



浙江大學  
ZHEJIANG UNIVERSITY

# 组合优化

浙江大学 谈之奕





浙江大学  
ZHEJIANG UNIVERSITY

# 绪论





# 组合优化



组合  
优化  
MATH T

- 组合优化 (Combinatorial Optimization)

- 应用于离散对象的，从有限多个可行解中找出使某个目标函数达到最优的解的优化问题
- 组合优化是离散数学 (Discrete Mathematics) 与最优化的交叉学科分支
  - 组合优化与组合数学 (Combinatorics) 同为研究离散对象的数学分支。后者着重研究满足特定性质对象的存在性、计数、构造等问题，前者要求在众多可行解中按一定标准选出最优解
- 组合优化问题通常不能通过穷举所有可能的解加以比较来求解



FIGURE 2  
Grand Vizier Sissa Ben Dahir, a skilled mathematician, asks his reward from King Shirham of India.



8	1	2	4	8				
7								
6								
5								
4								
3								
2								
1								
	A	B	C	D	E	F	G	H

$$\begin{aligned} 2^{63} &= 9223372036854775808 \\ &= 9.22 \times 10^{18} \\ 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{63} &= 2^{64} - 1 \end{aligned}$$

Gamov G. *One Two Three ... Infinity: Facts and Speculations of Science*, Viking Press, 1947 (中译本：从一到无穷大：科学中的事实与猜想，张卜天译，商务印书馆，2019)

# 组合优化



组合  
优化  
MATH T

## • 组合优化与连续优化

- 相对决策变量为连续变量的连续优化 (Continuous Optimization) 问题, 组合优化问题的最优解缺少好的性质, 求解缺少好的工具

## • 背包问题 (Knapsack)

- 现有  $n$  件物品, 物品  $j$  的价值为  $p_j$ , 大小为  $w_j$ 。
- 将若干物品的全部或部分放入容量为  $C$  的背包中, 在放入背包物品大小之和不超过背包容量前提下, 使放入背包物品价值之和尽可能大



$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n p_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n w_j x_j \leq C \\ & x_j = 0, 1, j = 1, \dots, n \\ & \frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \dots \geq \frac{p_n}{w_n} \end{aligned}$$

$$x_j^* = 1, j = 1, 2, \dots, l-1,$$

$$x_l^* = \frac{1}{w_l} \left( C - \sum_{j=1}^{l-1} w_j \right),$$

$$x_j^* = 0, j = l+1, \dots, n$$

$$l = \min \left\{ k \mid \sum_{i=1}^k w_i > C \right\}$$

$$\begin{aligned} p &= 8 \\ w &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p &= 10 \\ w &= 8 \end{aligned}$$



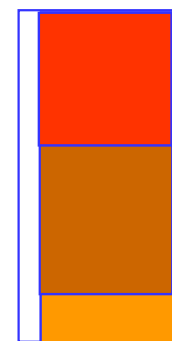
$$\begin{aligned} p &= 11 \\ w &= 9 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p &= 3 \\ w &= 3 \end{aligned}$$



$$C = 20$$



$$V = 18$$

$$V = 21$$

$$V = 22$$

$$V = 24$$

# 旅行售货商问题



组合  
优化  
MATH T

- 旅行售货商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP)

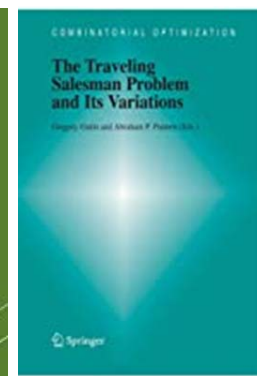
- 一推销员想在若干个城市中推销自己的产品。计划从某个城市出发，经过每个城市恰好一次，最后回到出发的城市
- 城市之间距离已知
- 如何选择环游路线，使推销员走的路程最短

- 可行解 (环游)

- 每一条环游路线由  $n$  段两个城市之间的旅行路线连接而成，对应于  $1, 2, \dots, n$  的一个圆周排列



Concorde TSP  
iOS 13.5+



Cook, WJ, *In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation*, Princeton University Press, 2012. (中译本：迷茫的旅行商：一个无处不在的计算机算法问题，隋春宁译，人民邮电出版社，2013)

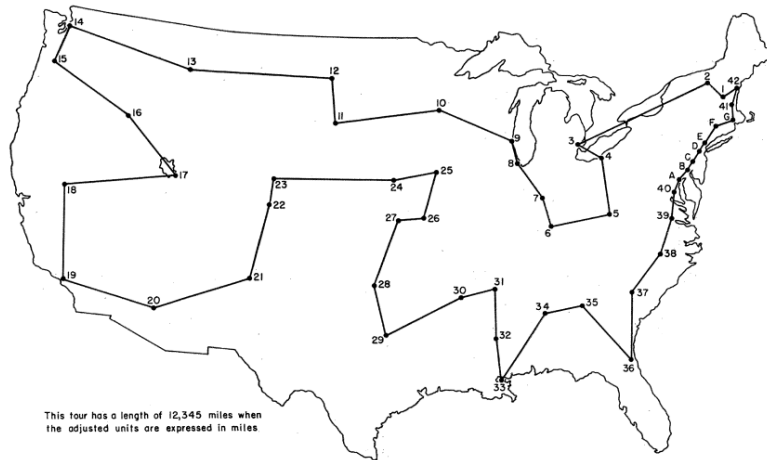
Lawler EL, Lenstra JK, Rinnooy Kan AHG, Shmoys DB, (Eds.) *Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley, 1985.

Gutin G, Punnen AP, (Eds.) *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Springer, 2002.

