3. 证明：当 $x_0=1.5$ 时，迭代法

$$x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{4+x_k}} \quad 和 \quad x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}$$

都收敛于方程 $f(x)=x^3+4x^2-10=0$ 在区间 $[1,2]$ 内唯一实根 x^*，并分别用上述迭代法求满足精度要求 $\left|x_{k+1}-x_k\right|\leqslant 10^{-5}$ 的近似根.

5. 为求方程 $f(x)=x^3-x^2-1=0$ 在 $x_0=1.5$ 附近的一个根，可将方程改写成下列等价形式，并建立相应的迭代公式.

(1) 改写成 $x=1+\frac{1}{x^2}$，迭代公式为 $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$；

(2) 改写成 $x^3=1+x^2$，迭代公式为 $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$；

(3) 改写成 $x^2=\frac{1}{x-1}$，迭代公式为 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$.

试分析每一种迭代公式的收敛性.

6. 取 $x_0=1.5$，用牛顿迭代法求第 3 题中方程根的近似值（精确到 $\left|x_{k+1}-x_k\right|\leqslant 10^{-5}$），并将迭代次数与第 3 题相比较.

3. $x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$ $x_0=1.5$.

$\forall x_k\in[1,2]$. $x_{k+1}\in\left[\sqrt{\frac{10}{4+2}},\sqrt{\frac{10}{4+1}}\right]=\left[\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{2}\right]\subset[1,2]$.

考虑到 $x_0=1.5\in[1,2]$. 故 $x_k\in[1,2]$. $\forall k\in\mathbb{N}^+$. 故 $\{x_k\}$ 有界.

从而必有子列收敛. 不妨设 $\{y_n\}$ 为收敛子列. 则 $y_{n+1}=\sqrt{\frac{10}{4+y_n}}$，$y_0=1.5$. $y_n\to y$. $n\to\infty$.

令 $n\to\infty$. 有 $y=\sqrt{\frac{10}{4+y}}$. 化简得 $y^3+4y^2-10=0$.

由于方程 $y^3+4y^2-10=0$ 有且仅有一实根 $y^*\in[1,2]$.

故 $\{x_k\}$ 仅有一极限 y^* 换言之 迭代格式 $x_{k+1}=\sqrt{\frac{10}{4+x_k}}$，$x_0=1.5$

收敛到方程 $x^3+4x^2-10=0$ 在 $[1,2]$ 间的唯一实根

$x_0=1.5$. $x_1=1.3483997$ $x_2=1.3673763$ $x_3=1.3649570$ $x_4=1.3652647$

$x_5=1.3652259$ $x_6=1.3652305$

$|x_5-x_4|\leq 2\times10^{-5}$ $|x_6-x_5|\leq 0.46\times10^{-5}<10^{-5}$.

故可取 $x^*=1.365231$ 作为近似解.

$x_{k+1}=\frac{1}{2}\sqrt{10-x_k^3}$ $x_0=1.5$

同理可证上式收敛到 $y^3+4y^2-10=0$ 的唯一实根.

可取 $x^*=1.365206$

5. 方程 $x^3-x^2-1=0$ 有且仅有一实根. 记为 x^*

(1): $x_{k+1}=1+\frac{1}{x_k^2}$ $x_0=1.5\in[1,2]$.

$\forall x_k\in[1,2]$. $x_{k+1}\in\left[1+\frac{1}{4},1+\frac{1}{1}\right]=\left[\frac{5}{4},2\right]\in[1,2]$. 且 $x_0\in[1,2]$

故 $\{x_k\}$ 有收敛子列. 记为 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. $y_n\to y$. $n\to\infty$. 由 $y_{n+1}=1+\frac{1}{y_n^2}$.

令 $n\to\infty$. 有: $y^3-y^2-1=0$. 故 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 x^*

(2): $x_{k+1}=\sqrt[3]{1+x_k^2}$ $x_0=1.5\in[1,2]$.

$\forall x_k\in[1,2]$. $x_{k+1}\in[\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{5}]\subset[1,2]$ 且 $x_0\in[1,2]$.

故 $\{x_k\}$ 有收敛子列. 如(1)中证明. 则 $\{x_k\}$ 收敛到 x^*.

(3): $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ $x_0=1.5\in[1,2]$.

令 $f(x_k)=x_{k+1}-x_k=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}-x_k=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}\left(1-\sqrt{x_k^3-x_k^2}\right)$

当 $x_k>x^*$. $f(x_k)>0$. 因为 $x_k^3-x_k^2>1$ 故 $1-\sqrt{x_k^3-x_k^2}<0$.

当同理当 $x_k<x^*$时. $f(x_k)<0$.

故除非 $x_0=x^*$. 否则 $\{x_k\}$ 无法收敛到 $x^3-x^2-1=0$ 的实根.

这是显然的. 故迭代格式 $x_{k+1}=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$ 不收敛.

6. $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $f(x)=x^3-x^2-1$.

故 $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-x_k^2-1}{3x_k^2-2x_k}=\frac{2x_k^3-x_k^2+1}{3x_k^2-2x_k}$

$x_0=1.5$ $x_1=1.466667$ $x_2=1.465572$ $x_3=1.465571$

$|x_3-x_2|\le10^{-5}$. 取 $x^*=x_3=1.465571$

迭代三次即得到符合要求的解. 比3中任一格式都要快.