

最大团作业 实验报告

Maximum Clique

周尚彦

北京大学 信息科学技术学院

May. 30th

Contents

- 1 简介
- 2 边加权局部搜索（Edge Weight Local Search）
- 3 实验结果

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

3 实验结果

1 简介

■ 基本概念

■ 问题研究历史及现状简述

2 边加权局部搜索（Edge Weight Local Search）

3 实验结果

定义

定义 0.1

团 给定一个无向图 $G = (V, E)$ ，团（Clique）是指图 G 顶点集的一个子集 $C \subseteq V$ ，其中的任意两顶点都邻接。

定义 0.2

团问题 给定一个无向图 $G = (V, E)$ 和常数 k ，团问题要求确定图中是否包含一个规模为 k 的团。

定义 0.3

最大团问题 给定一个无向图 $G = (V, E)$ ，最大团（Maximum Clique）问题要求找出一个具有最大规模的团。

NP完全性

- 3-CNF-SAT问题可以在多项式时间内归约到团问题
 - 3-CNF-SAT问题是NP完全的
 - 最大团问题和团问题是等价的
- 所以最大团问题是NP完全的。

最小顶点覆盖问题

定义 0.4

顶点覆盖 给定一个无向图 $G = (V, E)$, 顶点覆盖 (Vertex Cover)是指图 G 顶点集的一个子集 $C \subseteq V$, 使得 G 的每一条边都有一个点属于 C 。

定义 0.5

最小顶点覆盖问题 给定一个无向图 $G = (V, E)$, 最小顶点覆盖 (Minimum Vertex Cover) 问题要求找出一个具有最小规模的顶点覆盖。

一个顶点集合 K 是 G 的一个团当且仅当 $V \setminus K$ 是补图 G 的一个顶点覆盖。

最大独立集

定义 0.6

独立集 给定一个无向图 $G = (V, E)$, 独立集 (Independent Set) 是指图 G 顶点集的一个子集 $C \subseteq V$, 其中的任意两顶点都不邻接。

定义 0.7

最小顶点覆盖问题 给定一个无向图 $G = (V, E)$, 最大独立集 (Maximum Independent Set) 问题要求找出一个具有最大基数的独立集。

一个顶点集合 S 是 G 的一个独立集当且仅当 $V \setminus S$ 是 G 的一个顶点覆盖。

1 简介

■ 基本概念

■ 问题研究历史及现状简述

2 边加权局部搜索（Edge Weight Local Search）

3 实验结果

确定性算法

Harary首先提出最大团问题的确定性算法¹。

最早的解决最大团问题的精确算法是枚举法 (enumerative algorithms)。

目前常用的确定性算法有分支限界法 (Branch and bound)²和回溯法 (Backtracking Algorithm) 等。

¹HARARY F. Combinatorial problems on graphical enumeration, Chapter 6 in EF Bechenbach (Ed.): Applied Combinatorial Mathematics[J]. 1964.

²Tomita E, Sutani Y, Higashi T, et al. A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique[M]// WALCOM: Algorithms and computation. Springer Berlin Heidelberg, 2010: 191-203.

启发式算法

相比于确定性算法，启发式方法求解最大团问题并不能得到图的精确的最大团，只能在规定的计算范围内得到最好的团。但启发式算法更适用于规模较大的问题。

目前常用的启发式算法有RLS（Reactive Local search）³、DAGS（Deep Adaptive Greedy Search）⁴、GLS（Genetic Local Search）⁵。

其他启发式算法还有带有贪婪随机自适应搜索过程（GRASP）的算法、人工神经网络（ANN）、禁忌搜索（TS）、可变近邻搜索（VNS）、模拟退火算法，遗传算法等。

³Battiti R, Protasi M. Reactive local search for the maximum clique problem 1[J]. Algorithmica, 2001, 29(4): 610-637.

⁴Grosso A, Locatelli M, Della Croce F. Combining swaps and node weights in an adaptive greedy approach for the maximum clique problem[J]. Journal of Heuristics, 2004, 10(2): 135-152.

⁵Marchiori E. Genetic, iterated and multistart local search for the maximum clique problem[M]//Applications of Evolutionary Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2002: 112-121.

