

偏微分方程

第五章 一阶偏微分方程

5.1 一阶线性偏微分方程

5.1.1 方程的分类

称形如:

$$F(\vec{x}, u, \mathcal{D}u, \mathcal{D}^2u, \dots, \mathcal{D}^k u) = 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, n \geq 2 \quad (5.1)$$

的方程为偏微分方程 (PDE), 其中 $u = u(\vec{x})$ 是未知的. 若记 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 为多重指标, $\alpha_j \geq 0$, 且记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ 以及 $\mathcal{D}^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, 则对 PDE 有如下几种分类:

1. (线性偏微分方程) $\sum_{|\alpha| \leq k} P_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha u = f(\vec{x});$
2. (半线性偏微分方程) $\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(\vec{x}) \mathcal{D}^\alpha u + G(\vec{x}, u, \mathcal{D}u, \dots, \mathcal{D}^{k-1}u) = 0;$
3. (拟线性偏微分方程)

$$\sum_{|\alpha|=k} P_\alpha(\vec{x}, u, \mathcal{D}u, \dots, \mathcal{D}^{k-1}u) \mathcal{D}^\alpha u + G(\vec{x}, u, \mathcal{D}u, \dots, \mathcal{D}^{k-1}u) = 0$$

4. (完全非线性偏微分方程) Others.

更一般地, 对于向量值的未知函数 $\vec{u}(\vec{x})$, 可以表述为如下形式:

$$\vec{F}(\vec{x}, \vec{u}, \mathcal{D}\vec{u}, \dots, \mathcal{D}^k \vec{u}) = \vec{0}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{u}: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \quad (5.2)$$

我们先讨论一阶的线性偏微分方程:

$$\sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) u_{x_i} + C(\vec{x}) u = f(\vec{x}) \quad (5.3)$$

其中 $b_i(\vec{x}), C(\vec{x}), f(\vec{x}) \in \mathbb{C}(D), D \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$.

5.1.2 特征线法

我们希望找一个曲线 $\vec{x}(t)$, 在其上可以将求解 u 化归为求解常微分方程 (其解为特征曲线). 分析后可知, 若 $\vec{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ 满足下述方程组 (称为特征方程) 的第一行, 则求解特征曲线只要解第二行:

$$\begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = b_j(x(t)) & 1 \leq i \leq n \\ \frac{du}{dt} = -C(\vec{x}(t))u + \vec{f}(\vec{x}(t)) \end{cases} \quad (5.4)$$

通常将 5.4 的第一行写为等价形式:

$$\frac{dx_1}{b_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{b_2(\vec{x})} = \dots = \frac{dx_n}{b_n(\vec{x})} (= dt) \quad (5.5)$$

它形式对称, 与 t 无关.

定理. 设 $\varphi_i(\vec{x}) = c_i, 1 \leq i \leq n-1$ 为 5.5 在 D 内的 $n-1$ 个独立的首次积分, 并设 φ_n 为满足使得 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 独立, 即 $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ 的函数. 考虑变量替换, $\xi_i = \varphi_i(\vec{x}), 1 \leq i \leq n$, 并记 $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ 则求解如下关于 u 的常微分方程:

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i \vec{\xi} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \right) \frac{u}{\xi_n} + C(\vec{\xi})u(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi}) \quad (5.6)$$

即可得到 5.3 的通解. 特别地, 当 $C \equiv f \equiv 0$ 时, 直接解得 $u = g(\varphi_1(\vec{x}), \dots, \varphi_{n-1}(\vec{x}))$, 其中 g 为任意 \mathbb{C}^1 函数.

5.2 一阶拟线性偏微分方程

这里考虑形如:

$$\sum_{i=1}^n b_i(\vec{x})u_{x_i} = C(\vec{x}, u) \quad (5.7)$$

其中 $b_j(\vec{x}, u), C(\vec{x}, u) \in \mathbb{C}(D), D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, n \geq 2$.

5.2.1 通解问题

我们不妨记 5.7 的解为 x_{n+1} , 即 $x_{n+1} = u(\vec{x})$, 且它由隐函数 $V(\vec{x}, x_{n+1})$ 确定, 则只要求得 V 即可. 则两侧对 x_j 求偏导可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_j} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_j} &= -\frac{\partial V}{\partial x_j} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} \right)^{-1} \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n b_j(\vec{x}, x_{n+1}) \frac{\partial V}{\partial x_j} + C(\vec{x}, x_{n+1}) \frac{\partial V}{\partial x_{n+1}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

从而这就化归为了上一小节的一阶线性方程 ($n+1$ 个自变量), 由 5.1 节的定理可知:

$$V = g(\varphi_1(x, x_{n+1}), \dots, \varphi_n(\vec{x}, x_{n+1})) \quad (5.9)$$

其中的 $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ 为化归得的线性方程对应的特征方程的 n 个首次积分. 于是原方程的解可以写为隐函数的形式:

$$g(\varphi_1(\vec{x}, u), \dots, \varphi_n(\vec{x}, u)) = 0 \quad (5.10)$$

5.2.2 Cauchy 问题

考虑如下形式的初值问题:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n b_i(\vec{x}) u_{x_i} = C(\vec{x}, u) \\ u|_{\vec{x}=\alpha(\vec{s})} = \theta(\vec{s}) \end{cases} \quad (5.11)$$

其中 $\alpha(\vec{s}) = (\alpha_1(\vec{s}), \dots, \alpha_n(\vec{s}))$ 为初始曲面, $\vec{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ 为参数. 假设所出现的函数均光滑. 上述初值问题的解 $z = u(\vec{x})$ 在 O_{xz} 空间中表示一张“解曲面”.

其在点 (\vec{x}_0, z_0) 处的法向量为 $\vec{n} = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, -1)$, 令 $\vec{b}(\vec{x}, u) = (b_1(\vec{x}, u), \dots, b_n(\vec{x}, u))$, 则由方程可知 $(\vec{b}(\vec{x}_0, u), C(\vec{x}_0, u))$ 为方程对应的特征方向, 与 \vec{n} 垂直.

定义. 称上述初值问题的拟线性方程对应的特征方程:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = b_i(x(t), z) & 1 \leq i \leq n \\ \frac{dz}{dt} = C(\vec{x}(t), z) \end{cases} \quad (5.12)$$

的解为特征曲线.

定理. $u(\vec{x})$ 为 5.7 在 D 内的解 $\Leftrightarrow \forall \vec{x}_0 \in D$, 过点 $(\vec{x}_0, u(\vec{x}_0))$ 的特征曲线全部位于 $z = u(\vec{x})$ 上.

定理. 设 $(\vec{x}_0, z_0) = (\alpha(\vec{s}_0, \theta(\vec{s}_0)))$, 且:

$$J = \det \left(\vec{b}^T(\vec{x}_0, z_0), \mathcal{D}_{\vec{s}(\vec{s}_0)} \right) = \begin{vmatrix} b_1(\vec{x}_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(\vec{s}_0) & \cdots & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_{n-1}}(\vec{s}_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n(\vec{x}_0, z_0) & \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_1}(\vec{s}_0) & \cdots & \frac{\partial \alpha_n}{\partial s_{n-1}}(\vec{s}_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.13)$$

则初值问题 5.11 的解在 \vec{x}_0 的某个邻域内存在唯一.

注记

上述定理实际上给出了求解本节的初值问题的步骤:

1. 找出初始曲面的参数表示: $u(\alpha(\vec{s})) = \theta(\vec{s}), \vec{s} = (s_1, \cdots, s_n)$;
2. 检验上述定理中的行列式 $J \neq 0$;
3. 求出 5.12 在初值条件 $(\vec{x}, z)|_{t=t_0} = (\alpha(\vec{s}, \theta(\vec{s})))$ 下的解 $x^*(t, \vec{s}), z(t, \vec{s})$;
4. 从 $x = x^*(t, \vec{s})$ 中求解出 $t = \varphi(\vec{x}), s = \psi(\vec{x})$;
5. 解为 $u(\vec{x}) = z(\varphi(\vec{x}), \psi(\vec{x}))$.

第六章 偏微分方程的基本概念与基本原理

6.1 二阶偏微分方程的分类与标准型

两个自变量的二阶线性偏微分方程一般形式为:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0 \quad (6.1)$$

定理. 通过可逆变换, 方程 6.1 能够化成以下三种形式之一:

1. **椭圆型:** 如果 $\mathcal{D} = a_{12}^2 < a_{11}a_{22}$, 可化为

$$u_{xx} + u_{yy} + \cdots = 0$$

2. **双曲型:** 如果 $\mathcal{D} = a_{12}^2 > a_{11}a_{22}$, 可化为

$$u_{xx} - u_{yy} + \cdots = 0$$

3. **抛物型:** 如果 $\mathcal{D} = a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$, 可化为

$$u_{xx} + \cdots = 0$$

对于一般的多个自变量的二阶线性偏微分方程, 它的形式为:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (6.2)$$

其中 a_{ij}, b_i, c 及 f 是 n 维空间中某区域 ω 的适当光滑的函数, 并总可取 $a_{ij} = a_{ji}$. 因此记系数矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$: 实对称阵.

定理. 方程 6.2 在 x_0 点的分类方法:

1. 若 $A(x_0)$ 的所有特征值非零且仅有一个异号, 则方程为 **双曲型** (若正负特征值个数均大于 1 则方程为 **超双曲型**). 代表: **波动方程**
2. 若 $A(x_0)$ 有一特征值为零, 则方程为 **抛物型**. 代表: **热方程**
3. 若 $A(x_0)$ 的所有特征值非零且同号, 则方程为 **椭圆型**. 代表: **位势方程**

定义. 若经过自变量的某种线性变换 $\xi = Bx$ 后得到的方程

$$\sum_{i=1}^m A_{ii}(x_0) u_{\xi_i \xi_i} + F(\xi, u, Du) = 0, m \leq n \quad (6.3)$$

其中 $A_{ii}(x_0) = \pm 1$, 称为在 x_0 点的标准型.

求标准型的一般步骤:

1. 求出特征方程的特征方向
2. 找到特征线
3. 利用特征线得到所需变换

6.2 定解问题与适定性

对于一个偏微分方程来说, 通常我们还需要提一些定解条件, 即初边值条件, 我们把一个偏微分方程和相应的定解条件组成的问题称为 **定解问题**.

定义. 如果一个定解问题的解是存在的, 唯一的, 稳定的, 则称这个问题是 **适定的**.

定解条件分为初始条件和边界条件:

- **初始条件**: $u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x)$
- **边界条件**:

1. 第一类 (Dirichlet) 边界条件:

$$u|_{\partial D} = \varphi$$

2. 第二类 (Neumann) 边界条件:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial v} \right|_{\partial D} = \varphi$$

3. 第三类 (Robin) 边界条件:

$$\left(au + b \frac{\partial u}{\partial v} \right) \Big|_{\partial D} = \varphi$$

6.3 叠加原理与齐次化原理

定理. 叠加原理: 设 \mathcal{L} 为线性微分算子, \mathcal{B} 为线性算子, 则方程:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u|_D = f \\ \mathcal{B}u|_{\partial D} = \varphi \end{cases}$$

的解可以写作 $u = v + w$, 其中 v, w 满足:

$$\begin{cases} \mathcal{L}v|_D = 0 \\ \mathcal{B}v|_{\partial D} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{L}w|_D = f \\ \mathcal{B}w|_{\partial D} = \varphi \end{cases}$$

定理. 齐次化原理 (Duhamel, 冲量原理): 设 \mathcal{L} 为 t 与 x 的线性微分算子, 且关于 t 最高阶导数次数 $\leq m-1$, 则

$$\begin{cases} \frac{\partial^m w}{\partial t^m} = \mathcal{L}w + f(x, t), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ w|_{t=0} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} w}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

的解 $w(x, t) = \int_0^t z(x, t; \tau) d\tau$

其中

$$\begin{cases} \frac{\partial^m z}{\partial t^m} = \mathcal{L}z, x \in \mathbb{R}^n, t > \tau > 0 \\ z|_{t=\tau} = \cdots = \frac{\partial^{m-2} z}{\partial t^{m-2}} \Big|_{t=\tau} = 0, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial t^{m-1}} \Big|_{t=\tau} = f(x, \tau) \end{cases}$$

第七章 输运方程

下面记 $u = u(x, t)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, x 是空间中的一个点, t 是时间. $Du = D_x u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$ 是代表 u 关于空间变量 x 的梯度. u_t 代表 u 关于时间的偏导数.

定义. 偏微分方程

$$u_t + b \cdot Du = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad (7.1)$$

是 **输运方程 (transport equation)**, 这里 $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 是个固定的向量.

为了解这个 PDE, 我们现在就不妨设 u 有某个光滑的解然后再尝试计算它. 首先注意到方程 7.1 表明 u 的某个特定方向的导数为 0, 我们固定任意的点 $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 并定义

$$z(s) \triangleq u(x + sb, t + s) (s \in \mathbb{R})$$

以下都记 $\frac{d}{ds} = \cdot$, 利用方程 7.1 计算得到

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = 0$$

因此 $z(\cdot)$ 是关于 s 的常函数, 所以对每个点 (x, t) , u 在穿过 (x, t) 且方向是 $(b, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 的直线上是个常数. 因此, 如果我们知道了在这样的直线上任意一个点的 u 值, 我们就知道了 $u(x, t)$ 在这条直线上的值.

7.1 齐次初值问题

为了确定所需要的解, 考虑如下的初值问题

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g, \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (7.2)$$

这里 $b \in \mathbb{R}^n, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 给定, 现在要求出 u 的表达式. 固定了上述 (x, t) , 穿过 (x, t) 且方向为 $(b, 1)$ 的直线可以用参数方程 $(x + sb, t + s) (s \in \mathbb{R})$ 表示, 当 $s = -t$ 时, 这条直线穿过平面 $\Gamma := \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ 上, 且交点是 $(x - tb, 0)$. 由于 u 是直线上的常数, 且 $u(x - tb, 0) = g(x - tb)$, 因此

$$u(x, t) = g(x - tb), x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (7.3)$$

因此如果方程 7.2 有足够好的解 u , 则这个解一定形如 7.3. 另一方面, 容易判断如果 $g \in C^1$, 则式 7.3 满足方程 7.2.

注记

如果 $g \notin C^1$, 显然方程 7.2 没有 C^1 解, 则这个解叫做 **弱解**. 不过有时候不光滑甚至是不连续的函数都可以作为 PDE 的一个弱解.

7.2 非齐次初值问题

下面考虑非齐次方程

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du = f, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g, \text{ on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (7.4)$$

受前面过程的启发, 我们与前面类似, 固定 $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, 记 $z(s) \triangleq u(x + sb, t + s), s \in \mathbb{R}$, 则

$$\dot{z}(s) = Du(x + sb, t + s) \cdot b + u_t(x + sb, t + s) = f(x + sb, t + s)$$

因此

$$\begin{aligned} u(x, t) - g(x - tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^0 \dot{z}(s) \, ds \\ &= \int_{-t}^0 f(x + sb, t + s) \, ds \\ &= \int_0^t f(x + (s - t)b, s) \, ds. \end{aligned}$$

因此

$$u(x, t) = g(x - tb) + \int_0^t f(x + (s - t)b, s) \, ds, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

是初值问题 7.4 的解. 将来会用这个方程去解一维的波动方程.

