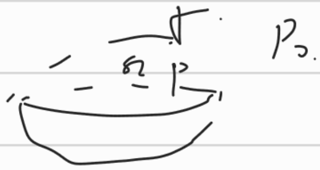
郭俊勋 3210101613

Q1. 证明 3.13 式对 P_0 在 Ω 外与 Γ 上的情形成立.



1. $P_0 \in R^3 \setminus \bar{\Omega}$ 令 $r = |PP_0|$

则当 $P \in \Omega$ 时. $\frac{1}{r}$ 连续可微. 在 Ω 上应用 Green 第二公式有:

$$\iiint_\Omega [u\Delta(\tfrac{1}{r}) - \tfrac{1}{r}\Delta u] dV = \iint_\Gamma (u\frac{\partial}{\partial n}(\tfrac{1}{r}) - \tfrac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}) dS$$

由于 $\frac{1}{r}$. u 在 Ω 内处处调和. 故 $\iiint_\Omega (u\Delta\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta u) dV = 0$.

2. $P_0 \in \Gamma$ 时. 同 $P_0 \in \Omega$ 的推导. 只是取 B_ε 为 $\{Q \mid |P_0Q| < \varepsilon 且 Q \in \Omega\}$.

只需替换式中 Γ_ε, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为 $\frac{1}{2}\Gamma_\varepsilon$, $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial n}$ 即可. 因为平均意义下有一半的体积被 Ω 包含.

故有 $\iint_\Gamma (u\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\Delta u) dS = -2\pi u(P_0)$.

综上有:
$$\iint_\Gamma (u\frac{\partial}{\partial n}(\tfrac{1}{r}) - \tfrac{1}{r}\Delta u) dS = \begin{cases} 0. & P_0 \in R^3 \setminus \bar{\Omega} \\ -2\pi u(P_0) & P_0 \in \Gamma \\ -4\pi u(P_0). & P_0 \in \Omega. \end{cases}$$

Q3: f 表示温度向外扩散的速度. $\iint_\Gamma f dS = 0$ 说明温度扩散是均匀的.

Q5: 只需证 u 在 Ω 内不能取到最大值. 注意到 $-u$ 在 Ω 内的最大值即为 u 的最小值. 则最小值的情形可类似证明.

不妨设 u 在 Ω 内有最大值 m. 且 $P_0 \in \Omega$. $u(P_0) = m$. 不妨设 $m>0$. 否则取 $-u$ 讨论.

则在 P_0 处有: $\frac{\partial u}{\partial x_i}(P_0) = 0$. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(P_0) \le 0$. $\forall i$.

矩阵 $(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}|_{P_0})_{n\times n}$ 是非正定的. 由 (a_{ij}) 正定. 故 $\exists A_i$. s.t. $(a_{ij}) = AA^T$

则在 P_0 点有. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} A_i A_j \le 0$

而 $\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$. $cu = cm < 0$.

故 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu < 0$. 与题给条件相矛盾. 故假设不成立.

i.e. u 不在 Ω 内取最值

Q6: 证明: $\iint_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n} dS = -1$.

$$\iint \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_\Gamma (\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{4\pi r} - \frac{\partial g}{\partial n}) dS = \iint \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi r} dS = -\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \frac{1}{r^2} dS = -\frac{4\pi R^2}{4\pi R^2} = -1.$$