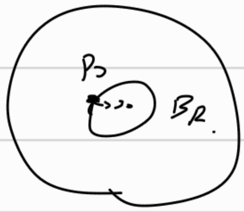

1. 反设∃$P_0 \in \Omega^\circ$, s.t. $u(P_0)=\inf\limits_{\Omega} u(p) = \min\limits_{\Omega} u(p)$

则∃B_R, s.t. $B_R \subset \Omega$ 且 $P_0 \in \partial B_R$, u在B_R上调和.

由强极值原理 $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{P_0}>0$. 其中$\nu$指向$B_R$内部. 这与$u$在$P_0$处取最小值矛盾.

故u不在Ω内取下界. 取 $v=-u$ 即可证上界.

故极值原理成立.

2. $\begin{cases} \Delta u=0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\big|_{\partial\Omega}=f \end{cases}$

只要证 $\begin{cases} \Delta u=0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u\right)\big|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$ 的解只有零解.

① 内问题

由 $u\in C(\bar\Omega)$. ∃$P_1,P_2 \in\partial\Omega$, s.t. u在P_1, P_2取到最小, 最大值且$u(P_2)>u(P_1)$

则 $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{P_1}<0$ 故 $u(P_1)>0$. i.e. $\min u>0$

同理可知 $u(P_2)<0$, i.e. $\max u<0$. 故矛盾. 从而 $u(P_2)\equiv u(P_1)$. i.e. $u\equiv C\in\mathbb{R}$.

故 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$. 由边值条件知 $u|_{\partial\Omega}=0$. 故 $u\equiv0$.

② 外问题. 此时要有 $u(\infty)=0$.

由于 $u(\infty)=0$. 由极值原理, 若u在$P_1,P_2\in\partial\Omega$上取最小最大值. 则有 $u(P_1)<0<u(P_2)$.

由强极值原理 $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{P_1}<0$, 而 $u(P_1)<0$. 与边值条件矛盾! 对P_2同理.

故 $u\equiv0$.

综上. 第三边值问题解唯一

3. $\begin{cases} (\Delta v)|_{\bar B_R}>0 \\ v|_{\partial B_R}=0 \\ v_r<0 \end{cases}$

由 $(\Delta v)|_{\bar B_R}>0$ 知v在B_R上取不到最大值.

如若不然, 在P_0处取最大值. 则有 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\big|_{P_0}\le0$. $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\big|_{P_0}\le0$. $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\big|_{P_0}\le0$.

与 $\Delta v>0$ 矛盾. 故其上界只能在∂B_R上达到. i.e. $\sup\limits_{\bar B_R} v = \sup\limits_{\partial B_R} v$.

但 $v_r<0$. 这就产生了矛盾. 故不存在这样的v.