일반 선형확률과정 모형

정상 확률 과정(stationary process)에서 가장 일반적으로 사용되는 모형은 **일반 선형확률과정 모형(general linear process model)**이다. 일반 선형확률과정 모형은 시계열이 **가우시안 백색 잡음의 현재 값과 과거 값들의 선형 조합으로 이루어져 있다**고 가정한다. 이 수식에서 ϵ_t는 가우시안 백색 잡음이고 ψ는 백색 잡음에 곱해지는 가중 계수(weight coefficient)이다.

$$Y_t = \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \psi_3 \epsilon_{t-3} + \cdots$$

다만 선형확률과정 모형이 성립하려면 계수들이 다음 조건을 만족해야 한다. 이 조건은 전체 항들의 합이 수렴하도록 즉, 전체 값의 크기가 과도하게 커지지 않도록 하는 역할을 한다.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

이 모형을 블럭 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. 이 다이어그램에서 L는 신호가 저장되었다가 다음 시간에 나오는 일종의 저장 장치이다. 지연(lag) 요소라고 불린다. 책에 따라서는 D(Delay), B(Backshift)라고 표기하는 경우도 있다.

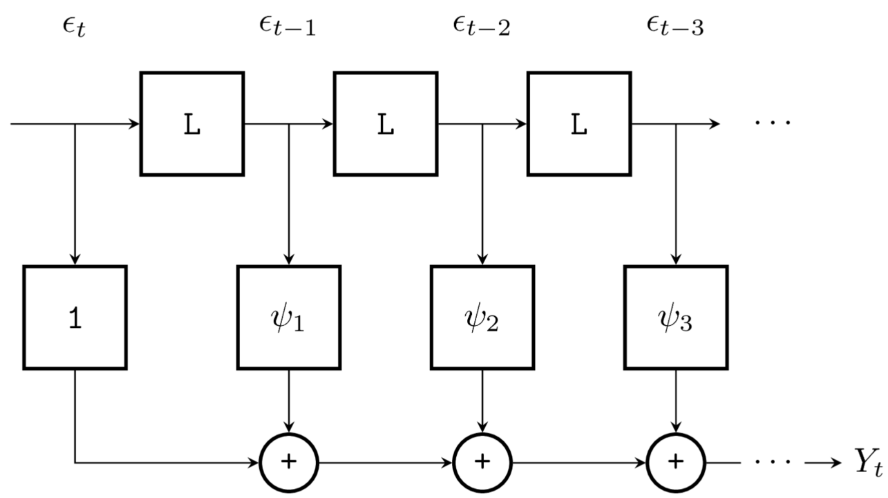

그림 33.1 : 일반선형확률과정 모형 블럭 다이어그램

Lag 연산자는 수식에서 다음과 같은 의미를 가진다.

$$\begin{aligned} Y_{t-1} &= LY_t \\ Y_{t-2} &= L^2 Y_t \\ Y_{t-k} &= L^k Y_t \end{aligned}$$

일반 선형확률과정 모형은 계수의 특성에 따라 다음과 같은 하위 모형으로 분류할 수 있다

- MA (Moving Average) 모형
- AR (Auto-Regressive) 모형
- ARMA (Auto-Regressive Moving Average) 모형

MA 모형

MA 모형은 일반 선형 확률 모형의 차수가 유한(finite)한 경우를 말한다. q차수의 MA 모형은 MA(q)로 표기하며 다음 수식을 만족한다.

