第 16 章 阅读材料: 半线性波动方程解的存在唯一性

在实际的 PDE 研究中, 我们遇到的往往是非线性方程. 当我们遇到一个方程时, 总是希望确定其解的存在性. 对于特殊系数的线性方程, 借助 Fourier 变换可以显式地求出方程的解. 但如果系数较为复杂, 或者方程本身即为非线性, 这时初等的方法则不再奏效, 需要借助一些泛函工具[1]. 而在 ODE 中, 我们其实已经接触过一个较为简单的工具: 压缩映射原理. 本节的主要内容就是以半线性波动方程为例, 利用压缩映射原理简要介绍其解的存在性理论. 此外, 能量估计也是讨论解的存在性的一大重要工具, 例如本章最后提出的例子就可以通过一些 Sobolev 不等式和插值估计来证明它的全局适定性. 但该方法则需要更深的分析功底, 我们便略过了.

16.1 半线性波动方程简介

一般的 n 维半线性波动方程形如

$$u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0. \tag{16.1}$$

在某些方面, (16.1) 与一般的线性方程 $u_{tt} - \Delta u = 0$ 是相通的. 这里我们以两个重要性质为例: (1) 能量守恒; (2) 有限传播速度.

能量守恒 类比线性方程, 在紧支的意义下, 我们定义 (16.1) 的能量函数为

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) dx. \tag{16.2}$$

其中函数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$F(y) = \int_0^y f(z)dz.$$

值得注意的是, 这里定义的能量函数并不一定是非负的.

定理 16.1 (能量守恒)

按 (16.2) 定义的能量恒为常数.

证明 直接求导可得

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^n} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla(u_t) + u_t F'(u))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_t(u_{tt} - \Delta u + f(u))dx = 0.\end{aligned}$$

有限传播速度 作为线性波动方程的特征性质, 有限传播速度对于具有非负能量的半线性方程也同样成立. 以下我们记 $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ 处的特征锥为

$$C(x_0, t_0) \triangleq \{(x,t) : 0 \leqslant t \leqslant t_0, |x - x_0| \leqslant t_0 - t\}.$$

[1] 例如算子半群、变分法、Hahn-Banach 定理、扰动方法等.

定理 16.2 (有限传播速度)

设函数 F 非负, 且 (16.1) 的解在 $x \in B(x_0, t_0), t = 0$ 时恒为零, 则 u 在特征锥内恒为零.

证明 我们考虑特征锥截面上的能量函数

$$e(t) = \int_{B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) dx.$$

求导可得

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{t_0 - t} \left[\int_{\partial B(x_0, \tau)} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) dS \right] d\tau \\
&= \int_0^{t_0 - t} \left(\int_{\partial B(x_0, \tau)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla(u_t) + u_t f(u)) dS \right) d\tau - \\
&\quad \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2) + F(u) \right) dS \\
&= \int_{B(x_0, t_0 - t)} u_t (u_{tt} - \Delta u + f(u)) dx - \\
&\quad \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left[\frac{1}{2} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) + F(u) \right] dS \\
&\leqslant \frac{1}{2} \int_{\partial B(x_0, t_0 - t)} \left(u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2u_t \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式可得 $|2u_t \frac{\partial u}{\partial \nu}| \leqslant u_t^2 + |\nabla u|^2$, 因此 $\dot{e}(t) \leqslant 0$. 结合定理条件可得 $e(0) = 0$, 结合非负可得 $e(t) \equiv 0 (0 \leqslant t \leqslant t_0)$, 因此 $u_t \equiv 0, \nabla u \equiv 0$ in $C(x_0, t_0) \Rightarrow u$ 恒为常数, 结合初值可得 u 在特征锥内恒为零.

笔记 由此可得, 若波动方程的初值紧支, 则对固定的 $t \geqslant 0$, $u(x,t)$ 作为 x 的函数也是紧支的. 下面我们总讨论带有光滑紧支初值的半线性波动方程.

16.2 半线性波动方程解的局部存在唯一性与爆破

本节我们以三维的半线性波动方程的初值问题为例, 讨论解的局部存在唯一性与爆破现象.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi, \ u_t|_{t=0} = \psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{16.3}$$

这里 $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 且 $f(0) = 0$.

