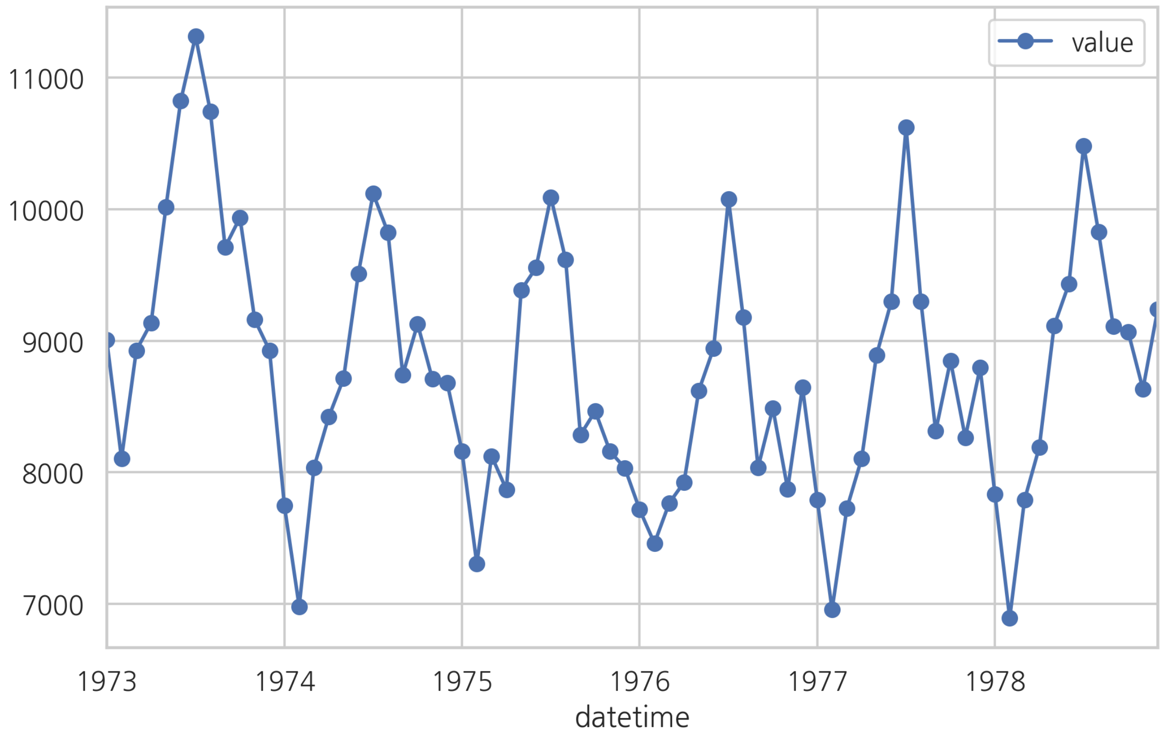
Seasonal ARIMA 모형

호흡기 질환 사망자 수에 대한 시계열 자료를 보자.

In [1]:

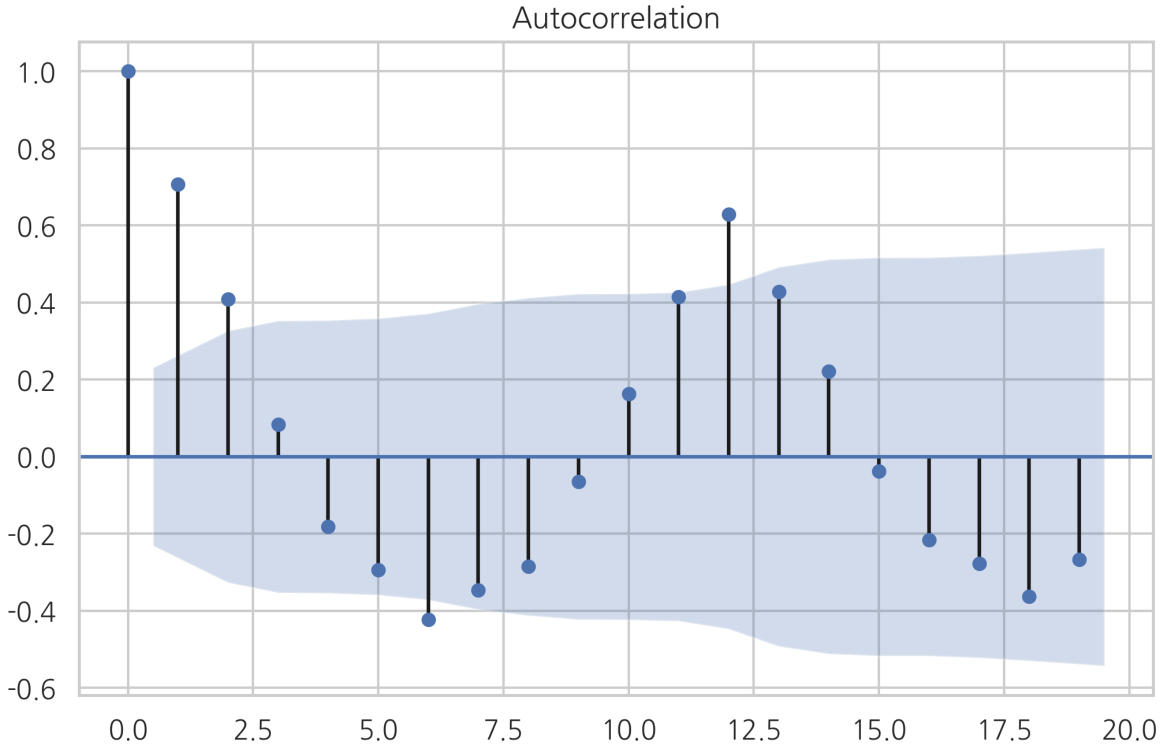
```
data = sm.datasets.get_rdataset("accdeaths", "MASS")
df = data.data

def yearfraction2datetime(yearfraction, startyear=0):
    import datetime
    import dateutil
    year = int(yearfraction) + startyear
    month = int(round(12 * (yearfraction - year)))
    delta = dateutil.relativedelta.relativedelta(months=month)
    date = datetime.datetime(year, 1, 1) + delta
    return date

df["datetime"] = df.time.map(yearfraction2datetime)
df.plot(x="datetime", y="value", style=["o-"])
plt.show()
```



이 시계열 자체는 낮은 차수의 ARMA 모형으로 모형화하기 힘든 복잡한 시계열이다.

In [2]:

```
sm.graphics.tsa.plot_acf(df["value"])
plt.show()
```



단순 Seasonal ARIMA 모형

Seasonal ARIMA 모형은 줄여서 SARIMA라고 하기도 한다. 단순 SARIMA 모형은 각 계절에 따른 독립적인 ARIMA 모형이 합쳐져 있는 모형이다. 기존 ARIMA(p,d,q) 모형에 계절성 주기를 나타내는 차수 s가 추가적으로 필요하기 때문에 SARIMA(P,D,Q,s) 로 표기한다.

s의 값은 월별 계절성을 나타낼 때는 $s = 12$가 되고 분기별 계절성을 나타낼 때는 $s = 4$가 된다.

