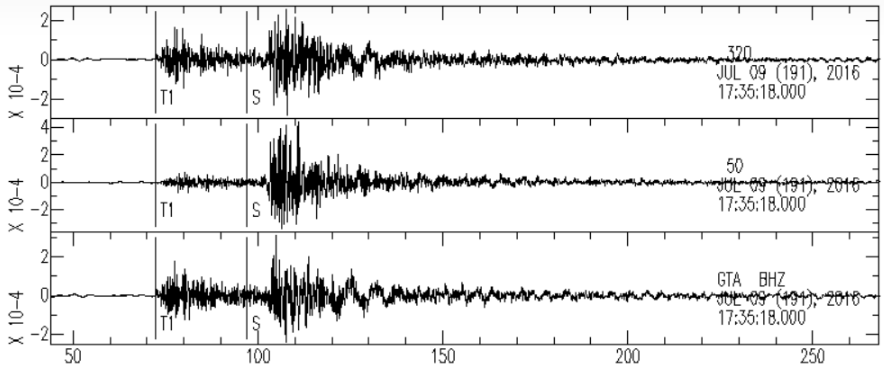


什么是格林函数(Green's function)

Hsuty
地球物理, 地震学, 力学

一般地，**点源作用产生的场就是格林函数**。

在地震学中，格林函数是**单位集中脉冲力**产生的场，可以是位移，速度或加速度等，一般指位移场。

集中意味着力只作用于空间中一点，**脉冲**指力只作用于时间中某一时刻。

在地震学中，应特别注意：

1) 集中脉冲型**单力**产生的位移场是格林函数；

2) 一对单力组成的**力偶**产生的位移场是格林函数空间导数；

3) 断层剪切位错所产生的位移场，等效于双力偶所产生的位移场，也等效于单力+单力偶所产生的位移场。

（见《定量地震学》等效体力章节，即3.2节）。

注：单力偶就是一般意义上的力偶，代表一对单力组成的力偶；双力偶是指两个单力偶的组合。

---

1 什么是格林函数

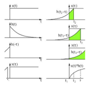
对线性算子 L，在点源 δ 作用下的输出（或响应）就是格林函数G，即： $LG=\delta$。

不同线性算子对应不同物理问题，也就对应不同性质的方程，如拉普拉斯方程，泊松方程，亥姆霍兹方程，波动方程等，这些方程都对应着各自不同的格林函数（见第二部分Wikipedia汇总）。如，对声波波动问题，线性算子为 $L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\nabla^2$.

格林函数妙处在于若已知格林函数与源分布（包括时间上与空间上），则可通过格林函数与源的卷

推导：已知： $L\varphi=Q$,其中 L 是线性算子， Q 为源分布， φ 为待求输出。利用卷积的性质，可得： $\varphi=\varphi*\delta=\varphi*(LG)=(L\varphi)*G=Q*G$.（注：卷积的实质就是把所有源的作用都通过积分叠加起来）

Hsuty：什么是卷积(convolution)



因此，**问题的关键就是求格林函数**。不过，大多数物理场景由于边界条件与初始条件的限制，无法求得格林函数。能求出格林函数的都是一些简单的情况，如全空间下/半空间下的格林函数。

如何求格林函数，提供一种思路

1）利用傅里叶变换将偏微分方程转化为常微分方程（由时间空间域转换为频率或/和波数域）；

2）求解常微分方程，得到频率或/和波数域的格林函数表达式；

3）利用傅里叶反变换得到时间或/和空间域格林函数。

在进行傅里叶逆变换时，通常会利用物理意义，因果关系，广义函数，复变函数等来求积分解析表达式。除了使用傅里叶变换外，还可利用拉普拉斯变换等其他变换。

Hsuty：傅里叶级数(Fourier series)与傅里叶变换(Fourier transform)

例如，一维波动方程中格林函数的求解。

1D波动方程为： $(\frac{\partial}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial}{\partial x^2})G(x,t)=\delta(t)\delta(x)$

