

PDE chapter2

luojunxun

2023 年 10 月 31 日

1 $u_t + cu_x = 0$

解析方法: 特征线方法:

特征线族: $\frac{dx}{dt} = c$, 这样 $x - ct = \xi$, 解出 $u(t, x) = f(x - ct)$, 这里解描述了一个速度为 c 的右传波, 表现为 $u(0, x) = u(T, x + cT) = f(x)$. 同理有左传波.

数值方法: 有限差分: 利用向后差分方法 $\frac{v(t+k, x) - v(t, x)}{k} + c \frac{v(t, x) - v(t, x-h)}{h} = 0 \Rightarrow v(t+k, x) = [(1 - \lambda c) + \lambda c E^{-1}]v(t, x) \Rightarrow v(t, x) = v(nk, x) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1 - \lambda c)^i (\lambda c)^{n-i} f(x - (n-i)h)$, 当 $\lambda c \leq 1$ 时, 符合 CFL 准则, 并且这种情况下产生的误差和 f 的测量误差一样, 从而稳定, 可以证明这种差分格式收敛到经典解