注记

注意到我们实际上是通过有效地把 PDE 转变成 ODE 最终得到 PDE 的解. 这些步骤是 **特征线法** 的一种特例, 以后可能会介绍.

第八章 Laplace(位势) 方程

为了更好地理解本章, 读者需要复习一下 Green 公式, Gauss 公式, 散度定理等内容.(如掌握的很好, 当我没说)

记 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $u = u(x)$, $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$

所有最重要的偏微分方程中一定包括 Laplace 方程(又称 位势方程)

$$\Delta u = 0 \quad (8.1)$$

以及 Poisson 方程

$$-\Delta u = f \quad (8.2)$$

在方程 8.1 和 8.2 中, $x \in U$, 且未知的是 $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x)$, 这里 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个给定的开集. 在方程 8.2 中函数 $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ 也是给定的.

定义. 满足方程 8.1 的函数 $u \in C^2$ 称为 调和函数.

Laplace 方程有很多物理解释, 此处略去.

8.1 基本解

基本解 (fundamental solution) 的来源: 研究 PDE 的一个好的方式是去找某个显式解. 由于这个 PDE 是线性的, 所以可以用显式解去找更复杂的解. 此外, 为了寻找显式解, 通常会把注意力集中在一类具有相似性质的函数.

定理. Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 是旋转不变的 (rotation invariant), 即如果 O 是正交的 n 阶方阵, 定义 $v(x) \triangleq u(Ox)$ ($x \in \mathbb{R}^n$), 则 $\Delta v = 0$. (Evans 2.5 Problem 2)

证明. 令 $y := Ox, O = (a_{ij})$. 因此

$$v(x) = u(Ox) = u(y)$$

其中 $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$, 从而

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_j} a_{ji}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_n} \end{pmatrix} = O^T \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

$$D_x \cdot v = O^T D_y \cdot u$$

从而有

$$\begin{aligned} \Delta v &= D_x v \cdot D_x v \\ &= (O^T D_y u) \cdot (O^T D_y u) \\ &= (O^T D_y u)^T O^T D_y u \\ &= (D_y u)^T (O^T)^T O^T D_y u \\ &= (D_y u)^T O O^T D_y u \\ &= (D_y u)^T D_y u \text{ because } O \text{ is orthogonal} \\ &= (D_y u) \cdot (D_y u) \\ &= \Delta u(y) = 0 \end{aligned}$$

□

由于 Laplace 方程是旋转不变的, 因此我们似乎可以先去找径向 (radial) 解, 也就是 $r = |x|$. 首先尝试在 $U = \mathbb{R}^n$ 中找到一个解 u , 具有形式 $u(x) = v(r)$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, 且选择 v (如果这样的 v 存在) 使得 $\Delta u = 0$. 首先注意到对于 $i = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

我们因此有

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right)$$

所以

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

因此 $\Delta u = 0$ 当且仅当 $v'' + \frac{n-1}{r} v' = 0$, 如果 $v' \neq 0$, 则

$$(\ln |v'|)' = \frac{v''}{v'} = \frac{1-n}{r}.$$

因此存在常数 a 使得 $v'(r) = \frac{a}{r^{n-1}}$, 因此如果 $r > 0$, 我们有

$$v(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & (n=2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & (n \geq 3) \end{cases}$$

这里 b, c 为常数. 这些观察启发我们定义如下:

定义.

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |x|, & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & (n \geq 3) \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0) \quad (8.3)$$

是 Laplace 方程的基本解. 这里 $\alpha(n) = \mathbb{R}^n$ 中单位球的体积 $= \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$

上面定义里为什么要这样选择常数在稍后将会解释清楚. 我们有时候为了方便 (abuse notation), 记 $\Phi(x) = \Phi(|x|)$ 来强调基本解是径向 (radial) 的. 另外, 我们注意有如下估计:

$$|D\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-1}}, |D^2\Phi(x)| \leq \frac{C}{|x|^n} \quad (x \neq 0) \text{ for some } C > 0 \quad (8.4)$$

下面看 Poisson 方程. 设函数 $x \mapsto \Phi(x)$ 在 $x \neq 0$ 时是调和的. 如果我们把原点移动到新的点 y , PDE 8.3 保持不变, 且函数 $x \mapsto \Phi(x-y)$ 也是关于 x 的调和函数 ($x \neq y$). 对于 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 并且注意到映射 $x \mapsto \Phi(x-y)f(y)$ ($x \neq y$) 对任意的点

$y \in \mathbb{R}^n$ 是调和的, 因此对于有限个不同的 y 构成这样的表达式之和也是调和的. 上面的推断可能表明卷积式

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(|x-y|)f(y) \, dy, & (n=2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} \, dy, & (n \geq 3) \end{cases} \end{aligned} \quad (8.5)$$

可以作为 Laplace 方程 8.1 的解, 但这是错误的. 根据估计式 8.4, $D^2\Phi(x-y)$ 在奇点 $y=x$ 附近不可积, 所以对上面的积分式求微分是没道理的, 也是不正确的 (so naive). 我们在计算 Δu 的时候需要更小心一点.

接下来为了介绍进一步的基本解的内容, 回顾如下数学分析中的定义:

定义. 如果 $\partial U \in C^1$, 则沿着 ∂U 可以定义一个单位外法向量场 $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$

定义. $u \in C^1(\overline{U})$, 称 $\frac{\partial u}{\partial \nu} \triangleq \nu \cdot Du$ 为 u 的 **法向导数**.

为简洁起见, 假设 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, 即 f 二阶连续可微且有紧支集.

定理. 记 u 为式子 8.5 所定义. 那么有

- (1) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$
- (2) $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^n

注记

式子 8.5 可以用来解 Poisson 方程 8.2

证明.

1. 根据

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y)f(x-y) \, dy \quad (8.6)$$

因此

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \left[\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \right] \, dy$$

其中 $h \neq 0, e_i = (1, \dots, 1, \dots, 0)$, 这里 1 是第 i 个分量. 然而

$$\frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} \rightarrow f_{x_i}(x - y)$$

上式在 \mathbb{R}^n 中当 $h \rightarrow 0$ 时一致收敛, 因此有

$$u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i}(x - y) dy \quad (i = 1, \dots, n)$$

类似地

$$u_{x_i x_j}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f_{x_i x_j}(x - y) dy \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (8.7)$$

表达式 8.7 的右侧关于 x 是连续的, 故 $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$

2. 由于 Φ 在 0 处的值趋于无穷 (blow up at 0), 我们需要一些计算来处理 0 这个奇点 (用以 0 为中心的小球), 固定 $\varepsilon > 0$. 则

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy + \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_x f(x - y) dy \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned} \quad (8.8)$$

由于

$$|I_\varepsilon| \leq C \|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| & (n = 2) \\ C\varepsilon^2 & (n \geq 3). \end{cases} \quad (8.9)$$

注记

$\|u\|_{L^\infty(U)} = \operatorname{ess\,sup}_U |u|$ 表示本性上确界. 本性上确界 M 是函数 f 超过 M 的点集测度是 0 的最小的那个 M . 因为零测集上无论发生什么都不会影响积分值, 所以我们在积分放缩的时候可以不考虑那些点, 可以把界放到这个本性上确界.

利用分部积分公式,

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \Delta_y f(x - y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} D\Phi(y) D_y f(x - y) dy + \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x - y) dS(y) \\ &:= K_\varepsilon + L_\varepsilon, \end{aligned} \quad (8.10)$$

这里 ν 是沿着 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的指向球 内的单位法向量. 马上可以验证

$$|L_\varepsilon| \leq \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} |\Phi(y)| \, dS(y) \leq \begin{cases} C\varepsilon |\ln \varepsilon| & (n = 2) \\ C\varepsilon & (n \geq 3). \end{cases} \quad (8.11)$$

3. 继续对 K_ε 作分部积分, 注意到

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n - B(0, \varepsilon)} \Delta \Phi(y) f(x - y) \, dy - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) \, dS(y) \\ &= - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x - y) \, dS(y) \end{aligned}$$

这里用到 Φ 是调和函数的条件. 由于

$$\begin{aligned} D\Phi(y) &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} (y \neq 0) \\ \nu &= \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} \text{ on } \partial B(0, \varepsilon) \end{aligned}$$

因此

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \text{ on } \partial B(0, \varepsilon)$$

由于 $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ 恰好是球面 $\partial B(0, \varepsilon)$ 的表面积, 则

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(0, \varepsilon)} f(x - y) \, dS(y) \\ &= -\frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} f(y) \, dS(y) \rightarrow -f(x) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

4. 结合式子 8.8 – 8.12, 并且令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 有 $-\Delta u(x) = f(x)$

□

8.2 调和函数的性质

8.2.1 平均值性质

下面考虑开集 $U \subset \mathbb{R}^n$, 且设 u 是 U 中的调和函数. 我们下面要推出很重要的 平均值性质.

$$\alpha(n) = \mathbb{R}^n \text{ 中单位球的体积} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

$n\alpha(n) = \mathbb{R}^n$ 中单位球的表面积

定理. 平均值性质: 如果 $u \in C^2(U)$ 调和, 则

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} u \, dy \quad (8.13)$$

对任意的球 $B(x, r)$ 成立.

证明.

1. 记

$$\phi(r) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) \, dS(y) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(x + rz) \, dS(z)$$

那么

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} Du(x + rz) \cdot z \, dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} Du(y) \cdot \frac{y - x}{r} \, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS(y) \\ &= \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, dy \text{ (Green)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 ϕ 是一个常数. 从而

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} u(y) \, dS(y) = u(x)$$

2. 注意到用极坐标变换 (直观上看, 一层层的薄球壳拼起来可以变成一个实心球), 以及 1 中结论

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} u \, dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,s)} u \, dS \right) ds \\ &= u(x) \int_0^r n\alpha(n)s^{n-1} \, ds \\ &= \alpha(n)r^n u(x) \end{aligned}$$

□

定理. 平均值性质逆定理: 如果 $u \in C^2(U)$ 满足

$$u(x) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u \, dS, \forall B(x,r) \subset U$$

则 u 是调和函数.

证明. (反证). 如果 Δu 不恒为 0, 则存在某个球 $B(x,r) \subset U$ 使得 (不妨设) $\Delta u > 0$ 在 $B(x,r)$ 内成立, 则对于前一定理证明中的 ϕ 有

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) \, dy > 0$$

矛盾!

□

下面介绍一些平均值性质的推论, 下设 U 是有界开集.

8.2.2 强极值原理, 边值问题唯一性

一个调和函数必定在区域边界上取得最大值, 不会在连通区域内部取得最大值除非它是一个常数.

定理. 强极大值原理: 假设 $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ 是 U 中调和函数. 则

(1)

$$\max_{\overline{U}} u = \max_{\partial U} u.$$

(2) 进一步, 如果 U 连通, 且存在一个点 $x_0 \in U$, 使得

$$u(x_0) = \max_{\overline{U}} u$$

那么 u 是 U 中的常数.

其中 (1) 是 Laplace 方程的极值原理, (2) 是强极大值原理. 将 u 替换成 $-u$, 我们可以将定理中的 \max 换成 \min .

证明. 假设存在 $x_0 \in U$ 满足 $u(x_0) = M \triangleq \max_{\bar{U}} u$, 则对于 $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial U)$, 根据平均值性质有

$$M = u(x_0) = \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x_0, r)} u \, dy \leq M$$

不等式成立当且仅当在 $B(x_0, r)$ 内有 $u \equiv M$, 因此 $u(y) = M, \forall y \in B(x_0, r)$. 因此集合 $S = \{x \in U | u(x) = M\}$ 既是开集, 又是相对于 U 的闭集, 因此如果 U 连通, 则 $S = U$. 这证明了 (2), (1) 也证完. \square

定理. 强极值原理可以得到, 如果 U 是连通的且 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases}$$

其中 $g \geq 0$, 那么如果 g 在 ∂U 某处取得正值, 则在 U 的任何一点都满足 $u > 0$.

证明. 如果存在某点 $x \in \partial U$, 使得 $g(x) > 0$, 那么由于 $u \in C(\bar{U})$, 我们知道 u 必定在足够靠近 x 的内点为正. 现在对于 $-u$ 应用强极大值原理, 只有下面这两种情况:

- u 是常数, 因此在 U 的任何一点都满足 $u > 0$.
- u 在边界取得最小值, 由于在点 x 处 $u > 0$, 那么 $\min_{\bar{U}} u > 0$, 因此在 U 的内部 $u > 0$.

\square

极值原理的一个重要应用就是得到 Poisson 方程边值问题解的唯一性.

定理. 唯一性: $g \in C(\partial U), f \in C(U)$. 那么边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & x \in U \\ u = g & x \in \partial U \end{cases} \quad (8.14)$$

存在至多一个解 $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$

证明. 如果 u, v 都满足 8.14, 则 $\omega = \pm(u - v)$ 是调和函数, 且在边界上为 0, 由强极大值原理, $\omega \equiv 0, \forall x \in \bar{U}$. 因此解是唯一的. \square

8.2.3 正则性

接下来我们证明如果 $u \in C^2$ 是调和函数, 则 $u \in C^\infty$. 因此 u 无穷次可微. 首先补充一些技术, 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是开集, $\varepsilon > 0$, 记

$$U_\varepsilon \triangleq \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

定义. 定义 $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 如下:

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

这里选择 $C > 0$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, dx = 1$. η 称为 **磨光子** (光滑化算子, standard mollifier). 记

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \forall \varepsilon > 0$$

函数 $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon \, dx = 1, \text{spt}(\eta_\varepsilon) \subset B(0, \varepsilon)$$

$\text{spt}(u)$ 表示 u 函数值不为 0 的点构成的集合.

定理. 光滑性: 如果 $u \in C(U)$ 在任意的球 $B(x, r) \subset U$ 满足平均值性质, 那么

$$u \in C^\infty(U)$$

注记

注意 u 在 ∂U 上可能不光滑, 甚至不连续.

证明. 设 η 为一个磨光子, 且它是一个径向的函数. 记

$$u^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u \text{ in } U_\varepsilon = \{x \in U \mid \text{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$$

则 $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$. 下面我们通过证明 $u \equiv u^\varepsilon$ on U_ε 来说明 u 是光滑的. 如果 $x \in U_\varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x) &= \int_U \eta_\varepsilon(x-y)u(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B(x,r)} u \, dS \right) \, dr \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} u(x) \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\alpha(n)r^{n-1} \, dr \text{ (平均值性质)} \\ &= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} \eta_\varepsilon \, dy = u(x) \end{aligned}$$

因此 $u^\varepsilon \equiv u$ in U_ε , 则 $u \in C^\infty(U_\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$ □

注记

我们对任给的一个函数 f , 它可以很“粗糙”, 粗糙不利于很多性质研究, 所以我们希望通过某种方式可以使 f 变得光滑起来. 这可以通过卷积得到, 下面证明 $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$

证明. 固定 $x \in U_\varepsilon, i \in \{1, \dots, n\}, h$ 非常小使得 $x + he_i \in U_\varepsilon$, 那么

$$\begin{aligned} \frac{u^\varepsilon(x + he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) \, dy \end{aligned}$$

其中 V 是某个开集且 $V \subset \subset U$. 由于

$$\frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \eta_{x_i}\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right)$$

是一致的. 则 $u_{x_i}^\varepsilon(x)$ 存在且等于

$$\int_U \eta_{\varepsilon, x_i}(x - y) f(y) \, dy$$

类似可得 $D^\alpha u^\varepsilon(x)$ 存在且对于任意多重指标 α

$$D^\alpha u^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) f(y) \, dy \quad (x \in U_\varepsilon)$$

□

8.2.4 梯度估计

利用平均值性质可以推出许多关于调和函数的不等式, 这些估计式可以用来得到调和函数的解析性. 先引入一些记号. 记 $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可积的

$$\|u\|_{L^p(U)} := \left(\int_U |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < +\infty$$

设 $\alpha_i \in \mathbb{N}^+, 1 \leq i \leq n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 叫做多重指标. 记 $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ 为多重指标的阶, 定义

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

如果 k 是某个非负整数, 则

$$D^k u(x) := \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\}$$

$$|D^k u| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

定理. 梯度估计: 设 u 是 U 中的调和函数, 则

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \quad (8.15)$$

对于任意的球 $B(x_0, r) \subset U$ 与任意的多重指标 $\alpha, |\alpha| = k$ 都成立. 这里

$$C_0 = \frac{1}{\alpha(n)}, C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)} \quad (k = 1, \dots) \quad (8.16)$$

证明.

