2021-2022 秋冬 概率论

一、

（1）$\{A_n\}$ 为独立事件列，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\infty$, 求证：$P(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} A_n)=1,\ \forall m$ （$Borel\ \ Cantelli$ 引理）

（2）X，Y为独立且服从几何分布的随机变量，参数为p，求证：$P(X=i\,|X+Y=n)=\frac{1}{n-1},\ i=1,2,\ldots$

二、 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} sin^2(kU)$ **,** $U\sim U(0,2\pi)$

（1）求 ES_n

（2）证明：$\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P} c$, 并求出 c

三、 $X,Y\sim N(0,0,1,1,r)$

（1）求出 a，使得 Y 与 $X-aY$ 不相关，并求出 $X-aY$ 的分布函数

（2）求 X^2 与 Y^2 的相关系数

四、 $p(x,y)=C(x-y)^2exp\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}$ **为X，Y联合密度**

（1）求 C

（2）求 $EX,EY,VarX,VarY$

（3）证明：$X-Y$ 与 $X+Y$ 独立

（4）求 X^2+Y^2 的密度

五、 针对X,Y为离散形式的情况，利用期望的定义，证明： $EXY=EX\cdot EY$

六、 已知 $\xi_i\xrightarrow{i.i.d}\varepsilon(\lambda)$ **（参数为λ 的指数分布），** $E(\xi_1)=\frac{1}{\lambda}$,$N_n\sim\mathscr{P}(n)$ **（参数为n的 Poisson 分布）**

记 $\eta_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{N_n}\xi_k}{n}$ **：**

（1）证明 η_n 是随机变量，求出 η_n 的特征函数

（2）$\sqrt{n}(\eta_n-a)\xrightarrow{d} N(0,b)$, 求出对应的 a 和 b

七、附加题（做出可以找zlx老师要推荐信，不计入分数，没来及看，略过）