一、考虑n个城市的 TSP 问题，城市i与城市j之间的距离为$c_{ij}, i, j=1,\cdots,n$，$\mathbf{C}=(c_{ij})_{n\times n}$称为**距离矩阵**。记$T^*(\mathbf{C})$为距离矩阵为$\mathbf{C}$的 TSP 问题实例的最优值。

（1）若存在整数$x, y, 1\le x<y\le n$，使得

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & i\le x, j\ge y,\\ 1, & i\ge y, j\le x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称$\mathbf{C}$为**左下右上块矩阵**（Low-Left Upper-Right block matrix）。证明：

$$T^*(\mathbf{C})\ge\begin{cases}2, & \text{若} y-x=1,\\ 1, & \text{若} y-x=2.\end{cases}$$

（2）考虑环游

$$\pi=\begin{cases}(1,3,5,\cdots,n-2,\ n,\ n-1,n-3,n-5,\cdots,4,2), & n\text{为奇数},\\ (1,3,5,\cdots,n-3,n-1,\ n,\ n-2,n-4,\cdots,4,2), & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

以城市1为环游起点，用$\pi(i)$ 表示环游π 经过的第i个城市，如$\pi(1)=1, \pi(2)=3$。令

$$\phi_{\pi(i)\pi(i+1)}=\phi_{\pi(i+1)\pi(i)}=1,\ 1\le i\le n-1,\quad \phi_{\pi(n)\pi(1)}=\phi_{\pi(1)\pi(n)}=1,$$

除上述以外的$\phi_{ij}, i, j=1,\cdots,n$ 值均为0。试写出矩阵$\mathbf{\Phi}=(\phi_{ij})_{n\times n}$，并证明$\pi$为距离矩阵为$\mathbf{C}$的 TSP 问题实例的最优环游；

（3）若对任意$1\le i<r\le n, 1\le j<s\le n$，均有$m_{ij}+m_{rs}\le m_{is}+m_{rj}$，则称矩阵$\mathbf{M}=(m_{ij})_{n\times n}$为 **Monge 矩阵**。若存在$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，使得$s_{ij}=a_i+a_j$，则称矩阵$\mathbf{S}=(s_{ij})_{n\times n}$为**和矩阵**（sum matrix）。已知对任意对称 Monge 矩阵$\mathbf{M}$，存在非负实数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$和左下右上块矩阵 $\mathbf{C}^{(1)},\mathbf{C}^{(2)},\cdots,\mathbf{C}^{(k)}$，以及和矩阵$\mathbf{S}$，使得$\mathbf{M}=\mathbf{S}+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mathbf{C}^{(i)}$。证明：$\pi$ 也是距离矩阵为对称 Monge 矩阵的 TSP 问题实例的最优环游。

二、现有一总额为N的预算，用于支付k笔金额分别为$p_1,p_2,\cdots,p_k$的小额付款，其中k为固定整数。为此需将预算全部兑换成硬币，其中面值为i的硬币c_i枚。要求对**任意**满足$\sum_{j=1}^{k}p_j\le N$的$p_1,p_2,\cdots,p_k$取值，均可用兑换成的硬币足额完成支付，即存在整数p_{ij}，使得$\sum_{i=1}^{N}i\cdot p_{ij}=p_j, j=1,\cdots,k$，$\sum_{j=1}^{k}p_{ij}\le c_i, i\ge 1$。为简单起见，设$N=kl$，$l$为整数，硬币面值可为$1,2,\cdots,N$中的任意整数。

（1）证明：所兑换的硬币面值最大不能超过l，即$c_i=0, i>l$；

（2）记T_i为所兑换的面值不超过i的所有硬币价值总和，即$T_i=\sum_{j=1}^{i}j\cdot c_j$，证明：对任意$i=1,2,\cdots,l$，$T_i\ge ki$；

（3）证明：任意满足要求的兑换方案所需各面值的硬币总数至少为kH_l，这里$H_l=\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{i}$ 。

（4）试给出满足$T_i\ge ki$，$i=1,2,\cdots,l$，且使得$\sum_{i=1}^{l}c_i$达到最小的c_i值（不必证明最优性）。