7.2 기댓값과 확률변수의 변환

표본평균, 표본분산 등은 현실세계의 데이터 분포의 모양을 서술하는 특성값이다. 이제부터는 이론적인 확률분포함수의 모양을 서술하는 특성값을 살펴본다. 우선 기댓값부터 공부한다. 기댓값은 표본평균처럼 분포의 위치를 알려주는 특성값이지만 확률분포의 가중합이나 가중적분으로 정의한다.

확률변수의 기댓값

확률변수의 확률밀도함수를 알면 확률변수의 이론적 평균값을 구할 수 있다. 이러한 이론적 평균을 확률변수의 **기댓값(expectation)**이라고 한다. 단순히 평균(mean)이라고 말하기도 한다.

확률변수 X의 기댓값을 구하는 연산자(operator)는 영어 Expectation의 첫 글자를 사용하여 $\text{E}[X]$로 표기한다. 기댓값은 그리스 문자 μ_X로 표기한다. 확률변수를 혼동할 염려가 없으면 확률변수 이름은 생략하고 그냥 μ라고 써도 된다.

이산확률변수의 기댓값은 표본공간의 원소 x_i의 가중평균이다. 이때 가중치는 x_i가 나올 수 있는 확률 즉 확률질량함수 $p(x_i)$이다.

$$\mu_X = \text{E}[X] = \sum_{x_i \in \Omega} x_i p(x_i) \tag{7.2.1}$$

예제

공정한 주사위에서 나올 수 있는 숫자를 대표하는 확률변수 X는 나올 수 있는 값이 1, 2, 3, 4, 5, 6 이므로,

$$\begin{aligned} \mu_X &= 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 5 \cdot p(5) + 6 \cdot p(6) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned} \tag{7.2.2}$$

기댓값은 $\frac{7}{2}$이다.

예제

공정하지 않은 주사위, 예들 들어 짝수가 나올 확률이 홀수가 나올 확률의 2배인 주사위에서 기댓값을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mu_X &= 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 5 \cdot p(5) + 6 \cdot p(6) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{2}{9} \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

기댓값은 $\frac{11}{3}$이다.

연습 문제 7.2.1

공정한 동전이 있고 이 동전의 앞면이 나오면 1, 뒷면이 나오면 0인 확률변수 X가 있다. 이 확률변수의 기댓값 $\text{E}[X]$을 구하라.

참고로 데이터 공간에서 기댓값에 대응하는 값인 표본평균을 구하는 공식은 다음과 같았다.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \tag{7.2.4}$$

기댓값 공식과 표본평균 공식에서 x_i의 의미가 다르다는 점에 유의하라. 기댓값 공식에서 x_i는 표본공간의 모든 원소를 뜻하지만 표본평균 공식에서 x_i는 선택된(sampled, realized) 표본만을 뜻한다.

연습 문제 7.2.2

기댓값을 구하는 공식에서는 확률을 가중치로 곱한다. 그런데 왜 표본평균을 구하는 공식에서는 확률 가중치가 없는가?

연속확률변수의 기댓값은 확률밀도함수 $p(x)$를 가중치로 하여 모든 가능한 표본 x를 적분한 값이다.

$$\mu_X = \text{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx \tag{7.2.5}$$