当 $t<0$ 时， $G(x,t)=0.$

1) 对上式进行傅里叶变换

$$\left\{(-iw)^2-c^2(-ik)^2\right\}\tilde{G}(k,w)=1$$

2) 求得频率波数域下格林函数

$$\Rightarrow\tilde{G}(k,w)=\frac{1}{c^2k^2-w^2}$$

3）通过傅里叶反变换求得时间空间域下格林函数

$$\Rightarrow G(x,t)=(\frac{1}{2\pi})^2\int_k\int_w\tilde{G}(k,w)e^{-i(wt+kx)}dwdk$$

$$=(\frac{1}{2\pi})^2\int_k e^{-ikx}dk\int_w\frac{1}{c^2k^2-w^2}e^{-iwt}dw$$

难点为求此积分解析表达式

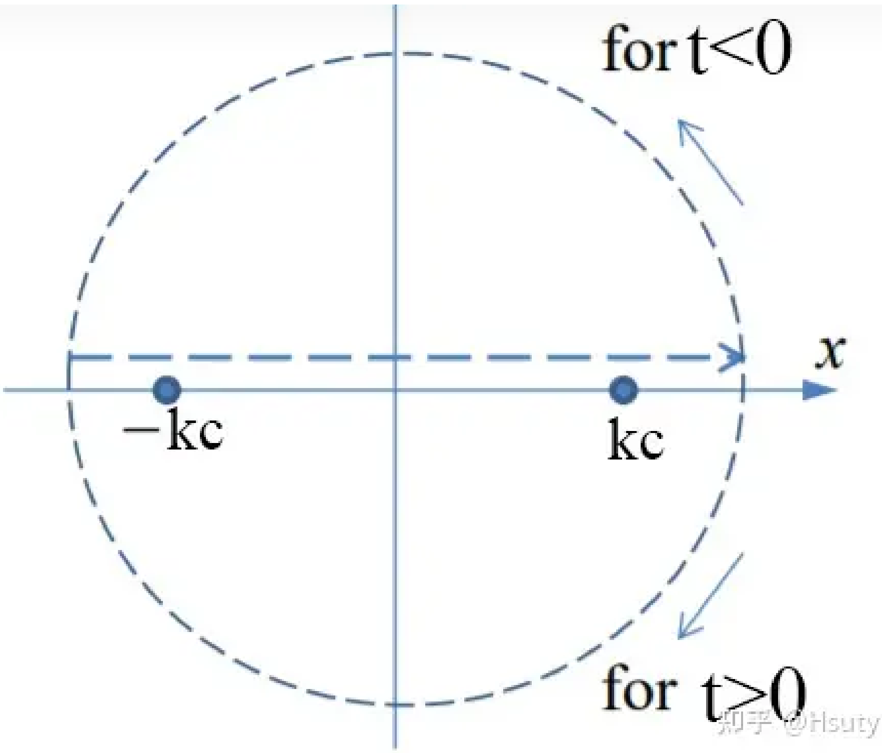
以下“上移操作”可能有点问题，评论区chris用拉式变换的方法更好一些。

此外，更多更复杂格林函数推导可见：Hsuty：弹性动力学方程格林函数推导

注意，此处的 w 为复数，即 $w=w_r+iw_i$.

$e^{-iwt}=e^{-i(w_r+iw_i)t}=e^{-iw_rt}e^{w_it}$,

令 $I=\int_w\frac{e^{-iwt}}{c^2k^2-w^2}dw=\int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon}\frac{e^{-iwt}}{c^2k^2-w^2}dw$,($\varepsilon\to0$)



当t>0时，需 $w_r < 0$ 来满足被积函数可积，用下半圆，

$$I = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \frac{e^{-iwt}}{c^2k^2-w^2}dw$$

$$= -2\pi i\left\{Res(f, w=kc) + Res(f, w=-kc)\right\}$$

$$= -2\pi i\left(\frac{e^{-ikct}}{-2(kc)} + \frac{e^{ikct}}{-2(-kc)}\right)$$

$$= -\pi i\left(\frac{e^{ikct}}{kc} - \frac{e^{-ikct}}{kc}\right).$$

当t<0时，用上半圆，由留数定理可知：

$$I = \int_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \frac{e^{-iwt}}{c^2k^2-w^2}dw = 0 .$$

因此，

$$I = \int_w \frac{e^{-iwt}}{c^2k^2-w^2}dw = -\pi i\left(\frac{e^{ikct}}{kc} - \frac{e^{-ikct}}{kc}\right)H(t)$$