단순 Seasonal MA 모형

예를 들어 각 월의 시계열 자료 값이 현재의 백색 잡음 이외에 작년 동월의 백색 잡음에도 영향을 받는다면 다음과 같은 단순 SARIMA(0,0,1,12) 모형이 된다.

$$Y_t = \epsilon_t + \Theta \epsilon_{t-12}$$

이 시계열은 시차(lag)가 12인 경우에는 자기상관계수가 0이 아니고 다른 경우에는 모두 0이된다. 즉, 다른 달끼

리는 상관관계가 없다.

$$\text{Cov}[Y_t, Y_{t-1}] = \text{Cov}[\epsilon_t + \Theta\epsilon_{t-12}, \epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-13}] = 0$$

$$\text{Cov}[Y_t, Y_{t-12}] = \text{Cov}[\epsilon_t + \Theta\epsilon_{t-12}, \epsilon_{t-12} + \Theta\epsilon_{t-24}] = -\Theta\sigma_e^2$$

이 성질은 MA 차수 Q가 1이 아닌 일반적인 경우에도 성립한다. 예를 들어 다음과 같은 일반적인 단순 SARIMA(0,0,Q,s) 모형의 경우,

$$Y_t = \epsilon_t + \Theta\epsilon_{t-12} + \Theta\epsilon_{t-2\cdot 12} + \cdots + \Theta\epsilon_{t-Q\cdot 12}$$

자기상관계수의 값은 시차가 ks인 경우에만 0이 아닌 다음과 같은 값이 되고 다른 시차값에 대해서는 0이 된다.

$$\rho_{ks} = \frac{\Theta_k + \Theta_1\Theta_{k+1} + \Theta_2\Theta_{k+2} + \cdots + \Theta_{Q-k}\Theta_{k+Q}}{1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \cdots + \Theta_Q^2}$$

단순 Seasonal AR 모형

예를 들어 각 월의 시계열 자료 값이 작년 동월의 자료값 자체에도 영향을 받는다면 다음과 같은 단순 SARIMA(1,0,0,12) 모형이 된다.

$$Y_t = -\Phi Y_{t-12} + \epsilon_t$$

이 확률 과정은 모수 $\Phi < 1$인 경우에만 정상 과정이 된다.

자기상관계수의 값은 시차가 ks인 경우에만 0이 아닌 다음과 같은 값이 되고 다른 시차값에 대해서는 0이 된다.

$$\rho_{ks} = (-\Phi)^k$$

단순 Seasonal ARMA 모형

ARMA(p,q) 모형은 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있다.

$$Y_t = -\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} - \cdots - \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1} + \theta_2\epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q\epsilon_{t-q}$$

이를 시간 지연 연산자 L을 사용하면 다음과 같이 표기하기도 한다.

$$\phi(L)Y_t = \theta(L)\epsilon_t$$

$$\phi(L) = 1 + \phi_1 L + \phi_2 L^2 + \cdots + \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q$$

일반적인 단순 Seasonal ARMA (P,Q,S) 모형은 모든 시간 지연이 s의 배수이기 때문에 다음과 같이 표기한다.

$$\phi(L^s)Y_t = \theta(L^s)\epsilon_t$$

이를 풀면 다음과 같은 의미이다.

$$Y_t + \phi_1 Y_{t-s} + \phi_2 Y_{t-2s} + \cdots + \phi_P Y_{t-Ps} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-s} + \theta_2 \epsilon_{t-2s} + \cdots + \theta_Q \epsilon_{t-Qs}$$

단순 Seasonal ARIMA 모형

ARIMA(p,1,q) 모형은 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있다.

$$Y_t - Y_{t-1} + \phi_1 (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \phi_2 (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + \cdots + \phi_p (Y_{t-p} - Y_{t-p-1}) = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots +$$

$$\nabla Y_t + \phi_1 \nabla Y_{t-1} + \phi_2 \nabla Y_{t-2} + \cdots + \phi_p \nabla Y_{t-p} = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$\phi(L)\nabla Y_t = \theta(L)\epsilon_t$$

ARIMA(p,d,q) 모형은 다음과 같이 수식으로 나타낼 수 있다.

$$\phi(L)\nabla^d Y_t = \theta(L)\epsilon_t$$

이 식에서 ∇^d는 d번 차분하는 연산을 의미한다.

단순 Seasonal ARIMA (P,1,Q,S) 모형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(L^s)\nabla_s Y_t = \theta(L^s)\epsilon_t$$

이 식에서 ∇_s는 s-시간 지연 차분을 나타낸다. 즉 $\nabla_s Y_t = Y_t - Y_{t-s}$이다. 이 식을 풀면 다음과 같은 의미이다.

$$(Y_t - Y_{t-s}) + \phi_1 (Y_{t-s} - Y_{t-2s}) + \phi_2 (Y_{t-2s} - Y_{t-3s}) + \cdots + \phi_P (Y_{t-Ps} - Y_{t-(P-1)s}) = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-s} + \theta_2 \epsilon_{t-2s}$$

단순 Seasonal ARIMA (P,D,Q,S) 모형은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\phi(L^s)\nabla_s^D Y_t = \theta(L^s)\epsilon_t$$

이 식에서 ∇_s^d는 s-시간 지연 차분을 D번 반복하는 연산을 의미한다.