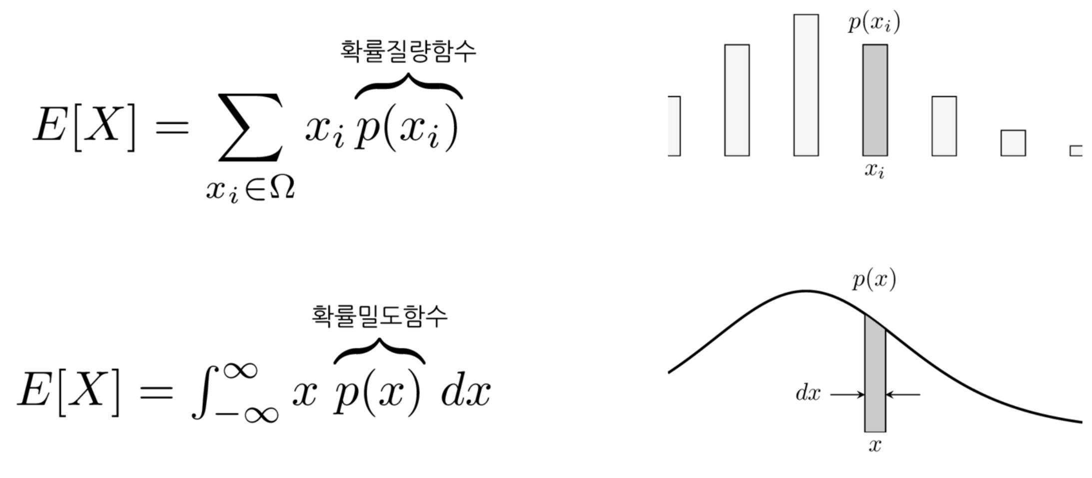


그림 7.2.1 : 기댓값 계산

기댓값은 여러 가능한 x값을 확률(또는 확률밀도)값에 따라 가중합을 한 것이므로 가장 확률(또는 확률밀도)이 높은 x값 근처의 값이 된다. 즉, **확률(또는 확률밀도)가 모여 있는 곳의 위치**를 나타낸다.

예제

회전하는 원반을 이용하여 복권 번호를 결정하는 문제에서 확률밀도함수 $p(x)$와 여기에서 x가 곱해진 함수 $xp(x)$의 모양은 다음과 같다. 기댓값은 이 함수 $xp(x)$를 적분하여 구한 삼각형처럼 생긴 함수의 면적이다.

$$E[X] = xp(x)\text{의 면적} = \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 1 = 180 \tag{7.2.6}$$

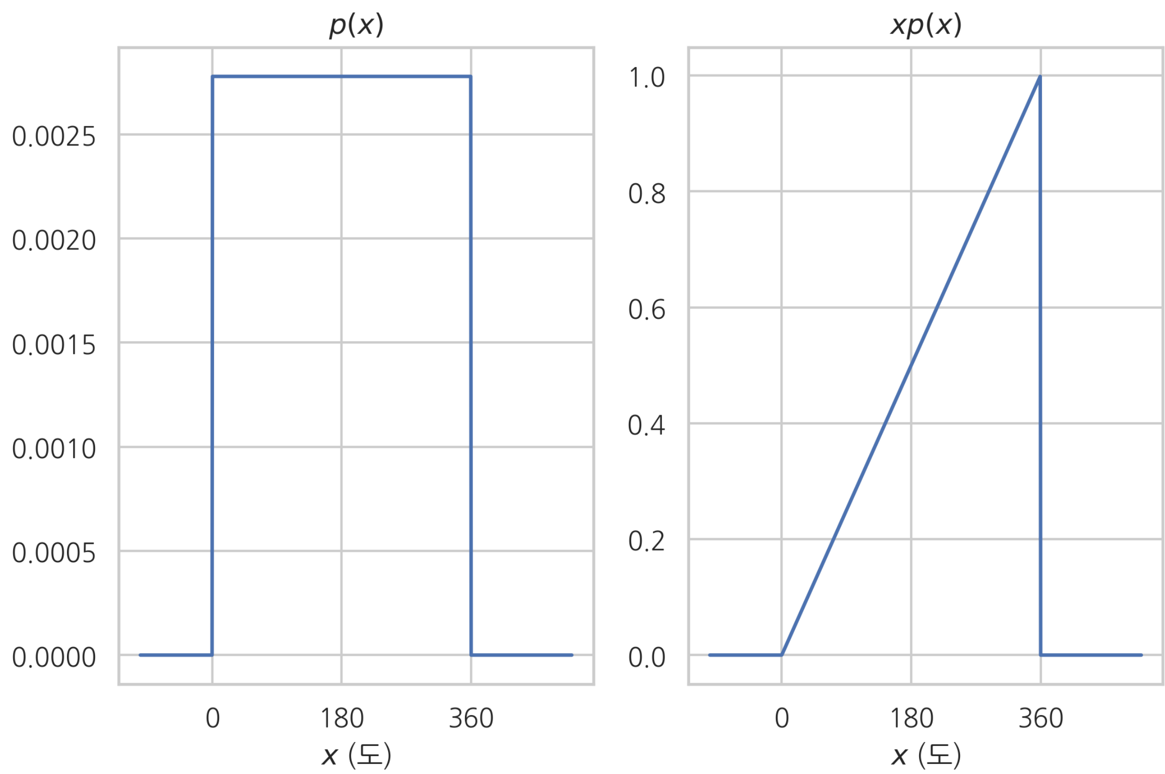
In [1]:

```
x = np.linspace(-100, 500, 1000)
p = np.zeros_like(x)
p[(0 < x) & (x <= 360)] = 1 / 360
xp = x * p

plt.subplot(121)
plt.plot(x, p)
plt.xticks([0, 180, 360])
plt.title("$p(x)$")
plt.xlabel("$x$ (도)")

plt.subplot(122)
plt.plot(x, xp)
plt.xticks([0, 180, 360])
plt.title("$xp(x)$")
plt.xlabel("$x$ (도)")

plt.show()
```



