15-16学年冬季学期《偏微分方程》期末试卷答案

一.(15分)在区域$\{t>1,-\infty<x<+\infty\}$内指出二阶线性偏微分方程

$$t^2u_{tt}+2txu_{tx}+x^2u_{xx}=0$$

的类型（即说明是双曲型、抛物型还是椭圆型方程）？作变换$\xi=x/t,\eta=x,u(\xi,\eta)=u(t,x)$ 求$u(\xi,\eta)$所满足的方程，并求满足条件$u(1,x)=x^2,u_t(1,x)=0$的特解。

解：方程为抛物型方程：

$u(\xi,\eta)$所满足$u_{\eta\eta}=0$, 解得通解为

$$u(t,x)=u(\xi.\eta)=\eta f(\xi)+g(\xi)=xf(x/t)+g(x/t)$$

由定解条件得

$$\begin{cases} u(1,x)=xf(x)+g(x)=x^2\\ u_t(1,x)=-x^2f'(x)-xg'(x)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)+xf'(x)+g'(x)=2x\\ xf'(x)+g'(x)=0\end{cases}$$

解得$f(x)=2x,g(x)=-x^2$, 从而

$$u(t,x)=\frac{2x^2}{t}-\frac{x^2}{t^2}=\frac{x^2}{t^2}(2t-1).$$

二.（15分）试用幂级数解法讨论：当ρ是何值时Hermite方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\rho y=0$$

存在多项式类型的解？并分别求出一个3次多项式和一个4次多项式类型的解。

解：幂级数解为$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 代入Hermite方程得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+\rho a_n-2na_n\right]x^n=0.$$

比较系数得

$$a_{n+2}=\frac{2n-\rho}{(n+2)(n+1)}\overset{a_n}{a_n},n=0,1,2,\cdots$$

从而，当$\rho=2n$时存在多项式类型的解. $\rho=6$时有3次多项式类型的解

$$y=a_1\left(x-\frac{2}{3}x^3\right),\ a_0=0$$

当$\rho=8$时有4次多项式类型的解

$$y=a_0\left(1-4x^2+\frac{4}{3}x^4\right).\ a_1=0$$

三.（15分）设A是给定的常数，试用分离变量法求解下列定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<1,\ y>0 \\ u(0,y)=0,\ u(1,y)=A \\ u(x,0)=0,\ \lim_{y\to+\infty}u(x,y)\neq\infty. \end{cases}$$

解：取$v=u-Ax$, 则$v(x,y)$满足

$$\begin{cases} v_{xx}+v_{yy}=0,\ 0<x<1,\ y>0 \\ v(0,y)=0,\ v(1,y)=0 \\ v(x,0)=-Ax,\ \lim_{y\to+\infty}v(x,y)\neq\infty. \end{cases}$$

分离变量$v(x,y)=X(x)Y(y)$且代入方程及条件$v(0,y)=0,\ v(1,y)=0$及$\lim_{y\to+\infty}v(x,y)\neq\infty$得,

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0, 0<x<1, \\ X(0)=X(1)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''-\lambda Y=0,\ y>0 \\ \lim_{y\to\infty}Y(y)\neq+\infty \end{cases}$$

当$\lambda=n^2\pi^2\ (n=1,2,\cdots)$时有非零解

$$X_n(x)=A_n\sin n\pi x,\ Y_n(y)=C_ne^{-n\pi y}.$$

取

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}D_ne^{-n\pi y}\sin n\pi x$$

它满足条件$v(0,y)=0$, $v(1,y)=0$以及$\lim_{y\to+\infty}v(x,y)\neq\infty$, 取$D_n$ 满足

$$-Ax=v(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}D_n\sin n\pi x$$

即

$$D_n=-2A\int_0^1 x\sin n\pi x dx=(-1)^n\frac{2A}{n\pi}$$

从而得解

$$u(x,y)=v(x,y)+Ax=Ax+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n\pi y}\sin n\pi x.$$