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

3 实验结果

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

- 基本概念
- 算法流程

3 实验结果

局部搜索

局部搜索 (Local Search) 是一种最求解优化问题的方法。

定义好候选解的领域结构之后, 问题的解空间就可以看成一个图。

局部搜索算法从解空间的一个点出发, 每一步从当前候选解移动到一个邻居候选解, 去寻找较好的候选解, 候选解的质量是由一个评估函数来界定的。

局部搜索算法从当前候选解跳转到邻居解的时候, 只根据有限的局部信息来做决定。

简单局部搜索算法主要有：迭代改进，随机游动，随机迭代改进，简单禁忌搜索等。

- 迭代改进 (Iterative Improvement): 也称为爬山法，每次从当前候选解的邻居候选解中选择一个最优解进行转移，直到达到一个局部最优解。
- 随机游动 (Random Walk): 每次从当前候选解的邻居中随机地选取一个进行转移。
- 随机迭代改进 (Random Iterative Improvement): 每个搜索步首先产生一个随机数 $r \in [0, 1]$ ，然后以 r 的概率进行随机游动，以 $1 - r$ 的概率进行迭代改进。
- 简单禁忌搜索 (Simple Tabu Search) 每个搜索步都从没被禁忌的邻居中选择一个最优的候选解进行转移。

评估函数

EWLS用于直接求解最小顶点覆盖问题。

在EWLS中, 给定的无向图被转换成一个边加权无向图。由原来的无向图 $G = (V, E)$ 结合一个加权函数 w 构成, 使得 $\forall e \in E$ 都有一个正整数 $w(e)$ 作为它的权值。

其中 $w(e)$ 的初值为1, 且会随着算法的进行发生改变。

一个候选解 X 的代价由公式

$$\text{cost}(G, X) = \sum_{e \text{ isn't covered by } X} w(e)$$

给出。

改变顶点 $v \in V$ 的选择状态对当前候选解代价的贡献记为 $\text{dscore}(v)$ 。

部分顶点覆盖

定义 0.8

部分顶点覆盖 对于一个无向图 $G = (V, E)$, 我们说一个大小为 k 的顶点子集 $P \subseteq V$ 是一个 (k, t) -部分顶点覆盖 (partial vertex cover), 简称 $(k, t) - PVC$ ($0 \leq t \leq |E|$), 如果 P 覆盖了 G 的 $|E|t$ 条边。

定理 0.9

对于一个无向图 $G = (V, E)$, G 的一个 $(k, t) - PVC$ 对该图的最小顶点覆盖的规模提供了一个 $k + t$ 的上界。

EWLS算法的思想就是找到一个比较优化的部分顶点覆盖, 然后把它扩展为一个完整的顶点覆盖。

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

- 基本概念
- 算法流程

3 实验结果

预备工作

- 初始化所有的边权和 $dscore$
- 贪心选择 $dscore$ 最大的点，求一个解初始解 C ，并将其赋值为当前最优解 C' 。
- 由 C 和给定参数 $delta$ 贪心地选择 $dscore$ 最大的点从当前解中除去，得到一个规模为 $|C| - delta$ 的候选解。

搜索步骤

- 根据每条未被选择的边的持续未被选择时间和每个点的 $dscore$ 抽取出已在当前候选解中的点 u 和未在当前候选解中的点 v 。
- 在抽取点的同时检查候选解是否陷入局部最优，视情况更新边权。
- 置换 (u, v) 的被选择状态，获得新的候选解。
- 使用候选解更新答案。

- 1 简介
- 2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)
- 3 实验结果**

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

3 实验结果

■ 实验环境

■ 结果展示

实验平台

实验平台1:

CPU: Intel® Core™ i5-6200U Processor

RAM: 4G + 8G Dual Channel

System: Windows 10 Professional x64

实验平台2:

CPU: Intel® Core™ i7-6700HQ Processor

RAM: 8G

System: Windows 10 Home Edition x64

实验代码及数据

EWLS算法使用C++语言实现，编译器为mingw-w64 7.1.0，编译过程中开启了O3优化。
测试代码和统计数据代码使用Python3.6.1实现，使用time.time()函数计算代码运行时间⁶。
采用来自<http://www.nlsde.buaa.edu.cn/~kexu/benchmarks/graph-benchmarks.htm>的测试数据。

⁶实验结果中的平均用时和中位用时均只考虑跑出最优解的测试组。

实验停止标准

在输入参数给定了输入数据对应的最优解的值，当程序运行至求得最优解时，程序会自动退出。由于最小顶点覆盖问题的难解性，对于大规模的输入数据，程序常常无法求得最优解。

设置 $maxSteps = 5000000$ ，当搜索进行 $maxSteps$ 步时，程序会自动退出并输出当前找到的最优解。

1 简介

2 边加权局部搜索 (Edge Weight Local Search)