原积分化简为：

$$G(x,t) = -\frac{iH(t)}{4\pi}\int_k e^{-ikx}\left(\frac{e^{ikct}}{kc} - \frac{e^{-ikct}}{kc}\right)dk$$

$$= -\frac{iH(t)}{4\pi c}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(ct-x)}}{k} - \frac{e^{-ik(ct+x)}}{k}dk$$

由物理意义可知：波在 $x=0$ 激发，任一时刻只有 $|x| < ct$ 的地方有波动，其余地方波未到达，则:$-ct < x < ct \Rightarrow ct - x > 0$,

且，上式中 $H(t)$ 应改写为 $H(ct-|x|)$ 才能满足此物理意义。

利用Jordan's Lemma与Small Arc Lemma可知：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik(ct-x)}}{k} - \frac{e^{-ik(ct+x)}}{k}dk$$

$$= \int^{+\infty} \frac{e^{iz(ct-x)}}{} - \frac{e^{-iz(ct+x)}}{}dz$$

$= \pi i(1+1)\,.$

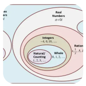
从而得到：

$$G(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-|x|)\,.$$

其中H为Heaviside function，加上H是为了满足波传播的事实（波动未到的点位移为0）。

关于复变函数，可参考：

Hsuty：复变函数中的基本概念与定理
94 赞同 · 5 评论　文章



2 格林函数汇总

目录

f Green's functions [edit]

wing table gives an overview of Green's functions of frequently appearing differential operators, where $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\Theta(t)$ is the Heaviside step function, $J_\nu(z)$ is a Bessel function, $I_\nu(z)$ is a modified Bessel function of the first kind, and $K_\nu(z)$ is a modified Bessel function of the second kind.[1] Where time (t) appears in the first column, the advanced (causal) Green's function is listed.