引理 16.1 (三维非齐次线性波动方程在齐次初值下的解)

以下初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = g(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解为

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y, t - |x - y|)}{|x - y|} dy.$$

证明 利用齐次化原理. 考虑齐次问题

$$\begin{cases} z_{tt} - \Delta z = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > \tau \\ z|_{t=\tau} = 0,\ z_t|_{t=\tau} = g(x,\tau), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

应用三维的 Kirchhoff 公式可得

$$z(x,t;\tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{\partial B(x,t-\tau)} g(y,\tau) dS(y).$$

从而原初值问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{\partial B(x,t-\tau)} g(y,\tau) dS(y) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{4\pi\tau} \int_{\partial B(x,\tau)} g(y,t-\tau) dS(y) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{g(y,t-|x-y|)}{|x-y|} dy. \end{aligned}$$

定理 16.3 (三维半线性波动方程解的局部存在唯一性)

存在 $T > 0$, 使得 (16.3) 在 $\mathbb{R}^3 \times [0,T]$ 内存在唯一解 $u(x,t)$.

证明 我们先从形式上讨论 (16.3) 解的形状. 若它的解 $u(x,t)$ 存在, 则由叠加原理可得 $u = v + w$, 其中

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ v|_{t=0} = \varphi,\ v_t|_{t=0} = \psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - \Delta w = -f(u(x,t)), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ w|_{t=0} = 0,\ w_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

其中 v 所满足的初值问题由 Kirchhoff 公式给出唯一解, 由引理 (16.2) 可得

$$w(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(u(y,t-|x-y|))}{|x-y|} dy.$$

下面我们总记 $\bar{u}(y) = u(y,t-|x-y|)$, v 就表示由上述齐次线性波动方程初值问题的唯一解. 上面的讨论实际已经为我们应用压缩映射原理指明了方向. 先待定 $T > 0$, 考虑函数空间

$$X \triangleq \{u \in C(\mathbb{R}^3 \times [0,T]) : u|_{t=0} = \varphi, \|u - v\|_{L^\infty} \leqslant 1\}.$$

在 L^∞ 范数下, X 作为 Banach 空间 $(C(\mathbb{R}^3 \times [0,T]), \|\cdot\|_\infty)$ 的闭子集, 自然成为 Banach 空间. 定义算子 $A : X \to C(\mathbb{R}^3 \times [0,T])$ 为

$$(Au)(x,t) = v(x,t) - \frac{1}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{f(\bar{u}(y))}{|x-y|} dy.$$

不难验证, 当 T 充分小时, A 成为 X 到自身的变换. 下面我们来证明 T 充分小时 A 成为压缩映射. 由于 f 是光滑函数, 自然局部 Lipschitz. 又因为 X 中的函数一致有界, 因此存在 $L = L(f,X) > 0$, 使得 $|f(\bar{u}) - f(\bar{v})| \leqslant L|\bar{u} - \bar{v}|, \forall u, v \in X$. 进而

$$\begin{aligned} \|Au - Av\|_{L^\infty(X)} &\leqslant \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3 \\ t \in [0,T]}} \frac{L}{4\pi} \int_{B(x,t)} \frac{|\bar{u}(y) - \bar{v}(y)|}{|x-y|} dy \\ &\leqslant \frac{L}{4\pi} \|u - v\|_{L^\infty(X)} \int_0^t \frac{1}{\tau} \int_{\partial B(x,\tau)} dS d\tau \\ &\leqslant \frac{LT^2}{2} \|u - v\|_{L^\infty(X)}. \end{aligned}$$

取 $T < \sqrt{\frac{2}{L}}$ 即证. 此时初值问题 (16.3) 在 $\mathbb{R}^3 \times [0,T]$ 上存在唯一解.

解的局部存在唯一性解决了. 现在我们开始考虑: (16.3) 的解是否能像 ODE 里那样进行延伸? 如果无法延伸为全局解的话, 解在最大存在区间的端点处性态如何? 是否会发生爆破? 这正是下一条定理所回答的问题.

定理 16.4 (三维半线性波动方程解的爆破)

若初值问题 (16.3) 解的最大存在区间有限, 设右端点为 $\beta > 0$, 则

$$\lim_{t\uparrow\beta} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} = +\infty.$$

证明 假设定理所述的极限有界, 即 u 在存在区间上关于 x, t 有一致界, 我们只需证明此时存在区间可以向右延伸即可. 任取 $h \neq 0, k = 1, \cdots, n$, 考虑 u 的差分 $U = \frac{u(x+he_k,t)-u(x,t)}{h}$, 则 U 满足初值问题

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + \sigma U = 0, & x \in \mathbb{R}^3, 0 < t \leqslant T < \beta \\ U|_{t=0} = \Phi,\ U_t|_{t=0} = \Psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

这里

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x+he_k) - \varphi(x)}{h}, \quad \Psi(x) = \frac{\psi(x+he_k) - \psi(x)}{h}.$$

$$\sigma(x,t) = \int_0^t (f'(su(x+he_k,t) + (1-s)u(x,t))ds.$$

由 u 有界可得 σ 有界, 并且 σ 的界与 k, h 是无关的. 由前一条定理可得

$$U(x,t) = V(x,t) - \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{\bar{\sigma}\bar{U}}{|x-y|}dy. \tag{16.4}$$