만약 0도에서 180도 사이에 화살이 2배 더 잘 박히도록 원반이 조작되었다면 확률밀도함수 $p(x)$와 여기에서 x가 곱해진 함수 $xp(x)$ 모양은 다음과 같다. 기댓값은 이 함수 $xp(x)$를 적분하여 구한 함수의 면적이다.

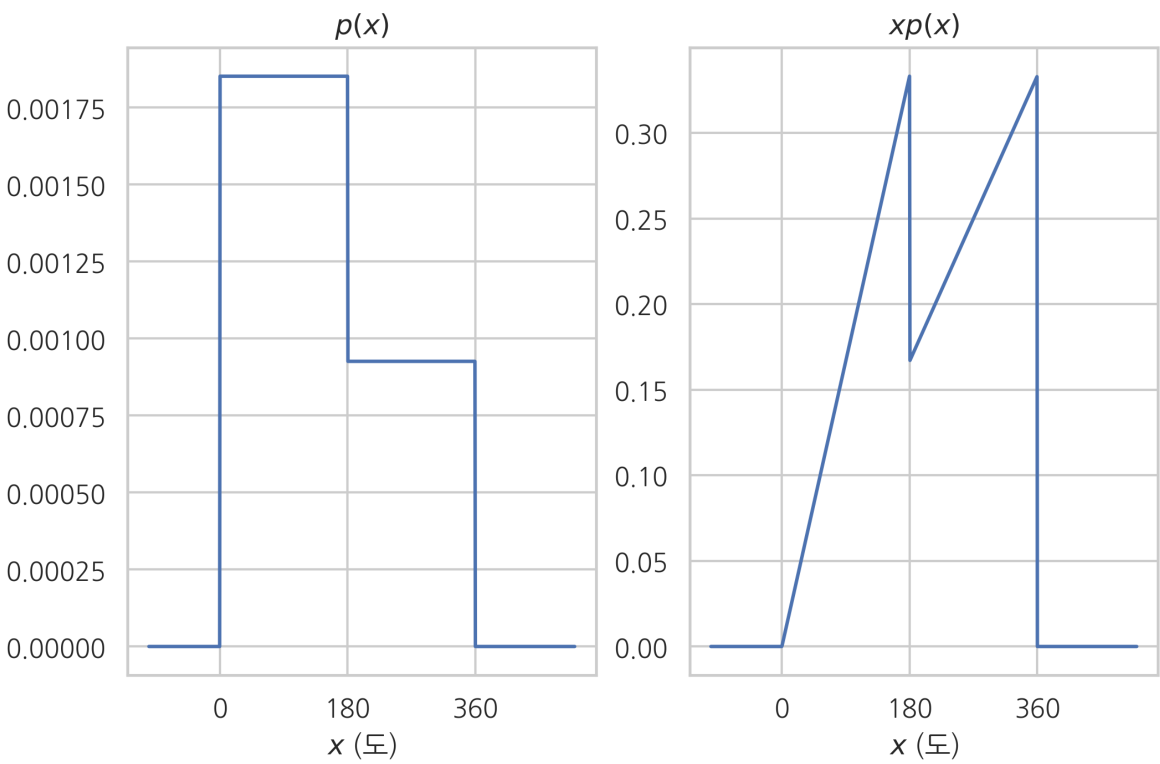
In [2]:

```
x = np.linspace(-100, 500, 1000)
p = np.zeros_like(x)
p[(0 < x) & (x <= 180)] = 2 / (3 * 360)
p[(180 < x) & (x <= 360)] = 1 / (3 * 360)
xp = x * p

plt.subplot(121)
plt.plot(x, p)
plt.xticks([0, 180, 360])
plt.title("$p(x)$")
plt.xlabel("$x$ (도)")

plt.subplot(122)
plt.plot(x, xp)
plt.xticks([0, 180, 360])
plt.title("$xp(x)$")
plt.xlabel("$x$ (도)")₩

plt.show()
```