1. 首先看 $k = 0, 1$ 的情况, $k = 0$ 可以由平均值公式直接得到, 对 Laplace 方程两端

求偏导数可知 u_{x_i} 也是调和的.

$$\begin{aligned}
 |u_{x_i}(x_0)| &= \left| \frac{1}{\alpha(n) \left(\frac{r}{2}\right)^n} \int_{B(x_0, \frac{r}{2})} u_{x_i} \, dx \right| \\
 &= \left| \frac{2^n}{\alpha(n) r^n} \int_{\partial B(x_0, \frac{r}{2})} u \nu_i \, dS \right| \text{ (Green)} \\
 &\leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{2}))}
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

如果 $x_0 \in \partial B(x_0, \frac{r}{2})$, 则 $\partial B(x_0, \frac{r}{2}) \subset B(x_0, r) \subset U$, 因此

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha(n)} \left(\frac{2}{r}\right)^n \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

结合 $k=0$ 的情况, 当 $|\alpha|=1$ 我们得到

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{2^{n+1}n}{\alpha(n)} \frac{1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

即 $k=1$ 的情况成立

2. 下面看 $k \geq 2$ 的情况, 用归纳法, 假设定理中的式子 8.15, 8.16 对于任意的球 $B(x_0, r) \subset U$ 以及任意的多重指标 α ($|\alpha| \leq k-1$) 都成立. 固定 $B(x_0, r) \subset U$, 并令 $|\alpha| = k$. 则

$$D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}, \text{ 对某个 } i \in \{1, \dots, n\}, |\beta| = k-1$$

类似于式子 8.17 的计算可得

$$D^\alpha u(x_0) \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, \frac{r}{k}))}$$

如果 $x \in \partial B(x_0, \frac{r}{k})$ 则 $B(x, \frac{k-1}{k}r) \subset B(x_0, r) \subset U$. 因此利用归纳假设有

$$|D^\beta u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\alpha(n) \left(\frac{k-1}{k}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

结合这两个不等式可得

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\alpha(n)r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

因此 $|\alpha| = k$ 的情况证毕.

□

定理. Liouville. 设 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是有界调和函数, 则 u 是常数.

证明. 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 则根据梯度估计

$$\begin{aligned} |Du(x_0)| &\leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\ &= \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \int_{B(x_0, r)} |u(x)| \, dx \\ &\leq \frac{\sqrt{n}C_1}{r^{n+1}} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(x_0, r)} dx \\ &= \frac{\sqrt{n}C_1 \alpha(n)}{r} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

因此 $Du \equiv 0, u$ 是一个常数. □

定理. 记 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n), n \geq 3$. 那么 Poisson 方程 $-\Delta u = f, x \in \mathbb{R}^n$ 的任何有界解都形如

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy + C \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

C 为某个常数.

证明. 由于 $\Phi(x) \rightarrow 0, (|x| \rightarrow \infty), \forall n \geq 3$, 则

$$\tilde{u}(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy$$

是 Poisson 方程在 \mathbb{R}^n 中的有界解. 如果 u 是另外一个解, 则根据 Liouville 定理 $\omega := u - \tilde{u}$ 是个常数. □

注记

如果 $n = 2, \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln |x|$ 在 $|x| \rightarrow \infty$ 处无界
 $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y)f(y) \, dy$ 也可能无界.

8.2.5 解析性

定义. 解析: 函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称作在 x_0 附近解析, 如果存在 $r > 0$ 和一系列常数 $\{f_\alpha\}$, 满足

$$f(x) = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (x - x_0)^{\alpha}, (|x - x_0| < r)$$

这个求和表示对所有多重指标 α 进行求和.

注记

如果 f 在 x_0 附近解析, 则在 x_0 附近 $f \in C^\infty$. 另外, $f_{\alpha} = \frac{D^{\alpha} f(x_0)}{\alpha!}$, 这里 $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$, 因此 f 等于它在 x_0 附近的 Taylor 展开式:

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(x_0) (x - x_0)^{\alpha}, (|x - x_0| < r)$$

定理. 解析性: 设 u 是 U 中的调和函数, 则 u 是 U 中解析.

证明. 固定 $x_0 \in U$, 我们要证 u 可以被一个 x_0 邻域内的收敛级数来表示. 记

$$r = \frac{1}{4} \text{dist}(x_0, \partial U)$$

则有

$$M := \frac{1}{\alpha(n)r^n} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} < \infty$$

$\forall B(x_0, r), B(x, r) \subset B(x_0, 2r) \subset U$, 则根据前面的梯度估计

$$|D^{\alpha} u_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}| \leq M \left(\frac{2^{n+1}n}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}$$

根据 e^x 的 Taylor 展开式, 不难验证对于任意正整数 k , $\frac{k^k}{k!} < e^k$, 因此

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!$$

对于任意多重指标 α 成立. 根据多项式展开

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

从而 $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$. 结合这两个不等式有

$$|D^\alpha u_{L^\infty(\partial B(x_0, r))}| \leq CM \left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha! \quad (8.18)$$

下面我们证明 u 的 Taylor 级数收敛, 只需证余项收敛于 0. 取

$$|x - x_0| < \frac{r}{2^{n+2}n^3e} \quad (8.19)$$

则余项为:

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x_0)(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{|\alpha|=N} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)^\alpha}{\alpha!}, \exists t = t(x) \in [0, 1] \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq CM \sum_{|\alpha|=N} \left(\frac{2^{n+1}n^2e}{r} \right)^N \left(\frac{r}{2^{n+2}n^3e} \right)^N \\ &\leq CM n^N \frac{1}{(2n)^N} = \frac{CM}{2^N} \rightarrow 0 \quad \text{as } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

□

8.2.6 Harnack 不等式

记 $V \subset\subset U$ 表示 $V \subset \bar{V} \subset U$, 且 \bar{V} 为紧集.

定理. Harnack 不等式: 对每个连通开集 $V \subset\subset U$, 存在一个正的常数 C (只依赖于 V 的选取), 使得

$$\sup_V u \leq C \inf_V u$$

不等式对任意定义在 U 上的非负调和函数 u 成立.

注记

特别地

$$\frac{1}{C}u(y) \leq u(x) \leq Cu(y), \forall x, y \in V$$

这些不等式表明 V 里的非负调和函数值是可以比较大小的, 在 V 中任意点 $u(x)$ 不可能太小或太大, 除非 u 本身在 V 中非常小或非常大. 直观来看, 由于 V 离 ∂U 有一定距离, 则有“一定的空间来产生 Laplace 方程的平均值效应”.

证明. 记 $r := \frac{1}{4}\text{dist}(V, \partial U)$. 选择 $x, y \in V, |x - y| \leq r$. 那么

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(x, 2r)} u \, dz \geq \frac{1}{\alpha(n)2^n r^n} \int_{B(y, r)} u \, dz \\ &= \frac{1}{2^n} u(y) \end{aligned}$$

因此

$$2^n u(y) \geq u(x) \geq \frac{1}{2^n} u(y), x, y \in V, |x - y| \leq r$$

由于 V 连通并且 \bar{V} 紧致, 我们可以用有限个球 $\{B_i\}_{i=1}^N$ 来覆盖 \bar{V} , 且每个球的半径为 $\frac{r}{2}$, $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset, \forall i = 2, \dots, N$. 因此

$$u(x) \geq \frac{1}{2^{n(N+1)}} u(y), \forall x, y \in V$$

□

8.3 Green 函数

下面设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集且 $\partial U \in C^1$

8.3.1 Green 函数的引入

设 $u \in C^2(\bar{U})$ 是任一函数, 固定 $x \in U$, 选择足够小的 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$, 并且在区域 $V_\varepsilon := U - B(x, \varepsilon)$ 上对 $u(y)$ 和 $\Phi(y - x)$ 使用 Green 公式

($\Phi(x)$ 是Laplace方程基本解)

$$\begin{aligned}
& \int_{V_\varepsilon} u(y) \Delta \Phi(y-x) - \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy \\
&= \int_{\partial V_\varepsilon} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS(y) \\
&= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS(y) + \\
&+ \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \, dS(y)
\end{aligned} \tag{8.20}$$

ν 是 ∂V_ε 的单位外法向量. 其中 $\Delta \Phi(y-x) = 0, (x \neq y)$, 并注意到

$$\left| \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) \, dS(y) \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \max_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi| = o(1), (\varepsilon \rightarrow 0)$$

另外, 由于 $D\Phi(y) = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y}{|y|^n} (y \neq 0)$, 且

$$\nu = \frac{-y}{|y|} = -\frac{y}{\varepsilon} (y \in \partial B(0,\varepsilon)),$$

则根据法向导数的定义,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \nu \cdot D\Phi(y) = \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}}, y \in \partial B(0,\varepsilon)$$

由于 $n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}$ 是球面 $\partial B(0,\varepsilon)$ 的表面积, 则

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \, dS(y) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)\varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} u(y) \, dS(y) \rightarrow u(x) (\varepsilon \rightarrow 0).
\end{aligned}$$

因此, 令 10.15 中 $\varepsilon \rightarrow 0$, 有

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial U} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \, dS(y) \\
&- \int_U \Phi(y-x) \Delta u(y) \, dy, \forall x \in U, \forall u \in C^2(\bar{U})
\end{aligned} \tag{8.21}$$

根据这个式子, 如果我们知道了 Δu 在 U 内的值, 以及在边界 ∂U 上 $u, \frac{\partial u}{\partial \nu}$ 的值. 我们就能解出 $u(x)$ 了. 但是, 只是给了 u 的边界值的 Poisson 方程, 并不知道

$\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 沿着边界的取值. 因此上式 10.16 需要做出一些调整, 把 $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 消掉.

下面固定 x , 引入修正函数 (corrector function) $\phi^x = \phi^x(y)$, 满足下面的边界条件:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } U \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{on } \partial U \end{cases} \quad (8.22)$$

再次使用 Green 公式

$$\begin{aligned} - \int_U \phi^x(y) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \phi^x(y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \\ &= \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial \phi^x}{\partial \nu}(y) - \Phi(y - x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS(y) \end{aligned} \quad (8.23)$$

再引入如下定义:

定义. 格林函数: 区域 U 上的格林函数为

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y) \quad (x, y \in U, x \neq y)$$

采用这个概念, 将 8.23 式加到 10.16 式, 我们发现

$$u(x) = - \int_{\partial U} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) - \int_U G(x, y) \Delta u(y) dy \quad (x \in U) \quad (8.24)$$

其中 $\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = D_y G(x, y) \cdot \nu(y)$ 是 G 关于 y 的外法向导数. 观察到, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ 在式子 8.24 中没有出现, 这就是我们引入 ϕ^x 的目的.

下面假设 $u \in C^2(\overline{U})$ 是下面边值问题的解

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \quad (8.25)$$

这里 f, g 是给定连续函数, 结合式子 8.24, 得如下解的表达式

定理. 格林函数表示的解: 如果 $u \in C^2(\overline{U})$ 是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases}$$

的解, 则

$$u(x) = - \int_{\partial U} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) dS(y) + \int_U G(x, y) f(y) dy \quad (x \in U) \quad (8.26)$$

给定区域 U , 如果可以构建 Green 函数 G , 那么我们就要公式来解决边值问题

8.25. 不过这是个非常困难的问题, 只有当 U 的形状非常简单时才容易解出.

固定 $x \in U$, 把 G 看成 y 的函数, 则形式上可以写成

$$\begin{cases} -\Delta G = \delta_x & \text{in } U \\ G = 0 & \text{on } \partial U \end{cases}$$

其中 δ_x 指 Dirac 测度.

在计算某些具体的例子之前, 我们先证明一个定理:

定理. 格林函数的对称性 (倒易性): 对所有 $x, y \in U, x \neq y$, 我们有

$$G(y, x) = G(x, y)$$

证明. 固定 $x, y \in U, x \neq y$. 记

$$v(z) := G(x, z), w(z) := G(y, z) \quad (z \in U)$$

则 $\Delta v(z) = 0 (z \neq x), \Delta w(z) = 0 (z \neq y)$, 并且在边界 ∂U 上有 $w = v = 0$. 因此对充分小的 $\varepsilon > 0$, 在区域 $V := U - [B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)]$ 上使用 Green 公式, 有

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} \omega - \frac{\partial \omega}{\partial \nu} v dS(z) = \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} \omega dS(z) \quad (8.27)$$

其中 ν 是 $\partial B(x, \varepsilon) \cup \partial B(y, \varepsilon)$ 的单位内法向量. 而 ω 在 x 点附近光滑, 则

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \omega}{\partial \nu} v dS \leq C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B(x, \varepsilon)} |v| = o(1) \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0$$

□

另一方面, $v(z) = \Phi(z - x) - \phi^x(z)$, 这里 ϕ^x 在 U 内光滑, 则有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} \omega \, dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - z) \omega(z) \, dS = \omega(x)$$

则式子 8.27 左边收敛到 $\omega(x)(\varepsilon \rightarrow 0)$, 同理可得右边收敛到 $v(y)$, 因此

$$G(y, x) = \omega(x) = v(y) = G(x, y)$$

接着我们介绍半空间以及球的 Green 函数, 我们在学复变函数的共形映射部分的时候, 恰好重点讲了上半平面以及单位球的共形映射, 原因无非是这样的形状非常“好看”.

8.3.2 半空间的 Green 函数

半空间是指

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n > 0\}$$

尽管这一区域无界, 在前面的计算不能直接应用于这里, 但我们可以尝试使用前面的想法来构造 Green 函数, 然后再验证对应的表达式是否成立.

