罗俊劲 3210101613

Q1. 证明 Green 函数性质 6.3 与 6.5.

6.3. $G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}-g(P,P_0)$.

其中 $\frac{1}{4\pi r}$ 在 $\Omega\setminus\{P_0\}$ 上调和. $g(P,P_0)$ 在 Ω 内调和. 故取充分靠近 P_0 的 P. 不妨 $G(P,P_0)\to+\infty$. i.e. 在 P_0 的某邻域中. $G(P,P_0)>0$. 而 $G|_\Gamma=0$ 由极值原理. $G|_\Omega>0$

由于 $g|_\Gamma=\frac{1}{4\pi r}|_\Gamma \triangleq A\subset(0,+\infty)$. 故由极值原理 $g|_\Omega\triangleq B\subset A$. i.e. $g|_\Omega>0$.

故有 $0<G(P,P_0)<\frac{1}{4\pi r_{P_0P}}$. 在区域 Ω 中.

6.5. 由于 g 在 Ω 内调和. 故 $\iint_\Gamma \frac{\partial g}{\partial n}ds=0$.

$\iint_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n}ds=\iint_\Gamma \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi r}ds-\iint_\Gamma\frac{\partial g}{\partial n}ds=-\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Gamma ds=-1$

Q3: $\begin{cases}\Delta u=0, & |r|<1\\ u(r,\theta,\varphi)|_{r=1}=3\cos 2\theta+1.\end{cases}$

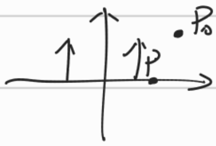
由 Poisson 公式: $u(r_0,\theta_0,\varphi_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(3\cos2\theta+1)\frac{1-r_0^2}{(1+r_0^2-2r_0\cos\eta)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\, d\theta d\varphi$.

其中: $\cos\eta=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$.

注意到 $v(r,\theta,\varphi)=r^2(3\cos2\theta+1)$ 在 $r=1$ 上满足 $v|_{r=1}=3\cos2\theta+1$. 且在 $r<1$ 内调和.

由解的唯一性知 v 即为上述问题的解. 故 $u(r,\theta,\varphi)=r^2(3\cos2\theta+1)$.

Q5: $\begin{cases}\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0. & (y>0)\\ u|_{y=0}=f(x).\end{cases}$



$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{P_0P}}-\ln\frac{1}{r_{P_1P}}\right)$. 其中 $r_{P_0P}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ $r_{P_1P}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}$

即有 $G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\ln[(x-x_0)^2+(y+y_0)^2]-\ln[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right)$

$\Rightarrow u(P_0)=-\int_R f\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)G\,dx=\int_R f\frac{1}{4\pi}\frac{4y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx=\int_R\frac{y_0}{\pi}\frac{f}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx$.

故 $u(x,y)=\int_R\frac{yf}{\pi(t-x)^2+\pi y^2}dt$

P_{202}.

Q1: 不妨设 O 为坐标原点.

令 $\tilde u$ 为问题 $\begin{cases}\Delta\tilde u=0.\\ \tilde u|_{\partial B_R}=u\end{cases}$ 的解. 由 Poisson 公式可写出 $\tilde u$.

令 $v=u-\tilde{u}$. 则在 v 在 $B_R\setminus\{Q\}$ 中调和. 在 ∂B_R 上等于 0.

由极值原理. $v|_{B_R\setminus\{Q\}}\equiv 0$. 故只需令 $u(Q)=\tilde{u}(Q)$. 则 u 在 Q 处也调和.

Q_2:

由定理 6.7, 若 Q 为 u 的可去奇点. 则有 $\lim\limits_{P\to Q} r_{PQ}\,u(P)=0$. 即 $\lim\limits_{P\to Q} r_{PQ}^{1-\alpha}\,u(Q)=0$.

故 $1-\alpha>0$. 即 $\alpha<1$. 但 Q 不是. 故 $\alpha\geq 1$. 考虑到 $\alpha\in(0,1]$. 故 $\alpha=1$.