Differential operator L	Green's function G	Example of application
∂_t^{n+1}	$\frac{t^n}{n!}\Theta(t)$	
$\partial_t+\gamma$	$\Theta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}$	
$(\partial_t+\gamma)^2$	$\Theta(t)t\mathrm{e}^{-\gamma t}$	
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t+\omega_0^2$ where $\gamma<\omega_0$	$\Theta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$ with $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$	1D underdamped harmonic oscillator
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t+\omega_0^2$ where $\gamma>\omega_0$	$\Theta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\frac{\sinh(\omega t)}{\omega}$ with $\omega=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$	1D overdamped harmonic oscillator
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t+\omega_0^2$ where $\gamma=\omega_0$	$\Theta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}t$	1D critically damped harmonic oscillator
2D Laplace operator $\nabla_{2D}^2=\partial_x^2+\partial_y^2$	$\frac{1}{2\pi}\ln\rho$ with $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$	2D Poisson equation
3D Laplace operator $\nabla_{3D}^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$	$\frac{-1}{4\pi r}$ with $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	Poisson equation
Helmholtz operator $\nabla_{3D}^2+k^2$	$\frac{-\mathrm{e}^{-ikr}}{4\pi r}=i\sqrt{\frac{k}{32\pi r}}H_{1/2}^{(2)}(kr)=i\frac{k}{4\pi}h_0^{(2)}(kr)$	stationary 3D Schrödinger equation for free particle
∇^2-k^2 in n dimensions	$-(2\pi)^{-n/2}\left(\frac{k}{r}\right)^{n/2-1}K_{n/2-1}(kr)$	Yukawa potential, Feynman propagator
$\partial_t^2-c^2\partial_x^2$	$\frac{1}{2c}\Theta(t-\lvert x/c\rvert)$	1D wave equation
$\partial_t^2-c^2\nabla_{2D}^2$	$\frac{1}{2\pi c\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}\Theta(t-\rho/c)$	2D wave equation
D'Alembert operator $\square=\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla_{3D}^2$	$\frac{\delta(t-\frac{r}{c})}{4\pi r}$	3D wave equation
$\partial_t-k\partial_x^2$	$\Theta(t)\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-x^2/4kt}$	1D diffusion
$\partial_t-k\nabla_{2D}^2$	$\Theta(t)\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)\mathrm{e}^{-\rho^2/4kt}$	2D diffusion
$\partial_t-k\nabla_{3D}^2$	$\Theta(t)\left(\frac{1}{4\pi kt}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{-r^2/4kt}$	3D diffusion
$\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\partial_x^2+\mu^2$	$\frac{1}{2}\left[(1-\sin\mu ct)\left(\delta(ct-x)+\delta(ct+x)\right)+\mu\Theta(ct-\lvert x\rvert)J_0(\mu u)\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-x^2}$	1D Klein–Gordon equation
$\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\nabla_{2D}^2+\mu^2$	$\frac{1}{4\pi}\left[(1+\cos(\mu ct))\frac{\delta(ct-\rho)}{\rho}+\mu^2\Theta(ct-\rho)\operatorname{sinc}(\mu u)\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}$	2D Klein–Gordon equation
$\square+\mu^2$	$\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}+\mu c\Theta(ct-r)\frac{J_1(\mu u)}{u}\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-r^2}$	3D Klein–Gordon equation
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t-c^2\partial_x^2$	$\frac{1}{2}e^{-\gamma t}\left[\delta(ct-x)+\delta(ct+x)+\Theta(ct-\lvert x\rvert)\left(\frac{\gamma}{c}I_0\left(\frac{\gamma u}{c}\right)+\frac{\gamma t}{u}I_1\left(\frac{\gamma u}{c}\right)\right)\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-x^2}$	telegrapher's equation
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t-c^2\nabla_{2D}^2$	$\frac{e^{-\gamma t}}{4\pi}\left[(1+e^{-\gamma t}+3\gamma t)\frac{\delta(ct-\rho)}{\rho}+\Theta(ct-\rho)\left(\frac{\gamma\sinh\left(\frac{\gamma u}{c}\right)}{cu}+\frac{3\gamma t\cosh\left(\frac{\gamma u}{c}\right)}{u^2}-\frac{3ct\sinh\left(\frac{\gamma u}{c}\right)}{u^3}\right)\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-\rho^2}$	2D relativistic heat conduction
$\partial_t^2+2\gamma\partial_t-c^2\nabla_{3D}^2$	$\frac{e^{-\gamma t}}{20\pi}\left[(8-3e^{-\gamma t}+2\gamma t+4\gamma^2t^2)\frac{\delta(ct-r)}{r^2}+\frac{\gamma^2}{c}\Theta(ct-r)\left(\frac{1}{cu}I_1\left(\frac{\gamma u}{c}\right)+\frac{4t}{u^2}I_2\left(\frac{\gamma u}{c}\right)\right)\right]$ with $u=\sqrt{c^2t^2-r^2}$	3D relativistic heat conduction

from Wikipedia

3 地震学中的格林函数

在地震学中，格林函数和互易定理（**Reciprocity theorems**）结合能推导出位移积分表示定理，根据位移积分表示定理就能推导出地震学中最重要的定理，**震源表示定理**。

$\rho \ddot{{u_i}}(\vec{x},t)=f_i(\vec{x},t)+\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}u_{k,l}(\vec{x},t))$.

$\Rightarrow \left\{ \rho \delta_{ik}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2} }-\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}) \right\}u_k(\vec{x},t)=f_i(\vec{x},t)$.

其中,

$f_i(\vec{x},t)$ 可以看作输入,

$\left\{ \rho \delta_{ik}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2} }-\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}) \right\}$ 此项为"体系响应函数",

$u_k(\vec{x},t)$ 可以看作输出。

特别地，当输入 $f_i(\vec{x},t)$ 为点源时，即,

$f_i(\vec{x},t)=\delta_{in}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\delta(t-\tau)$,

输出 $u_k(\vec{x},t)$ 就是格林函数，即 $u_k(\vec{x},t)=G_{kn}(\vec{x},t;\vec{\xi},\tau)$ 。

其中， $\vec{x}$ 为场点坐标系， $\vec{\xi}$ 为源点坐标系。源项 $f_i(\vec{x},t)=\delta_{in}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\delta(t-\tau)$ 代表作用在空间点 $\vec{x}=\vec{\xi}$, 时间上 $t=\tau$ 时刻n 方向单位脉冲力。