定义. 如果 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, 则它关于平面 $\partial \mathbb{R}_+^n$ 的对称点是

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

下面我们解如下 PDE:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{on } \partial \mathbb{R}_+^n \end{cases}$$

令

$$\phi^x(y) := \Phi(y - \tilde{x}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^n)$$

现在的想法是把奇点 $x \in \mathbb{R}_+^n$ 对称到 $\tilde{x} \notin \mathbb{R}_+^n$ 中, 从而由 Φ 来构造修正函数 ϕ^x , 记

$$\phi^x(y) = \phi(y - x) \quad \text{if } y \in \partial \mathbb{R}_+^n$$

则可得到 10.17

定义. 半空间 \mathbb{R}_+^n 的 Green 函数定义为

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi(y - \tilde{x}) \quad (x, y \in \mathbb{R}_+^n, x \neq y)$$

因此有

$$\begin{aligned} G_{y_n}(x, y) &= \Phi_{y_n}(y - x) - \Phi_{y_n}(y - \tilde{x}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{|y - x|^n} - \frac{y_n + x_n}{|y - \tilde{x}|^n} \right] \end{aligned}$$

于是如果 $y \in \mathbb{R}_+^n$, 则

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = -G_{y_n}(x, y) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n}$$

下面设 u 满足下面的边界上的初值问题:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (8.28)$$

则根据 8.26, 我们想要的结果是

$$u(x) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(y)}{|x - y|^n} dy \quad (x \in \mathbb{R}_+^n) \quad (8.29)$$

函数

$$K(x, y) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x - y|^n} \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n)$$

是 \mathbb{R}_+^n 的 Poisson 核, 式子 8.30 是 Poisson 公式. 下面直接验证 8.30 确实是边值问题 8.28 的解.

定理. 半空间的 Poisson 公式: 设 $g \in C(\mathbb{R}^{n-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, 定义 u 为 8.30, 则

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n) \cup L^\infty(\mathbb{R}_+^n)$
2. $\Delta u = 0$ in \mathbb{R}_+^n
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_n^0 \\ x \in \mathbb{R}_+^n}} u = g(x^0), \forall x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n$

证明.

1. 固定 x , 映射 $y \mapsto G(x, y)$ 在除了 $y = x$ 之外的地方调和, 由于 $G(x, y) = G(y, x)$, 则 $x \mapsto G(x, y)$ 在除了 $x = y$ 以外的地方调和, 由于调和函数的偏导数仍然是调和的, 因此 $x \mapsto -\frac{\partial G}{\partial y_n}(x, y) = K(x, y), \forall x \in \mathbb{R}_+^n, y \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

2. 直接计算可得

$$1 = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy, \forall x \in \mathbb{R}_+^n \quad (8.30)$$

注记

其实并不好算, 具体计算见如下链接: [MathStackExchange](#)

因为 g 有界, 则 u 也有界. 由于 $x \mapsto K(x, y)$ 在 $x \neq y$ 处光滑, 容易验证 $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, 且

$$\Delta u = \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \Delta_x K(x, y) g(y) dy = 0 \quad (x \in \mathbb{R}_+^n)$$

3. 固定 $x^0 \in \partial\mathbb{R}_+^n, \varepsilon > 0$, 选充分小的 $\delta > 0$ 使得, 当 $|y - x^0| < \delta, y \in \partial\mathbb{R}_+^n$ 时有

$$|g(y) - g(x^0)| < \varepsilon \quad (8.31)$$

那么如果 $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}, x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x^0)| &= \left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{\partial\mathbb{R}_+^n \cup B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\partial\mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} K(x, y) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &=: I + J \end{aligned} \quad (8.32)$$

由 8.30, 8.31 容易验证

$$I \leq \varepsilon \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(x, y) dy = \varepsilon$$

另一方面, 如果 $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}, |y - x^0| \geq \delta$ (注意 J 积分的积分区域), 我们有

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2} |y - x^0|$$

因此 $|y - x| \geq \frac{1}{2} |y - x^0|$, (放缩的 motivation: 让会动的 x 变成固定的 x^0), 则

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} K(x, y) \, dy \\ &\leq \frac{2^{n+2}\|g\|_{L^\infty} x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n - B(x^0, \delta)} |y - x^0|^{-n} \, dy \\ &\rightarrow 0 \quad \text{as } x_n \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

将这个计算结合估计 8.32 可得, 当 $|x - x^0|$ 充分小时有 $|u(x) - g(x^0)| \leq 2\varepsilon$.

□

8.3.3 球上的 Green 函数

为了构造单位球 $B(0, 1)$ 的 Green 函数, 与半空间类似, 我们先通过球面 $\partial B(0, 1)$ 定义一个镜像点.

定义. 如果 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

$$\tilde{x} = \frac{x}{|x|^2}$$

称为 x 关于 $\partial B(0, 1)$ 的对偶点, 映射 $x \rightarrow \tilde{x}$ 叫通过单位球面 $\partial B(0, 1)$ 的反演.

下面我们通过单位球面的反演来计算单位球 $U = B^0(0, 1)$ 的 Green 函数. 固定 $x \in B^0(0, 1)$. 首先要找一个修正函数 $\phi^x = \phi^x(y)$ 满足:

$$\begin{cases} \Delta \phi^x = 0 & \text{in } B^0(0, 1) \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{on } \partial B(0, 1) \end{cases} \quad (8.33)$$

Green 函数为

$$G(x, y) = \Phi(y - x) - \phi^x(y) \quad (8.34)$$

现在的想法是把奇点 $x \in B^0(0, 1)$ 反演到 $\tilde{x} \notin B(0, 1)$. 下面设 $n \geq 3$, 映射 $y \mapsto \Phi(y - \tilde{x})$ 在 $y \neq \tilde{x}$ 调和. 因此 $y \mapsto |x|^{2-n} \Phi(y - \tilde{x})$ 在 $y \neq \tilde{x}$ 调和, 所以

$$\phi^x(y) := \Phi(|x| (y - \tilde{x})) \quad (8.35)$$

是在 U 中调和的. 另外, 如果 $y \in \partial B(0, 1), x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} |x|^2 |y - \tilde{x}|^2 &= |x|^2 \left(|y|^2 - \frac{2y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) \\ &= |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x - y|^2 \end{aligned}$$

因此 $(|x| |y - \tilde{x}|)^{-(n-2)} = |x - y|^{-(n-2)}$. 则

$$\phi^x(y) = \Phi(y - x) \quad (y \in \partial B(0, 1)) \quad (8.36)$$

即为满足条件的修正函数.

定义. 单位球的 *Green* 函数是

$$G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi(|x| (y - \tilde{x})) \quad (x, y \in B(0, 1), x \neq y) \quad (8.37)$$

这个公式对 $n = 2$ 也成立.

下面假设 u 是下面边值问题的解

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^0(0, 1) \\ u = g & \text{in } \partial B(0, 1) \end{cases} \quad (8.38)$$

根据式子 8.26, 我们得到

$$u(x) = - \int_{\partial B(0, 1)} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \, dS(y) \quad (8.39)$$

根据公式 8.37

$$G_{y_i}(x, y) = \Phi_{y_i}(y - x) - \Phi(|x| (y - \tilde{x}))_{y_i}$$

但是

$$\Phi_{y_i}(y - x) = \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}$$

且当 $y \in \partial B(0, 1)$ 时有

$$\Phi(|x| (y - \tilde{x}))_{y_i} = \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{(|x| |y - \tilde{x}|)^n} = - \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{y_i |x|^2 - x_i}{|x - y|^n}$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) &= \sum_{i=1}^n y_i G_{y_i}(x, y) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1}{|x-y|^n} \sum_{i=1}^n y_i \left((y_i - x_i) - y_i |x|^2 + x_i \right) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^n}\end{aligned}$$

因此公式 8.39 可以化为

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y)$$

下面把单位球推广, 设 u 是下面的边值问题的解

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B^0(0, r) \\ u = g & \text{in } \partial B(0, r) \end{cases} \quad (8.40)$$

其中 $r > 0$. 作变换 $\tilde{u}(x) = u(rx)$ 可以变成单位球的情形, 相应地 $\tilde{g}(x) = g(rx)$. 从而有球 $B(0, r)$ 情形的 Poisson 公式

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \int_{\partial B(0,r)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y) \quad (x \in B^0(0, r)) \quad (8.41)$$

函数

$$K(x, y) := \frac{r^2 - |x|^2}{n\alpha(n)r} \frac{1}{|x-y|^n}$$

是球 $B(0, r)$ 的 Poisson 核.

定理. 球上的 Poisson 公式: 假设 $g \in C(\partial B(0, r))$ 且定义 u 如式子 8.41. 则

1. $u \in C^\infty(B^0(0, r))$
2. $\Delta u = 0$ in $B^0(0, r)$
3. $\lim_{\substack{x \rightarrow x_n^0 \\ x \in B^0(0, r)}} u(x) = g(x^0), \forall x^0 \in \partial B^0(0, r)$

证明与上半空间情形类似.

8.4 能量方法

能量方法与 PDE 以后会涉及到的变分法 (要用泛函分析) 紧密相连, 我还没学泛函, 这里只做初步探索, 利用一些技术处理各种表达式的 L^2 范数. 考虑边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{on } \partial U \end{cases} \quad (8.42)$$

我们已经用极大值原理证明了唯一性, 我们现在用另一种简单的方式来证明. 设 U 是有界开集, 且 ∂U 是 C^1 的.

定理. 唯一性: 式 8.42 至多存在一个解 $u \in C^2(\bar{U})$.

证明. 设 u, v 都是解, 记 $\omega := u - v$, 则 $\Delta \omega = 0$. 由分部积分公式

$$0 = - \int_U \omega \Delta \omega \, dx = \int_U |D\omega|^2 \, dx$$

因此在 U 中 $D\omega \equiv 0$ 且因为 $\omega = 0$ 在 ∂U 上恒成立, 我们得到 $\omega = u - v \equiv 0$. \square

下面我们要证明 Poisson 方程可以被刻画为一个泛函的极小值. 我们定义能量泛函

$$I[\omega] := \int_U \frac{1}{2} |D\omega|^2 - \omega f \, dx$$

ω 属于容许集 (admissible set)

$$\mathcal{A} := \{\omega \in C^2(\bar{U}) | \omega = g \text{ on } \partial U\}$$

定理. Dirichlet 原理: 设 $u \in C^2(\bar{U})$ 为 Poisson 方程 8.42 的解, 则

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega] \quad (8.43)$$

相反, 如果 $u \in \mathcal{A}$, 满足上式 (8.43), 则 u 是方程 8.42 的解.

证明.

1. 选 $\omega \in \mathcal{A}$, 则式子 8.42 推出

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U (-\Delta u - f)(u - \omega) \, dx \\ &= \int_U Du \cdot D(u - \omega) - f(u - \omega) \, dx \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \int_U |Du|^2 - uf \, dx &= \int_U Du \cdot D\omega - \omega f \, dx \\ &\leq \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 \, dx + \int_U \frac{1}{2} |D\omega|^2 - \omega f \, dx \end{aligned}$$

因此,

$$I[u] \leq I[\omega] \quad (\omega \in \mathcal{A}) \quad (8.44)$$

因为 $u \in \mathcal{A}$, 所以 $I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$.

2. 反过来, 设 $I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$, 固定任意 $v \in C_c^\infty(U)$, 并记

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad (\tau \in \mathbb{R})$$

因为 $u + \tau v \in \mathcal{A}, \forall \tau$, 则标量函数 $i(\cdot)$ 在 0 处取最小值. 如果有导数, 则必有

$$i'(0) = 0$$

但是

$$\begin{aligned} i(\tau) &= \int_U \frac{1}{2} |Du + \tau Dv|^2 - (u + \tau v)f \, dx \\ &= \int_U \frac{1}{2} |Du|^2 + \tau Du \cdot Dv + \frac{\tau^2}{2} |Dv|^2 - (u + \tau v)f \, dx \end{aligned}$$

因此

$$0 = i'(0) = \int_U Du \cdot Dv - vf \, dx = \int_U (-\Delta u - f)v \, dx$$

这个式子对 $\forall v \in C_c^\infty(U)$ 都成立, 则 $\Delta u = f, x \in U$ 成立.

□

注记

Dirichlet 原理是变分法用在 Laplace 方程的情况.

8.5 分离变量法

分离变量法用于求解特殊区域内三类典型二阶方程的初边值 (混合) 问题和边值问题. 这部分具有高强度的计算量, 一定用手拿着笔在纸上计算每一步. 否则失之毫厘, 谬以千里.

利用分离解将偏微分问题化为常微分问题, 一般求解步骤是

1. 边界齐次化
2. 对齐次方程和齐次边界分离变量后求解特征值问题和其他常微分方程
3. 形式解代入初始条件或非齐次边界后利用广义 Fourier 展开确定系数

用分离变量法可以推导圆盘上的 Poisson 公式: 其中 $u = u(x, y)$. 作 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 \leq l^2 \\ u|_{x^2+y^2=l^2} = f(\theta) \end{cases}$$

作变量代换后, 问题变成

$$\begin{cases} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \\ u|_{r=l} = f(\theta) \end{cases}$$

设 $u = R(r)T(\theta)$, 则可化为

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

其中 λ 是常数. 注意 $T(\theta)$ 是 2π 是周期函数. 根据

$$\Delta u = 0 \Rightarrow |u(0)| < +\infty \Rightarrow |R(0)| < +\infty$$

- 若 $\lambda = 0$, 则 $T = B_0\theta + \frac{A_0}{2}$, 而 T 为周期函数, 则 $B_0 = 0$.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $T = Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$, 不可能为周期函数 (否则 $T \equiv 0$)
- 若 $\lambda > 0$, 则 $T = A \cos \sqrt{\lambda}\theta + B \sin \sqrt{\lambda}\theta$, 根据周期性可知 $n \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = 2\pi, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda_n = n^2$. 于是对于的特征函数是

$$T_n = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

注意到 $r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$ 是 Euler 方程, 作代换 $r = e^s$, 最终可以解得

$$R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}$$

但是 $|R(0)| \leq +\infty \Rightarrow D_n = 0$ 因此, 有如下通解

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

根据边界条件可知

$$a_n = \frac{1}{\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$b_n = \frac{1}{\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

则

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{l}\right)^n f(\varphi) \cos(n\theta - n\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi l^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \left[l^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\varphi - \theta) \right] \, d\varphi \\ &= \cdots = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2rl \cos(\theta - \varphi) + r^2} \, d\varphi \end{aligned}$$

此即 Poisson 公式.

例题 8.5.1.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1(0) \\ u = \cos \theta & \text{on } \partial B_1(0) \end{cases}$$

求 $u(0, 0)$

解.