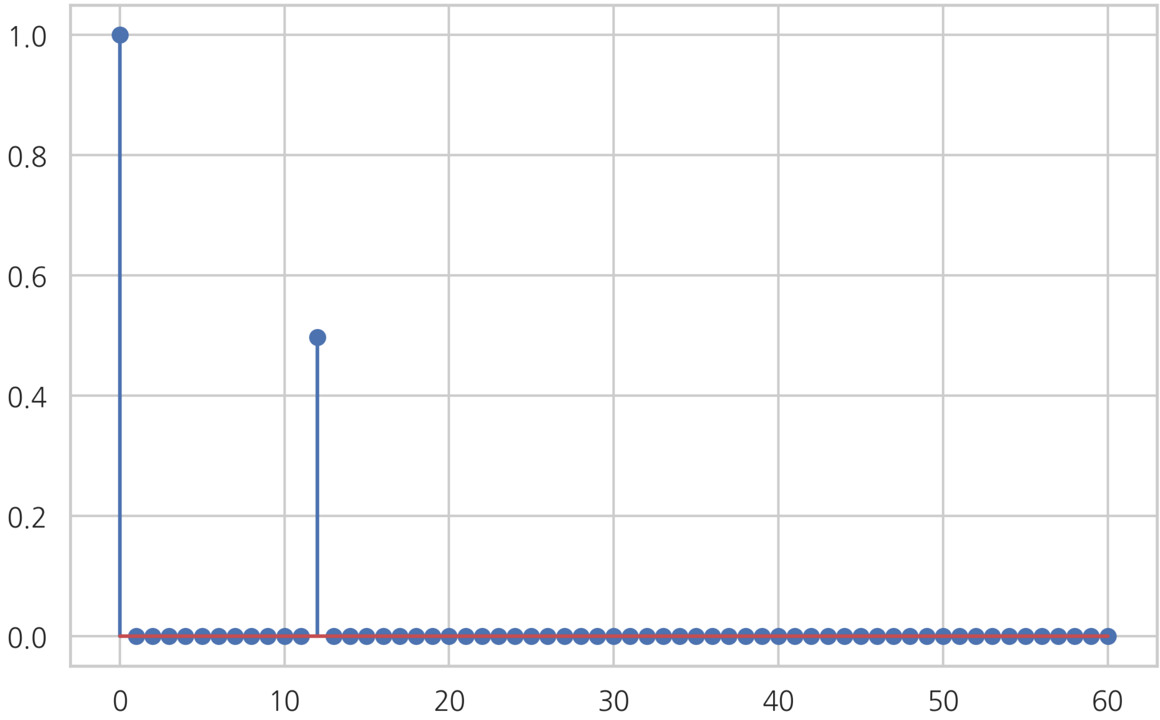
단순 Seasonal ARIMA 모형의 시뮬레이션

다음과 같은 단순 Seasonal MA(1) 모형을 살펴보자.

$$Y_t = \epsilon_t + 0.9\epsilon_{t-12}$$

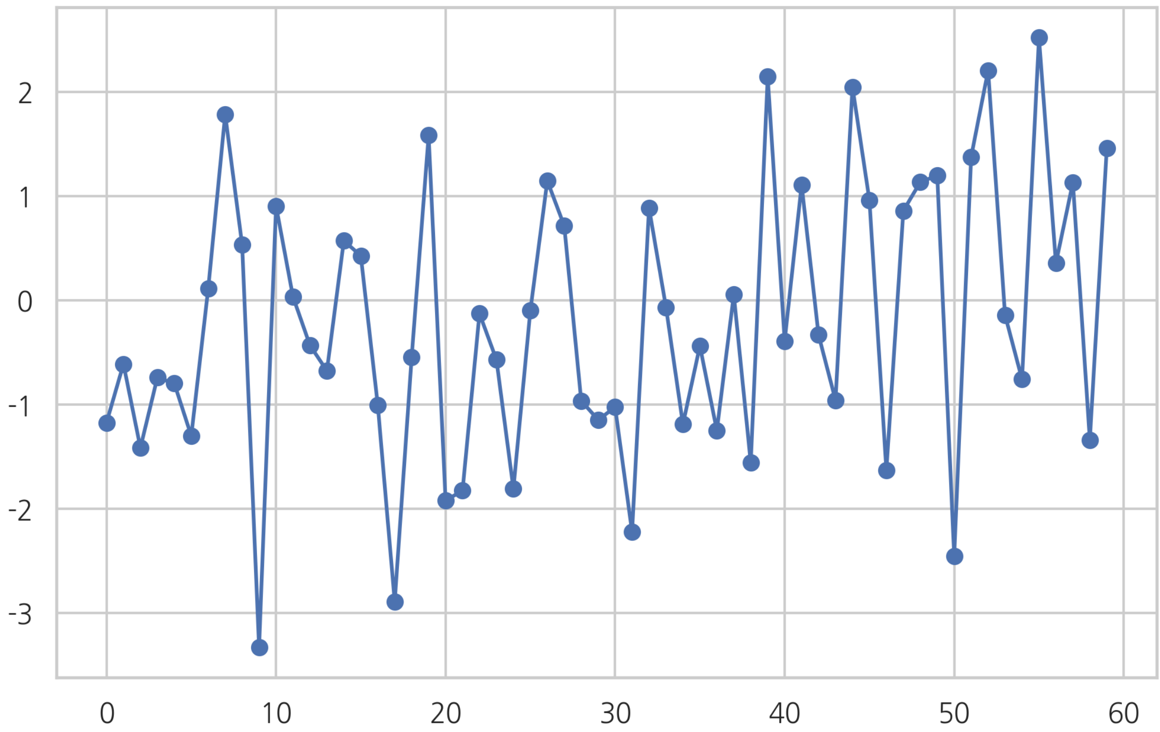
In [3]:

```
p1 = sm.tsa.ArmaProcess([1], [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.9])
plt.stem(p1.acf(61))
plt.show()
```



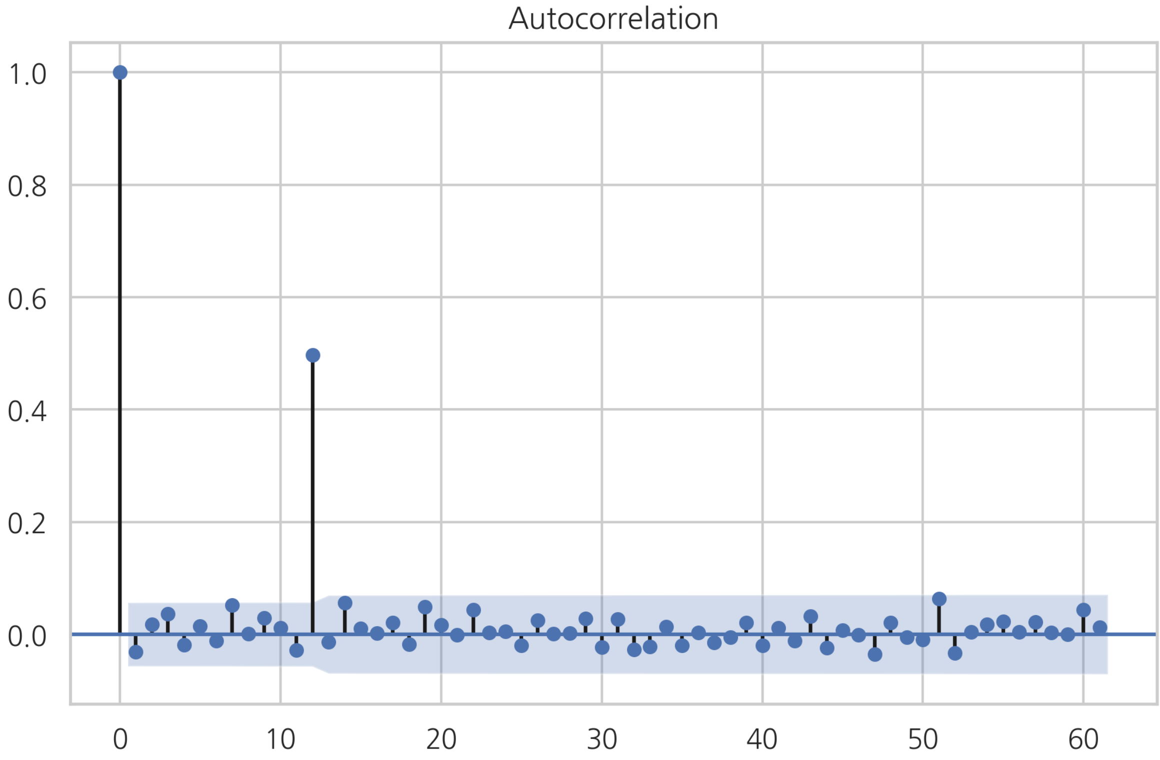
In [4]:

```
np.random.seed(0)
y1 = p1.generate_sample(1200, burnin=240)
plt.plot(y1[:60], "o-")
plt.show()
```