四.（15分）(1). 求证函数$w(t,x)=t^2+(x+1)^2$满足

$$w_{tt}-w_{xx}=0,\ w(t,-1)=t^2.$$

(2). 用延拓法求解下列半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, x>-1, t>0 \\ u(t,-1)=t^2, \\ u(0,x)=0,\ u_t(0,x)=x+1. \end{cases}$$

解： (1). 省略。

(2). 记$y=x+1$, $v(t,y)=u(t,y-1)-t^2-y^2$， 则函数$v(t,y)$满足

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{yy}=0, y>0, t>0\\ v(t,0)=0,\\ v(0,y)=-y^2,\ v_t(0,y)=y. \end{cases}$$

关于y作奇延拓

$$V(t,y)=\begin{cases} v(t,y),\ y\geq 0\\ -v(t,-y),\ y<0 \end{cases},\ \phi(y)=\begin{cases} -y^2,\ y\geq 0\\ y^2,\ y<0 \end{cases}$$

则函数$V(t,y)$满足初值问题

$$\begin{cases} V_{tt}-V_{yy}=0, -\infty<y<+\infty, t>0\\ V(0,y)=\phi(y),\ V_t(0,y)=y. \end{cases}$$

解得

$$V(t,y)=\frac{\phi(y+t)+\phi(y-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{y-t}^{y+t}ydy=\frac{\phi(y+t)+\phi(y-t)}{2}+yt.$$

从而得

$$u(t,x)=v(t,y)+t^2+y^2=V(t,y)|_{y\geq 0}+t^2+y^2=\begin{cases} -t(x+1),\ 0<x+1<t\geq 0\\ -(x+1-t)^2-t(x+1),\ x+1\geq t>0. \end{cases}$$

五.（20分）给定常数$T>0$, 记$u(t,x)$为

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=f(x),\ 0<x<\pi, t>0\\ u_x(t,0)=0,\ u_x(t,\pi)=0\\ u(0,x)=h(x) \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} 1,\ 0\leq x\leq \frac{1}{2},\\ 0,\ \frac{1}{2}<x\leq\pi \end{cases}$$

的解。试用分离变量法求$h(x)$使得解满足$u(T,x)=0$.

解：由边界条件知本征（特征）函数为$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$, 取

$$u(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\cos nx,\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cos nx,\ h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\cos nx$$

则满足

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}\left[u_n'(t)+n^2u_n(t)\right]\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cos nx\\ \sum_{n=0}^{\infty}u_n(0)\cos nx=\sum_{n=0}^{\infty}h_n\cos nx \end{cases}$$

即

$$u_n'(t)+n^2u_n(t)=f_n,\ u_n(0)=h_n$$

由$u(T,x)=0$得$u_n(T)=0$, 利用

$$f_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi},\ n=0 \\ \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n}{2},\ n\neq 0 \end{cases}$$

解得

$$h_n = u_n(0) = -\int_0^T e^{n^2t} f_n dt = \begin{cases} -\frac{T}{2\pi},\ n=0 \\ \frac{2(1-e^{n^2T})}{n^3\pi}\sin\frac{n}{2},\ n\neq 0. \end{cases}$$

从而

$$h(x) = -\frac{T}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-e^{n^2T})}{n^3\pi}\sin\frac{n}{2}\cos nx$$

六．（20分）(1). 试用傅里叶变换法求函数$G(x,y,\tau)$(格林函数)使得问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0,\ -\infty<x<+\infty, y>0 \\ \lim_{x^2+y^2\to+\infty} u(x,y)=0,\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$$

的解可以表示为$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,\tau)f(\tau)d\tau$。

(2). 试用上述表达式求证：在区域$\{-\infty<x<+\infty, y>0\}$内解满足

$$\min_{-\infty<x<+\infty} f(x) \le u(x,y) \le \max_{-\infty<x<+\infty} f(x)$$

解： (1). 记$u(x,y)$与$f(x)$关于x的Fourier变换分别为$\bar{u}(\lambda,y)$与$\bar{f}(\lambda)$。关于x作Fourier变换得

$$\begin{cases} \bar{u}_{yy}-\lambda^2\bar{u}=0,\ -\infty<\lambda<+\infty, y>0 \\ \lim_{\lambda^2+y^2\to+\infty} \bar{u}(\lambda,y)=0,\ \bar{u}(\lambda,0)=\bar{f}(\lambda) \end{cases}$$

