_1=\{s_{j+1}\}, T_2=\{s_{k+1},\cdots,s_j\}, T_3=\{s_k,s_{k+1},\cdots,s_j\},$$

证明$\min\left\{\frac{l(T_1)}{l(T_2)},\frac{l(T_3)}{l(T_1)}\right\}\le\alpha$；

（3）　试设计最相近子集最坏情况界为α的近似算法并予以证明。