In [5]:

```
sm.graphics.tsa.plot_acf(y1, lags=61)
plt.show()
```

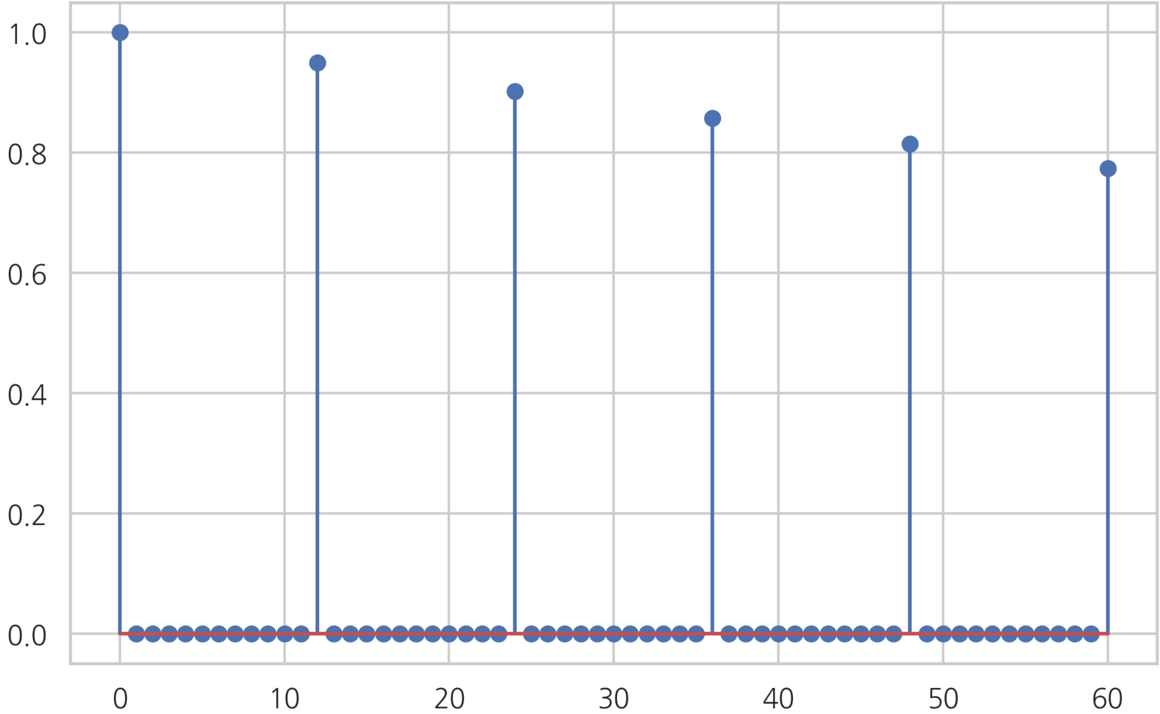


다음은 단순 Seasonal AR(1) 모형의 예이다.

$$Y_t = 0.95 Y_{t-12} + \epsilon_t$$

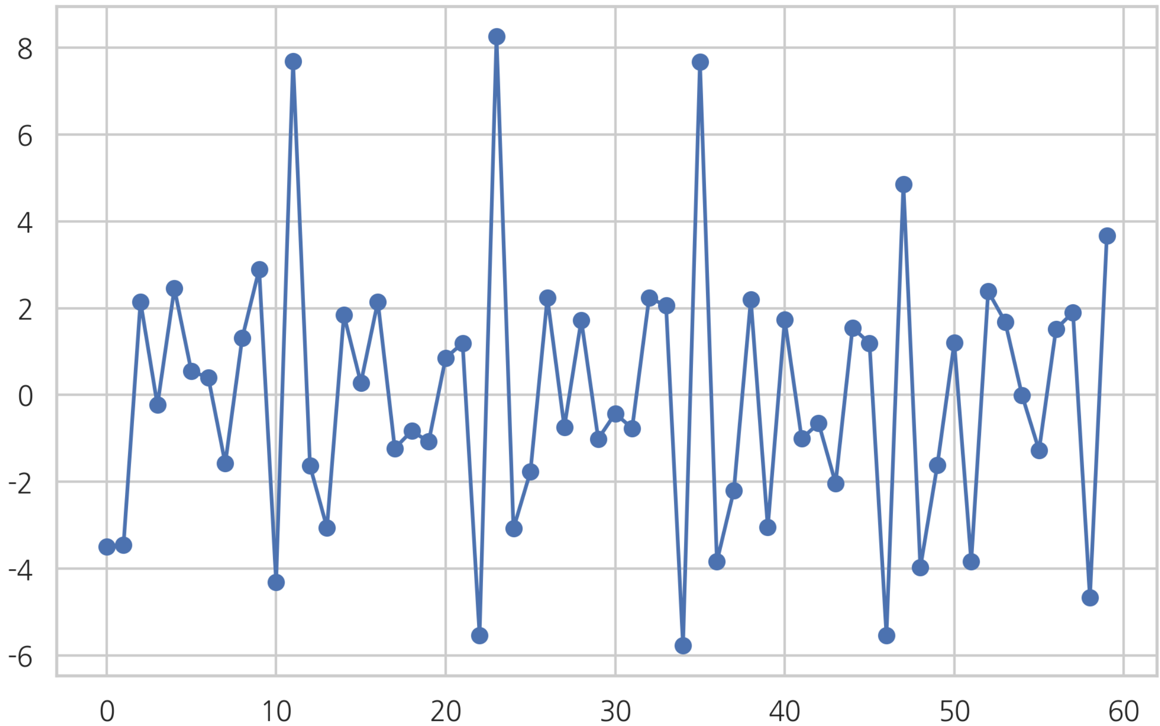
In [6]:

```
p2 = sm.tsa.ArmaProcess([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.95], [1])
plt.stem(p2.acf(61))
plt.show()
```