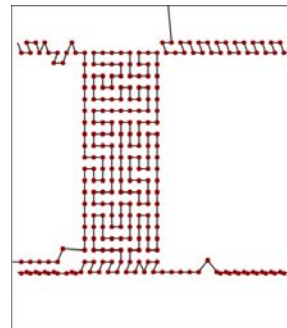
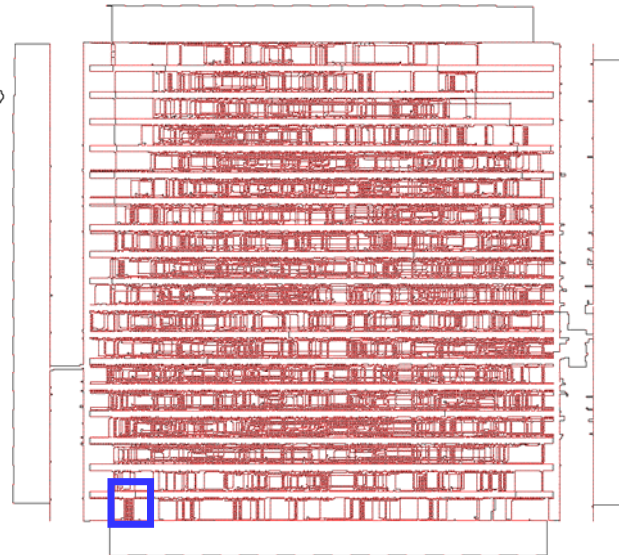
# 旅行售货商问题



组合  
优化  
MATH T



美国49个城市的最优TSP环游



Dantzig G, Fulkerson R, Johnson S, Solution of a large-scale Traveling-Salesman Problem, *Journal of the Operations Research Society of America*, 2, 393-410, 1954.

20世纪80年代Bell实验室应用LaserLogic法制造芯片时形成的含85900个点的TSP问题, 后被命名为pla85900收入TSP实例库

Applegate DL, Bixby RE, Chvátal V, Cook W, Espinoza DG, Goycoolea M, Helsgaun K, Certification of an optimal TSP tour through 85,900 cities, *Operations Research Letters*, 37, 11-15, 2009.



[routingchallenge.mit.edu/](http://routingchallenge.mit.edu/)  
[www.math.uwaterloo.ca/tsp/](http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/)

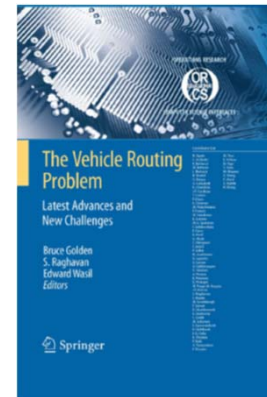
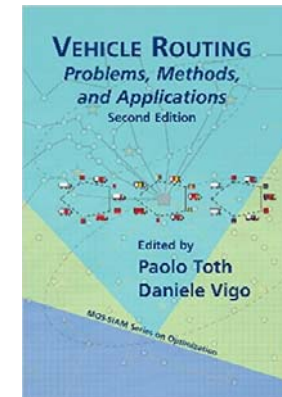
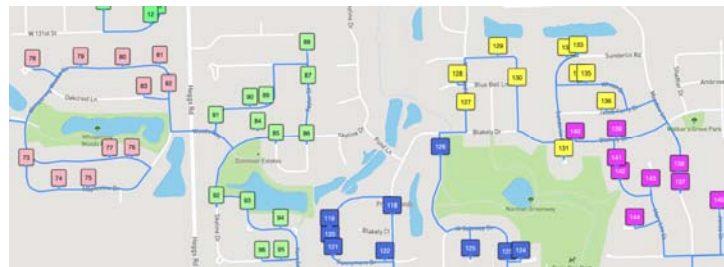


# 车辆路径问题



组合  
优化  
MATH T

- 车辆路径问题 (Vehicle Routing Problem, VRP)
  - $n$  个顾客, 顾客  $i$  位于地点  $i$ , 需求为  $q_i, i = 0, 1, \dots, n$
  - $K$  辆相同的车, 容量均为  $Q$
  - 仓库位于地点  $0$ 。从地点  $i$  到地点  $j$  的距离为  $c_{ij}, i, j = 0, 1, \dots, n$
  - 将顾客分配给各车, 每车配送的顾客需求之和不超过  $Q$ , 确定每辆车自仓库出发, 完成分配给该车的顾客配送, 最后回到仓库的路线, 使得所有车行驶的总路程最短



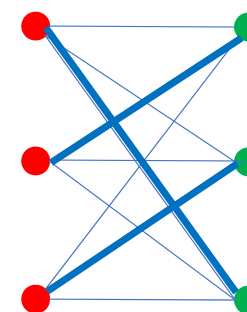
Toth P, Vigo D (Eds.) *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. SIAM, 2014.  
Golden BL, Subramanian R, Edward AW(Eds.) *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*. Springer, 2008.

# 指派问题



组合  
优化  
MATH T

- 指派问题 (Assignment Problem)
  - 有  $n$  项任务需分配给  $n$  位员工, 每人完成其中一项, 员工  $i$  完成任务  $j$  所需时间为  $c_{ij}$
  - 如何分配可使完成所有任务所用总时间最少
- 指派问题的算法
  - 1955年, Kuhn在两位匈牙利数学家对图匹配问题研究的基础上, 给出了指派问题时间复杂度为  $O(n^4)$  的匈牙利算法



Kuhn HW. The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly*, 2, 83-97, 1955



a paper representing the best of  
NRL in its first 50 years

Burkard RE, Dell'Amico M, Martello S, *Assignment Problems*, SIAM, 2009.

封面题图: Jan van Eyck, Portrait of Giovanni Arnolfini and his Wife, 1434, 现藏英国伦敦国家美术馆



Denes König  
匈牙利数学家  
(1884-1944)



Jenő Egerváry  
匈牙利数学家  
(1891-1958)



# 组合优化的历史



组合  
优化  
MATH T

## • 组合优化的历史

- 早在十八、十九世纪, Gauss, Euler等研究过一些具体的组合优化问题。众多图论研究工作者也为组合优化初期发展作出了重要贡献
- 自二十世纪中叶以来, 相继从实际问题中抽象出一些重要的组合优化问题。组合优化伴随着运筹学的发展而成长, 逐渐成为它的一个独立分支
- 二十世纪六七十年代, 计算复杂性理论创立, 组合优化进入了发展的新阶段
- 自二十世纪五、六十年代以来, 以华罗庚、越民义等为代表的中国第一代运筹学工作者开创和发展了我国的组合优化的研究, 他们在很多问题上的研究成果居于国际前列



