2. ξ_n的分布函数 $F_n(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-\frac{1}{n} & 0\le x<n\\ 1 & x\ge n\end{cases}$ 令 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0.\end{cases}$ 是ξ的分布函数.

则 $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$. $E\xi_n=1$ 而 $E\xi=0$ $E\xi_n$ 不 $\to E\xi$.

4. 令ξ表示终端被使用的个数. 则 $\xi\sim B(120,0.05)$ $np=6$ $npq=5.7$

$p(\xi\ge 10)=1-p(\xi<10)=1-p\left(\frac{\xi-6}{\sqrt{5.7}}<\frac{10-6}{\sqrt{5.7}}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5.7}}\right)\approx 0.04693$

(2) $\eta\sim B(120,0.2)$ $np=24$.

$p(\eta\ge 10)=1-\sum\limits_{k=0}^{9}p(\eta=k)\approx 1-\sum\limits_{k=0}^{9}\frac{24^k}{k!}e^{-24}\approx 0.9996.$

6. 令ξ表示总耗电户数. 则 $\xi\sim B(200,\ 0.6)$ $np=120.$ $\sqrt{npq}=4\sqrt{3}$

$p(\xi\le x)=p\left(\frac{\xi-120}{4\sqrt{3}}\le\frac{x-120}{4\sqrt{3}}\right)=\Phi\left(\frac{x-120}{4\sqrt{3}}\right)\ge 0.999.$ 即有: $\frac{x-120}{4\sqrt{3}}\ge 3.09$

$\Rightarrow x\ge 141.41.$

故建议供电 142 kW 以上.

10. (1) $\xi_n\sim U(-a,a)$

$E\xi_k=0.$ $Var\,\xi_k=\int_{-a}^{a}x^2\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{3}a^2$ $f_{\xi_k}(t)=\frac{\sin at}{at}$

$f_{\eta_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}f_{\xi_k}\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{n}{3}a^2}}\right)=\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\sqrt{3/n}\,t}{\sqrt{3/n}\,t}$

$\forall t\in\mathbb{R}.$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3}{n}}t=0$. 故 $\sin\sqrt{\frac{3}{n}}t=\sqrt{\frac{3}{n}}t-\frac{1}{2n}\sqrt{\frac{3}{n}}t^3+o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right)$

从而 $f_{\eta_n}(t)=\left(1-\frac{1}{2n}t^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\sim e^{-\frac{t^2}{2}}$ 为$N(0,1)$的特征函数. $(n\to\infty)$

故成立.

(2): $\xi_k\sim P(\lambda)$ $Var\,\xi_k=\lambda$. $E\xi_k=\lambda$. 故 $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}Var\,\xi_k}=\sqrt{n\lambda}$

$f_{\xi_k}(t)=e^{\lambda(e^{it}-1)}$

故 $f_{\eta_n}(t)=\prod\limits_{k=1}^{n}e^{-\frac{it\lambda}{\sqrt{n\lambda}}}f_{\xi_k}\left(\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}\right)=e^{-i\sqrt{n\lambda}t}\cdot e^{\lambda n\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}}-1\right)}$

$-i\sqrt{n\lambda}t+\lambda n\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}}-1\right)=\lambda n\left(\cos\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}+i\sin\frac{t}{\sqrt{n\lambda}}-1\right)-i\sqrt{n\lambda}t$

$=-\frac{t^2}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)+i\sqrt{n\lambda}t-i\sqrt{n\lambda}t=-\frac{1}{2}t^2+o(1).$

故 ξ_n... $f_{\eta_n}(t)\to e^{-\frac{1}{2}t}$ 为$N(0,1)$的分布函数

故 $\lim_{n\to\infty} f_{\eta_n}(t) = e$ 为 $N(0,1)$ 的特征函数.

12. $\xi \sim P(\lambda) \Rightarrow P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$　$E\xi = \lambda$. $Var\xi = \lambda$.

令 $\eta = \frac{\xi - E\xi}{\sqrt{Var\xi}} = \frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda}$　　$f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $\underline{N(0.1)}$

则 $f_\eta(t) = e^{i\sqrt{\lambda}t} f_\xi(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}) = e^{i\sqrt{\lambda}t} e^{\lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1)}$

其中 $i\sqrt{\lambda}t + \lambda(e^{\frac{it}{\sqrt{\lambda}}}-1) = i\sqrt{\lambda}t - \frac{1}{2}t^2 + i\sqrt{\lambda}t + o(1) = -\frac{1}{2}t^2 + o(1)$

故 $\lim_{\lambda\to\infty} f_\eta(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ 为服从 $N(0.1)$ 分布的特征函数.

i.e. 当 $\lambda\to\infty$ 时. η 服从标准正态分布.