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0$$

□

例题 8.5.2.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 1 < r < 2 \\ u_r|_{r=1} = \sin \theta \\ u_r|_{r=2} = 0 \end{cases}$$

解. 设 $u = R(r)\Theta(\theta)$, 则

$$\begin{aligned} \Delta u &= R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \\ \Rightarrow \frac{r^2R'' + rR'}{R} &= -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda \\ \Rightarrow \begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \end{cases} \\ \Theta_n &= a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \end{aligned}$$

易见

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + a \ln r + b$$

由边界条件可设

$$\begin{aligned} u &= \left(cr + \frac{d}{r} \right) \sin \theta + a \ln r + b \\ u_r &= \left(c - \frac{d}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{a}{r} \\ \begin{cases} u_r|_{r=1} = (c-d) \sin \theta + a = \sin \theta \\ u_r|_{r=2} = \left(c - \frac{d}{4} \right) \sin \theta + \frac{a}{2} = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -\frac{1}{3} \\ d = -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \Rightarrow u &= \left(-\frac{r}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{r} \right) \sin \theta + b = -\frac{y}{3} - \frac{4}{3} \frac{y}{x^2 + y^2} + b \end{aligned}$$

□

例题 8.5.3.

$$\begin{cases} \Delta u = xy & \text{in } r < a \\ u = 0 & \text{on } r = a \end{cases}$$

解. 令 $v = u - \frac{1}{12}(x^3y + xy^3)$ 则

$$\Delta v = \Delta u - xy = 0$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } r < a \\ v = -\frac{1}{12}(x^3y + xy^3) & \text{on } r = a \end{cases}$$

即

$$v = -\frac{a^4}{12}(\cos^3\theta \sin\theta + \sin^3\theta \cos\theta) = -\frac{a^4}{12}\sin\theta \cos\theta$$

从而有

$$v = -\frac{a^2}{12}r^2 \sin\theta \cos\theta \quad \text{in } r < a$$

即 $v = -\frac{a^2}{12}xy$

$$u = \frac{1}{12}(x^3y + xy^3) - \frac{a^2}{12}xy$$

□

第九章 热传导方程

热传导方程 (heat equation)

$$u_t - \Delta u = 0 \quad (9.1)$$

以及非齐次热传导方程

$$u_t - \Delta u = f \quad (9.2)$$

其中给定合适的初值与边界条件. 这里 $t > 0, x \in U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集. 未知的是 $u : \bar{U} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x, t)$, 拉普拉斯算子作用于空间变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\Delta u = \Delta_x u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}.$$

下面的主要思路是用调和函数中用到的方法来类比热传导方程 (只不过更加复杂), 所以一些思路是类似的.

9.1 基本解

注意到热传导方程包括关于时间变量 t 的一阶偏导数和关于空间变量 x 的二阶偏导数. 因此, 如果 $u(x, t)$ 是热传导方程 9.1 的解, 那么 $u(\lambda x, \lambda^2 t), t \in \mathbb{R}$ 也是. 因此 $\frac{r^2}{t} (r = |x|)$ 对热传导方程来说非常重要. 从而我们需要寻找一个形如

$$u(x, t) = v\left(\frac{|x|^2}{t}\right) \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n)$$

的解. 虽然上面的方法最终可以找到我们需要的东西. 但是如果考察形如

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \quad (9.3)$$

的解 u 可能会更快. 这里常数 α, β , 函数 $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是待定的. 容易知道, 上式等价于 $\forall \lambda > 0, x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ 都有

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t)$$

让 $\lambda = t^{-1}$, 则式子 9.3 变为 $v(y) := u(y, 1)$. 下面把式子 9.3 代入 9.1, 有

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0 \quad (9.4)$$

其中 $y = t^{-\beta} x$. 如果要把这个式子转化为只有 y , 我们可以取 $\beta = \frac{1}{2}$, 就可以把 t 消去得

$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv(y) + \Delta v(y) = 0 \quad (9.5)$$

为了简化问题, 下面设 v 是径向的, 即 $v(y) = \omega(|y|), \omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. 则 9.5 变为

$$\alpha \omega + \frac{1}{2} r \omega' + \omega'' + \frac{n-1}{r} \omega' = 0$$

下面取 $\alpha = \frac{n}{2}$, 则变为

$$\begin{aligned} \left(r^{n-1} \omega' + \frac{1}{2} r^n \omega \right)' &= 0 \\ \Rightarrow r^{n-1} \omega' + \frac{1}{2} r^n \omega &= C, \exists C \end{aligned}$$

假设 $\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \omega' = 0$, 则 $C = 0, \omega' = -\frac{1}{2} r \omega$, 从而存在常数 b 使得 $\omega' = b r^{-\frac{r^2}{4}}$.

因此我们得到 $\frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 满足热传导方程.

定义. 热传导方程的基本解:

$$\Phi(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

为热传导方程的基本解.

注意到 Φ 在 $(0, 0)$ 处为奇点. 有时候写 $\Phi(x, t) = \Phi(|x|, t)$ 强调基本解是关于变量 x 径向. 根据下面的引理, 常数 $(4\pi)^{-\frac{n}{2}}$ 是为了归一化.

引理 9.1.1. 基本解函数的积分:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1, \forall t > 0$$

证明.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i = 1 \end{aligned}$$

□

9.2 初值问题

9.2.1 齐次初值问题

下面用 Φ 来解下面的初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (9.6)$$

假设函数 $(x, t) \mapsto \Phi(x, t)$ 在除了奇点 $(0, 0)$ 以外的地方满足热传导方程的解, 则对固定的 $y \in \mathbb{R}^n$, 函数 $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t)$ 也满足热传导方程的解. 那仿照 Laplace 方程的过程, 如果我们做一个卷积

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned} \quad (9.7)$$

也应为上面初值问题的解.

定理. 齐次初值问题的解: 设 $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义 u 如式子 9.7, 则

- (1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$
- (2) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$
- (3) $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = g(x^0), \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$

证明.

1. 由于函数 $\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ 无穷次可微, 且在 $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty)$, $(\delta > 0)$ 的任意阶导数一致有界, 则 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$. 从而仿照 Laplace 方程基本解的相关证明可得

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} [(\Phi_t - \Delta_x \Phi)(x - y, t)] g(y) dy \\ &= 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0) \end{aligned} \quad (9.8)$$

2. 固定 $x^0 \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$, 选择 $\delta > 0$ 使得

$$|g(y) - g(x^0)| \leq \varepsilon \quad \text{if } |y - x^0| < \delta, y \in \mathbb{R}^n \quad (9.9)$$

如果 $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, 则根据前面的引理 9.1.1

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x^0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) [g(y) - g(x^0)] dy \right| \\ &\leq \int_{B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) |g(y) - g(x^0)| dy \\ &=: I + J \end{aligned}$$

则由 9.9 和前面的引理

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) dy = \varepsilon$$

如果 $|x - x^0| \leq \frac{\delta}{2}, |y - x^0| \geq \delta$, 那么

$$|y - x^0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2} |y - x^0|$$

因此 $|y - x| \geq \frac{1}{2}|y - x^0|$. 则

$$\begin{aligned}
 J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} \Phi(x - y, t) \, dy \\
 &\leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} \, dy \\
 &\leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \delta)} e^{-\frac{|y-x^0|^2}{16t}} \, dy \\
 &= C \int_{\mathbb{R}^n - B(x^0, \frac{\delta}{\sqrt{t}})} e^{-\frac{|z|^2}{16}} \, dz \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0^+
 \end{aligned}$$

因此如果 $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}, t > 0$ 足够小, $|u(x, t) - g(x^0)| < 2\varepsilon$

□

注记

有时候也用如下的 Dirac 测度来表示:

$$\begin{cases} \Phi_t - \Delta \Phi = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ \Phi = \delta_0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

无限传播速度: 注意到 g 连续有界, $g \geq 0, g \neq 0$, 那么

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) \, dy$$

事实上是恒大于 0 的 ($\forall x \in \mathbb{R}^n, t > 0$). 这代表了热传导在扰动下具有无限传播速度. 如果初始温度在某处为正, 那么在以后任何时间 (无论多么小) 任何地方都是正的. (注意与波方程的有限传播速度做对比).

9.2.2 非齐次初值问题

下面考虑非齐次初值问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (9.10)$$

如果我们回忆产生式子 9.7 的动机, 那么映射 $(x, t) \mapsto \Phi(x - y, t - s)$ 是它的解 (给定 $y \in \mathbb{R}^n, 0 < s < t$). 下面固定 s , 函数

$$u = u(x, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy$$

是方程

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, +\infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot, s) & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases} \quad (9.11)$$

的解. 它形如初值问题 9.6, 但是初始时间由 $t = 0$ 变成了 $t = s$, g 变成了 $f(\cdot, s)$. 因此 $u(\cdot; s)$ 当然不是 9.10 的解.

用 **Duhamel 原理**

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t u(x, t; s) ds \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x - y|^2}{4(t - s)}} f(y, s) dy ds \end{aligned} \quad (9.12)$$

为了验证这个式子的正确性, 我们假设 $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$, 并且 f 有紧支集.

定理. 非齐次初值问题的解: 定义 u 如式子 9.12, 则

- (1) $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$
- (2) $u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$
- (3) $\lim_{\substack{(x, t) \rightarrow (x^0, 0) \\ x \in \mathbb{R}^n, t > 0}} u(x, t) = 0, \forall x^0 \in \mathbb{R}^n$

证明.

1. 由于 Φ 在 $(0, 0)$ 为奇点, 我们不可以直接对它求导来验证. 因此要仿照之前 Laplace 方程的做法, 一步步来求. 首先换元

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f(x - y, t - s) dy ds$$

由于 $f \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$ 有紧支集, 且 $\Phi = \Phi(y, s)$ 在 $s = t > 0$ 附近光滑, 则

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_t(x - y, t - s) \, dy \, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f_t(x - y, 0) \, dy \end{aligned}$$

同理

$$u_{x_i x_j} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) f_{x_i x_j}(x - y, t - s) \, dy \, ds$$

则 $u_t, D_x^2 u, u, D_x u \in C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$

$$\begin{aligned} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) \right] \, dy \, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f_t(x - y, 0) \, dy \\ &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] \, dy \, ds \quad (9.13) \\ &\quad + \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] \, dy \, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f_t(x - y, 0) \, dy \\ &=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K \end{aligned}$$

根据前面的引理可知

$$|J_\varepsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \, dy \, ds \leq \varepsilon C \quad (9.14)$$

根据分部积分以及 $\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Phi(y, s) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) \right] \, dy \, ds \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, t) f(x - y, 0) \, dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) \, dy - K \end{aligned} \quad (9.15)$$

结合上面所有式子, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$u_t(x, t) - \Delta u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy = f(x, t)$$

最后 $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq t\|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

□

注记

对于在 $t = 0$ 时为一般的非齐次问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (9.16)$$

结合前面两个定理以及前面对 f, g 所加的条件, 可以知道

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

9.3 平均值性质

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, 固定时间 $T > 0$.

定义. 把 **抛物柱面** (parabolic cylinder) 定义为 $U_T := U \times (0, T]$. 把 U_T 的 **抛物边界** 定义为 $\Gamma_T = \bar{U}_T - U_T$.

下面想办法把调和函数的平均值性质类比于此, 但是没有简单的公式. 但是我们观察到固定 x 以后, 球面 $\partial B(x, r)$ 上的点在 Laplace 方程的基本解 $\Phi(x, y)$ 的值是一样的 (即 **等值面**). 因此这给我们一个启示, 也许固定 (x, t) 以后热传导方程的基本解 $\Phi(x - y, t - s)$ 的等值面与平均值有关.

定义. 固定 $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, r > 0$, 定义

$$E(x, t; r) = \left\{ (y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid s \leq t, \Phi(x - y, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}$$

$E(x, t; r)$ 的边界是 $\Phi(x - y, t - s)$ 的一个等值面. $E(x, t; r)$ 有时也叫做“热核” (heat ball)

定理. 热传导方程的平均值性质: 设 $u \in C_1^2(U_T)$ 满足热传导方程, 则对任意的 $E(x, t; r) \subset U_T$, 都有

$$u(x, t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x, t; r)} u(y, s) \frac{|x - y|^2}{(t - s)^2} dy ds \quad (9.17)$$

注记

注意到等号右边只包括所有 $s \leq t$ 的时间的 $u(y, s)$. 这是合理的, 因为 $u(x, t)$ 的值不应该由未来时间决定.

证明. 把时间和空间作一个平移使得 $x = 0, t = 0$, 记 $E(r) = E(0, 0; r)$ 并不妨假设 u 光滑, 记

$$\begin{aligned} \phi(r) &:= \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(y, s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\ &= \iint_{E(1)} u(ry, r^2s) \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \end{aligned} \quad (9.18)$$

计算可得

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \iint_{E(1)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2ru_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \frac{|y|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|y|^2}{s} dy ds \\ &=: A + B \end{aligned}$$

下面引入

$$\psi := -\frac{n}{2} \ln -4\pi s + \frac{|y|^2}{4s} + n \ln r \quad (9.19)$$

注意到在 $\partial E(r)$ 上 $\psi = 0$, 这是因为在边界上 $\frac{1}{(-4\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|y|^2}{4s}} \Phi(y, -s) = r^{-n}$. 利用

式 9.19 , 写

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4u_s \sum_{i=1}^n y_i \psi_{y_i} dy ds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{sy_i} y_i \psi dy ds (\text{关于 } y_i, i=1, \dots, n \text{ 分部积分}) \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \psi_s dy ds (\text{关于 } s \text{ 分部积分, 边界上 } \psi = 0) \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi + 4 \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) dy ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4nu_s \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds - A
\end{aligned}$$

由于 u 满足热传导方程, 直接求偏导即可得 $\psi_{y_i} = \frac{y_i}{2s}$, 因此

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= A + B \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} -4n\Delta u \psi - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n u_{y_i} y_i dy ds \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4nu_{y_i} \psi_{y_i} - \frac{2n}{s} u_{y_i} y_i dy ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

则 ϕ 为常数, 则

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = u(0, 0) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^n} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \right) = 4u(0, 0)$$

其中

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n} \iint_{E(r)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds &= \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds \\
&= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_{\Phi(-y, -s) \geq 1} \frac{|y|^2}{s^2} dy \\
&= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_{|y|^2 \leq 2ns \ln(-4\pi s)} \frac{|y|^2}{s^2} dy \\
&= \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 ds \int_0^{\sqrt{2ns \ln(-4\pi s)}} dr \int_{\partial B(0, r)} \frac{|y|^2}{s^2} dS \\
&= \int_0^{-\frac{1}{4\pi}} ds \int_0^{\sqrt{2ns \ln(-4\pi s)}} dr \frac{r^2 n \alpha(n) r^{n-1}}{s^2} dr \\
&= \frac{n \alpha(n)}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^0 \frac{(2ns \ln(-4\pi s))^{\frac{n+2}{2}}}{s^2} ds \\
&= \frac{n \alpha(n)}{n+2} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{nt}{2}} t^{\frac{n+2}{2}} dt \\
&= \frac{n \pi^{\frac{n}{2}}}{(n+2) \Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)
\end{aligned}$$

利用 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 可知

$$\Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) = \frac{n+2}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

因此上面积分的值是 4. □

9.4 强极大值原理, 唯一性

9.4.1 有界区域

利用平均值性质, 我们可以证明强极大值原理.

定理. 热传导方程的强极大值原理: 设 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ 是热传导方程在 U_T 内的解, 则

$$(1) \max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u$$

(2) 另外, 如果 u 连通, 且存在点 $(x_0, t_0) \in U_T$ 使得

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$$

那么 u 在 $\overline{U_{t_0}}$ 内是常数.

注记

1. (1) 叫做热传导方程的极大值原理, 而 (2) 叫做强极大值原理. 把 \max 换成 \min 这个命题也是对的.
2. 如果 u 在内部取到最大值, 那么 u 在该时间点之前的值为常数. 从直观上看, 如果在时间 $[0, t_0]$ 范围内的初值和边界值都是常数, 那么解也是常数; 但是如果在 $t > t_0$ 范围内的边界条件变化的话, 那么解也就会发生改变.
3. 要注意的是: 物理意义、直观不能给我们提供证明思路, 下面我们要用数学证明这个事实.

证明.