$G_{kn}(\vec{x},t;\vec{\xi},\tau)$ 中，分号前代表所求点的时空坐标 $(\vec{x},t)$,分号后代表源的时空坐标 $(\vec{\xi},\tau)$, k 代表所求点的方向， n 代表源的作用方向。

将格林函数和点源带入弹性动力学方程可得:

$\left\{ \rho \delta_{ik}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2} }-\frac{\partial}{\partial x_j}(C_{ijkl}\frac{\partial}{\partial x_l}) \right\}G_{kn}(\vec{x},t;\vec{\xi},\tau)=\delta_{in}\delta(\vec{x}-\vec{\xi})\delta(t-\tau)$. （1）

如何求格林函数？需要注意：1）边界条件，2）初始条件。边界条件可分为：全空间、半空间、层状介质、任意介质等，其中全空间和半空间的格林函数可以求得解析解表达式，而其他复杂情况只能数值求解。

关于全空间格林函数求取，可参考《定量地震学》第四章。笔者曾总结归纳如下:

关于半空间格林函数求取，可参考北大张海明老师的博士论文及发表的论文，如:

Zhang, H., & Chen, X. (2006). Dynamic rupture on a planar fault in three-dimensional half space—I. Theory.*Geophysical Journal International*,*164*(3), 633-652.

Zhang, H., & Chen, X. (2006). Dynamic rupture on a planar fault in three-dimensional half-space–II. Validations and numerical experiments.*Geophysical Journal International*,*167*(2), 917-932.

当边界条件不随时间变化时，格林函数满足时间上的互易性。由方程（1）可得，格林函数在时间上只取决于场点接收时刻 t 与源点作用时刻 τ 之差， $t-\tau$ ，即：

$$G_{kn}(\vec{x},t;\vec{\xi},\tau)=G_{kn}(\vec{x},t-\tau;\vec{\xi},0)=G_{kn}(\vec{x},-\tau;\vec{\xi},-t)$$

.

2）**空间互易性**

齐次边界条件下(homogeneous boundary condition)，格林函数满足空间互易性。（齐次边界条件指在边界上要么位移为0；要么Traction为0；要么一部分边界位移为0，另一部分边界Traction为0，其目的为保证互易定理对边界的积分那项为0）

$$G_{mn}(\vec{\xi}_1,\tau;\vec{\xi}_2,0)=G_{nm}(\vec{\xi}_2,\tau;\vec{\xi}_1,0)$$,

这个式子意味着n方向单位集中脉冲力在 $\vec{\xi}_2$ 位置，0时刻激发，观测点位于 $\vec{\xi}_1$ 位置， τ 时刻，m方向的位移场；等于m方向单位集中脉冲力在 $\vec{\xi}_1$ 位置，0时刻激发，观测点位于 $\vec{\xi}_2$ 位置， τ 时刻，n方向的位移场。（空间互易性）

一般地，利用互易定理，在齐次边界条件下可导出格林函数的时空互易性：

$$G_{mn}(\vec{\xi}_1,\tau-\tau_1;\vec{\xi}_2,-\tau_2)=G_{nm}(\vec{\xi}_2,\tau+\tau_2;\vec{\xi}_1,\tau_1)$$ 。

其证明如下，**互易定理**为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt \iiint_{V}\left\{ \vec{f}(\vec{x},t) \vec{v}(\vec{x},\tau-t)-\vec{g}(\vec{x},\tau-t) \vec{u}(\vec{x},t)\right\}dV(\vec{x})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dt \iint_{\mathbb{S}}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\subset\!\supset\ \left\{ \vec{T}(\vec v(\vec{x},\tau-t),n) \vec{u}(\vec{x},t)-\vec{T}(\vec u(\vec{x},t),n) \vec{v}(\vec{x},\tau-t)\right\}dS(\vec{x})$$.

当满足齐次边界条件时：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt \iiint_{V}\left\{ \vec{f}(\vec{x},t) \vec{v}(\vec{x},\tau-t)-\vec{g}(\vec{x},\tau-t) \vec{u}(\vec{x},t)\right\}dV(\vec{x})=0$$.

令两组力及对应的格林函数分别为：

$f_i(\vec{x},t)=\delta_{im}\delta(\vec{x}-\vec{\xi}_1)\delta(t-\tau_1)$, $G_{km}(\vec{x},t;\vec{\xi}_1,\tau_1)$.