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

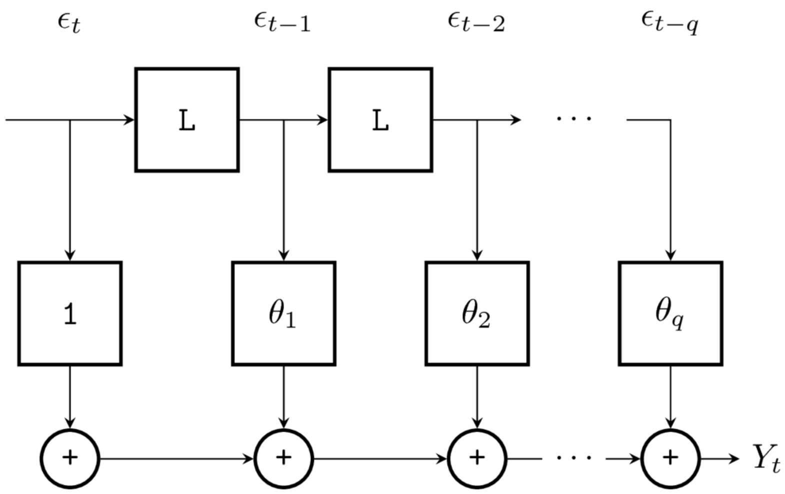

그림 33.2 : MA 모형 블럭 다이어그램

MA 수식을 Lag 연산자(operator)를 사용하면 다음처럼 쓸 수 있다.

$$Y_t = \epsilon_t + \theta_1 L \epsilon_t + \theta_2 L^2 \epsilon_t + \cdots + \theta_q L^q \epsilon_t$$
$$Y_t = (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q) \epsilon_t$$

이를 줄여서 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$Y_t = \theta(L) \epsilon_t$$

이 식에서 $\theta(L)$은 다음 다항식을 뜻한다.

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots \theta_q L^q$$

AR 모형

AR 모형은 자기 자신의 과거값에 의존적인 모형을 말한다. p차수의 AR 모형은 AR(p)로 표기하며 다음 수식을 만족한다.

$$Y_t = -\phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t$$

AR 수식을 Lag 연산자(operator)를 사용하면 다음처럼 쓸 수 있다.

$$(1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p) Y_t = \epsilon_t$$

이를 줄여서 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$\phi(L) Y_t = \epsilon_t$$

이 식에서 $\phi(L)$은 다음 다항식을 뜻한다.

$$\phi(L) = 1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots \phi_p L^p$$

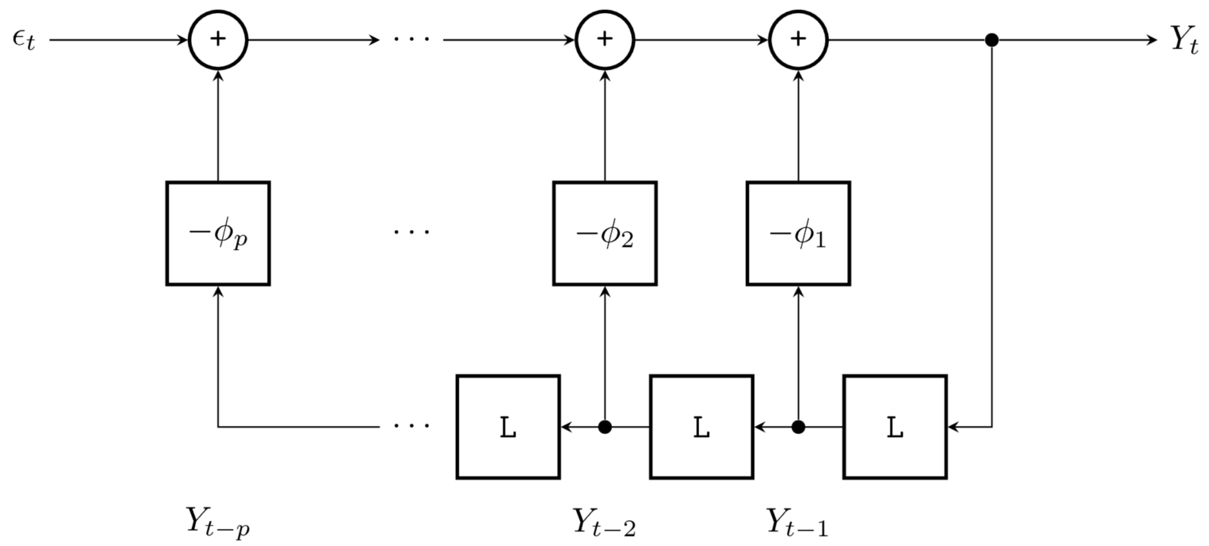

그림 33.3 : AR 모형 블럭 다이어그램

ARMA 모형

ARMA 모형은 AR 모형과 MA 모형을 합친 모형이다.

$$Y_t = -\phi_1 Y_{t-1} - \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

줄여서 다음과 같이 쓰기도 한다.

$$\phi(L) Y_t = \theta(L) \epsilon_t$$