解得

$$\bar{u}(\lambda,y)=\bar{f}(\lambda)e^{|\lambda|y}$$

关于λ作Fourier逆变换得

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau.$$

从而$G(x,y,\tau)=\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}$。

(2)记$m=\min_{-\infty<x<+\infty} f(x)$及$M=\max_{-\infty<x<+\infty} f(x)$, 则

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau)}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau \ge m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau = m.$$

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{yf(\tau}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau \le M\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y}{\pi[(x-\tau)^2+y^2]}d\tau = M.$$

2017-2018学年冬季学期《偏微分方程》期末试卷答案

一.(15分)用行波法求解初值问题

$$\begin{cases} u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} = 64x, -\infty < x, y < +\infty, \\ u|_{y=x} = 16x^2, \ u|_{y=-3x} = 0. \end{cases}$$

解：作变换

$$\xi = y + 3x, \ \eta = y - x, \ u(\xi, \eta) = u(x, y) \qquad ————————5分$$

则$u(\xi, \eta)$满足方程

$$-16u_{\xi\eta} = 16(\xi - \eta), \text{即} \ u_{\xi\eta} = \eta - \xi,$$

积分得通解为

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi\eta(\eta - \xi) + F(\xi) + G(\eta),$$

即

$$u(x, y) = -2x(y + 3x)(y - x) + F(y + 3x) + G(y - x).$$

由条件得

$$16x^2 = u|_{y=x} = F(4x) + G(0), \ 0 = u|_{y=-3x} = F(0) + G(-4x),$$

解得

$$F(0) + G(0) = 0, \ F(x) = x^2 - G(0), \ G(x) = -F(0).$$

从而，解为

$$u(x, y) = (y + 3x)^2 - 2x(y + 3x)(y - x). \qquad ——————————15分$$

二.（15分）用分离变量法求解下列初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\cos\pi x, \ 0 < x < 1, \ t > 0; \\ u_x|_{x=0} = 0, \ u_x|_{x=1} = 0, \ t > 0; \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

解：特征值问题为

$$X'' + \lambda X = 0, \ X'(0) = X'(1) = 0; \qquad -\lambda = \frac{T''}{T} \quad \frac{X''}{X}$$

特征值以及相应地特征函数为

另一种齐次化原理，

$u_{tt} - u_{xx} = 0.$

$u|_{t=\tau} = t\cos\pi x \quad u_t|_{t=\tau} = 0$

$$\lambda_n = (n\pi)^2, \ X_n(x) = \cos n\pi x, \ n = 0, 1, 2, \cdots,$$

构造初边值问题解为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)\cos n\pi x, \qquad ————————5分$$

代入得

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[T_n''(t) + (n\pi)^2 T_n(t)\right]\cos n\pi x = t\cos\pi x, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(0)\cos n\pi x = 0, \sum_{n=0}^{+\infty} T_n'(0)\cos n\pi x = 0, \end{cases}$$

即$T_n(t)$满足

$$\begin{cases} T_1''(t) + \pi^2 T_1(t) = t \\ T_1(0) = 0, \ T_1'(0) = 0, \end{cases} ; \begin{cases} T_n''(t) + \pi^2 T_1(t) = 0 \\ T_n(0) = 0, \ T_n'(0) = 0, \end{cases} (n \neq 1). \qquad ———————10分$$

解得

$$T_1(t) = \frac{\pi t - \sin \pi t}{\pi^3}, \ T_n(t) = 0 \, (n \neq 1).$$

从而初边值问题的解为

$$u(x, t) = \frac{\pi t - \sin \pi t}{\pi^3}\cos\pi x. \qquad ——————————————15分$$

