一、现有n个工件需安排在一台机器上加工，工件J_j的加工时间为$p_j, j=1,\cdots,n$。机器在所有工件加工完毕前不可空闲，工件加工不可中断。目标为工件完工时间的方差尽可能小，即$S=\sum_{j=1}^{n}(C_j-\bar{C})^2$最小，其中$C_j$为工件$J_j$的完工时间，$\bar{C}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}C_j$。

（1）若工件按照$J_1,J_2,\cdots,J_n$的顺序依次加工，试写出S的表达式（用$p_1,p_2,\cdots,p_n$表示）；

（2）证明：存在一个最优解，其中最早加工的工件是加工时间最大的工件；

（3）设$n=4$，$p_1\ge p_2\ge p_3\ge p_4$，试求出该问题最优解。

二、假设I是n个城市的度量 TSP 问题实例。城市i和城市j之间的距离为$c_{ij}, i,j=1,\cdots,n$。T^*为实例I的最优环游，其长度为 1。对任意城市i,j，记o_{ij}为T^*中自i至j部分的长度。定义函数

$$d(x,y)=\min\{|x-y|,1-|x-y|\},$$

区域

$$S(p,q,u,v)=\{(x,y)\in[0,1)\times[0,1)\mid d(x,o_{pu})+d(y,o_{qv})<c_{uv}\}。$$

（1）求区域$S(u,v,u,v)$的面积。

对I的某一环游$T:i_1i_2\cdots i_n$，任取$k\ge 1, k+2\le l\le n$，环游

$$T':i_1i_2\cdots i_{k-1}i_ki_li_{l-1}i_{l-2}\cdots i_{k+1}i_{l+1}i_{l+2}\cdots i_n$$

称为T的 2-change 环游，即用i_ki_l与$i_{k+1}i_{l+1}$两条边代替T中i_ki_{k+1}与i_li_{l+1}两条边，并将T中$i_{k+1}i_{k+2}\cdots i_l$之间的边反向后得到的环游。环游长度不大于它的所有 2-change 环游的长度的环游称为 2-opt 环游。

（2）试给出 2-opt 环游所具有的性质，并证明：若T为 2-opt 环游，则对任意固定的城市p,q，对任意的$1\le k<l\le n$，区域$S(p,q,i_k,i_{k+1})$与$S(p,q,i_l,i_{l+1})$的交为空集。

度量 TSP 问题的 2-opt 算法是一种局部搜索算法，它从任一环游开始，若当前环游不是 2-opt 环游，则将其改进为它的任意一个长度更短的 2-change 环游，直至当前环游为 2-opt 环游为止。

（3）证明：对任意固定的城市u,v，对任意的城市p_1,q_1,p_2,q_2，$S(p_1,q_1,u,v)$的面积与$S(p_2,q_2,u,v)$的面积相等。

（4）证明：2-opt 算法求解n个城市的度量 TSP 问题的最坏情况比不超过$\sqrt{\frac{n}{2}}$。