칼만 필터 공식의 유도

칼만 필터 공식

동적 선형 모형

$$
\begin{aligned}
x_t &= \Phi_t x_{t-1} + w_t \;, \quad & w_t \sim \mathcal{N}(0, W_t) \\
y_t &= A_t x_t \quad\;\; + v_t \;, \quad & v_t \sim \mathcal{N}(0, V_t)
\end{aligned}
$$

초기 상태 분포

$$
x_{t-1} \sim \mathcal{N}(m_{t-1}, C_{t-1})
$$

상태 예측

a_t는 $y_1, \ldots, y_{t-1}$ 에 대한 x_t 의 조건부 기댓값 (예측값)

$$
a_t = \text{E}[x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}]
$$

R_t는 $y_1, \ldots, y_{t-1}$ 에 대한 x_t 의 조건부 분산 행렬

$$
R_t = \text{Var}[x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}]
$$

$$
a_t = \Phi_t m_{t-1}
$$

$$
R_t = \Phi_t C_{t-1} \Phi_t^T m_{t-1} + W_t
$$

출력 예측

f_t는 $y_1, \ldots, y_{t-1}$ 에 대한 y_t 의 조건부 기댓값 (예측값)

$$
y_t = \text{E}[y_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}]
$$

Q_t는 $y_1, \ldots, y_{t-1}$ 에 대한 y_t 의 조건부 분산 행렬

$$
Q_t = \text{Var}[y_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}]
$$

$$
f_t = A_t a_t
$$

$$
Q_t = A_t R_t A_t^T + V_t
$$

상태 보정

e_t는 출력 오차

$$e_t = y_t - f_t$$

$$m_t = a_t + R_t A_t^T Q_t^{-1} e_t$$

$$C_t = R_t - R_t A_t^T Q_t^{-1} A_t R_t$$

증명

동적 선형 모형의 확률 변수 $x_0, x_1, \ldots, x_t, Y_1, \ldots, Y_t$ 는 다음 조건을 만족한다.

1. x_t 는 x_{t-1} 에만 의존하며 $x_0, x_1, \ldots, x_{t-2}$ 와 독립이다.
2. Y_t 는 x_t 에만 의존하며 다른 모든 확률 변수와 x_t-조건부 독립이다.(independent conditional to x_t)

가우시안 정규 분포 증명

이 때 전체 확률 변수 의 결합 확률 분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p(x_0, x_1, \ldots, x_t, y_1, \ldots, y_t) &= p(y_1, \ldots, y_t \mid x_0, x_1, \ldots, x_t)\ p(x_0, x_1, \ldots, x_t) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{t} p(y_j \mid x_0, x_1, \ldots, x_t) \right) \left(p(x_0) \prod_{j=1}^{t} p(x_j \mid x_0, \ldots, x_{j-1}) \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{t} p(y_j \mid x_j) \right) \left(p(x_0) \prod_{j=1}^{t} p(x_j \mid x_{j-1}) \right) \\ &= p(x_0) \prod_{j=1}^{t} p(x_j \mid x_{j-1})\ p(y_j \mid x_j) \end{aligned}$$

$p(x_0), p(x_j \mid x_{j-1}), p(y_j \mid x_j)$ 이 모두 가우시안 정규 분포이므로 곱한 결과도 가우시안 정규 분포

상태 예측식 증명

iterated expectation 에서

$$\begin{aligned} a_t &= \mathrm{E}[x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[x_t \mid x_{t-1}, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\Phi_t x_{t-1} \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \Phi_t \mathrm{E}[x_{t-1} \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \Phi_t m_{t-1} \end{aligned}$$

law of total variance 에서

$$\begin{aligned} R_t &= \mathrm{Var}[x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}[x_t \mid x_{t-1}, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[x_t \mid x_{t-1}, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= W_t + \Phi_t C_{t-1} \Phi_t^T \end{aligned}$$

출력 예측식 증명

iterated expectation 에서

$$\begin{aligned} f_t &= \mathrm{E}[y_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[y_t \mid x_t, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[A_t x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= A_t \mathrm{E}[x_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= A_t a_t \end{aligned}$$

law of total variance 에서

$$\begin{aligned} Q_t &= \mathrm{Var}[y_t \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}[y_t \mid x_t, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[y_t \mid x_t, y_1, \ldots, y_{t-1}] \mid y_1, \ldots, y_{t-1}] \\ &= V_t + A_t R_t A_t^T \end{aligned}$$

출력 보정식 증명

출력 y_t가 존재하게 되었다는 것은

다음과 같은 선형 회귀 문제를 사전 분포가 $\mathcal{N}(a_t, R_t)$라고 가정하고 베이지안 추정법으로 푸는 것과 같다.

$$y_t = A_t x_t + v_t$$

이 문제의 해답은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_t &= a_{t-1} + R_t A_t^T (A_t R_t A_t^T + V)^{-1} (y_t - A_t a_t) \\ &= a_{t-1} + R_t A_t^T Q_t^{-1} e_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_t &= R_t + R_t A_t^T (A_t R_t A_t^T + V)^{-1} A_t R_t \\ &= R_t + R_t A_t^T Q_t^{-1} A_t R_t \end{aligned}$$