3 实验结果

■ 实验环境

■ 结果展示

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb30-15-1.mis	1	420/420	5/5	0.11891	0.1195	2
frb30-15-2.mis	1	420/420	5/5	0.06251	0.06249	2
frb30-15-3.mis	1	420/420	5/5	2.14807	2.73345	2
frb30-15-4.mis	1	420/420	5/5	0.27992	0.32322	2
frb30-15-5.mis	1	420/420	5/5	0.34356	0.2212	2
frb30-15-1.mis	2	420/420	5/5	0.07415	0.07813	2
frb30-15-2.mis	2	420/420	5/5	0.19006	0.19022	2
frb30-15-3.mis	2	420/420	5/5	0.82918	0.59798	2
frb30-15-4.mis	2	420/420	5/5	0.15988	0.19253	2
frb30-15-5.mis	2	420/420	5/5	0.21364	0.13954	2
frb30-15-1.mis	3	420/420	5/5	0.06537	0.06218	2
frb30-15-2.mis	3	420/420	5/5	0.18779	0.13444	2
frb30-15-3.mis	3	420/420	5/5	0.90935	0.51571	2
frb30-15-4.mis	3	420/420	5/5	0.07188	0.07813	2
frb30-15-5.mis	3	420/420	5/5	0.60816	0.57018	2

图: 实验结果-0

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb35-17-1.mis	1	560/560	5/5	1.25539	0.44955	2
frb35-17-2.mis	1	560/560	5/5	1.19561	0.17473	2
frb35-17-3.mis	1	560/560	5/5	0.18497	0.18244	2
frb35-17-4.mis	1	560/560	5/5	1.54738	1.40006	2
frb35-17-5.mis	1	560/560	5/5	0.41003	0.25229	2
frb35-17-1.mis	2	560/560	5/5	2.50635	2.49986	2
frb35-17-2.mis	2	560/560	5/5	1.58495	1.37334	2
frb35-17-3.mis	2	560/560	5/5	0.45333	0.57058	2
frb35-17-4.mis	2	560/560	5/5	1.20198	0.51822	2
frb35-17-5.mis	2	560/560	5/5	0.88838	0.24275	2
frb35-17-1.mis	3	561/560	5/5	38.1421	37.9312	2
frb35-17-2.mis	3	560/560	5/5	4.14343	4.63778	2
frb35-17-3.mis	3	560/560	5/5	0.89595	0.93709	2
frb35-17-4.mis	3	560/560	5/5	1.54684	0.73281	2
frb35-17-5.mis	3	560/560	5/5	0.53324	0.37718	2

图: 实验结果-1

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb40-19-1.mis	1	720/720	5/5	0.83997	0.89306	2
frb40-19-2.mis	1	720/720	3/5	4.38543	0.98721	2
frb40-19-3.mis	1	720/720	4/5	7.165	7.33126	2
frb40-19-4.mis	1	720/720	4/5	5.404	5.94703	2
frb40-19-5.mis	1	720/720	2/5	26.6067	26.6067	2
frb40-19-1.mis	2	720/720	5/5	1.13943	0.26817	2
frb40-19-2.mis	2	720/720	4/5	10.7512	7.42491	2
frb40-19-3.mis	2	720/720	5/5	8.94934	5.36175	2
frb40-19-4.mis	2	720/720	3/5	10.7317	11.3603	2
frb40-19-5.mis	2	720/720	2/5	17.0144	17.0144	2
frb40-19-1.mis	3	720/720	5/5	2.40923	1.56243	2
frb40-19-2.mis	3	720/720	5/5	6.20778	4.89392	2
frb40-19-3.mis	3	720/720	5/5	2.82078	2.25217	2
frb40-19-4.mis	3	720/720	3/5	6.38642	6.27722	2
frb40-19-5.mis	3	720/720	2/5	19.4813	19.4813	2

图: 实验结果-2

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb45-21-1.mis	1	900/900	3/5	5.84275	5.7258	2
frb45-21-2.mis	1	900/900	4/5	14.0464	8.18962	2
frb45-21-3.mis	1	900/900	1/5	30.5362	30.5362	2
frb45-21-4.mis	1	900/900	5/5	20.8893	22.6553	2
frb45-21-5.mis	1	900/900	4/5	15.1108	14.5503	2
frb45-21-1.mis	2	900/900	5/5	7.68804	5.38351	2
frb45-21-2.mis	2	900/900	5/5	20.1787	16.5518	2
frb45-21-3.mis	2	900/900	1/5	2.2838	2.2838	2
frb45-21-4.mis	2	900/900	2/5	16.723	16.723	2
frb45-21-5.mis	2	900/900	2/5	11.3256	11.3256	2
frb45-21-1.mis	3	900/900	5/5	23.2142	26.4267	2
frb45-21-2.mis	3	900/900	3/5	33.3559	24.4401	2
frb45-21-3.mis	3	901/900	5/5	57.2009	57.163	2
frb45-21-4.mis	3	900/900	5/5	11.3339	13.2083	2
frb45-21-5.mis	3	901/900	5/5	58.4483	58.1491	2