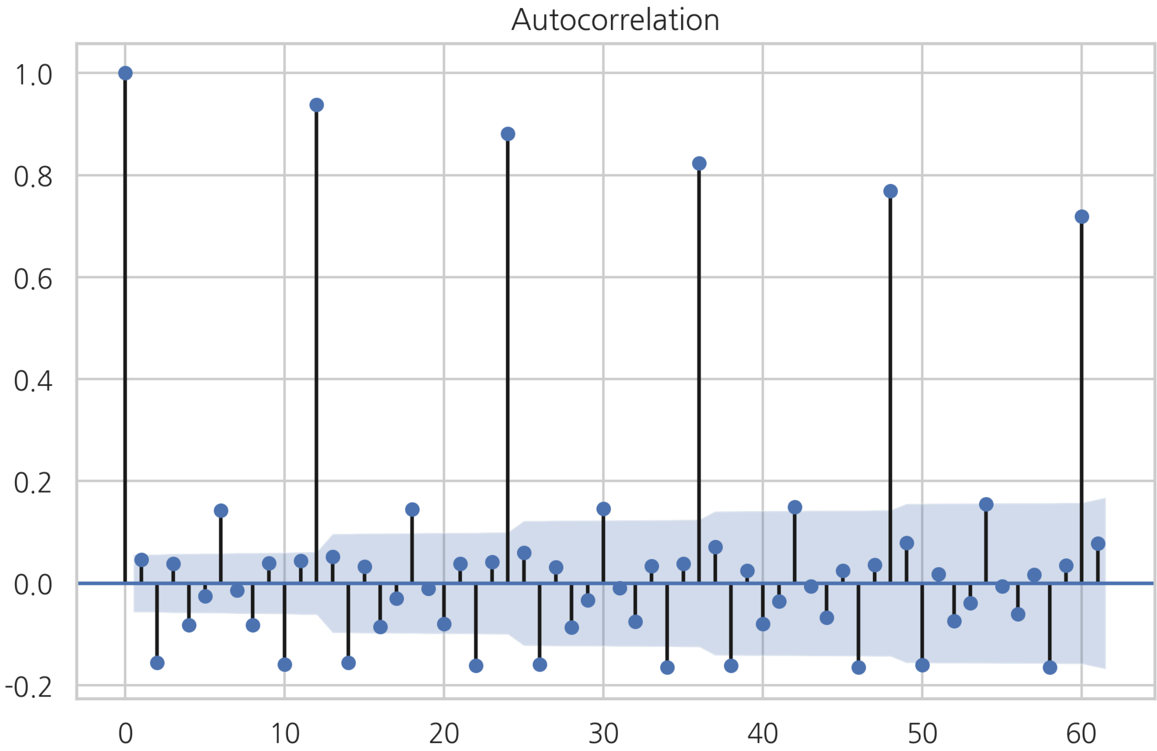
In [7]:

```
np.random.seed(8)
y2 = p2.generate_sample(1200, burnin=110)
plt.plot(y2[:60], "o-")
plt.show()
```



In [8]:

```
sm.graphics.tsa.plot_acf(y2, lags=61)
plt.show()
```

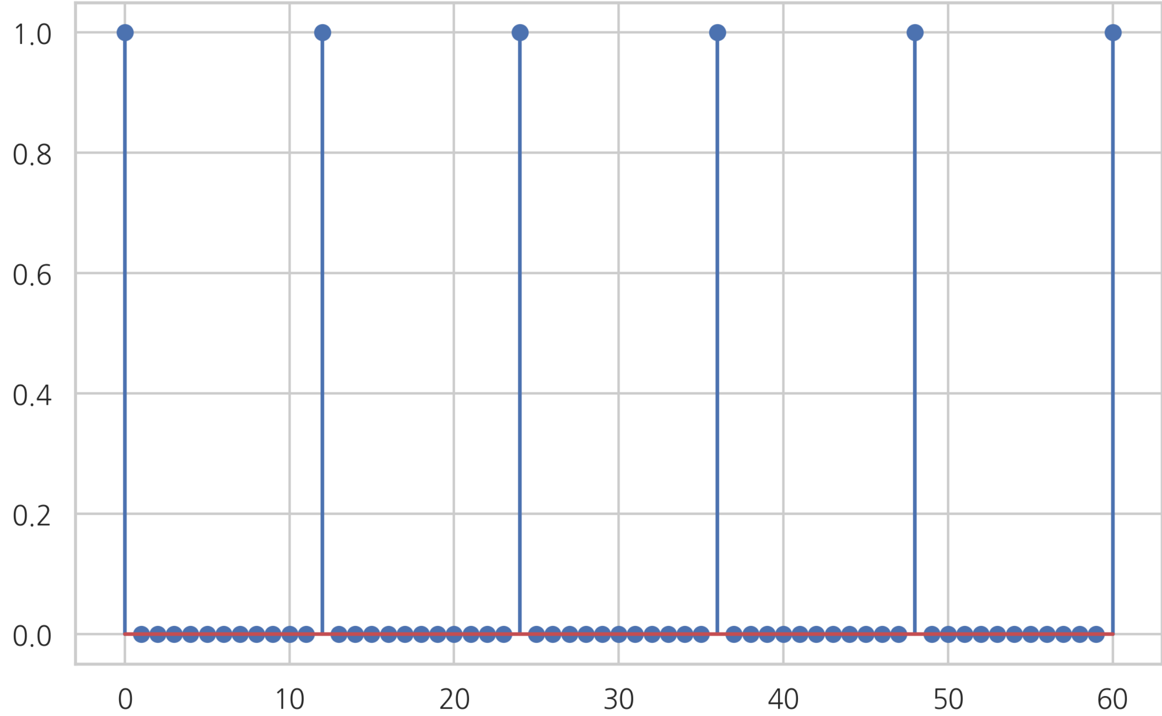


다음은 단순 Seasonal ARI(1, 1) 모형의 예이다.

$$Y_t - Y_{t-12} = 0.1(Y_{t-12} - Y_{t-24}) + \epsilon_t$$

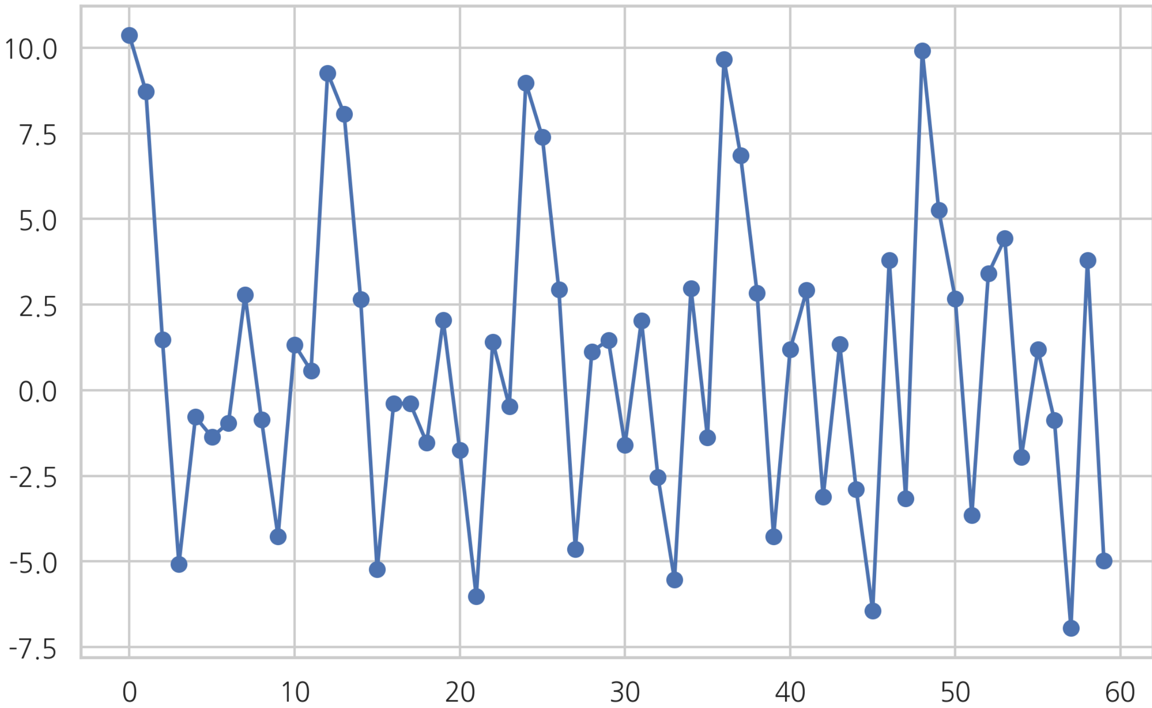
In [9]:

```
p3 = sm.tsa.ArmaProcess([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1.3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
plt.stem(p3.acf(61))
plt.show()
```



