一、某场馆收到n项借用申请，第i项申请涉及的活动所需时段为$[s_i,t_i)$，其中$0 \le s_i < t_i \le T$，$i=1,2,\cdots,n$，s_i称为开始时间，t_i称为结束时间，持续时间为$d_i = t_i - s_i$。场馆在同一时刻只能进行一项活动，一项活动开始后必须连续进行直至结束。现希望选择接受部分申请，使得场馆能开展的活动数量尽可能多。

（1）证明：存在一个最优解，接受某项结束时间为$\min\limits_{i=1,2,\cdots,n} t_i$的申请；

（2）场馆管理员试图用贪婪算法求解该问题。将所有申请按某种顺序排列，依次考虑各项申请。若当前申请涉及的活动所需时段未被已接受的申请涉及的活动占用，则接受该申请，否则拒绝该申请。贪婪算法的性能与申请排列顺序有关。现有四种顺序：

（i）按持续时间从小到大的顺序排列，

（ii）按开始时间从小到大的顺序排列，

（iii）按结束时间从小到大的顺序排列，

（iv）按重合数从小到大的顺序排列，这里称一申请的重合数为k，若该项申请所涉及的活动所需时段与其他申请中的k项申请所涉及的活动所需时段有部分重叠。

试问基于哪些顺序的贪婪算法是该问题的最优算法。对最优算法，给出最优性的证明；对其他算法，举一反例说明其不为最优算法。

二、现有m家商店$s_1,s_2,\ldots,s_m$与n种图书$b_1,b_2,\ldots,b_n$。若商店s_i销售图书b_j，则记$e_{ij}=1$，且其销售价格记为w_{ij}。记$p_j = \min\left\{w_{ij} | e_{ij}=1\right\}$为图书$b_j$的最低销售价格。若顾客在商店$s_i$购买的图书总价格至少为$t_i$，则实付金额为在该商店购买图书的总价格减去$d_i$。现要求选择每种图书购买的商店，使购买$n$种图书的实付总金额最小。

（1）试举例说明，顾客选择每种图书价格最低的商店购买该书未必是最优解；

（2）证明：即使商店数为 2，问题仍是$\mathcal{NP}$-难的；

在（3）（4）小题中，假设每家商店至多销售上述图书中的两种。构造图$G=(V,E)$，其中$V=\{s_1,s_2,\ldots,s_m,b_1,b_2,\ldots,b_n\}$。若$e_{ij}=1$且$w_{ij} \ge t_i$，则在$s_i$与$b_j$之间有一条权为$p_j-(w_{ij}-d_i)$的边。对任意$b_j,b_k \in V$，若存在$s_i$，使得$e_{ij}=e_{ik}=1$且$w_{ij}+w_{ik} \ge t_i$，则在$b_j$与$b_k$之间有一条权为

$$\max\{p_j+p_k-(w_{ij}+w_{ik}-d_i) \mid \text{对任意}i\text{满足}e_{ij}=e_{ik}=1\text{且}w_{ij}+w_{ik} \ge t_i\}$$

的边。

（3）对下面的实例，给出相应的图G。

$n=5, m=5,\ t_i=10, d_i=3, i=1,2,3,4,5,$ 仅对以下i,j的组合，$e_{ij}=1$，且$w_{11}=12, w_{12}=10, w_{22}=9, w_{23}=7, w_{32}=11, w_{33}=4, w_{43}=5, w_{44}=8, w_{53}=8, w_{55}=7;$

（4）证明：G存在总权和至少为W的匹配，当且仅当存在一种实付总金额至多为$\sum\limits_{j=1}^{n} p_j - W$的购买方案。给出求解该问题的多项式时间算法。