三.(15分)(1). 验证$w(x,t)=-x^2+tx$满足

$$w_{tt}-w_{xx}=2,\ w_x|_{x=0}=t;$$

(2). 试用延拓法求解半无界初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=2,\ x>0,t>0,\\ u_x|_{x=0}=t,\ t>0,\\ u|_{t=0}=0,\ u_t|_{t=0}=0,x>0. \end{cases}$$

解:(1). 直接验证;————————————————————5分

(2). 记$v(x,t)=u(x,t)-w(x,t)$, 则

$$\begin{cases} v_{tt}-v_{xx}=0,\ x>0,t>0,\\ \\ v|_{t=0}=x^2,\ v_t|_{t=0}=-x,x>0. \end{cases}$$

利用(偶)延拓, 若$\tilde{v}(x,t)$为初值问题

$$\begin{cases} \tilde{v}_{tt}-\tilde{v}_{xx}=0,\ -\infty<x<+\infty,t>0,\\ \tilde{v}|_{t=0}=x^2,\ \tilde{v}_t|_{t=0}=-|x|,\ -\infty<x<+\infty. \end{cases}$$ ———10分

则$v(x,t)=\tilde{v}|_{x\geq 0}$. 而$x\geq 0$

$$\tilde{v}(x,t)=\frac{1}{2}\left[(x-t)^2+(x+t)^2\right]-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}|\xi|d\xi$$

得到

$$v(x,t)=\tilde{v}_{x\geq 0}=\begin{cases} x^2+t^2-xt,\ 0\leq t\leq x,\\ \frac{1}{2}(x^2+t^2),\ 0<x<t. \end{cases}$$

$$u(x,t)=v+w=\begin{cases} t^2,\ 0\leq t\leq x,\\ \frac{1}{2}(t^2-x^2)+tx,\ 0\leq x<t. \end{cases}$$ ——————————15分

四.(15分) (1). 已知函数e^{-x^2}的傅里叶(Fourier)变换

$$F[e^{-x^2}](\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-i\lambda x}dx=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}\lambda^2},$$

$a>0$为常数, 试求函数$e^{-a\lambda^2}$的傅里叶逆变换

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\lambda^2}e^{i\lambda x}d\lambda;$$

(2). 试用傅里叶变换法求初值问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}-2tu=0,\ -\infty<x<+\infty,t>0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x).\ -\infty<x<+\infty, \end{cases}$$

的格林函数$G(x,t,\xi)$, 即求函数$G(x,t,\xi)$使得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,t,\xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

解:(1). 计算得

$$F^{-1}[e^{-a\lambda^2}](x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}.$$ —————————————5分

(2). 记函数$u(x,t)$与$\varphi(x)$关于变量x的傅里叶变换分别为$\hat{u}(\lambda,t)$与$\hat{\varphi}(\lambda)$.作傅里叶变换得

$$\begin{cases} \hat{u}_t+(\lambda^2-2t)\hat{u}=0,\ -\infty<\lambda<+\infty, t>0. \\ \hat{u}|_{t=0}=\hat{\varphi}(\lambda),\ -\infty<\lambda<+\infty, \end{cases}$$

解得

$$\hat{u}(\lambda,t)=\hat{\varphi}(\lambda)e^{t^2}e^{-\lambda^2 t}.$$ ————————————————10分

利用

$$F^{-1}[e^{-\lambda^2 t}](x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

及傅里叶变换的性质得

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{t^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)d\xi.$$

格林函数

$$G(x,t,\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{t^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}.$$ ————————————15分

五.(20分)用幂级数解法讨论：当λ是何值时二阶线性微分方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0$$

在$x=0$的邻域内存在多项式形式的解？并求出这些解。

解：取

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n,$$ ————————————————5分

$$y'=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n x^{n-1}, y''=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_n x^{n-2},$$

代入微分方程得

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+(\lambda-1)a_n\right]x^n=0,$$