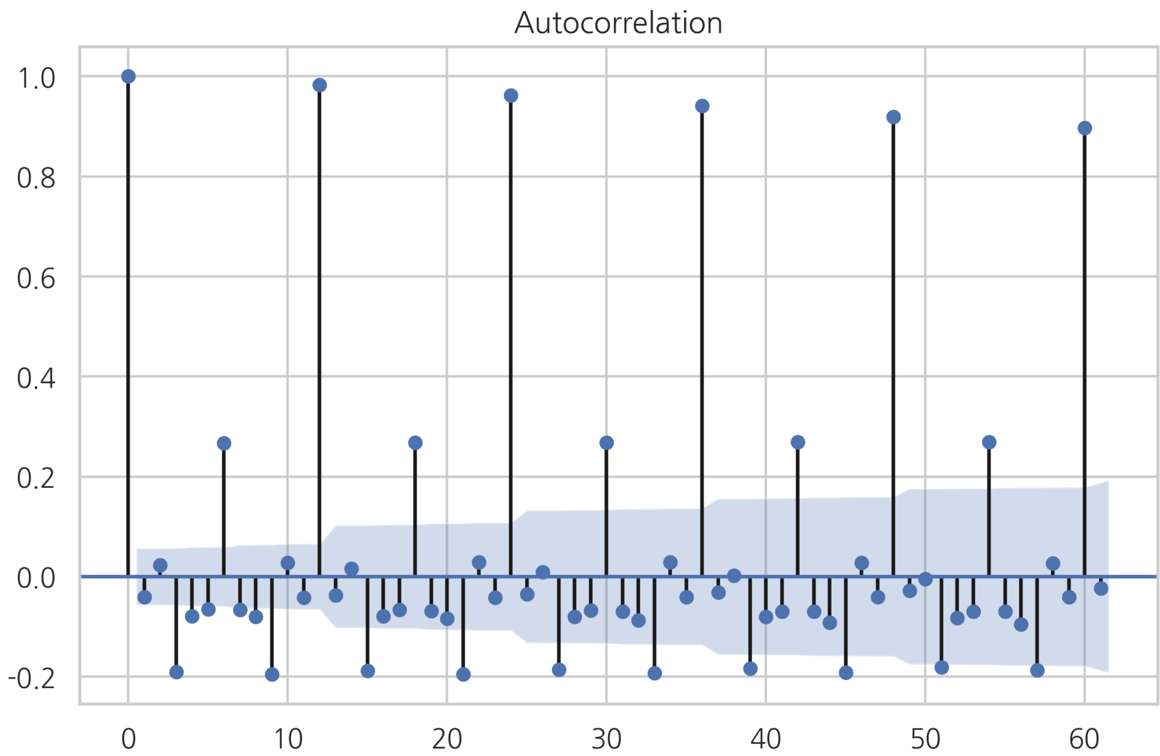
In [10]:

```
np.random.seed(4)
y3 = p3.generate_sample(1200, burnin=120)
plt.plot(y3[:60], "o-")
plt.show()
```



In [11]:

```
sm.graphics.tsa.plot_acf(y3, lags=61)
plt.show()
```



Multiplicated Seasonal ARIMA 모형

단순 Seasonal ARIMA 모형은 다음과 같은 수식으로 표현되면 시간 지연이 모두 s의 정수배이다.

$$\phi(L^s)\nabla_s^D Y_t = \theta(L^s)\epsilon_t$$

시간 지연이 모두 s의 정수배이기 때문에 원 시계열 자료는 s개의 분리된 시계열 자료와 마찬가지이다. 자기상관계수 함수도 시차가 s의 정수배인 경우만 0이 아니고 나머지 경우에는 모두 0이다.

그러나 실제 계절성을 보이는 자료에 대해 자기상관계수 함수를 구하면 시차가 s의 정수배인 경우에 큰 값을 보이지만 일반적으로 그 주변의 시차에서도 0이 아닌 유의한 값을 보인다. 이러한 특성을 모형화 하려면 s개의 시계열 자료가 완전히 독립적으로 움직이는 것 보다는 그 사이에도 영향을 미치는 일반적인 ARIMA 모형의 특성도 가지고 있어야 한다.

일반적인 ARIMA 모형은 다음과 같은 수식을 따른다.

$$\phi(L)\nabla^D Y_t = \theta(L)\epsilon_t$$

이 두 가지 특성을 동시에 가지고 있는 모형을 Multiplicated Seasonal ARIMA (p,d,q)x(P,D,Q,s) 모형이라고 하며 다음과 같은 수식을 따르게 된다.

$$\phi_p(L)\tilde{\phi}_P(L^s)\nabla_s^D\nabla^d Y_t = \theta_q(L)\tilde{\theta}_Q(L^s)\epsilon_t$$

예 1: Multiplicated SARIMA(0,0,1)x(0,0,1,12)

예를 들어 다음과 같은 모형은 Multiplicated SARIMA(0,0,1)x(0,0,1,12) 모형이다. 이 모형은 계절주기가 12 이고 12주기 자료간에 ARIMA(0,0,1) 모형 관계가 있고 일반 자료간에 ARIMA(0,0,1)의 관계가 있다.

$$Y_t = (1-\theta L)(1-\Theta L^{12})\epsilon_t = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-12} + \theta\Theta\epsilon_{t-13}$$

이 모형의 자기상관계수 함수를 계산하면 시차가 1, 11, 12, 13 인 경우를 제외하고는 0이된다.