연습 문제 7.2.3

확률변수 Y는 0도에서 180도 사이에 화살이 2배 더 잘 박히도록 조작된 원반을 이용하여 복권 번호를 결정하는 문제에서 나오는 각도다. 확률변수 Y의 기댓값 $\text{E}[Y]$를 구하라.

확률변수의 변환

우리가 얻은 데이터의 값을 어떤 함수 f에 넣어서 변화시킨다고 가정하자. 그러면 새로운 데이터 집합이 생긴다.

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \rightarrow \{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_N)\} \tag{7.2.7}$$

이 새로운 데이터를 $\{y_i\}$라고 부르자. $\{y_i\}$는 기존의 데이터와 다른 새로운 데이터이므로 다른 확률변수라고 볼 수 있다. 예를 들어 데이터 $\{x_i\}$를 만드는 확률변수가 X라면 데이터 $\{y_i\}$를 만드는 데이터는 Y라는 새로운 확률변수가 된다.

이렇게 **기존의 확률변수를 사용하여 새로운 확률변수를 만드는 것을 확률변수의 변환(transform)**이라고 한다. 함수 f를 사용해 확률변수를 변환할 때는 다음처럼 표기한다.

$$Y = f(X) \tag{7.2.8}$$

확률 변수의 변환은 여러 확률변수가 있을 때도 성립한다. 예를 들어 두 확률변수 X와 Y가 있다고 가정하였을 때, 새로운 확률변수 $Z = X + Y$는 확률변수 X에서 나온 값과 확률변수 Y에서 나온 값을 더한 값이 나오도록 하는 확률변수를 뜻한다.

