백색 잡음과 랜덤 워크

백색 잡음

시계열 분석을 구성하는 여러가지 기본 모형 중 가장 중요한 것이 바로 **백색 잡음(white noise)**이다.

백색 잡음 ϵ은 확률 과정을 구성하는 모든 개별 확률 변수 ϵ_t들이 서로 독립이고(independent) 동일한 확률 분포를 따르는(identically distributed) 확률 과정을 말한다. 이러한 가정을 약자로 **i.i.d. 가정**이라고 한다. 백색 잡음의 기반이 되는 확률 변수의 분포가 반드시 정규 분포일 필요는 없다.

$$\epsilon_t \sim \text{i.i.d.}$$

백색 잡음은 다음과 같은 특성을 만족한다.

- 정상 과정(stictly stationary process)이다.
- 시차 k가 0일 경우에는 자기공분산이 확률 분포의 분산이 되고 시차가 0이 아닌 경우에는 자기공분산이 0이다.
$$\gamma_k = \begin{cases} \text{Var}[\epsilon_t] & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0 \end{cases}$$
- 시차 k가 0일 경우에는 자기상관계수가 1이 되고 시차가 0이 아닌 경우에는 자기상관계수가 0이다.
$$\rho_k = \begin{cases} k & \text{for } k = 0 \\ 0 & \text{for } k \neq 0 \end{cases}$$

가우시안 백색 잡음

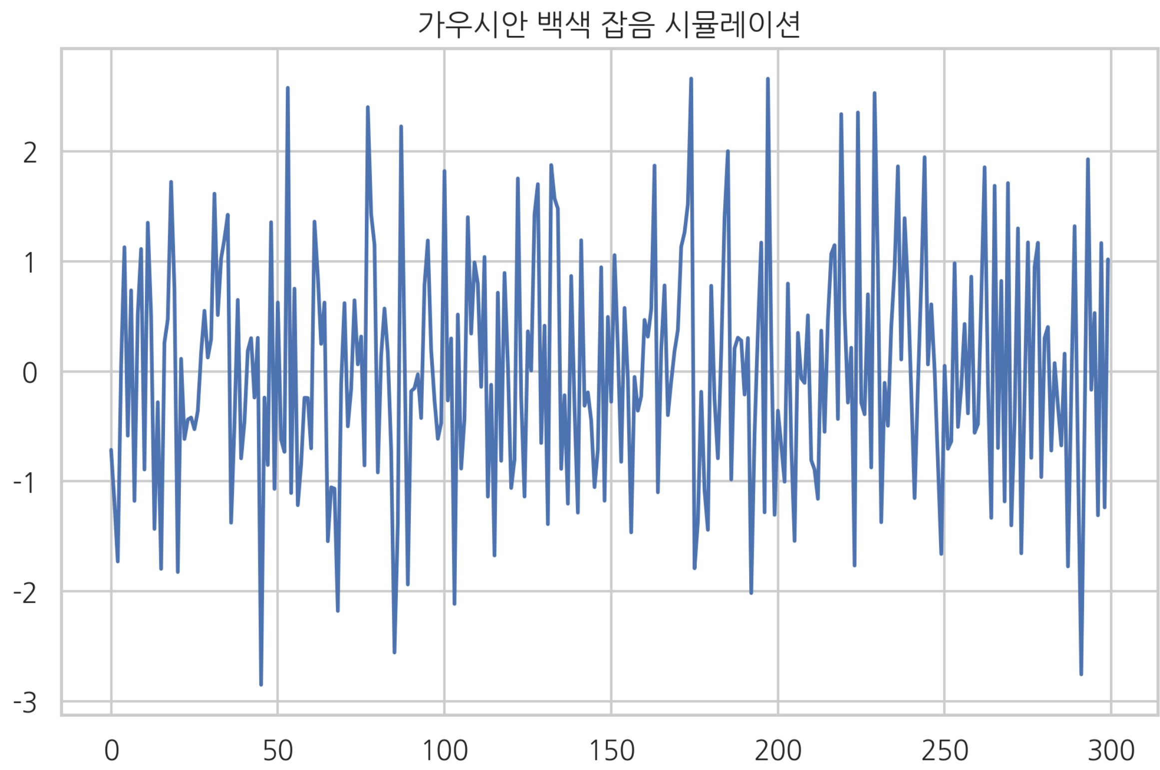
확률 분포가 표준 가우시안 정규 분포인 백색 잡음을 가우시안 백색 잡음(Gaussina white noise)라고 한다.

$$\epsilon_t \sim \text{i.i.d. } N(\mu, \sigma^2)$$

가우시안 백색 잡음은 다음과 같이 시뮬레이션 할 수 있다.