$$\rho_1 = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$$

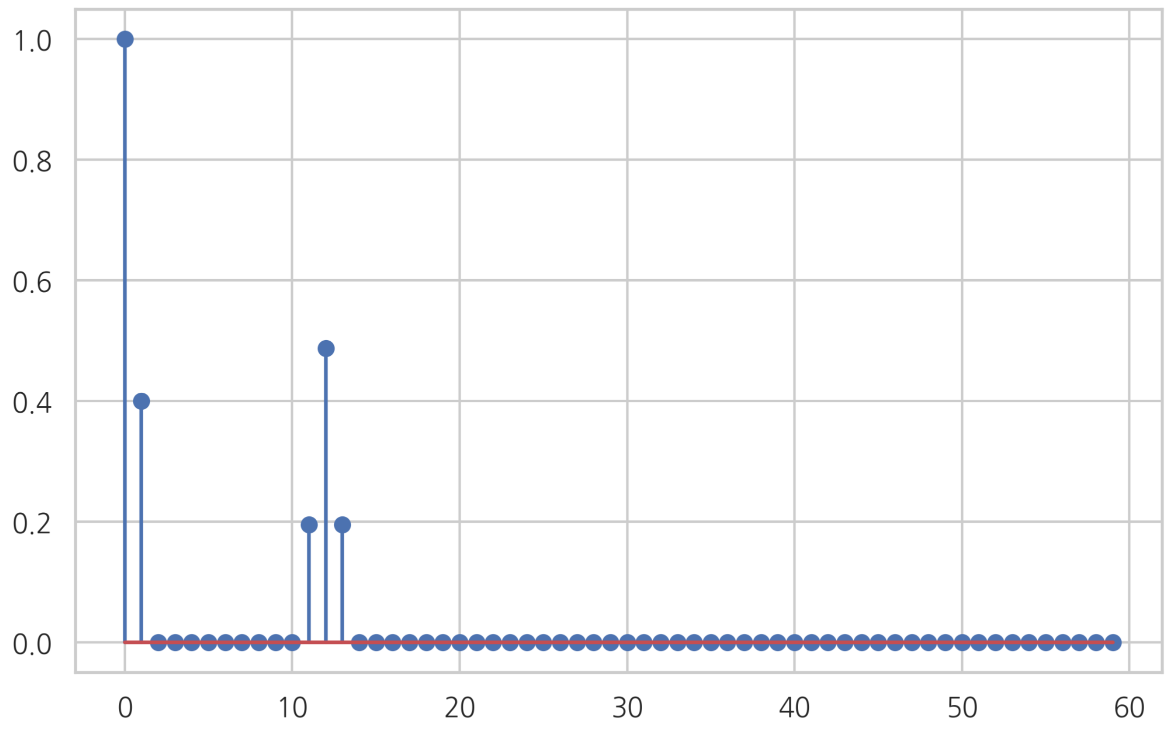
$$\rho_{11} = \rho_{13} = \frac{\theta\Theta}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)}$$

$$\rho_{12} = -\frac{\Theta}{1+\Theta^2}$$

몇가지 θ, Θ값에 대해 이 모형의 자기상관계수 함수를 구하면 다음과 같다.

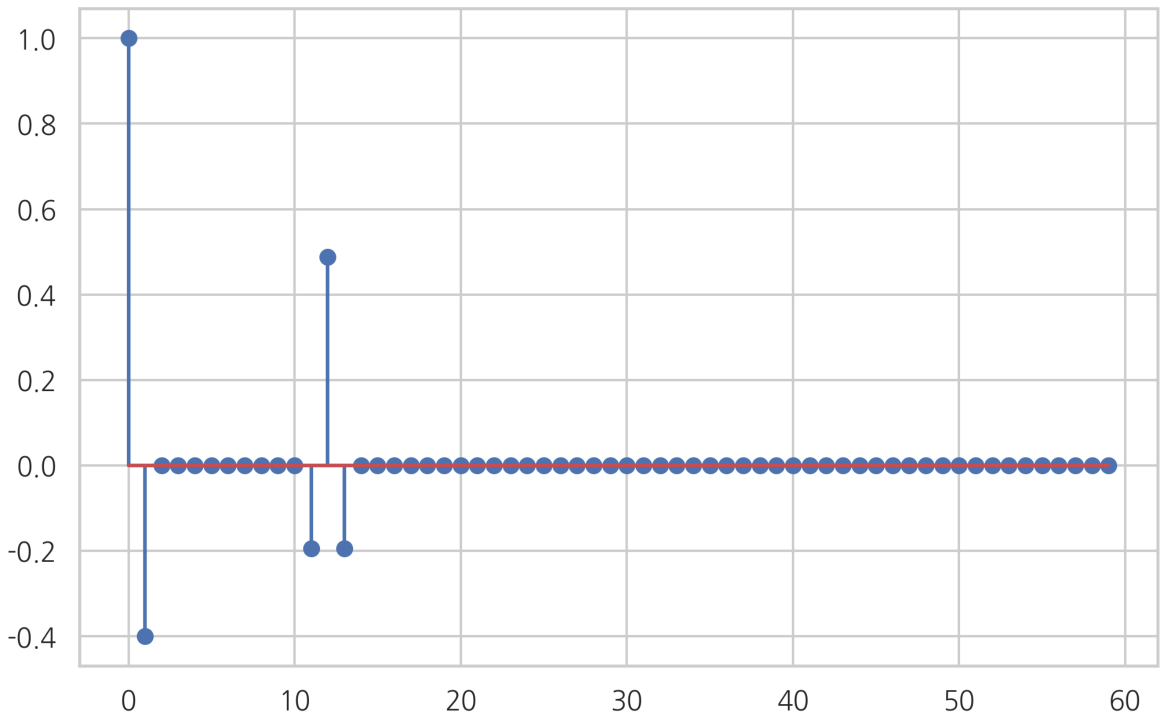
In [12]:

```
theta = 0.5
Theta = 0.8
p4 = sm.tsa.ArmaProcess([1], [1, theta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Theta, theta * Theta])
plt.stem(p4.acf(60))
plt.show()
```



In [13]:

```
theta = -0.5
Theta = 0.8
p5 = sm.tsa.ArmaProcess([1], [1, theta, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Theta, theta * Theta])
plt.stem(p5.acf(60))
plt.show()
```



예 2: Multiplicated SARIMA(0,0,1)x(1,0,0,12)

또 다른 예로 Multiplicated SARIMA(0,0,1)x(1,0,0,12) 모형을 살펴보자. 이 모형은 주기가 12 인 계절성 요소끼리는 ARMA(1,0) 모형이고 계별 요소끼리는 ARMA(0,1) 모형이다.

