19-20春夏偏微分方程

1. (20分)

(1)求f的Fourier变换$\hat{f}(\xi)$，其中$f(x)=\frac{1}{a^2+x^2}(a>0)$；

(2)求方程

$$\begin{cases} u_t+3u_x=0, x\in\mathbb{R}, t>0 \\ u(x,0)=x^2, x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

的特征线，并用特征线法求该定解问题的解。

2. (20分)

设$\Omega\in\mathbb{R}^3$是开区域，$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$是Dirichlet问题

$$\begin{cases} -\triangle u=0, x\in\Omega \\ u=g, x\in\partial\Omega \end{cases}$$

的一个解，

(1)求该问题的Green函数满足的方程；

(2)若$\Omega=\mathbb{R}_+^3$，求该问题的Green函数；

(3)若$\Omega=\mathbb{R}_+^3$，写出$u(x)$的表达式。

3. (20分)

(1)用分离变量法求解方程

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, 0<x<\pi, t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x), u_t(x,0)=\psi(x), 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, t\ge 0 \end{cases}$$

(2)证明该问题的能量恒等式

$$\int_0^\pi |u_t|^2+|u_x|^2\,dx=\int_0^\pi(\psi^2+\varphi_x^2)\,dx$$

4. (15分)

设$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$是定解问题

$$\begin{cases} -\triangle u=1, x\in\Omega \\ u|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

的一个解，证明对任意的$x_0\in\Omega$，有

$$\min_{x\in\partial\Omega}|x-x_0|^2\le 2nu(x_0)\le\max_{x\in\partial\Omega}|x-x_0|^2$$

5. (15分)

设$\mathcal{L}u=u_t-\triangle u+au^3(a\ge 0)$，证明对于算子$\mathcal{L}$，比较原理成立。

6. (10 分)

设$u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q_T})$是初边值问题

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0, (x,t)\in Q_T \\ u(x,0)=\varphi(x), x\in\bar{\Omega} \\ u(x,t)=0, x\in\partial\Omega, t\geq 0 \end{cases}$$

的一个解，证明存在常数$c>0$，使得不等式

$$\int_\Omega |u(x,t)|^2\,dx \leq e^{-ct}\int_\Omega \varphi^2\,dx$$

成立。

（提示：用 Friedrichs 不等式或 Poincaré不等式）