1. 如果存在点 $(x_0, t_0) \in U_T$ 满足 $u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{U_T}} u$, 则对充分小的 $r > 0$, $E(x_0, t_0, r) \subset U_T$, 根据平均值性质得

$$\begin{aligned} M = u(x_0, y_0) &= \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0; r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \\ &\leq M \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0, t_0; r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} dy ds \end{aligned}$$

等号成立的条件是 $u \equiv M$ 在 $E(x_0, t_0; r)$ 内成立, 即

$$u(y, s) = M, \forall (y, s) \in E(x_0, t_0; r)$$

下面的步骤建议画草图辅理解

下面在 U_T 中画一条线段 L 连接 (x_0, t_0) 与任意一点 $(y_0, s_0) \in U_T, s_0 < t_0$. 取

$$r_0 = \min\{s | s \geq s_0, u(x, t) = M, (x, t) \in L, s \leq t \leq t_0\}$$

由于 u 连续, 则上面的 r_0 存在. 如果 $r_0 > s_0$, 则 $u(z_0, r_0) = M, \exists (z_0, r_0) \in L_r \cap U_T$, 则对充分小的 $r > 0, u \equiv M$ 在 $E(z_0, r_0; r)$ 内成立, 而根据我们的论证过程, 可知 $\exists \sigma > 0$ 使得

$$L \cap \{r_0 - \sigma \leq t \leq r_0 + \sigma\} \subset E(z_0, r_0; r)$$

因此找到了比 r_0 更小的 $r_0 - \frac{\sigma}{2}$ 满足 $u(z_0, r_0 - \frac{\sigma}{2}) = M$ 矛盾. 因此 $r_0 = s_0$, 则 $u \equiv M$ 在 L 上成立.

2. 下面固定任意一点 $x \in U$ 与时间 $0 \leq t < t_0$, 则存在点 $\{x_k\}_0^m, x_m = x$, 使得所有连接 x_{k-1} 与 x_i 的 n 维空间上的线段都在 U 中, (注意 U 不一定是凸集), 选择时间 $\{t_k\}_0^m, t_m = t$, 则所有 $n+1$ 维空间上连接 (x_{i-1}, t_{i-1}) 与 (x_i, t_i) 的线段都在 U_T 中. 根据 (1) 的类似步骤可知 $u \equiv M$ 在所有线段上成立. 因此 $u(x, t) \equiv M, 0 \leq t < t_0$

□

定理. 有界区域解的唯一性: 设 $g \in C(\Gamma_T), f \in C(U_T)$, 则存在至多一个下面问题的解 $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

证明. 若 u, \tilde{u} 是这个问题的两个解, 取 $\omega = \pm(u - \tilde{u})$ 也是解, 且在边界上为 0, 根据极大值原理, $\omega \equiv 0$ 在 U_T 内成立. □

9.4.2 无界区域

我们在前面的过程中都假设了 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集. 对于无界区域 (以 \mathbb{R}^n 为例), 此时的问题叫 Cauchy 问题, 我们考虑解的唯一性. 由于区域是无界的, 所以有必要对充分大的 $|x|$ 加一个条件来加以控制住这个解.

定理. 柯西问题的最大值原理: 设 $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ 是下面问题的解:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

且满足如下增长速率估计:

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T),$$

其中 $A, a > 0$ 是常数. 则

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

证明. (1) 首先假设 $4aT < 1$, 则 $\exists \Delta > 0, 4a(T + \Delta) < 1$. 固定 $y \in \mathbb{R}^n, \mu > 0$, 定义

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \Delta - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\Delta-1)}} (x \in \mathbb{R}^n, t > 0)$$

则 $v_t - \Delta v > 0$ 在 $\mathbb{R}^n \times (0, T]$. 固定 $r > 0$, 记

$$U := B^0(y, r), U_\Gamma = B^0(y, r) \times (0, T]$$

根据有界区域的最大值原理可知

$$\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$$

如果 $x \in \mathbb{R}^n$, 则

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x, 0) = g(x)$$

如果 $|x - y| = r, 0 \leq t \leq T$, 则 $r \geq |y| - |x|$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \\ &\leq Ae^{(a(|y|)+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

根据 $4a(T + \varepsilon) < 1$, 可知 $\exists \gamma > 0$ 使得 $\frac{1}{4(T + \varepsilon)} = a + \gamma$, 则当 r 充分大的时候,

$$u(x, t) \leq Ae^{(a(|y|)+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

这是因为 $e^{(a+\gamma)r^2}$ 的阶比 $e^{a(|y|)+r^2}$ 大, 上式在 $r \rightarrow \infty$ 时讲趋于负无穷大.

综上, 当 $y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$ 时让 $\mu \rightarrow 0$ 有 $v(y, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$

(2) 如果 $4aT < 1$ 不成立, 则对于 $T_1 = \frac{1}{8a}$, 可考虑 $[0, T_1], [T_1, 2T_1], \dots$ 这些时间区间. \square

定理. 柯西问题解的唯一性: 设 $g \in (\mathbb{R}^n), f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, 则下面的初值问题存在至多一个解 $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

且满足如下增长速率估计:

$$u(x, t) \leq Ae^{a|x|^2}, (x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T),$$

其中 $A, a > 0$ 是常数. 则

证明. 如果 u, \tilde{u} 是解, 考虑 $\omega = \pm(u - \tilde{u})$ 即可.(步骤同上) \square

9.5 能量方法

考虑问题

(9.20)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

我们之前用最大模原理证明了唯一性, 现在我们像位势方程那样用分部积分证明唯一性.

定理. 热传导方程唯一性: 方程 9.20 只存在一个解 $u \in C_1^2(\overline{U})_T$

证明. 如果有两个解 u, v , 则 $\omega = u - v$ 是下面问题的解.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_T \end{cases}$$

设

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_U \omega^2(x, t) dx, 0 \leq t \leq T$$

则

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_U \omega \omega_t dx \\ &= \int_U \omega \Delta \omega dx \\ &= - \int_U |D\omega|^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

因此 $e(t) \leq e(0) = 0, 0 \leq t \leq T$. 而 $e(t) \geq 0$, 则 $\omega \geq 0$, 则 $\omega \equiv 0, x \in U_T$ \square

热传导方程的另一个比较神奇的问题是关于 **时间的倒向唯一性**. 设 u, v 都是热传导方程在 U_T 的光滑解, 且边界 ∂U 上的条件相等.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \partial U \times [0, T] \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } U_T \\ u = g & \text{on } \partial U \times [0, T] \end{cases}$$

注意到我们没有设在时间 $t = 0$ 处 $u = v$. (与前一个定理相比, 这里少了 $t = 0$ 处区域 U 的边界条件.)

定理. 热传导方程的倒向唯一性: 设 $u, v \in C^2(\overline{U}_T)$ 满足上面两个方程, 如果 $u(x, T) = v(x, T) (x \in U)$, 则 $u \equiv v$ 在 U_T 内成立.

注记

换句话说, 如果 U 上的两个温度分布在某个时间 $T > 0$ 相等, 且在 $0 \leq t \leq T$ 范围内有相同边界值 (不知道初始值!), 则这两个温度分布在 U 内的所有 T 时刻之前都一定相等, 这个东西一点都不显然.

证明. 记 $\omega = u - v$, 仿照前面证明, 记

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_U \omega^2(x, t) \, dx, 0 \leq t \leq T$$

则

$$e'(t) = - \int_U |D\omega|^2 \, dx$$

另外 (注意 $\omega_t = \Delta\omega$)

$$e''(t) = -2 \int_U D\omega \cdot D\omega_t \, dx = 2s \int_U \Delta\omega \omega_t \, dx = 2 \int_U (\Delta\omega)^2 \, dx$$

由于 $\omega = 0$ 在 ∂U 成立, 则分部积分得

$$\int_U |D\omega|^2 \, dx = - \int_U \omega \Delta\omega \, dx \leq \left(\int_U \omega^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U (\Delta\omega)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

则

$$(e'(t))^2 \leq e(t)e''(t) (0 \leq t \leq T)$$

如果 $e(t) = 0$ 对所有 $0 \leq t \leq T$ 成立, 则我们证毕. 若不然, 存在区间 $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ 使得 $e(t) > 0, t_1 \leq t < t_2, e(t_2) = 0$. 记

$$f(t) = \ln e(t), t_1 < t < t_2$$

则

$$f''(t) = \frac{e''(t)}{e(t)} - \frac{e'(t)^2}{e(t)^2} \geq 0$$

所以 f 在区间 (t_1, t_2) 为凸函数, 因此对于 $0 < \lambda < 1, t_1 < t < t_2$, 有

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)t_1 + \lambda t) &\leq (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t) \\ \Leftrightarrow e((1-\lambda)t_1 + \lambda t) &\leq e(t_1)^{1-\lambda} e(t)^\lambda \\ \Rightarrow 0 &\leq e((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2) \leq e(t_1)^{1-\lambda} e(t_2)^\lambda \end{aligned}$$

但是由 $e(t_2) = 0$ 可知 $e(0) = 0$ 在 $t_1 < t < t_2$ 成立, 矛盾.

□

9.6 Fourier 变换法

$\forall f(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义如下

Fourier变换 $F[f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx, \xi \in \mathbb{R}^n (n=1 \text{ 时常用 } \lambda)$

Fourier逆变换 $F^{-1}[f(\xi)](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix \cdot \xi} d\xi, x \in \mathbb{R}^n$

Fourier 变换的基本性质列举如下:

1. 线性: $\widehat{c_1 f + c_2 g} = c_1 \hat{f} + c_2 \hat{g}, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$
2. 共轭: $\widehat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
3. 微分: $\widehat{D^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 多重指标
4. 幂乘: $\widehat{x^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{f}(\xi)$
5. 平移: $\widehat{f(x - x_0)}(\xi) = e^{-ix_0 \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$
6. 相似: $\widehat{f(ax)}(\xi) = |a|^{-n} \hat{f}(a^{-1}\xi)$
7. 卷积: $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$
8. 反演: $f = \check{\check{f}}$ ($L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的线性同构)

注记

关于卷积, 还有如下性质:

- 交换律: $f * g = g * f$
- 结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- 求导: $(f * g)' = f' * g = f * g'$
- 用 Dirac 函数卷积表示导数: $\delta * f = f, \delta' * f = f'$

例题 9.6.1. (Strauss 12.4.4) 若 $p(x)$ 是多项式, $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则 $g(x) = \int_a^b p(x-s)f(s) ds$ 也是多项式.

证明. 补充定义 $F(x) = f(x)\chi_{[a,b]}$, 则 F 是可积的. 不妨设 $p(x)$ 是 n 次多项式, 则 $g(x) = p * F$, 利用卷积的求导性质, 当 $k \geq n+1$ 时,

$$(p * F)^{(k)} = p^{(k)} * F = 0$$

所以 $p * F$ 是不超过 n 次的多项式. \square

下面利用 Fourier 变换求解热传导方程的柯西问题, 仅以一维为例, 很容易推广到 n 维.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (9.21)$$

视 t 为参数, 先求解齐次热传导方程的柯西问题

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (9.22)$$

关于 x 进行 Fourier 变换, 记

$$F[u(x, t)] = \hat{u}(\lambda, t)$$

$$F[\varphi(x)] = \hat{\varphi}(\lambda)$$

从而有

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\lambda^2 \hat{u} \quad (9.23)$$

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \hat{\varphi}(\lambda) \quad (9.24)$$

9.23, 9.24 是带参数 λ 的常微分方程的柯西问题, 它的解为

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{\varphi}(\lambda)e^{-\lambda^2 t} \quad (9.25)$$

函数 $e^{-\lambda^2 t}$ 的 Fourier 逆变换为

$$\begin{aligned} F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda^2 t - i\lambda x)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\lambda - \frac{ix}{2t})^2} d\lambda \cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

积分可得

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(\lambda - \frac{ix}{2t})^2} d\lambda &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\lambda^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}\end{aligned}$$

所以

$$F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

因此, 利用卷积的 Fourier 变换与 Fourier 变换的乘积的关系, 由 9.25 可得柯西问题 9.22 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \quad (9.26)$$

再求解非齐次热传导方程具齐次初始条件的柯西问题

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x, t) \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (9.27)$$

由齐次化原理, 此柯西问题的解可写为 (请读者验证)

$$u(x, t) = \int_0^t \omega(x, t; \tau) d\tau \quad (9.28)$$

其中 $\omega = \omega(x, t; \tau)$ 为下述柯西问题的解:

$$\begin{cases} \omega_t = \omega_{xx}, t > \tau \\ \omega(x, t) = f(x, \tau) \end{cases} \quad (9.29)$$

于是, 利用 9.26 式, 易知柯西问题 9.27 的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\tau \quad (9.30)$$

由叠加原理, 9.26 及 9.30 就得到柯西问题 9.21 的解为

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi d\tau\end{aligned} \quad (9.31)$$

9.7 分离变量法

在上一章中我们用分离变量法求得了 Laplace 方程初边值问题的解, 这一方法对于热传导方程初边值问题同样适用. 以下以热传导方程在边界上分别取第一与第三边界条件的初边值问题为例详细讨论其求解过程. 我们将看到, 由于引入第三边界条件, 求解过程的运算与讨论变得较复杂, 但其基本步骤相仿.

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 & (t > 0, 0 < x < l) \\ t = 0 : u = \varphi(x) \\ x = 0 : u = 0 \\ x = l : u_x + hu = 0 (h > 0) \end{cases}$$

用分离变量法求解. 令

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

这里 $X(x)$ 和 $T(t)$ 分别表示仅与 x 有关和仅与 t 有关的函数. 把它代入方程, 得到

$$XT' = a^2 X''T$$

即

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

这等式只有在两边均等于常数时才成立. 令此常数为 λ , 则有

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

$$X'' + \lambda X = 0$$

先考虑边值问题

$$X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0$$

当 $\lambda \leq 0$ 时, 只有平凡解 $X \equiv 0$.