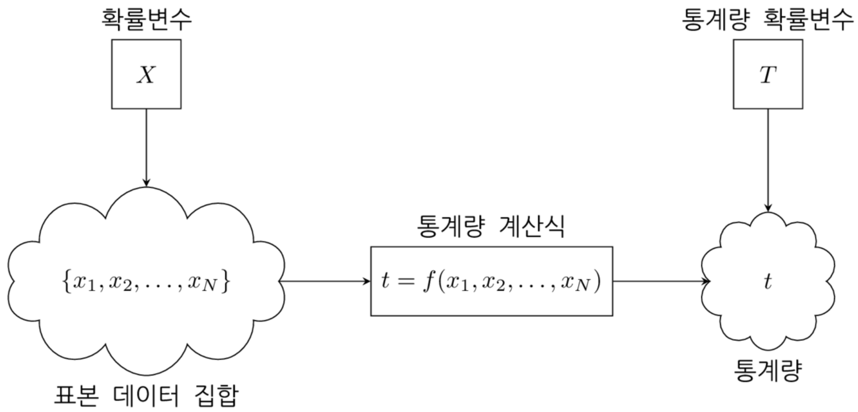


그림 7.2.2 : 확률변수의 변환

연습 문제 7.2.4

확률변수 X는 주사위를 던져 나오는 수를 나타내는 확률변수다. 그리고 Y는 주사위를 던져나오는 수에 2배를 한 수를 나타내는 확률변수다. X, Y의 확률질량함수의 그래프를 각각 그려라.

확률변수 X에서 표본을 N번 뽑아서 그 값을 더하는 경우에는 다음처럼 원래 확률변수의 복사본 $X_1, X_2, \ldots, X_N$을 만든 다음 이 복사본 확률변수의 표본값을 더한 형태로 변환식을 써야 한다.

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots X_N \tag{7.2.9}$$

이렇게 복사본을 만들어 첨자를 붙이는 이유는 X_1과 X_2가 같은 확률분포를 가지는 확률변수이지만 표본값이 다르기 때문이다. 만약 다음과 같이 쓰면,

$$Y = X + X + \cdots X \tag{7.2.10}$$

이 식은 다음처럼 전혀 다른 확률변수를 가리킨다.

$$Y = N \cdot X \tag{7.2.11}$$

연습 문제 7.2.5

확률변수 X_1과 X_2는 각각 주사위를 던져 나오는 수를 나타내는 확률변수다. 그리고 Y는 두 주사위를 동시에 던져 나오는 수의 합을 나타내는 확률변수다. 확률변수 X_1, X_2, Y의 확률질량함수의 그래프를 각각 그려라.

기댓값의 성질

기댓값은 다음과 같은 성질을 가진다는 것을 수학적으로 증명할 수 있다. 변환된 확률변수의 기댓값을 계산할 때는 기댓값의 성질을 이용한다.

- 확률변수가 아닌 상수 c에 대해

$$\text{E}[c] = c \tag{7.2.12}$$

- 선형성

$$\text{E}[cX] = c\text{E}[X] \tag{7.2.13}$$

$$\text{E}[X + Y] = \text{E}[X] + \text{E}[Y] \tag{7.2.14}$$

$$\text{E}[c_1 X + c_2 Y] = c_1\text{E}[X] + c_2\text{E}[Y] \tag{7.2.15}$$

통계량

확률변수 X로부터 데이터 집합 $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$을 얻었다고 하자. 이 **데이터 집합의 모든 값을 정해진 어떤 공식에 넣어서 하나의 숫자를 구한 것을 통계량(statistics)**이라고 한다. 예를 들어 표본의 합, 표본평균, 표본중앙값, 표본분산 등은 모두 통계량이다. 통계량도 확률변수의 변환에 포함된다.