越民义

华罗庚

(1921-2023) (1910-1985)

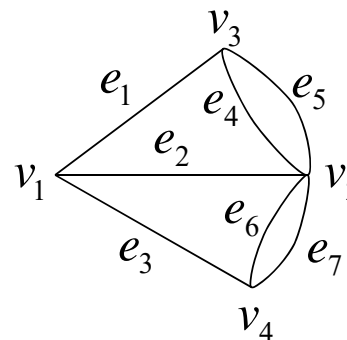
贵州贵阳人 江苏金坛人

# 图



组合  
优化  
MATH T

- **图** (graph) : 有序二元组  $G = (V, E)$ 
  - $V$  为顶点集,  $V$  中元素称为**顶点** (vertex)
  - $E$  为边集,  $E$  中元素称为**边** (edge)
  - $E$  中每条边  $e$  与  $V$  中两个顶点**关联** (incident)
- **子图**
  - 图  $G' = (V', E')$  称为图  $G = (V, E)$  的一个**子图** (subgraph), 若  $V' \subseteq V, E' \subseteq E$ , 且  $G'$  中边的关联关系在  $G$  中保持不变
    - **生成子图**:  $V' = V$
- **树**
  - 连通的无圈图称为**树** (tree)
  - 图为树的生成子图称为**生成树** (spanning tree)
  - 赋权图所有生成树中总权和最少的生成树称为**最小生成树** (minimum spanning tree, MST)



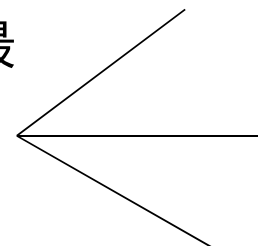
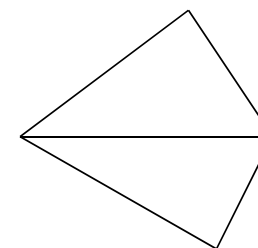
$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

$$e_1 = v_1v_3, e_2 = v_1v_2, e_3 = v_1v_4,$$

$$e_4 = v_2v_3, e_5 = v_2v_3,$$

$$e_6 = v_2v_4, e_7 = v_3v_4$$



Otakar Borůvka  
(1899—1995)  
捷克数学家

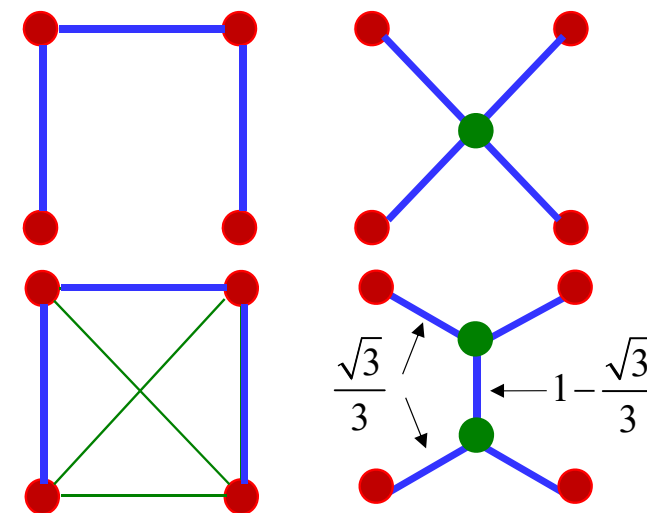
Borůvka O, O jistém problému minimálním (About a certain minimal problem), *Práce mor. Přírodově d. spol. v Brně III*, 3, 37-58, 1926



# 最短连接

- 最短连接
  - 给定Euclidean平面上  $n$  个点, 如何用总长度最短的若干条线段将它们连接起来
- 用最小生成树解决最短连接问题
  - 构造  $n$  个顶点的赋权完全图  $K_n$ , 边的权为它的两个端点的Euclidean距离
  - 求  $K_n$  的最小生成树
- 最小Steiner树问题 (minimum Steiner tree)
  - 允许增加任意多个Steiner点的最短连接
- Gilbert-Pollak猜想
  - 最小Steiner树长度不小于最小生成树长度的 $\frac{\sqrt{3}}{2}$  倍
    - $n = 3, 4, 5, 6$  时猜想成立

Gilbert EN, Pollak HO. Steiner minimal trees. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 16, 1-29, 1968.



Pollak HO. Some remarks on the Steiner problem. *Journal of Combinatorial Theory A*, 24, 278-295, 1978.

Du DZ, Hwang FK, Yao EY, The steiner ratio conjecture is true for five points. *Journal of Combinatorial Theory A*, 38, 230-240, 1985.

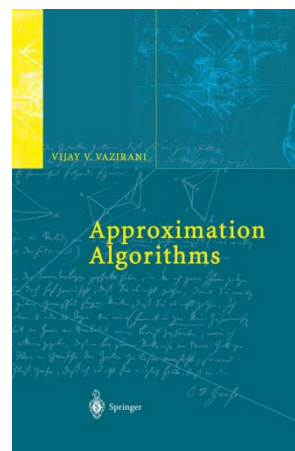
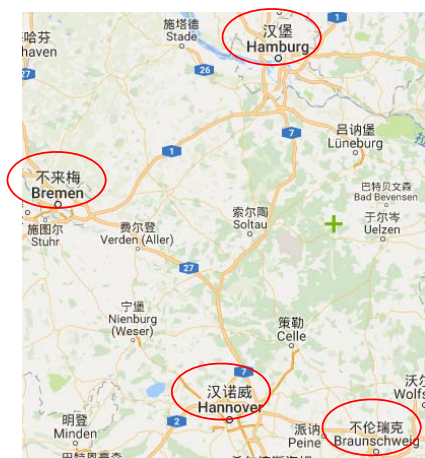
Rubinstein JH, Thomas DA, The Steiner ratio conjecture for six points. *Journal of Combinatorial Theory A*, 58, 54-77, 1991.