这里 V 是初值问题

$$\begin{cases} V_{tt} - \Delta V = 0, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ V|_{t=0} = \Phi,\ V_t|_{t=0} = \Psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解, 由初值紧支可得 V 紧支, 自然有界. 结合 (16.4) 可得存在与 k, h 无关的 $M > 0$ 使得

$$\|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant M + M\int_0^t \|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} dt.$$

应用 Gronwall 不等式可得

$$\|U(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant Me^{Mt} \leqslant Me^{M\beta}.$$

于是我们估计出了一阶差分的一个一致上界, 因此 u 的一阶偏导均有一致上界. 类似可证明 u 的各阶偏导都有一致的上界. 从而 u 可以延伸到 $t = \beta$ 处, 矛盾!

16.3 解的爆破: 更进一步的讨论

本节我们来讨论一类半线性波动方程, 来证明它的解一定不是全局存在的.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{16.5}$$

这里我们仍旧要求初值光滑紧支, 且 $f(0) = 0$. 我们要求该方程的能量函数 (16.2) 满

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}(\psi^2 + |\nabla\varphi|^2) + F(\varphi(x))\right) dx < 0. \tag{16.6}$$

并且存在 $\lambda > 2$, 使得函数 f 满足

$$yf(y) \leqslant \lambda F(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \tag{16.7}$$

则有:

定理 16.5

在条件 (16.6) 和 (16.7) 下, 初值问题 (16.5) 不存在光滑的全局解 (即在 $t \geqslant 0$ 上存在).

证明 假设存在全局光滑解 u. 我们考虑另一种形式的能量函数

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx.$$

计算可得

$$\begin{aligned} I''(t) &= \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx = \int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2 + uu_{tt})dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}[u_t^2 + u(\Delta u - f(u))]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(u_t^2 + |\nabla u|^2 - uf(u))dx \end{aligned}$$

设 $\alpha = \frac{\lambda-2}{4}$, 由能量守恒可得 $E(t) = E(0)$, 所以

$$\begin{aligned} I''(t) &= (2+4\alpha)E(t) + I'' - (2+4\alpha)E(0) \\ &= (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx + 2\alpha\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n}((2+4\alpha)F(u) - uf(u))dx - (2+4\alpha)E(0). \end{aligned}$$

由于我们已给定了 $uf(u) \leqslant (2+4\alpha)F(u)$, 因此

$$I''(t) \geqslant (2+2\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx - (2+4\alpha)E(0).$$

由于 $I'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} uu_t dx$, 由 Hölder 不等式估计可得

$$(1+\alpha)I'(t)^2 \leqslant (1+\alpha)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u_t^2 dx\right) \leqslant I(t)(I''(t) + \lambda E(0)).$$

此时考虑 $J(t) = I(t)^{-\alpha}$, 下面我们记 $\beta = -\lambda E(0) > 0$, 则

$$J''(t) = \alpha(\alpha+1)(I')^2 I^{-\alpha-2} - \alpha I'' I^{-\alpha-1} \leqslant -\alpha\beta I^{-\alpha-1} = -\alpha\beta J^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

由此可得 J 是关于 t 的凹函数.

- 假设存在 $T > 0$ 使得 $J'(T) < 0$. 则由凹性可得

  $$J(t) \leqslant J(T) + (t-T)J'(T)(t \geqslant 0).$$

  由此可得 t 充分大时 $J < 0$, 这与 J 的非负性矛盾!
- 从而 $J'(t) \geqslant 0$ 恒成立, 即 J 单调递增. 从而

  $$J''(t) \leqslant -\alpha\beta J(t)^{1+\frac{1}{\alpha}} \leqslant -\alpha\beta J(0)^{1+\frac{1}{\alpha}} \triangleq -\gamma.$$

  不难验证 $\gamma > 0$. 由此可得

  $$J'(t) \leqslant J'(0) - \gamma t.$$

  当 t 充分大时 $J'(t) < 0$, 矛盾!

综上可得初值问题 (16.5) 不存在光滑的全局解.

笔记 本定理以一个较为初等的例子展示了能量估计的妙用.

当能量非负时, 存在一些具有全局解的半线性波动方程的例子. 例如:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + |u|^{p-1}u, & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi,\ u_t|_{t=0} = \psi, & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

其中 $1 < p \leqslant 5$. 但是这个问题的讨论需要用到非常硬核的先验估计和 Sobolev 不等式, 完全超出了这门课的范围.