22-23 秋冬学期数院偏微分方程（普通和求数合一张卷）

2023 年 2 月 25 日

本试卷函数定义的开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$，全部都是有界的，且边界 $\partial\Omega$ 是光滑的。

1.(20') 解下面方程

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_x(x,t) + au(x,t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x^2, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

还有求 $\frac{x}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}$ 的傅里叶变换。

2.(10') 解方程

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sin(\omega t) & x \in (0,1), t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) & x \in (0,1) \\ u_t(x,0) = 0 & x \in (0,1) \\ u(0,t) = 0, t \geq 0, u(1,t) = 0, t \geq 0 \end{cases}$$

3.(10') 证明关于下面方程的不等式

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \triangle_x u(x,t) = f(x,t) & (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in \Omega \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2+|\nabla u(x,t)|^2\mathrm{d}x \le e^T\left\{\int_\Omega |\psi(x)|^2+|\nabla\varphi(x)|^2\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega |f(x,\tau)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\right\}$$

4.(20') 用两种方法证明下面方程解的唯一性

$$\begin{cases} u_t(x,t)-\triangle_x u(x,t)=0 & (x,t)\in\Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,t)=g(x,t) & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,+\infty) \\ u(x,0)=f(x) & x\in\Omega \end{cases}$$

5.(10') 解出 $\mathbb{R}^n$ 上的位势方程的基本解，即
证明若 $u(x)=f(r(x))$，其中 $r(x)=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$，$\triangle u(x)=0$ 则有：

$$\begin{cases} f(r)=c_1+c_2\ln r & n=2 \\ f(r)=c_1+c_2\frac{1}{r^{n-2}} & n\neq 2 \end{cases}$$

选做题 A 组

6. 求出满足极小曲面方程

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0$$

的所有具有 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 形式的极小曲面。

7. 求解由下述 Laplace 方程的第一边值问题为所描述的矩形平板 $(0\le x\le a, 0\le y\le b)$ 上的稳定温度分布：

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0, \\ u(0,y)=u(a,y)=0, \\ u(x,0)=\sin\frac{\pi x}{a}, u(x,b)=0. \end{cases}$$

选做题 B 组

8.(10') 证明以下方程的比较原理，具体地

$$\begin{cases} -\triangle u_i(x) + |\nabla u_i(x)|^4 + u_i(x)^3 = f_i(x) & x \in \Omega \\ u_i(x) = g_i(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$i = 1, 2$，如果 $f_1 \leq f_2$，$g_1 \leq g_2$，那么请证明 $u_1 \leq u_2, \forall x \in \Omega$。

9.(20')（共四小题）

(1) 对分布 $\delta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}), \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \langle \delta, \varphi \rangle \xlongequal{\text{def}} \varphi(0)$，求 δ 的 k 阶广义导数 $\delta^{(k)}$。

(2) 求 $\delta^{(k)}$ 的，作为分布的 Fourier 变换。

(3) 分布列 $\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\delta(x - \frac{1}{k})\}$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 存在极限吗？

(4) 分布列 $\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\delta^{(k)}\}$ 在 $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ 存在极限吗？