有递推公式

$$a_{n+2}=\frac{2n+1-\lambda}{(n+1)(n+2)}a_n,\ n=0,1,2,\cdots$$ ——————————10分

微分方程的通解为

$$y=a_0\left[1+\frac{(1-\lambda)}{2!}x^2+\frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}x^4+\cdots\right]$$
$$+a_1\left[x+\frac{(3-\lambda)}{3!}x^3+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}x^5+\cdots\right].$$

当$\lambda=2n+1, n=0,1,2,\cdots$时，我们有

$$a_{n+2}=a_{n+4}=\cdots=0,$$

从而微分方程有多项式形式的解. ——————————————————————————15分

当n是偶数时, 即$n=2m(m=0,1,2,\cdots)$且$a_1=0$时，多项式形式的解为

$$y_0(x)=a_0\left[1+\frac{-4m}{2!}x^2+\frac{(-4)^2m(m-1)}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-4)^m m(m-1)(m-2)\cdots 1}{(2m)!}x^{2m}\right]$$

当n是奇数时, 即$n=2m+1(m=0,1,2,\cdots)$且$a_0=0$时，多项式的解

$$y_1(x)=a_1\left[x+\frac{-4m}{3!}x^3+\frac{(-4)^2m(m-1)}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-4)^m m(m-1)(m-2)\cdots 1}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right].$$ ——20分

六.(20分) 半径为1的半圆型薄板,上、下侧面绝热，稳定的温度分布$u(x,y)$满足

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, |u(x,y)|<+\infty,\ x^2+y^2<1\text{且}y>0, \\ u|_{x^2+y^2=1,y\geq 0}=2x^3y,\ u|_{y=0,|x|\leq 1}=0 \end{cases}$$

作极坐标变换

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ v(r,\theta)=u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

已知

$$u_{xx}+u_{yy}=v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$

(1). 写出函数$v(r,\theta)$所满足的方程以及边界（边值）条件；

(2). 用分离变量法求函数$u(x,y)$。

解：(1). 函数$v(r,\theta)$所满足的方程以及边界（边值）条件为

$$\begin{cases} v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=0,\ |v(r,\theta)|<+\infty, 0<r<1, 0<\theta<\pi, \\ v|_{r=1}=2\sin\theta\cos^3\theta, 0\leq\theta\leq\pi, \\ u|_{\theta=0}=u|_{\theta=\pi}=0, 0\leq r\leq 1. \end{cases}$$ ————————5分

(2). 令$v(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，则利用分离变量法，由$v(r,\theta)$满足方程以及条件

$$|v(r,\theta)|<+\infty, u|_{\theta=0}=u|_{\theta=\pi}=0$$

得

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ \Phi(0)=\Phi(\pi)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ |R(r)|<+\infty \end{cases}$$ ————————10分

可变量分离的非平凡解为

$$\lambda_n=n^2,\ \Phi_n(\theta)=\sin n\theta,\ R_n(r)=a_nr^n,\ v_n=a_nr^n\sin n\theta,\ n=1,2,3,\cdots;$$

$$v(r,\theta)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nr^n\sin n\theta,$$ ——————————————15分

则$v(r,\theta)$满足微分方程及条件$u|_{\theta=0}=u|_{\theta=\pi}=0$, 只要选取合适的系数$a_n$使得$v(r,\theta)$满足条件

$$v|_{r=1}=2\sin\theta\cos^3\theta,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\sin n\theta=v|_{r=1}=2\sin\theta\cos^3\theta, 0\leq\theta\leq\pi$$

积分得

$$a_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^3\theta\sin n\theta d\theta, n=1,2,3,\cdots$$

利用$2\sin\theta\cos^3\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta$得

$$a_2=\frac{1}{2},\ a_4=\frac{1}{4},\ a_n=0(n\neq 2, n\neq 4).$$

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+\frac{1}{4}r^4\sin 4\theta,$$

即

$$u(x,y)=v(r,\theta)=xy+x^3y-xy^3=xy(1+x^2-y^2).$$ ————————20分