In [1]:

```
e = sp.stats.norm.rvs(size=300)
plt.plot(e)
plt.title("가우시안 백색 잡음 시뮬레이션")
plt.show()
```

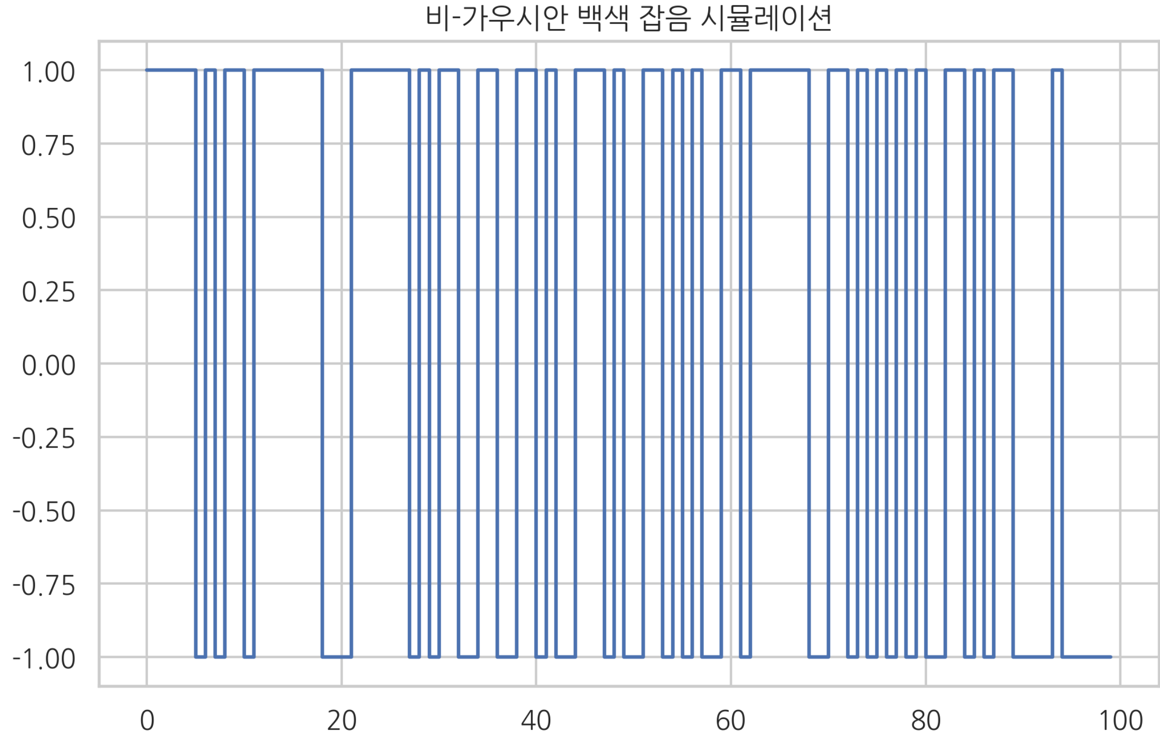


비-가우시안 백색 잡음

앞서 밝혔지만 백색 잡음을 이루는 기반 확률 분포가 반드시 정규 분포일 필요는 없다. 예를 들어 가장 단순한 경우로서 $\{1, -1\}$로 구성되고 1이 나올 확률 $p = 0.5$인 베르누이 확률 과정도 백색 잡음이 된다.

In [2]:

```
e = sp.stats.bernoulli.rvs(0.5, size=100) * 2 - 1
plt.step(np.arange(len(e)), e)
plt.title("비-가우시안 백색 잡음 시뮬레이션")
plt.ylim(-1.1, 1.1)
plt.show()
```



이산 시간 랜덤 워크

이산 시간 랜덤 워크(discrete-time random walk)는 백색 잡음(white noise)을 누적한 확률 과정을 말한다.

수식으로 정의하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \epsilon_1 \\
W_2 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 \\
\vdots &= \vdots \\
W_t &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

또는

$$W_t = W_{t-1} + \epsilon_t$$

이산 시간 랜덤 워크는 다음과 같은 특성을 가진다.

- 기댓값은 0

$$\text{E}[W_t] = 0$$

$$\mathrm{E}[W_t] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{t} \epsilon_t\right] = \sum_{i=1}^{t} \mathrm{E}\left[\epsilon_t\right] = 0$$

- 분산은 시간에 비례

$$\mathrm{Var}[W_t] = t\sigma_e^2$$

$$\mathrm{Var}[W_t] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{t} \epsilon_t^2\right] = t\sigma_e^2$$

- 자기공분산은 두 시간 중 빠른 시간에 비례

$$\gamma_{t,s} = \gamma_{s,t} = t\sigma_e^2 \ \text{ if } t < s$$

$$\gamma_{t,s} = \mathrm{Cov}[W_t, W_s] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{t} \epsilon_t \sum_{i=1}^{s} \epsilon_s\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{t} \epsilon_t^2\right] = t\sigma_e^2$$

- 자기상관계수는 두 시간의 비율의 제곱근에 비례

$$\rho_{t,s} = \rho_{s,t} = \sqrt{\frac{t}{s}} \ \text{ if } t < s$$

$$\rho_{t,s} = \frac{\mathrm{Cov}[W_t, W_s]}{\sqrt{\mathrm{Var}[W_t]\mathrm{Var}[W_s]}} = \frac{t\sigma_e^2}{\sqrt{t\sigma_e^2 s\sigma_e^2}} = \sqrt{\frac{t}{s}}$$

이산 시간 랜덤 워크는 백색 잡음에 대한 누적합(cumsum)으로 구현할 수 있다.

In [3]:

```
for i in range(3):
    np.random.seed(9*i)
    e = sp.stats.norm.rvs(size=900)
    W = np.insert(np.cumsum(e), 0, 0)
    plt.plot(W)
plt.title("이산 시간 랜덤 워크 시뮬레이션")
plt.show()
```