# 最小Steiner树



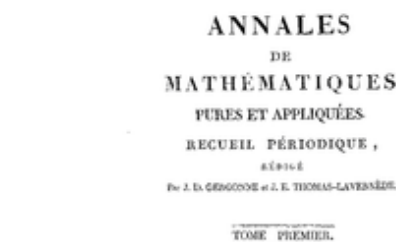
组合  
优化  
MATH T



**Johann Carl  
Friedrich Gauss**  
(1777-1855)  
德国数学家



**Joseph Diez  
Gergonne**  
(1771—1859)  
法国数学家



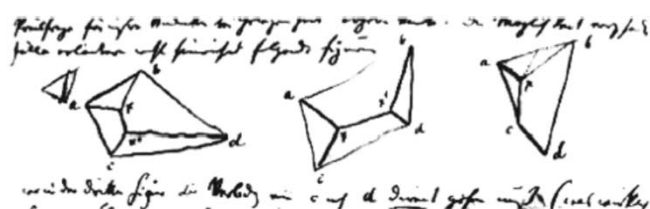
**Annales de Mathématiques  
pures et appliquées**, 又名  
**Annales de Gergonn**,  
1810-1831间出版

Gergonne JD. Solutions purement géométriques des problèmes de minimis proposés aux pages 196, 232 et 292 de ce volume, et de divers autres problèmes analogues. *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 1, 375–384, 1810

**Vazirani VV. *Approximation***

***Algorithms*. Springer, 2004**

封面题图: Gauss 致天文学家  
Schumacher的信 (1836)



“I have on occasion considered the railroad connection between Harburg, Bremen, Hannover and Braunschweig, and I myself have thought that this problem would be an excellent prize problem for our students.”

# 最小Steiner树



组合  
优化  
MATH T

## • 应用

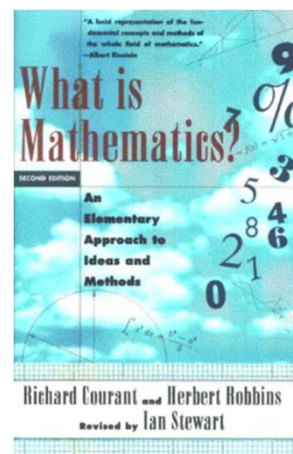
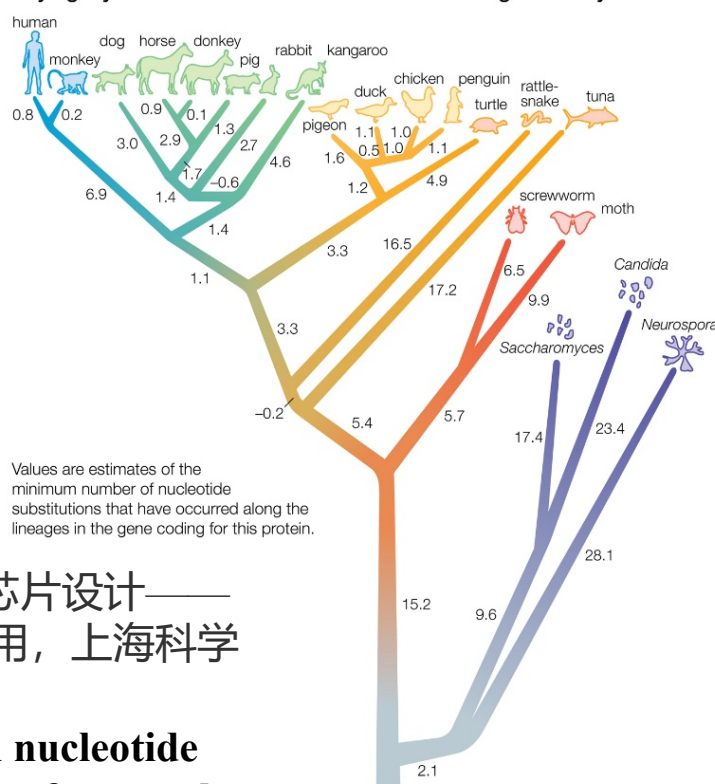
- 进化树
- 芯片设计



Korte B, Vygen J, 芯片设计——组合优化的特殊应用, 上海科学技术出版社, 2009.

Phylogeny based on nucleotide difference in the gene for cytochrome C, Encyclopædia Britannica

Phylogeny based on nucleotide differences in the gene for cytochrome c



Jakob Steiner  
(1796–1863)  
瑞士数学家

## §5. STEINER'S PROBLEM

### 1. Problem and Solution

A very simple but instructive problem was treated by Jacob Steiner, the famous representative of geometry at the University of Berlin in the early nineteenth century. Three villages  $A, B, C$  are to be joined by a

Courant R, Robbins H, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 1941年初版, 1996年Oxford University Press出版修订本 (中译本: 什么是数学: 对思想和方法的基本研究, 左平、张饴慈译, 复旦大学出版社)

# 七桥问题



组合  
优化  
MATH T

## • 七桥问题

- 在Konigsberg城，有七座桥梁建在Pregel河上，是否有一条从城中某处出发，经过每座桥梁恰好一次，最后回到出发点的路线
- Danzig（今波兰格但斯克）市长Karl Leonhard Gottlieb Ehler致信Euler，转述了Danzig当地数学教授Heinrich Kuhn的问题

图论的起源可追溯到大数学家欧拉（Leonhard Euler）。1736年欧拉来到德国的哥尼斯堡（Konigsberg，大哲学家康德的家乡，现在是俄罗斯的加里宁格勒），发现当地市民们有一项消遣活动，就是试图将下图中的每座桥正好走过一遍并回到原起点，从来没有人成功过。欧拉证明这件事是不行能的，并写了一篇文章，通常以为这是图论的开始。

目前尚没有发现Euler曾到过Konigsberg的历史记载



Konigsberg（哥尼斯堡），1255年由条顿骑士团建立的要塞，后为普鲁士公国的首府，德国东普鲁士的行政中心，1945年划归苏联，改名为加里宁格勒（Kaliningrad），现为俄罗斯的“飞地”

著名数学家希尔伯特（David Hilbert），哥德巴赫（Christian Goldbach），作家霍夫曼（E. T. A. Hoffmann，代表作胡桃夹子与鼠王）均出生于Konigsberg。哲学家康德（Immanuel Kant）一生居住在Konigsberg