当 $\lambda > 0$ 时,

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \sin \sqrt{\lambda}x$$

利用边界条件 $X(0) = 0$, 得 $A = 0$. 于是利用第二个边界条件得

$$B(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l + h \sin \sqrt{\lambda}l) = 0$$

为使 $X(x)$ 为非平凡解, λ 应满足

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

即 λ 应是下述超越方程的正解:

$$\tan \sqrt{\lambda} l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$$

令

$$v = \sqrt{\lambda} l$$

则

$$\tan v = -\frac{v}{lh}$$

利用图解法或数值求解法可得出这个方程的根. 方程有可列无穷多个正根 $v_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 满足 $\left(k - \frac{1}{2}\right)\pi < v_k < k\pi$. 因此, 特征值问题存在着多个固有值

$$\lambda_k = \left(\frac{v_k}{l}\right)^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

及相应的固有函数

$$X_k(x) = B_k \sin \sqrt{\lambda_k} x = B_k \sin \frac{v_k}{l} x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

从而

$$T_k(t) = C_k e^{-a^2 \lambda_k t} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

于是得到一系列可分离变量的特解

$$u_k(x, t) = A_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

由于方程及边界条件都是齐次的, 故可利用叠加原理构造级数形式的解

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

以下来决定常数 A_k , 使之满足初始条件. 为使在 $t = 0$ 时 $u(x, t)$ 取到初值 $\varphi(x)$, 应成立

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

为确定系数 A_k , 须先证明固有函数系 $\{X_k\} = \{\sin \sqrt{\lambda_k}x\}$ 在 $[0, l]$ 上正交. 设固有函数 X_n 和 X_m 分别对应于不同的固有值 λ_n 和 λ_m , 即

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0, X_m'' + \lambda_m X_m = 0$$

以 X_m 和 X_n 分别乘以上面第一式和第二式, 得到

$$X_m X_n'' + \lambda_n X_m X_n = 0$$

$$X_n X_m'' + \lambda_m X_n X_m = 0$$

两者相减后在 $[0, l]$ 上积分, 有

$$\int_0^l (X_m X_n'' - X_n X_m'') dx + (\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_n X_m dx = 0$$

再利用 X_n 和 X_m 都满足边界条件, 就得到

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_n X_m dx = (X_n X_m' - X_m X_n') \Big|_0^l = 0$$

由于 $\lambda_n \neq \lambda_m$, 故得固有函数系的正交性:

$$\int_0^l X_n X_m dx = \int_0^l \sin \sqrt{\lambda_n}x \sin \sqrt{\lambda_m}x dx = 0, m \neq n$$

记

$$\begin{aligned} M_k &= \int_0^l \sin^2 \sqrt{\lambda_k}x dx = \int_0^l \frac{1 - \cos 2\sqrt{\lambda_k}x}{2} dx \\ &= \frac{l}{2} - \frac{\sin 2\sqrt{\lambda_k}l}{4\sqrt{\lambda_k}} = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_k}} \frac{\tan \sqrt{\lambda_k}l}{1 + \tan^2 \sqrt{\lambda_k}l} \\ &= \frac{l}{2} - \frac{-\frac{v_k}{lh}}{2\frac{v_k}{l} \left(1 + \frac{v_k^2}{l^2 h^2}\right)} = \frac{l}{2} + \frac{h}{2(h^2 + \lambda_k)} \end{aligned}$$

在 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \sqrt{\lambda_k}x$ 两边乘以 $\sin \sqrt{\lambda_k}x$, 再进行积分, 利用正交性即可得

$$A_k = \frac{1}{M_k} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}\xi d\xi$$

最终得到初边值问题的形式解为

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \sqrt{\lambda_k}\xi d\xi e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \sqrt{\lambda_k}x$$

为了考察由分离变量法得到的形式解是否是经典解, 还需进一步讨论收敛性和无穷级数的可微性, 这部分证明比较简单, 不断分部积分就行, 可以参考其他资料, 在此不做展示.

第十章 波方程

下面我们讨论波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \quad (10.1)$$

和非齐次形式

$$u_{tt} - \Delta u = f \quad (10.2)$$

的解, 其中给定一定的初始和边值条件. 这里 $t > 0, x \in U, U \subset \mathbb{R}^n$ 开集. 未知的是 $u : \bar{U} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x, t)$. 这里拉普拉斯算子是关于空间变量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的. 另外 $f : U \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 给定. 通常我们也记

$$\square u := u_{tt} - \Delta u$$

我们将会发现波动方程的解和 Laplace 方程以及热传导方程的解的性质非常不一样, 比如波动方程的解通常不是光滑的, 有限传播速度等.

10.1 一维情形下的解, d'Alembert 公式

10.1.1 公式推导

和解 Laplace 方程, 热传导方程找不变量不同, 下面我们提供一个非常优雅的方式来解高维情形. 先考虑一维情形, 然后再考虑高维.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{on } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.3)$$

这里 g, h 给定. 注意到我们可以对波动方程作一个分解

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (10.4)$$

记

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) \quad (10.5)$$

则 10.4 说明

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

这是个常系数的输运方程, 套用公式 7.3 (其中 $n = 1, b = 1$), 我们得到

$$v(x, t) = a(x - t) \quad (10.6)$$

这里 $a(x) := v(x, 0)$. 结合式子 10.4 – 10.6, 我们得到

$$u_t(x, t) - u_x(x, t) = a(x - t) \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty)$$

这是非齐次输运方程, 记 $b(x) := u(x, 0)$, 取 $n = 1, b = -1, f(x, t) = a(x - t)$ 套用公式可得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) \, ds + b(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) \, dy + b(x + t) \end{aligned} \quad (10.7)$$

根据给定的初始条件计算 a, b

$$b(x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$a(x) = v(x, 0) = u_t(x, 0) - u_x(x, 0) = h(x) - g'(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

将它们代入 10.7 得到

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) - g'(y) \, dy + g(x + t)$$

因此

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + t) + g(x - t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) \, dy \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0) \quad (10.8)$$

这就是 d'Alembert 公式.

定理. 一维波动方程的解: 设 $g \in C^2(\mathbb{R}), h \in C^1(\mathbb{R})$, 如 10.8 式定义 u , 那么

1. $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$
2. $u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty)$
3. $\lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ t>0}} u(x,t) = g(x^0), \quad \lim_{\substack{(x,t) \rightarrow (x^0,0) \\ t>0}} u_t(x,t) = h(x^0) \forall x^0 \in \mathbb{R}$

证明. 直接计算即可. □

注记

1. 在 d'Alembert 公式中, 波动方程的解形如

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

相反任何这种形式的方程都是波动方程的解. 因此一维波动方程的通解就是 $u_t - u_x = 0$ 和 $u_t + u_x = 0$ 这两个方程的通解之和. 这是算子分解的结果.

2. 我们从 10.8 中可看出如果 $g \in C^k, h \in C^{k-1}$, 那么 $u \in C^k$, 但并不光滑. 因此波方程并不像热传导方程一样能立刻变光滑.

10.1.2 对称延拓

考虑下面的初边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty) \\ u = g, u_t = h & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{on } \{x = 0\} \times (0, +\infty) \end{cases} \quad (10.9)$$

这里 g, h 给定且 $g(0) = h(0) = 0$. 下面作奇延拓:

$$\tilde{u}(x,t) := \begin{cases} u(x,t) & (x \geq 0, t \geq 0) \\ -u(-x,t) & (x \leq 0, t \geq 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &:= \begin{cases} g(x) & (x \geq 0) \\ -g(-x) & (x \leq 0) \end{cases} \\ \tilde{h}(x) &:= \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ -h(-x) & (x \leq 0) \end{cases}\end{aligned}$$

则 10.10 变成

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

因此根据 d'Alembert 公式

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy$$

再代入 $\tilde{u}, \tilde{g}, \tilde{h}$ 的定义可得

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [g(x+t) + g(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{if } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2} [g(x+t) - g(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy & \text{if } 0 \leq x \leq t \end{cases} \quad (10.10)$$

若 $h \equiv 0$, 我们根据上面的式子, $u(x, t)$ 可以看作波形的两部分, 一部分向右运动, 一部分向左运动, 速度都是 1. 向左运动的波在 $x = 0$ 处消失, 在这个地方振动的弦被固定住. 注意我们求得的解不是 C^2 , 除非 $g''(0) = 0$.

10.2 Euler-Poisson-Darboux 方程

接下来我们要看 $n \geq 2, m \geq 2, u \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$, 考虑下面初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g, u_t = h & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.11)$$

我们的目标是用 g, h 来表示 u , 方案是先看 u 在球上的积分的平均值. 而这个方案就是求解 Euler-Poisson-Darboux 方程. 再利用 d'Alembert 公式可以让我们最终找到这个高维波动方程的解.

记 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0, t > 0, \alpha(n)$ 是 n 维单位球的体积. 定义

$$U(x; r, t) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y) \quad (10.12)$$

这是 $u(\cdot, t)$ 在球面 $\partial B(x, r)$ 上的积分平均. 类似

$$G(x; r) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} g(y) \, dS(y), H(x; r) := \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} h(y) \, dS(y) \quad (10.13)$$

固定 x , 下面我们把 U 看成关于 t 和 r 的函数, 并注意到 U 是一个 PDE 的解

引理 10.2.1. *Euler-Poisson-Darboux 方程:* 固定 $x \in \mathbb{R}^n$, 记 u 满足 10.11, 则 $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, +\infty))$ 且

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r}U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty) \\ U = G, U_t = H & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.14)$$

注记

PDE 10.14 就是 Euler-Poisson-Darboux 方程. 注意到 $U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r$ 恰好是 Δ 算子的极坐标形式的径向部分.

证明. 对于 $r > 0$, 回顾散度定理

$$\int_U \operatorname{div} u \, dx = \int_{\partial U} u \cdot \vec{n} \, dS$$

而在球面 $\partial B(x, r)$ 上 y 处的单位外法向量为 $\vec{n} = \frac{y-x}{r}$. 我们有

$$\begin{aligned} U(x; r, t) &= \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) \, dS(y) \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz, t) \, dS(z) \right] \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} Du(x + rz, t) \cdot z \, dS(z) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0, 1)} Du(y, t) \cdot \frac{y-x}{r} \, dS(y) \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) \, dy \end{aligned}$$

让 $r \rightarrow 0^+$, 我们有

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_r(x; r, t) = 0$$

再对上式关于 r 求导一次有

$$\begin{aligned} U_{rr}(x; r, t) &= \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \right] \\ &= \frac{d}{dr} \left[\frac{r}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz \right] \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + rz, t) dz + \frac{r}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} D(\Delta u(x + rz, t)) \cdot z dz \\ &= \cdots = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} \Delta u dS + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{\alpha(n)r^n} \int_{B(x,r)} \Delta u dy \end{aligned}$$

令 $r \rightarrow 0^+$ 有

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{rr}(x; r, t) = \frac{1}{n} \Delta u(x, t)$$

类似可计算 U_{rrr}, \dots 则 $U \in C^m(\overline{\mathbb{R}_+} \times [0, +\infty))$. 另一方面, 由于 $u_{tt} = \Delta u$

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} \Delta u(y, t) dy \\ &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} r^{n-1}U_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dy \\ (r^{n-1}U_r)_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1}U_{tt} \end{aligned}$$

□

10.3 3 维情形:Kirichoff 公式

有了 Euler-Poisson-Darboux 方程, 我们可以把高维的转化为一维波动方程. 由于整个过程是比较复杂的, 所以我们接下来只看最简单的 $n = 3, 2$ 情形. 下面设 $n = 3, u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty))$ 是初值问题 10.11 的解. 记

$$\tilde{U} := rU \tag{10.15}$$

$$\tilde{G} := rG, \tilde{H} := rH \quad (10.16)$$

我们断言 \tilde{U} 是下面问题的解

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, +\infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{on } \{r = 0\} \times (0, +\infty) \end{cases} \quad (10.17)$$

当然

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} &= rU_{tt} \\ &= r \left[U_{rr} + \frac{2}{r} U_r \right] \\ &= rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr} \end{aligned}$$

注意到 $\tilde{G}_{rr}(0) = 0$. 我们发现, 当 $0 \leq r \leq t$

$$\tilde{U} = (x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \quad (10.18)$$

根据 U 的定义式, $u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0^+} U(x; r, t)$, 则对 $x \in \mathbb{R}^3, t > 0$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right] \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \int_{\partial B(x,t)} h dS \\ &= \cdots = \frac{1}{n\alpha(n)t^{n-1}} \int_{\partial B(x,t)} th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y-x) dS(y) \end{aligned}$$

这就是 3 维情形初值问题的 **Kirchhoff 公式**.

10.4 2 维情形:Poisson 公式

$n = 2$ 时没有形如 $\bar{U} = rU$ 的公式可以把 Euler-Poisson-Darboux 方程转化为一维的波动方程. 我们不如把它看作 $n = 3$ 时的波动方程, 且第三个空间分量不

会出现.

设 $n = 2, u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ 是初值问题 10.11 的解. 写成

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t) \quad (10.19)$$

则问题变为

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt} - \Delta \bar{u} = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ \bar{u} = g, \bar{u}_t = \bar{h} & \text{on } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.20)$$

这里

$$\bar{g}(x_1, x_2, x_3) := g(x_1, x_2), \bar{h}(x_1, x_2, x_3) := h(x_1, x_2)$$

如果我们记

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$$

则由 Kirchhoff 公式的推导过程知

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} \right) + t \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{h} d\bar{S} \end{aligned}$$

这里是 $\bar{B}(\bar{x}, t)$ 是 \mathbb{R}^3 中以 \bar{x} 为心, t 为半径的球, $d\bar{S}$ 是球面 $\partial \bar{B}(\bar{x}, t)$ 的二维表面.

回顾第一型曲面积分, 下面我们对上式化简.

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B(x, t)} g(y) (1 + |D\gamma(y)|^2)^{\frac{1}{2}} dy$$

这里 $\gamma(y) = \sqrt{t^2 - |y - x|^2}$. 这里多了系数 2 是因为球有上下表面. 注意

$$(1 + |D\gamma(y)|^2)^{\frac{1}{2}} = t(t^2 - |y - x|^2)^{-\frac{1}{2}}$$

因此

$$\frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x}, t)} \bar{g} d\bar{S} = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

则

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \right) + \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{h(y)}{(t^2 - |y - x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

由于

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}} dz \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{B(0,1)} \frac{g(x+tz)}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}} dz + \frac{t}{\pi} \int_{B(0,1)} \frac{Dg(x+tz) \cdot z}{(1-|z|^2)^{\frac{1}{2}}} dz \\
&= \frac{1}{\pi t} \int_{B(x,t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy + \frac{1}{\pi t} \int_{B(x,t)} \frac{Dg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy
\end{aligned}$$

我们得到: $\forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi t} \int_{B(x,t)} \frac{g(y) + th(y) + Dg(y) \cdot (y-x)}{(t^2 - |y-x|^2)^{\frac{1}{2}}} dy$$

这就是二维情形下的 **Poisson 公式**. 上面把 $n = 3$ 变成 $n = 2$ 的 trick 叫做 **降维法**.

10.5 非齐次波动方程

下面看非齐次波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.21)$$

下面用 Duhamal 原理, 我们定义 $u = u(x, t; s)$ 满足

$$\begin{cases} u_{tt}(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = 0, u_t(\cdot; s) = f(\cdot, s) & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases} \quad (10.22)$$

设

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s) ds, x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (10.23)$$

则 Duhamel 原理断言这就是下方程的解:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = 0 & \text{on } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.24)$$

回顾含参变量积分求导法则不难验证非齐次方程的解.

下面看几个特殊情形:

1. $n = 1$ 时, 根据 d'Alembert 公式

$$u(x, t; s) = \frac{1}{2} \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy, u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) ds$$

即

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y, t-s) dy ds, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

2. $n = 3$ 时, Kirchhoff 公式有 $u(x, t; s) = \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS$ 即

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t (t-s) \left(\frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\partial B(x, t-s)} f(y, s) dS \right) ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \int_{\partial B(x, r)} \frac{f(y, t-r)}{r} dS dr \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(x, t)} \frac{f(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dy, x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \end{aligned}$$

上式最后一步的式子叫做 **推迟势**.