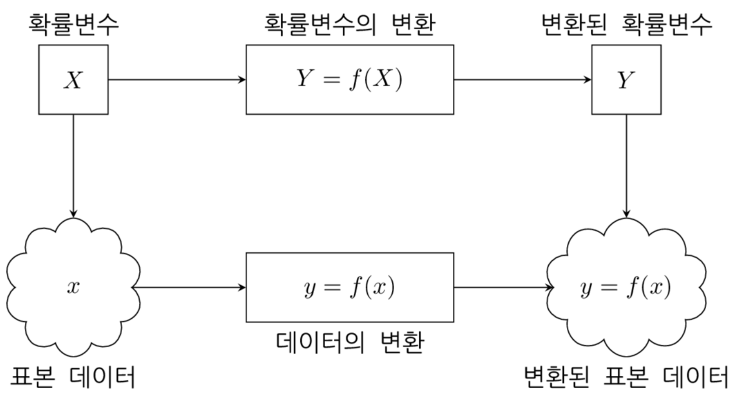


그림 7.2.3 : 통계량

표본평균 확률변수

확률변수로부터 N개의 표본을 만들어 이 표본집합의 표본평균을 구하면 이렇게 구한 표본평균 값도 확률변수가 된다. 표본평균 확률변수는 원래의 확률변수 이름에 윗줄(bar)을 추가하여 $\bar{X}$와 같이 표기한다. 예를 들어 확률변수 X에서 나온 표본으로 만들어진 표본평균 확률변수는 $\bar{X}$로 표기한다.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{7.2.16}$$

위 식에서 X_i는 i번째로 실현된 표본값을 생성하는 확률변수를 의미한다. 이 확률변수 X_i는 원래의 확률변수 X의 복사본이다.

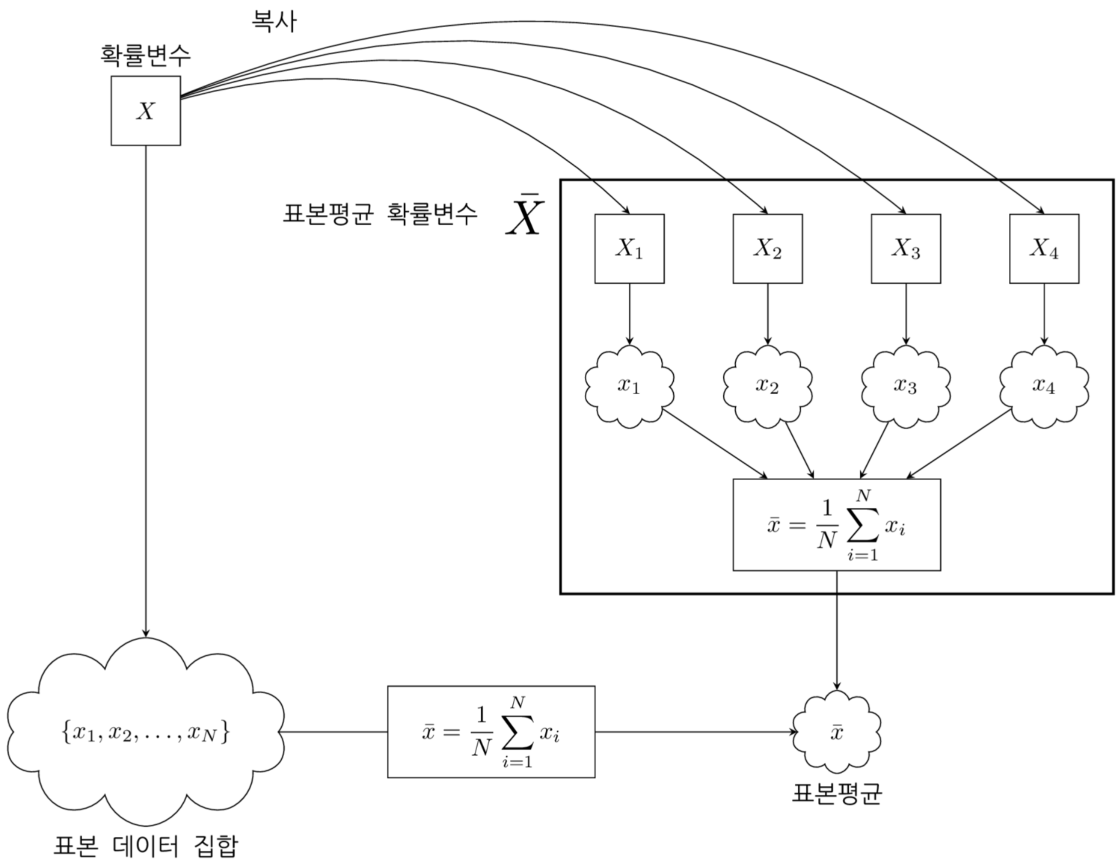


그림 7.2.4 : 표본평균 확률변수

연습 문제 7.2.6

표본평균 $\bar{x}$의 값은 확률적인 데이터이고 이를 생성하는 확률변수 $\bar{X}$는 위와 같이 정의할 수 있었다. 그렇다면 (편향)표본분산 s^2의 값은 확률적인 데이터인가? 만약 그렇다면 이를 생성하는 확률변수 S^2은 어떻게 정의해야 하는가?