$g_i(\vec{x},t)=\delta_{in}\delta(\vec{x}-\vec{\xi}_2)\delta(t+\tau_2)$, $G_{kn}(\vec{x},t;\vec{\xi}_2,-\tau_2)$.

将上式带入积分可得：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dt \iiint_{V}\left\{ \delta_{im}\delta(\vec{x}-\vec{\xi}_1)\delta(t-\tau_1) G_{in}(\vec{x},\tau-t;\vec{\xi}_2,-\tau_2)-\delta_{in}\delta(\vec{x}-\vec{\xi}_2)\delta(\tau-t+\tau_2)G_{im}(\vec{x},t;\vec{\xi}_1,\tau_1)\right\}dV(\vec{x})=0$$.

则： $G_{mn}(\vec{\xi}_1,\tau-\tau_1;\vec{\xi}_2,-\tau_2)=G_{nm}(\vec{\xi}_2,\tau+\tau_2;\vec{\xi}_1,\tau_1)$.

编辑于 2022-10-22 10:30

1 人已赞赏

应用数学 地球物理学 地震学

发布一条带图评论吧

72 条评论 默认 最新

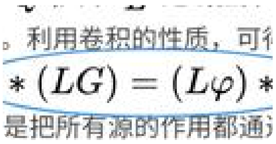
张爱玲
感谢分享，看完了，还是不明白
2020-11-06 回复 8

Hsuty 作者
哪里不清楚
2020-11-06 回复 喜欢

知乎用户98tQV3
这么看，格林函数很像冲激响应
2021-08-15 回复 6

Asteria
本来就是。
2021-09-02 回复 7

心上休谟
请问画圈的这一步是如何成立的呢，推来推去也没有个思路。感谢！


利用卷积的性质，可
$*\,(LG) = (L\varphi)\,*$
是把所有源的作用都通

2021-04-07 回复 喜欢

Hsuty 作者
这里用到了线性算子卷积的一个性质，L(f*g)=(Lf)*g=f*(Lg).
2021-04-07 回复 9

高枫
可以用green's second identity证明，还要用到格林函数在边界上等于0的定义
2022-07-31 回复 喜欢

Miiiiiim
基于区域速度模型怎么计算格林函数和震源时间函数呢，有没有开源算法
2023-06-07 回复 1

Hsuty 作者
计算格林函数的，如fk，GRTM，汪荣江老师的qseis都行。震源时间函数需要运动学反演或震源动力学正演得到吧。
2023-06-07 回复 喜欢

生医bab
在点源δ的作用下的输出（或响应）就是格林函数G，那为什么不写成Lδ=G？不理解，脑子太笨😭
2023-05-08 回复 1

Hsuty 作者
此处逻辑应该是这样的：先有各种PDE，形如L(output)=f，L表示某种算子，f表示源。

Rhein牧师
非常感谢您精彩的讲解😄😄
2023-12-12 回复 喜欢

Rhein牧师
想再确认一下，本文中的点源是指单个力是吧？您一说开始说点源，我以为是指双力偶点源
2023-12-12 回复 喜欢

Rhein牧师 ▸ **Hsuty**
好的，谢谢😄
2023-12-12 回复 喜欢

Hsuty 作者
单力。
2023-12-12 回复 喜欢

止步
想问一下，为什么力偶产生的位移场是格林函数的空间导数
2023-09-18 回复 喜欢

Hsuty 作者
就是推公式推出来的，你仔细琢磨一下公式就会发现。
2023-09-18 回复 喜欢

糖果果
求问格林函数总结的那张图的出处
2023-09-12 回复 喜欢

Hsuty 作者
from Wikipedia
2023-09-12 回复 喜欢

不晴
那咱们平时用的锤击震源是不是可以理解为单力点源，双力偶源就对应天然地震中那种比如断层错动这样的震源😘
2023-07-22 回复 喜欢

Hsuty 作者
是的
2023-07-22 回复 1

点击查看全部评论 ›

发布一条带图评论吧

文章被以下专栏收录

地球物理笔记
基本概念，基本方程，基本原理

地球物理局 学术报告厅

推荐阅读

什么是格林函数？格林函数的直观图像

格林函数（我只是个搬运工）

V 格林函数

格林函数（一）