10.6 能量方法

10.6.1 唯一性

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一个有界开集, 且有光滑边界 ∂U , 设

$$U_T = U \times (0, T], \Gamma_T = \overline{U}_T - U_T, T > 0$$

考虑如下初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f & x \in U_T \\ u = g & x \in \Gamma_T \\ u_t = h & x \in U \times \{t = 0\} \end{cases} \quad (10.25)$$

定理. 波动方程解的唯一性: 方程 10.25 至多存在一个解 $u \in C^2(\overline{U}_T)$

证明. 设 u, v 都是解, 则 $\omega = u - v$ 是方程

$$\begin{cases} \omega_{tt} - \Delta\omega = 0 & x \in U_T \\ \omega = 0 & x \in \Gamma_T \\ \omega_t = 0 & x \in U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

的解. 定义能量

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_U \omega_t^2(x, t) + |D\omega(x, t)|^2 dx \quad (0 \leq t \leq T)$$

则根据分部积分和边界条件, 可得

$$E'(t) = \int_U \omega_t \omega_{tt} + D\omega \cdot D\omega_t dx = \int_U \omega_t (\omega_{tt} - \Delta\omega) dx = 0$$

则 $\forall 0 \leq t \leq T, E(t) = E(0) = 0, \omega_t, D\omega \equiv 0$ 在 U_T 内成立. 又由于 $\omega = 0$ 在 $U \times \{t = 0\}$ 成立, 则 $\omega \equiv 0$ 在 U_T 成立. \square

10.6.2 依赖区域

设 $u \in C^2$ 满足 $u_{tt} - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, 固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0$, 并考虑反向锥体, 顶点为 (x_0, t_0)

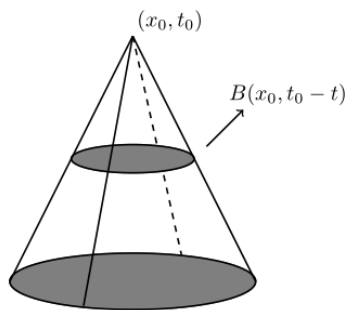


图 10.1

$$K(x_0, t_0) := \{(x, t) | 0 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

定理. 有限传播速度: 若 $u \equiv u_t \equiv 0$ 在 $B(x_0, t_0) \times \{t = 0\}$ 成立. 则 $u \equiv 0$ 在整个锥体 $K(x_0, t_0)$ 成立.

注记

特别地, 我们注意到任何 $B(x_0, t_0)$ 外部的扰动都不会影响 $K(x_0, t_0)$ 里的解, 因此传播速度有限. 我们已经在 $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ 时 $g = u, h = u_t$ 充分光滑的情况下, 通过前面证过的表达式知道这个事实. 能量方法可以提供更简单的证明.

证明. 定义局部能量:

$$e(t) := \frac{1}{2} \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t^2(x, t) + |Du(x, t)|^2 dx \quad (0 \leq t \leq t_0)$$

则

$$\begin{aligned} e'(t) &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t u_{tt} + Du \cdot Du_t dx - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + |Du|^2 dS \\ &= \int_{B(x_0, t_0-t)} u_t (u_{tt} - \Delta u) dx + \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} u_t^2 + |Du|^2 dS \\ &= \int_{\partial B(x_0, t_0-t)} \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} u_t - \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} |Du|^2 dS \end{aligned}$$

由于

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t \right| \leq |u_t| |Du| \leq \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} |Du|^2$$

则

$$e'(t) \leq 0 \Rightarrow e(t) \leq e(0) = 0, \forall 0 \leq t \leq t_0 \Rightarrow u_t, Du \equiv 0$$

则 $u \equiv 0$ 在圆锥 $K(x_0, t_0)$ 内成立. □

10.7 Fourier 变换法

求解非齐次三维波动方程初值问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u + f(x, t), x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

解. 定义波动方程的基本解

$$U(x, t) : \begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U, x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$$

则可以直接验证

$$u(x, t) = U(x, t) * \psi(x) + \partial_t [U(x, t) * \varphi(x)] + \int_0^t U(x, t - \tau) * f(x, \tau) d\tau$$

对 $\begin{cases} U_{tt} = c^2 \Delta U \\ U|_{t=0} = 0, U_t|_{t=0} = \delta(x) \end{cases}$ 作关于空间变量的 Fourier 变换, 有

$$\begin{cases} \frac{d\hat{U}}{dt} = -c^2 \rho^2 \hat{U}, \rho = |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \\ \hat{U}|_{t=0} = 0, \hat{U}_t|_{t=0} = \hat{\delta} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(\xi, t) = \frac{\sin c\rho t}{c\rho}$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= F^{-1}[\hat{U}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin c\rho t}{c\rho} e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin c\rho t}{c\rho} e^{ir\rho \cos \theta} \rho^2 \sin \theta d\varphi (\text{球坐标变换}, r = |x|) \\ &= \frac{1}{4\pi^2 cr} \int_0^{+\infty} [\cos \rho(r - cr) - \cos \rho(r + ct)] d\rho = \frac{1}{8\pi^2 cr} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\rho(r-ct)} - e^{i\rho(r+ct)}] d\rho \\ &= \frac{1}{4\pi cr} [\delta(r - ct) - \delta(r + ct)] = \frac{\delta(r - ct)}{4\pi cr} (F^{-1}[1] = \delta, r \geq 0, c > 0, t > 0) \end{aligned}$$

令 $S_r(x)$ 为半径 r 球心在 x 的球面, 现取 $r = |x - y|$, 则对 $\forall g(x)$, 利用卷积和 δ

函数的定义, 有

$$\begin{aligned}
 U(x, t) * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\delta(|x-y| - ct)}{4\pi c |x-y|} g(y) \, dy \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \int_0^{+\infty} \frac{\delta(r - ct)}{r} \left[\int_{S_r(x)} g(y) \, dS(y) \right] \, dr \\
 &= \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{ct} \int_{S_{ct}(x)} g(y) \, dS(y) \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} g(y) \, dS(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= U(x, t) * \psi(x) + \partial_t [U(x, t) * \varphi(x)] + \int_0^t U(x, t - \tau) * f(x, \tau) \, d\tau \\
 &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(y)} \psi(y) \, dS(y) + \partial_t \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} \varphi(y) \, dS(y) \right] \\
 &\quad + \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2 (t - \tau)} \int_{S_{c(t-\tau)}(x)} f(y, \tau) \, dS(y) \, d\tau
 \end{aligned}$$

即为 Kirchhoff 公式. □

10.8 分离变量法

考虑一维波动方程

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = 0, u(l, t) = 0 \end{cases}$$

Step1. 考虑 $u(x, t) = X(x)T(t)$

$$\begin{aligned}
 XT'' &= c^2 X''T \\
 -\frac{T''}{c^2 T} &= -\frac{X''}{X} = \lambda
 \end{aligned}$$

易知 $\lambda > 0$, 记 $\beta^2 = \lambda, \beta > 0$ 则有如下 ODE

$$X'' + \beta^2 X = 0, T'' + c^2 \beta^2 T = 0$$

它们的通解为

$$X(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

$$T(t) = A \cos \beta ct + B \sin \beta ct$$

Step2. 把边界条件 $X(0) = 0, X(l) = 0$ 代进 $X(x)$, 可以得到

$$C = 0, D \sin \beta l = 0$$

则有

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, \dots$$

是特解. 于是

$$u(x, t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin \frac{n\pi ct}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, n = 1, 2, 3 \dots$$

Step3. 代入初始条件, 有

$$\varphi(x) = \sum_n A_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$\psi(x) = \sum_n \frac{n\pi c}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

最终得到

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$B_n = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

第十一章 非线性偏微分方程初探

11.1 孤立子与反散射变换

孤子是非线性 PDE 的局部行波解, 它非常稳定. 有这样的解的一个 PDE 是 KDV 方程 (Korteweg-deCVries)

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (11.1)$$

数字 6 没有特殊的意义. 这个方程用来描述沿着河道的水波, 已经有一个世纪了.

注记

古典数学物理里面有两个美丽的传说, 其一是众所周知的苹果砸牛顿, 另一个则是 Russel 骑马千米追逐水波.

传说在 1834 年夏日, 英国科学家 J.S.Russel 骑马沿着一条河旅行, 偶然发现狭窄的河床中行走的船突然停止前进, 被船体带动的水团积聚在船头周围并剧烈地翻动着. 不久, 一个圆形且轮廓分明的巨大孤立波峰开始形成, 并急速离开船头向前运动. 波长约 10 米, 高约 0.5 米, 在行进中波的形状和速度并无明显变化, 以后高度逐渐下降, 在骑马追踪两到三公里后, 终于消失在蜿蜒的河道上. 这次发现的奇特景观促使 Russel 开始更深入研究水波, 他认为这是流体运动的一个稳定解, 并称之为孤波. 但他始终没有在理论上证实孤波的存在. 这引起了物理学界的激烈争论.

同样的方程也在等离子理论和其他的物理分支出现. 和方程 11.1 相联系的几个基本量为

$$\text{质量} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \, dx$$

$$\text{动量} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 dx$$

$$\text{能量} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u_x^2 - u^3 \right) dx$$

每一个都是运动不变量. 事实上, 还有无穷多个涉及高阶导数的其他不变量已经被发现.

下面让我们来寻找方程 11.1 的行波解. 即

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

我们得到 ODE

$$-cf' + f''' + 6ff' = 0$$

积分一次得到

$$-cf + f'' + 3f^2 = a$$

其中 a 是常数. 在方程两边乘以 $2f'$, 并积分一次得到

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 2af + b$$

其中 b 是另一个常数.

我们寻找孤立解像 Russell 形容的那样, 即远离水团积聚的地方, 没有波峰. 也就是说, 当 $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x), f'(x), f''(x) \rightarrow 0$, 从而一定有 $a = b = 0$. 所以

$$-cf^2 + (f')^2 + 2f^3 = 0$$

这个一阶 ODE 的解为

$$f(x) = \frac{1}{2}c \operatorname{sech}^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x - x_0) \right]$$

其中 x_0 是一个积分常量.

解得函数 f 以后, $u(x, t) = f(x - ct)$ 就是孤子. 它向右以速度 c 传播. 对于每个 $c > 0$, 都有一个孤子. 如果 c 很大, 它就"高瘦快"; 如果 c 很小, 它就"矮胖慢".

孤子的稳定性仅在 1960 年代由 M. Kruskal 和 N. Zabusky 通过计算机实验发现. 如果我们从两个孤子开始, 速度更快的孤子将超过较慢的一个, 经过复杂的非线性相互作用之后的两个孤子向右移动时毫发无损, 除了稍有延迟. 孤子的稳定性

可以由反散射变换的分析来解释. 它表明非线性方程 11.1 事实上与一个线性方程有着紧密且复杂的关系. 这个线性方程就是薛定谔方程:

$$-\psi_{xx} - u\psi = \lambda\psi \quad (11.2)$$

这个方程有一些特征值 λ 和特征函数 $\psi(x, t)$, 做代换

$$u = -\lambda - \frac{\psi_{xx}}{\psi}$$

代入 11.1 有

$$\lambda_t \psi^2 + (\psi h_x - \psi_x h)_x = 0 \quad (11.3)$$

其中

$$h = \psi_t - 2(-u + 2\lambda)\psi_x - u_x\psi$$

我们可以作归一化 $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$ 对 11.3 积分, 我们得到 $\lambda_t = 0$, 所以 λ 是一个常数. 因此我们发现了 11.1 和 11.2 的关键的联系. 如果 u 是方程 11.1 的解, λ 是 11.2 的特征值, 则 λ 不依赖于 t .

因此每一个特征值提供一个运动不变量. 记

$$\lambda_N \leq \lambda_{N-1} \leq \cdots \leq \lambda_1 \leq 0$$

其中 $\lambda_n = -\kappa_n^2$ 有特征函数 $\psi_n(x, t)$.

$$\psi_n(x, t) \sim c_n(t)e^{-\kappa_n x}, (x \rightarrow \infty)$$

$c_n(t)$ 叫做归一化常数. 散射理论的薛定谔方程导致了带初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$ 的解决. 方法是

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \text{在时间} 0 \text{ 散射} \\ &\longrightarrow \text{在时间} t \text{ 散射} \\ &\longrightarrow u(x, t) \end{aligned}$$

由于只是初步探索, 就不做更深入的探讨了.

11.2 初等解法和复杂解法

1. Kirchhoff 变换:

$$\nabla \cdot [\sigma(u)\nabla u] = 0, \omega = \int_{u_0}^u \sigma(\xi) d\xi \rightarrow \Delta\omega = 0$$

2. Cole-Hopf 变换:

$$u_t + uu_x = \beta u_{xx}, u = -2\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x} \rightarrow v_t = \lambda v_{xx}$$

3. 相似变换:

$$u_t = (\sigma(u)u_x)_x, u = u(\xi), \xi = \frac{x}{\sqrt{t}} \rightarrow (\sigma(u)u')' + \frac{\xi}{2}u' = 0$$

4. 行波变换:

$$u_t = (u^n u_x)_x, u = f(\xi), \xi = x + at \rightarrow af' = (f^n f')'$$

5. 平面波变换:

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u &= 0, u = e^{i(kx - \mu t)} v(\xi), \xi = x - bt, k = \frac{b}{2}, \mu = k^2 - a^2 \\ \rightarrow v_{\xi\xi} - a^2 v + \beta v^3 &= 0 \rightarrow v_{\xi}^2 = a^2 v^2 - \frac{\beta}{2} v^4 \rightarrow v(\xi) = a \sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{sech} a \xi \\ \rightarrow u &= a \sqrt{\frac{2}{\beta}} e^{i[\frac{1}{2}bx - (\frac{1}{4}b^2 - a^2)t]} \operatorname{sech} a(x - bt) \end{aligned}$$

目前发展比较成熟的复杂解法: 反散射法, Backlund 变换法, Darboux 变换法, 齐次平衡法, Hirota 双线法, Tanh 函数展开法...

举一例, 考虑如下热传导方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + bu_x^2 = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

其中 $a > 0, b \in \mathbb{R}$, 我们将通过 Cole-Hopf 变换法将此问题线性化, 再由 Poisson 公式求出其解, 进而得原方程的解.

我们希望找到其光滑解 $u(x, t)$, 为此引入函数

$$\omega = \phi(u)$$

其中 $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 为待定的一元可导函数. 我们的目标是选择适当的 ϕ 以将问题中方程转化为关于 $\omega(x, t)$ 的线性齐次方程. 经计算

$$\omega_t = \phi'(u)u_t$$

$$\begin{aligned}\omega_x &= \phi'(u)u_x \\ \omega_{xx} &= \phi''(u)u_x^2 + \phi'(u)u_{xx}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\omega_t &= \phi'(u)u_t = \phi'(u) [a^2u_{xx} - bu_x^2] \\ &= a^2\phi'(u)u_{xx} - b\phi'(u)u_x^2 \\ &= a^2 [\omega_{xx} - \phi''(u)u_x^2] - b\phi'(u)u_x^2 \\ &= a^2\omega_{xx} - [a^2\phi''(u) + b\phi'(u)] u_x^2\end{aligned}$$

若待定的函数 ϕ 满足

$$a^2\phi''(u) + b\phi'(u) = 0$$

则有

$$\omega_t - a^2\omega_{xx} = 0$$

解得

$$\omega = \phi(u) = e^{-\frac{b}{a^2}u}$$

称此公式为 **Cole-Hopf 变换**.

于是 Cauchy 问题中的拟线性方程经 Cole-Hopf 变换转化成线性的齐次方程, 即有如下形式

$$\begin{cases} \omega_t - a^2\omega_{xx} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \omega(x, 0) = \Phi(x) \end{cases}$$

其中 $\Phi(x) = \omega(x, 0) = \phi[u(x, 0)] = e^{-\frac{b}{a^2}g(x)}$ 以下过程略.

对于非线性偏微分方程, 还有变分法, 山路定理等相关内容. 由于只是初步探索, 就不做更深入的探讨了.