# 七桥问题

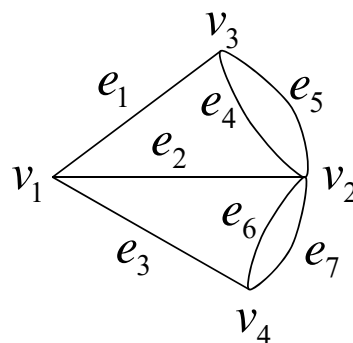


组合  
优化  
MATH T

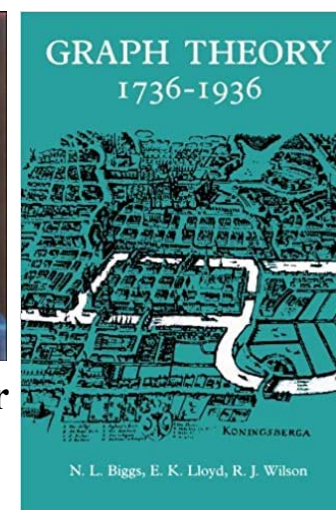
## • Euler图

- 经过图的所有边恰好一次的闭迹称为Euler回路 (Eulerian circuit)。存在Euler回路的图为Euler图 (Eulerian graph)
- 一连通图是Euler图的充要条件是图中没有奇度顶点
- 以河流分割而成的城市区域为顶点，桥梁为边，边的端点为该桥梁连接的两片区域。七桥问题等价于在该图中寻找一条闭迹

Euler L, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (The solution of a problem relating to the geometry of position). *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8, 128–140, 1741



Leonhard Euler  
(1707-1783)  
瑞士数学家



Biggs NL, Lloyd EK, Wilson RJ,  
Graph Theory 1736-1936,  
Oxford University Press, 1999

Euler对七桥问题的研究被公  
认为现代图论研究的起源

# 中国邮递员问题

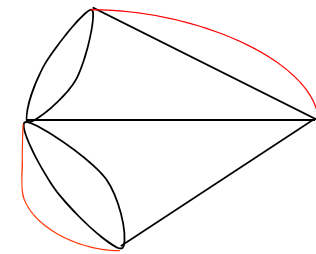


组合  
优化  
MATH T

- 中国邮递员问题 (Chinese Postman Problem, CPP)
  - 一个投递员每次上班, 要走遍他负责送信的段, 然后回到邮局。问应该怎样走才能使所走的路程最短
- 中国邮递员问题与Euler图
  - 将邮递员走过的区域建模为赋权图。街道为边, 街道交汇处为顶点, 边的权为街道的长度
  - 若赋权图是Euler图, 任何一条Euler回路都是中国邮递员问题的最优解
  - 若赋权图不是Euler图, 寻找一条总长度最短的回路, 该回路可能经过某些边两次以上

Edmonds J, Johnson EL, Matching, Euler tours and the Chinese postman. *Mathematical Programming*, 5, 88-124, 1973.

Kwan's article referred to optimizing a postman's route, was written by a Chinese author, and appeared in a Chinese math journal. (<http://www.nist.gov/dads/HTML/chinesePostman.html>)



第10卷 第3期  
1960年12月

数学学报  
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 10, No. 3  
Dec., 1960

## 奇偶点图上作业法\*

管梅谷  
(山东师范学院)

### §1. 问题的提出

在邮局搞线性规划时,发现了下述问题:“一个投递员每次上班,要走遍他负责送信的段<sup>①</sup>,然后回到邮局。问应该怎样走才能使所走的路程最短。”

这个问题可以归结为

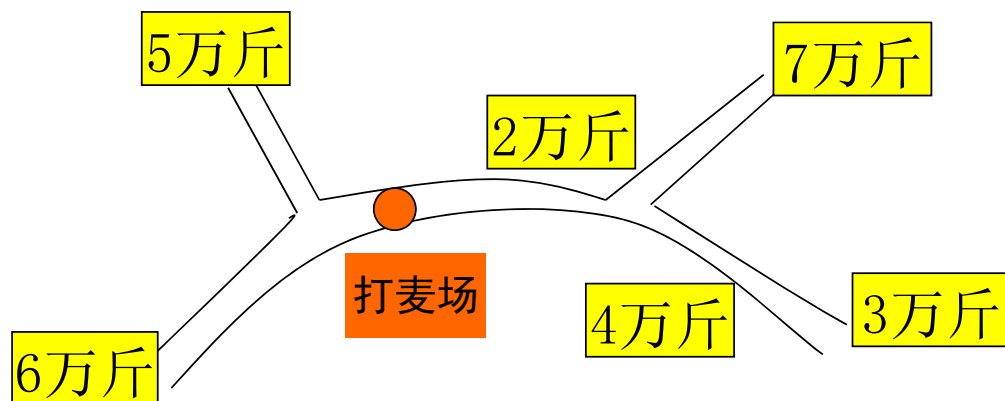
“在平面上给出一个连通的线性图<sup>②</sup>,要求将这个线性图从某一点开始一笔画出(允许重复),并且最后仍回到起点,问怎样画才能使重复路线最短。”

管梅谷, 奇偶点图上作业法, 数学学报, 10, 263-266, 1960

Kwan Mei-Ko, Graphic programming using odd or even points. *Chinese Mathematics*, 1, 273-277, 1962.

# 选址问题

- 打麦场的选址问题
  - 有了固定的发点和固定的道路来寻求最好的收点，使运输力为最经济的问题
  - 图上的1-median选址问题



组合  
优化  
MATH T

第11卷 第1期  
1961年3月

数学学报  
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 11, No. 1  
March, 1961

## 数学方法在麦收中的应用\*\*

华罗庚等

在中共北京市委农村工作部的统一领导下,中国科学院数学研究所、力学研究所、中国科学技术大学、北京师范学院、北京农业机械学院、北京师专、北京工农师院等七个单位的部分师生,参加了北京市郊的麦收工作。这次工作的着眼点在于试用数学方法来选定运输力最省的打麦场场址的问题。在工作中也遇到了不少其他可以运用数学方法来处理的问题。本文是由这次工作的技术资料中选摘几段而写成的,着重在方法和结论,证明说得简单一些,对急待应用而在数学上感觉困难的读者,不妨将证明略去不读。

华罗庚等, 数学方法在麦收中的应用. 数学学报, 1961, 11, 63-75.

