(44) 3210101613 罗俊勋

39. (1): $P(\xi=k)=pq^{k-1}$ $k=1,2\cdots$ $q=1-p$.

$f(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{itk}pq^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{p}{q}\cdot(e^{it}q)^k.=\frac{p}{q}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{it}q(1-(e^{it}q)^n)}{1-e^{it}q}$

$|(e^{it}q)^n|\le|e^{it}q|^n\le q^n\to 0.\ n\to\infty.$

故 $f(t)=\frac{p}{q}\cdot\frac{e^{it}q}{1-e^{it}q}=\frac{pe^{it}}{1-e^{it}q}$

(5) $p(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{4} & -2\le x<0\\ \frac{2-x}{4} & 0\le x<2\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$f(t)=\int_R e^{itx}p(x)dx=\int_{-2}^{0}\frac{2+x}{4}e^{itx}dx+\int_0^2\frac{2-x}{4}e^{itx}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}e^{itx}dx+\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}xe^{itx}dx-\int_0^2\frac{x}{4}e^{itx}dx$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_{-2}^{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{it}xe^{itx}+\frac{1}{t^2}e^{itx}\right)\Big|_{-2}^{0}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{it}xe^{itx}+\frac{1}{t^2}e^{itx}\right)\Big|_0^2$

$=\frac{1}{t}\sin 2t+\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{t}\sin 2t-\frac{1}{2t^2}\cos 2t$

$=\frac{\sin^2 t}{t^2}$

故 $f(t)=\frac{\sin^2 t}{t^2}$

(6): $\eta=a\xi+b$.

$f(t)=\int_R e^{ity}p_\eta(y)dy=\int_R e^{it(ax+b)}p_\xi(x)dx=\int_0^1 e^{it(ax+b)}dx$

$=e^{itb}\cdot\frac{1}{iat}e^{iatx}\Big|_0^1=\frac{(e^{iat}-1)e^{itb}}{iat}$

故 $f(t)=\frac{1}{iat}\left(e^{i(a+b)t}-e^{ibt}\right)$

42. (1): $f(t)=\cos^2 t$.

显然 $|f(t)|\le 1$. , $f(0)=1$ $f(t)\in C(R)$.

$f(t)=\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{2}e^{it0}+\frac{1}{4}(e^{i2t}+e^{-i2t})$

令ξ分布: $\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$ 则 $f(t)$是ξ的特征函数.

(3): $f(t)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$

由上题 (1) 可知. 令 $p(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{4} & -2\le x<0\\ \frac{2-x}{4} & 0\le x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$ 为 ξ 的密度函数. 则 ξ 的特征函数为 $f(t)$.

故 $f(t)$ 是 ξ 的特征函数. ξ 满足密度为 p 的分布

(4) $f(t)=(1+t^2)^{-1}=\frac{1}{1+it}\times\frac{1}{1-it}$ $\qquad p_\eta(x)=\begin{cases}0 & x\ge 0.\\ e^x & x<0\end{cases}$

令 $\xi\sim exp(1)$. 则 $p_\xi(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0.\end{cases}$

$g(t)=Ee^{i\xi t}=\int_0^{+\infty}e^{itx}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(it-1)x}dx=\frac{1}{it-1}e^{(it-1)x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{1-it}$

令 $\eta=-\xi$ 则 $Ee^{i\eta t}=Ee^{-i\xi t}=Ee^{i\xi(-t)}=\frac{1}{1+it}$

故令 $\zeta=\xi+\eta$. 则 ζ 的特征函数为 $\frac{1}{1+t^2}$.

$p_\zeta(z)=\int_R p_\xi(x)\,p_\eta(z-x)\,dx=\begin{cases}\int_z^{+\infty}e^{-x}e^{z-x}dx=\frac{1}{2}e^{-z} & z>0\\ \int_0^{+\infty}e^{-x}e^{z-x}dx=\frac{1}{2}e^{z} & z\le 0\end{cases}$

故 $f(t)=\frac{1}{1+t^2}$ 是 ξ 的特征函数. $p_\xi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x} & x>0\\ \frac{1}{2}e^{x} & x\le 0.\end{cases}$

45. $\varphi(t)=\begin{cases}1-\frac{|t|}{a} & |t|<a\\ 0 & |t|\ge a.\end{cases}$ $\quad a>0.$

$\varphi(0)=1$. 且 $|\varphi|\le 1$. $\varphi\in C$. $\forall z$. $|\varphi(z)|\ge 0$. 故 φ 非负定. φ 是特征函数.

$F'(x)=p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\varphi(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}e^{-itx}(1-\frac{|t|}{a})dt$

$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-a}^{0}e^{-itx}(1+\frac{t}{a})dt+\int_0^a e^{-itx}(1-\frac{t}{a})dt\right]$

$I_1=\int_{-a}^{0}e^{-itx}(1+\frac{t}{a})dt=-\frac{1}{ix}e^{-itx}\Big|_{t=-a}^{t=0}-\frac{1}{ix}e^{-itx}\frac{t}{a}\Big|_{t=-a}^{0}+\int_{-a}^{0}\frac{1}{iax}e^{-itx}dt$

$=-\frac{1}{ix}+\frac{1}{ix}e^{iax}-\frac{1}{ix}e^{iax}+\frac{1}{ax^2}e^{-itx}\Big|_{t=-a}^{t=0}=-\frac{1}{ix}+\frac{1}{ax^2}-\frac{1}{ax^2}e^{iax}$

$I_2=\int_0^a e^{-itx}(1-\frac{t}{a})dt=-\frac{1}{ix}e^{-itx}\Big|_{t=0}^{t=a}+\frac{1}{ix}e^{-itx}\frac{t}{a}\Big|_{t=0}^{t=a}-\int_0^a\frac{1}{iax}e^{-itx}dt$

$=-\frac{1}{ix}e^{-iax}+\frac{1}{ix}+\frac{1}{ix}e^{-iax}-\frac{1}{ax^2}e^{-itx}\Big|_0^a=\frac{1}{ix}-\frac{1}{ax^2}e^{-iax}+\frac{1}{ax^2}$

故 $p(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{ax^2}-\frac{1}{ax^2}(e^{iax}+e^{-iax})\right]=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{ax^2}-\frac{2\cos ax}{ax^2}\right)=\frac{1-\cos ax}{\pi ax^2}$

故$\varphi(t)$是ξ的特征函数. ξ的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos ax}{\pi a x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{a}{2\pi} & x=0\end{cases}$