浙江大学 20 20 —20 21 秋冬学期

《偏微分方程》课程期末考试试卷

课程号: 06121100, 开课学院: 数学科学学院

考试试卷: ✓A 卷、B 卷 (请在选定项上打✓)

考试形式: ✓闭、开卷 (请在选定项上打✓), 允许带 无 进场

考试日期: 2021 年 01 月 13 日, 考试时间: 120 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: ________________ 学号: ________________ 所属院系: ________________

注: 如无特殊说明, 题目中所提到的 Ω 均表示 $\mathbb{R}^n$ 中的边界光滑的有界开区域.

一、(30 分)

1. 解方程

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} = f(t,x), \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \\ t=0: u = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

2. 解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \\ t=0: u = \phi(x), u_t = \psi(x), \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

二、(30 分)

1. 求 Laplace 方程

$$\Delta u = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

形如 $u(x) = v(r)$ 的解, 其中 $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

2. 设 u 是 Ω 上的调和函数, $x \in \Omega, B(x,r) \subset \Omega$, 求证:

$$u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \mathrm{d}S = \fint_{B(x,r)} u \mathrm{d}V$$

.

3. 若 $u \in C^2(\Omega)$ 满足: $x \in \Omega, u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u \mathrm{d}S$, 其中 $B(x,r) \subset \Omega$, 求证: $\Delta u = 0$.

三、(20 分) 试用两种方法证明方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \Omega \\ t = 0 : u = f(x), \forall x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = g(t), \forall t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

的解的唯一性.

四、(20 分) 解方程

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \forall (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^+ \\ t = 0 : u = f(x), u_t = g(x), \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ x = 0 : u = 0, \forall t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

其中 f, g 是给定的光滑函数, 且 $f(0) = g(0) = 0$.

附加题: (20 分) 设 $u^i (i = 1,2)$ 是方程

$$\begin{cases} u^i_t - \Delta u^i = f(t,x), \forall (t,x) \in [0,T] \times \Omega \\ u^i|_{\partial\Omega} = h(t), \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

的解, 且 $u^1(T,x) = u^2(T,x)$ 对任意的 $x \in \Omega$ 成立, 求证: $u^1(t,x) \equiv u^2(t,x)$.