Goldman AJ, Optimal center location in simple networks, *Transportation Science*, 5, 212-221, 1971.

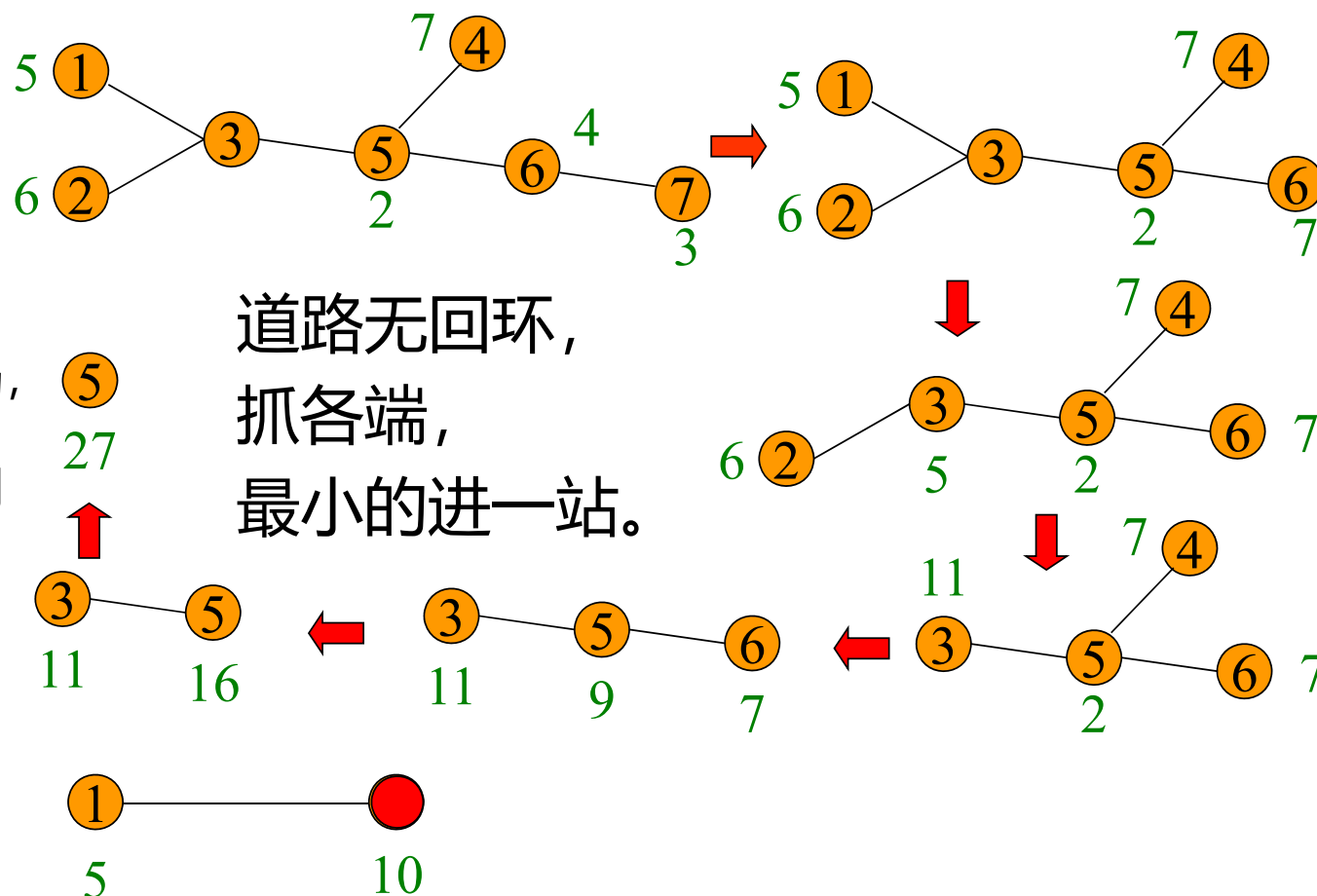
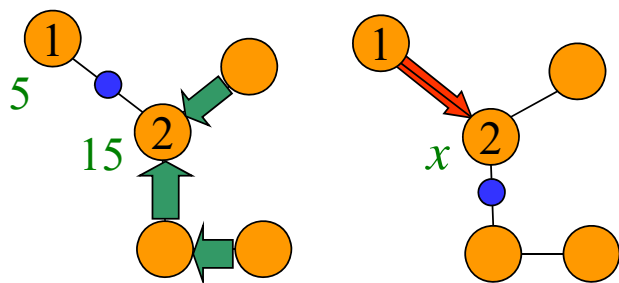




# 打麦场的选址问题

## • 打麦场的选址问题

- 若只有两站，应在产量多的麦田建站
- 若①是各端产量最小者，②是①的邻点
  - 在①处或①②之间建场，不如在②处建场
  - 若不在①处或①②之间建场，①的麦子进入麦场必经过②

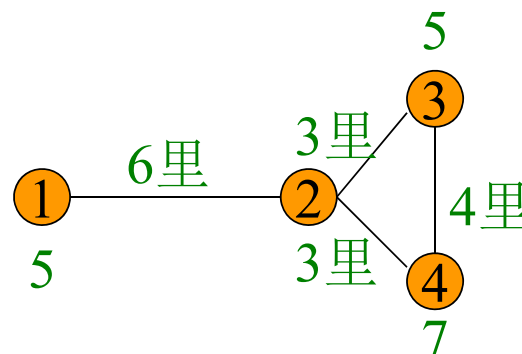




# 打麦场的选址问题

## • 打麦场的选址问题

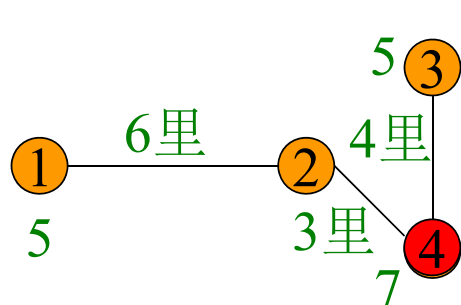
道路有回环，每圈甩一段，  
化为无回环，然后照样算。  
甩法有不同，结果——算，  
算后再比较，最优可立断。