$$(1 + \Phi L^{12}) Y_t = \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

$$Y_t = -\Phi Y_{t-12} + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}$$

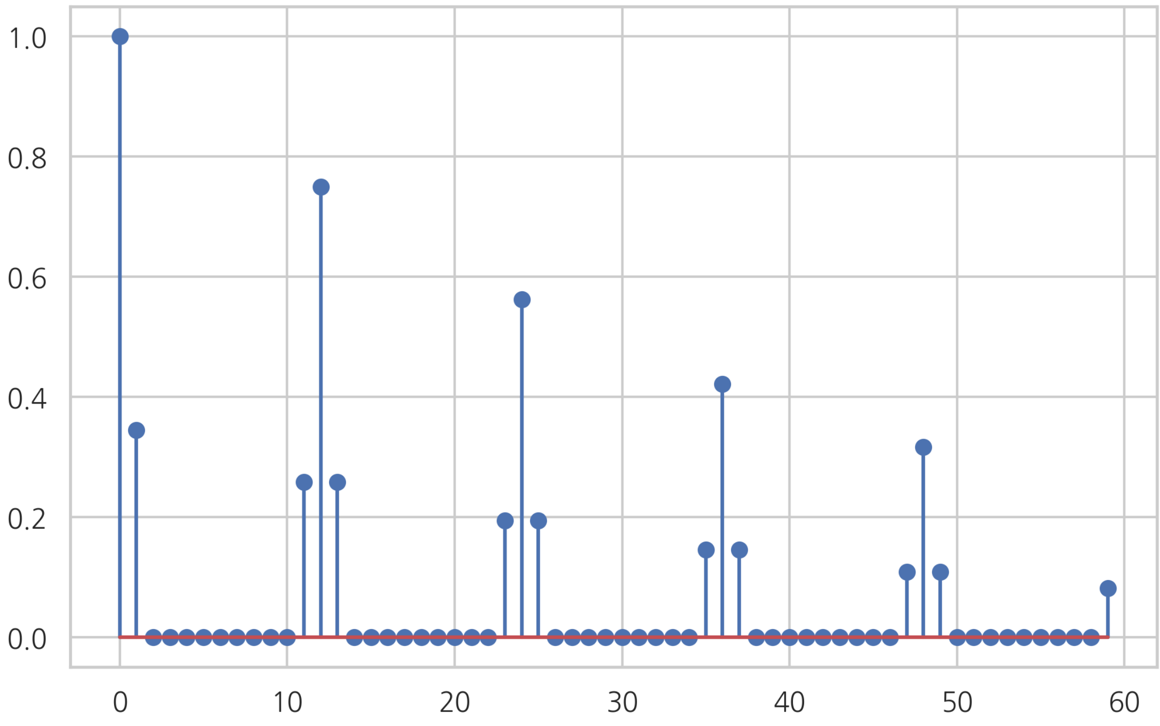
이 모형의 자기상관계수 함수를 계산하면 시차가 12의 배수와 그 앞, 뒤인 경우 즉, 시차가 $12k$, $12k+1$, $12k-1$ 형태로 표시되는 경우만 0이 아니고 나머지 값은 0이다.

$$\rho_{12k} = (-\Phi)^k$$

$$\rho_{12k-1} = \rho_{12k+1} = -\frac{\theta}{1+\theta^2}(-\Phi)^k$$

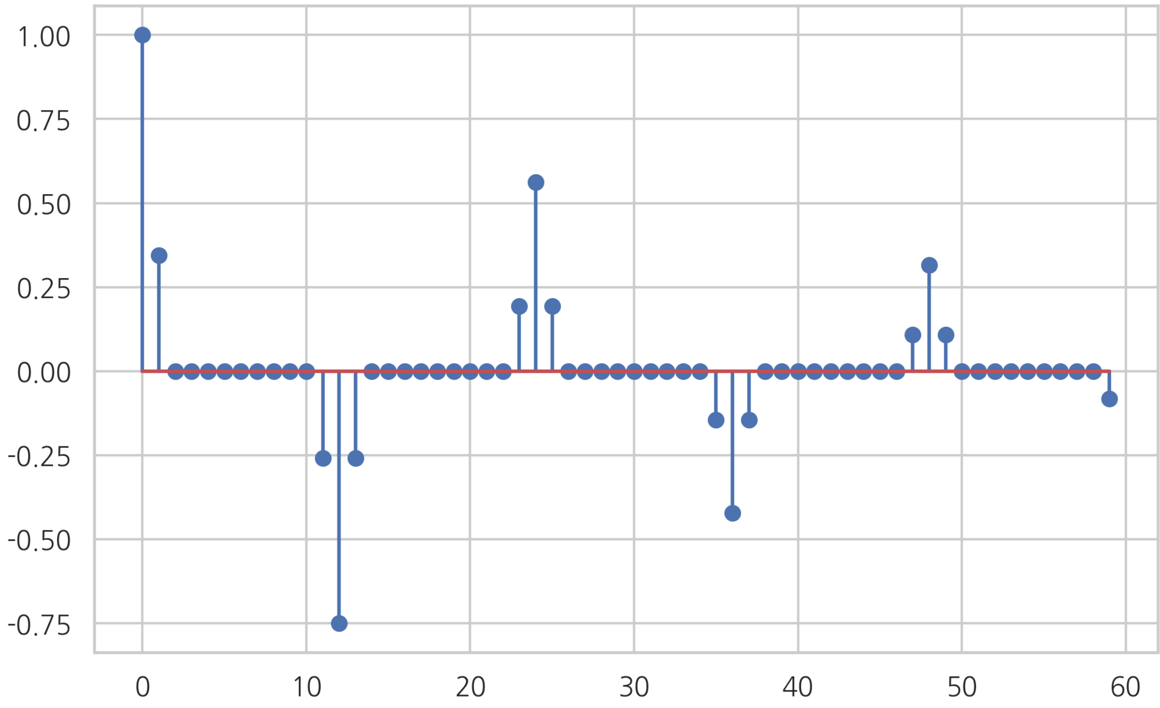
In [14]:

```
Phi = -0.75
Theta = 0.4
p6 = sm.tsa.ArmaProcess([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Phi], [1, Theta])
plt.stem(p6.acf(60))
plt.show()
```



In [15]:

```
Phi = 0.75
Theta = 0.4
p7 = sm.tsa.ArmaProcess([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, Phi], [1, Theta])
plt.stem(p7.acf(60))
plt.show()
```



예 3: Multiplicated SARIMA(0,1,0)x(0,1,0,12)

이번에는 적분 요소가 있는 Multiplicated Seasonal ARIMA 모형을 살펴보자. 계절성 주기가 12 이고 계절성 성분끼리 1차 적분, 일반 성분 끼리 1차 적분인 모형은 SARIMA(0,1,0)x(0,1,0,12) 모형이다.

$$\nabla_s \nabla Y_t = \epsilon_t$$

$$\nabla_s (Y_t - Y_{t-1}) = \epsilon_t$$

$$(Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-12} - Y_{t-13}) = \epsilon_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + \epsilon_t$$

이 모형은 시계열을 차분하여 만든 새로운 시계열을 다시 12 시간 간격으로 계절성 차분한 시계열이 백색 잡음이라는 의미이다.

예 4: Multiplicated SARIMA(0,1,1)x(0,1,1,12)

이번에는 계절성 주기가 12 이고 일반 성분과 계절성 성분이 모두 ARIMA(0,1,1)인 SARIMA(0,1,1)x(0,1,1,12) 모형이다.

$$\nabla_s \nabla Y_t = (1 + \Theta L^{12})(1 + \theta L)\epsilon_t$$

$$\nabla_s (Y_t - Y_{t-1}) = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-12} + \theta\Theta\epsilon_{t-13}$$

$$(Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-12} - Y_{t-13}) = \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-12} + \theta\Theta\epsilon_{t-13}$$

$$Y_t = Y_{t-1} + Y_{t-12} - Y_{t-13} + \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} + \Theta\epsilon_{t-12} + \theta\Theta\epsilon_{t-13}$$

이 모형은 시계열을 차분하여 만든 새로운 시계열을 다시 12 시간 간격으로 계절성 차분한 시계열이 위에서 보인 첫번째 예인 SARIMA(0,1,1)x(0,0,1,12) 모형이라는 의미이다.