一、现有n个 Boolean 变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的一合取范式$F = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_m$，其中子句$c_i$为若干个文字的简单析取式，$c_i$的权为$w_i, i = 1, \cdots, m$。求所有变量的一组赋值，使得值为真的子句的权之和最大的问题称为 **MAX-SAT**。

（1）试写出求解 MAX-SAT 问题的数学规划；

（2）设x_1, x_2, x_3, w均为 Boolean 变量，用$\bar{x}$表示变量x的非。试问当x_1, x_2, x_3的值满足何条件时，不论w取值是否为真，

$$x_1, x_2, x_3，\ w，\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2，\ \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3，\ \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3，\ x_1 \vee \bar{w}，\ x_2 \vee \bar{w}，\ x_3 \vee \bar{w}$$

这 10 个子句中至多只有 6 个子句的值为真。当x_1, x_2, x_3的值满足何条件时，存在w的一种取值，可使上述 10 个子句中至少有 7 个子句的值为真；

（3）F的每个子句至多只含两个文字的 MAX-SAT 问题称为 **MAX-2SAT**。试证明 MAX-2SAT 是 NP-完全问题。

二、某汽车公司生产k种型号的汽车，某天计划装配型号为$j, j = 1, \cdots, k$的汽车n_j辆。装配作业种类计有m种，不同型号的汽车所需进行的作业种类可能不同。若型号为$j, j = 1, \cdots, k$的汽车需要经过作业$i, i = 1, \cdots, m$，则记$a_{ij} = 1$，否则记$a_{ij} = 0$。所有拟于当天装配的各种型号的汽车排成一列依次经过生产线，该顺序一经确定不可在装配进行过程中更改。规定对作业$i, i = 1, \cdots, m$，经过生产线的任意连续s_i辆汽车中至多只能有r_i辆汽车需要该项作业。**车辆顺序问题**（car sequencing）要求对给定的上述参数，判断是否存在当天装配汽车的一种可行排列顺序。

（1）有同学认为，非确定性算法可猜想出一种排列顺序，并验证该顺序是否符合每种作业对间隔的要求，因此该问题属于 NP。以上断言是否准确，为什么？若不准确，试给出一条件，使得在此条件下该问题属于 NP；

（2）试写出一数学规划，用于判断可行排列顺序是否存在，并在存在时给出其中一种；

（3）证明：即使对所有$j, j = 1, \cdots, k$，$n_j \equiv 1$，且对所有作业$i, i = 1, \cdots, m$，均有$s_i = 2, r_i = 1$，车辆顺序问题仍是 NP-难的。（提示：用 NP-完全问题 Hamilton 路归约，图的每个顶点对应一种型号。）