图: 实验结果-3

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb50-23-1.mis	2	1101/1100	5/5	60.7967	60.5361	2
frb50-23-2.mis	2	1101/1100	5/5	61.7767	61.603	2
frb50-23-3.mis	2	1101/1100	5/5	60.9765	60.933	2
frb50-23-4.mis	2	1100/1100	2/5	18.5797	18.5797	2
frb50-23-5.mis	2	1100/1100	1/5	0.69069	0.69069	2
frb50-23-1.mis	3	1100/1100	2/5	32.6482	32.6482	2
frb50-23-2.mis	3	1100/1100	1/5	10.0352	10.0352	2
frb50-23-3.mis	3	1101/1100	5/5	68.5079	69.1787	2
frb50-23-4.mis	3	1100/1100	2/5	45.6956	45.6956	2
frb50-23-5.mis	3	1100/1100	2/5	11.7056	11.7056	2

图: 实验结果-4

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb53-24-1.mis	2	1219/1219	1/5	46.0856	46.0856	2
frb53-24-2.mis	2	1220/1219	5/5	67.3607	66.5879	2
frb53-24-3.mis	2	1220/1219	5/5	68.4909	68.4007	2
frb53-24-4.mis	2	1220/1219	4/5	68.8006	69.0252	2
frb53-24-5.mis	2	1219/1219	1/5	20.5874	20.5874	2
frb53-24-1.mis	3	1219/1219	1/5	25.614	25.614	2
frb53-24-2.mis	3	1220/1219	5/5	74.8036	74.2775	2
frb53-24-3.mis	3	1220/1219	4/5	75.2875	74.9823	2
frb53-24-4.mis	3	1220/1219	3/5	75.0232	73.6845	2
frb53-24-5.mis	3	1219/1219	1/5	12.6458	12.6458	2

图: 实验结果-5

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb56-25-1.mis	2	1345/1344	3/5	74.5284	74.6561	2
frb56-25-2.mis	2	1345/1344	3/5	75.6753	75.1824	2
frb56-25-3.mis	2	1344/1344	1/5	62.1965	62.1965	2
frb56-25-4.mis	2	1344/1344	1/5	34.8359	34.8359	2
frb56-25-5.mis	2	1344/1344	1/5	50.4921	50.4921	2
frb56-25-1.mis	3	1345/1344	3/5	84.451	83.0751	2
frb56-25-2.mis	3	1345/1344	2/5	81.6596	81.6596	2
frb56-25-3.mis	3	1344/1344	1/5	38.0687	38.0687	2
frb56-25-4.mis	3	1344/1344	1/5	35.0712	35.0712	2
frb56-25-5.mis	3	1344/1344	3/5	34.8657	40.7918	2

图: 实验结果-6

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb59-26-1.mis	2	1476/1475	3/5	82.7966	83.855	2
frb59-26-2.mis	2	1476/1475	2/5	80.4521	80.4521	2
frb59-26-3.mis	2	1476/1475	2/5	80.8337	80.8337	2
frb59-26-4.mis	2	1476/1475	3/5	81.6937	81.5221	2
frb59-26-5.mis	2	1476/1475	2/5	82.819	82.819	2
frb59-26-1.mis	3	1476/1475	2/5	89.2165	89.2165	2
frb59-26-2.mis	3	1476/1475	4/5	91.574	90.4888	2
frb59-26-3.mis	3	1476/1475	2/5	92.1393	92.1393	2
frb59-26-4.mis	3	1476/1475	2/5	88.044	88.044	2
frb59-26-5.mis	3	1475/1475	1/5	5.63477	5.63477	2

图: 实验结果-7

输入数据	delta	程序运行最优解/答案	最优解/测试组数	平均用时	中位用时	实验平台
frb100-40.mis	1	3905/3900	1/1	364.662	364.662	1
frb100-40.mis	2	3905/3900	1/1	472.188	472.188	1
frb100-40.mis	3	3904/3900	1/1	462.282	462.282	1
frb100-40.mis	4	3905/3900	1/1	489.093	489.093	1
frb100-40.mis	5	3904/3900	1/1	537.561	537.561	1

图: 实验结果-8

Fin.

The end.
Thanks.