기댓값과 표본평균의 관계

표본평균도 확률변수이므로 기댓값이 존재한다. 표본평균의 기댓값은 원래의 확률변수의 기댓값과 같다는 것을 다음처럼 증명할 수 있다.

$$\text{E}[\bar{X}] = \text{E}[X] \tag{7.2.17}$$

(증명)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\bar{X}] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}[X] \\
&= \frac{1}{N} N \mathrm{E}[X] \\
&= \mathrm{E}[X]
\end{aligned}
\tag{7.2.18}
$$

이 식이 뜻하는 바는 다음과 같다.

> 표본평균은 확률변수의 기댓값 근처의 값이 된다.

예를 들어 공정한 주사위의 기댓값은 3.5이다. 이 주사위를 던져 나온 값의 평균 즉 표본평균은 3.62346 또는 3.40987처럼 항상 3.5 근처의 값이 나오게 된다.

중앙값

확률변수의 중앙값(median)은 중앙값보다 큰 값이 나올 확률과 작은 값이 나올 확률이 0.5로 같은 값을 뜻한다. 따라서 다음과 같이 누적확률분포 $F(x)$에서 중앙값을 계산할 수 있다.

$$0.5 = F(\text{중앙값}) \tag{7.2.19}$$

$$\text{중앙값} = F^{-1}(0.5) \tag{7.2.20}$$

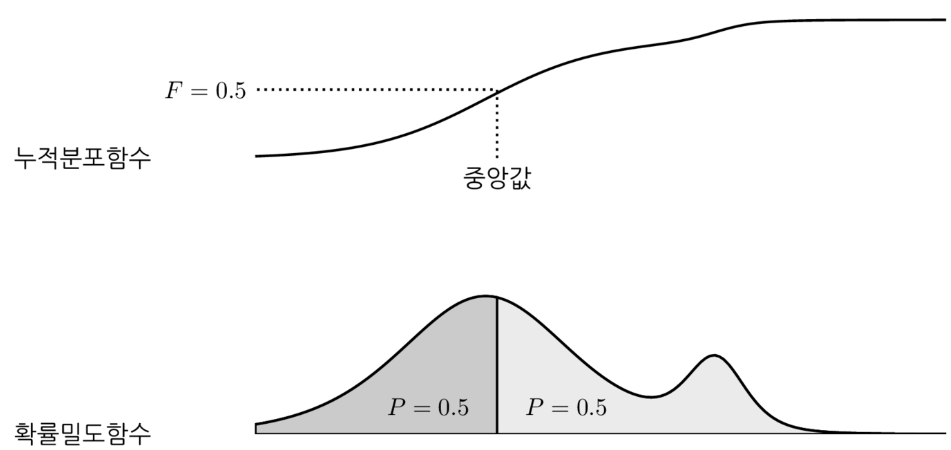


그림 7.2.5 : 중앙값

최빈값

이산확률분포에서는 가장 확률 값이 큰 수를 최빈값(most frequent value)이라고 한다. 하지만 연속확률분포인

경우에는 어느 값에 대해서나 특정한 값이 나올 확률은 0(zero)이므로 **연속확률분포의 최빈값(mode)은 확률밀도함수 $p(x)$의 값이 가장 큰 확률변수의 값**으로 정의한다. 즉 확률밀도함수의 최댓값의 위치다.

$$\text{최빈값} = \arg\max_{x} p(x) \tag{7.2.21}$$