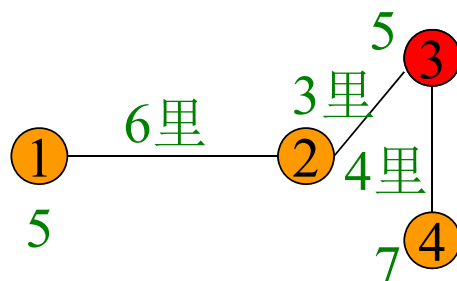
*When no cycles are among the roads,  
Take each of the ends,  
Let the minimum move to the next.*

*When cycles are among the roads,  
Get rid of one edge of each cycle,  
To reduce to the case of no cycles,  
And then, compute in the previous way*

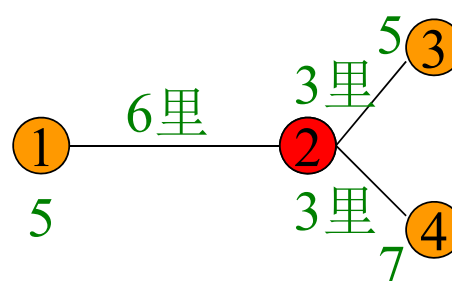
*For all different ways of taking off cycles,  
Compute the results, one by one,  
By comparing all results,  
The optimum will be obtained.*



$$5 \times 9 + 5 \times 4 = 65$$



$$5 \times 9 + 7 \times 4 = 73$$



$$5 \times 6 + 5 \times 3 + 7 \times 3 = 66$$

**Burkard RE, OR Utopia, European  
Journal of Operational Research,  
119, 224-234, 1999**

# 组合优化



组合  
优化  
*MATH T*

## • 组合优化学科属性

- 学科分类与代码 (GB/T 13745-2009)
  - 110 数学
    - 110.74 运筹学
      - 110.7425 组合最优化
- 授予博士、硕士学位和培养研究生的学科、专业目录
  - 07 理学
    - 0701 数学
      - 070105 运筹学与控制论

## • 组合优化的学科基础

- 数学规划
- 图论和组合学
  - 图论和组合学中的优化问题是组合优化的重要组成部分, 但也有相当部分内容并不涉及优化
  - 组合优化中很多问题的研究需要采用图论或组合学的工具和结论
- 线性代数与矩阵论
- 计算复杂性
- 数据结构
  - 组合优化中的算法是数学化的、“高级的”描述, 对算法的分析未必以在计算机上实现为前提
  - 改进算法复杂度的工作需要好的数据结构。对算法实际性能的考查需在计算机上实现



# 组合优化的应用



组合  
优化  
MATH T

- 组合优化的应用

- 计算机科学与信息科学
- 管理科学

- ROADEF Challenge

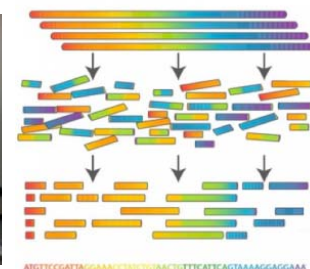
- 2022: 3D truck loading optimization
    - 2020: maintenance planning
    - 2018: cutting optimization
    - 2016: inventory routing
    - 2014: Trains don't vanish

- 计算生物学

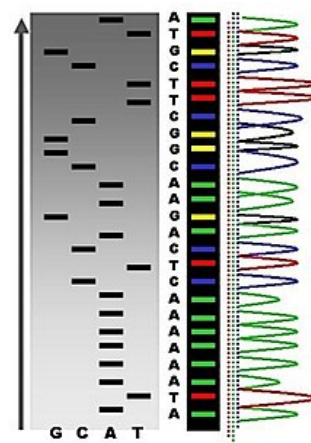
GROUPE RENAULT



Frederick Sanger  
(1918-2013)  
英国生物学家  
1958, 1980年诺贝尔化学奖得主



CACAGGGCTGCAATGA



GGCTG  
GCAATG  
CAG  
CACAGG  
CAGGG  
GGC  
CTGCA  
CAATGA  
GCTGC

# 学习组合优化



组合  
优化  
*MATH T*

- 组合优化的特点
  - 组合优化问题丰富、类型多样。多数问题来自实际，并能直接应用于实际
  - 组合优化问题有若干常用的求解思路，但尚不存在统一的求解步骤。需结合问题实际寻找合适的解决方案
  - 组合优化是一个年轻的学科，大量的公开问题留待解决，新问题有待发现，其他学科中的相关问题亟待建模
- 组合优化学习建议
  - 理解概念、熟悉问题、掌握方法
  - 多阅读、勤思考、重实践
  - 趣味性和挑战性并存。既需积累经验，也需灵活运用

# 组合优化问题

- 组合优化基本问题
  - 背包 (Knapsack)
  - 指派 (Assignment)
  - 排序与调度 (Scheduling)
    - 项目排序 (Project Scheduling)
    - 时间表 (Timetabling)
  - 装箱 (Bin-packing)
  - 选址 (Facility Location)
  - 旅行售货商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP)
  - 车辆路径问题 (Vehicle Routing Problem, VRP)



Kellerer H, Pferschy U, Pisinger D. *Knapsack Problems*. Springer, 2004

Burkard RE, Dell'Amico M, Martello S, *Assignment Problems*, SIAM, 2009.

Leung, JY. (Eds.) *Handbook of Scheduling: Algorithms, Models, and Performance Analysis*. CRC, 2004

Farahani RZ, Hekmatfar M, (Eds.) *Facility Location: Concepts, Models, Algorithms and Case Studies*, Physica, 2009.

Gutin G, Punnen AP, (Eds.) *The Traveling Salesman Problem and its Variations*, Springer, 2002.

Toth P, Vigo D (Eds.) *Vehicle Routing: Problems, Methods, and Applications*. SIAM, 2014.

# 图的优化问题



组合  
优化  
MATH T

## • 图的优化问题

### • 路由问题

- 最短路 (shortest path)
- 边路由 (Arc Routing)、中国邮递员问题

### • 特殊子图

- 最小生成树 (minimum spanning tree, MST)、最小树形图 (arborescence)
- 最小Steiner树 (minimum Steiner tree)

### • 特殊边集

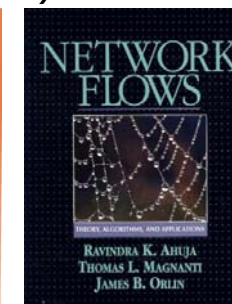
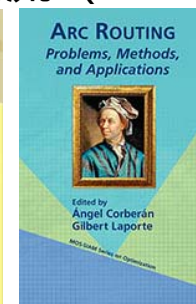
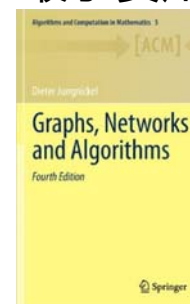
- (完美、最大基数、最大权、最小权完美) 匹配 (matching)、边着色
- (最大、最小) 割

## • 特殊顶点集

- 独立集 (independent set)、顶点着色
- 顶点覆盖 (vertex cover)
- 支配集 (dominated set)

## • 网络流

- 最大流 (maximum flow)
- 最小费用流 (minimum cost flow)



Jungnickel D, *Graphs, Networks and Algorithms*(4th), Springer, 2014.

Corberán Á, Laporte, G, (Eds.) *Arc Routing: Problems, Methods, and Applications*, SIAM, 2015

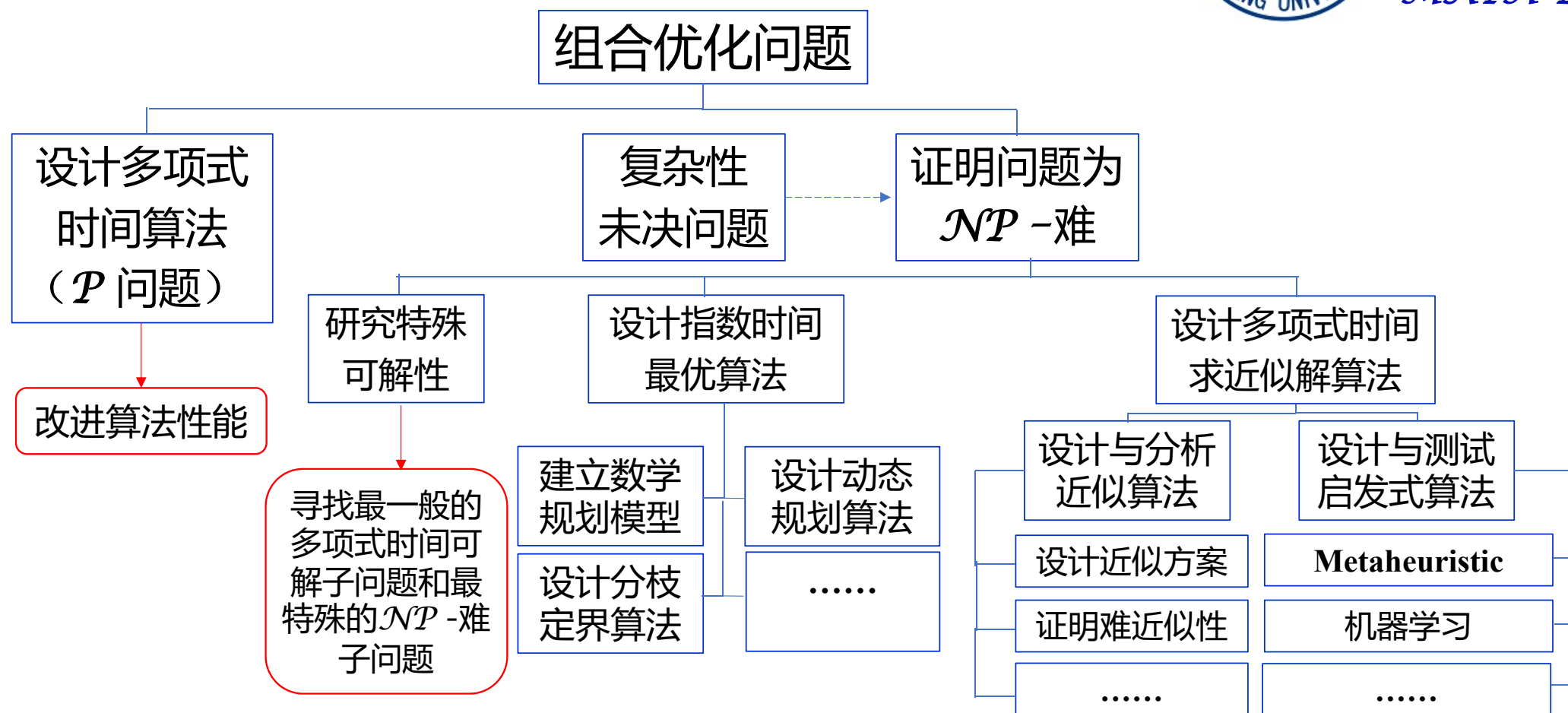
Hwang FK, Richards DS, Winter P, *The Steiner Tree Problem*. North-Holland, 1992.

Ahuja RK, Magnanti TL, Orlin JB, *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall, 1993.





# 组合优化问题求解方法



# 课程概况



组合  
优化  
MATH T

## • 课程主要内容

- 组合优化概论
  - 计算复杂性初步
  - 线性规划与整数规划介绍
  - 组合优化问题的研究方法
- 常见组合优化问题
  - 排序问题
  - 装箱问题
  - 指派问题
  - 图和网络优化
- 组合优化前沿进展
  - 在线问题
  - 算法博弈论

## • 教学参考

- 组合优化与博弈论 (第4-7章)
- 参考书与文献
- 在线课程

## • 考核

- 期末开卷笔试 (50% - 60%)
- 课程作业 (40% - 50%)

## • 作业

- 巩固性作业
- 研究性作业



谢 谢

