4.3 적분

적분(integral)은 미분과 반대되는 개념이다. 적분에는 부정적분(indefinite integral)과 정적분(definite integral)이 있다.

부정적분

부정적분(indefinite integral)은 정확하게 미분과 반대되는 개념, 즉 반-미분(anti-derivative)이다. 함수 $f(x)$가 어떤 함수를 미분하여 나온 결과인 도함수라고 가정하고 이 도함수 $f(x)$에 대한 미분되기 전의 원래의 함수를 찾는 과정(integration), 또는 그 결과(integral)를 말한다.

부정적분으로 찾은 원래의 함수를 표기할 때는 도함수를 대문자화(capitalization)하여 표기할 때도 있지만 다음처럼 $\int$ 기호(integral이라고 읽는다.)로 나타내는 것이 일반적이다. 여기에서 도함수가 $f(x)$이므로 미분하기 전의 함수를 $F(x)$ 또는 $\int f(x)dx$로 쓴다. dx는 x라는 변수로 적분했다는 것을 나타내는 기호로 편미분에 대응하는 적분을 표기할 때 필요하다.

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad \leftrightarrow \quad F(x) = \int f(x)dx + C \tag{4.3.1}$$

C는 상수항을 뜻한다. 상수항은 미분하면 0이 되므로 부정적분은 무한 개의 해가 있다. C는 너무 당연하므로 생략하고 쓰는 경우도 있다.

연습 문제 4.3.1

다음 부정적분을 구하라.

(1)

$$\int 3x^2 dx \tag{4.3.2}$$

(2)

$$\int (3x^2 - 6x + 1)dx \tag{4.3.3}$$

(3)

$$\int \left(2 + 6x + 4\exp(x) + \frac{5}{x} \right) dx \tag{4.3.4}$$

(4)

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} dx \tag{4.3.5}$$

편미분의 부정적분

편미분을 한 도함수에서 원래의 함수를 찾을 수도 있다. $f(x,y)$가 원래의 함수를 어떻게 미분했는지에 따라 원래의 함수를 표기하는 방법이 달라진다.

만약 $f(x,y)$가 함수 $F_1(x,y)$를 x로 편미분한 함수였다면 이 함수를 나타내는 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} = f(x,y) \;\leftrightarrow\; F_1(x,y) = \int f(x,y)dx + C(y) \tag{4.3.6}$$

주의할 점은 상수항 $C(y)$가 y의 함수일 수 있다는 점이다. $C(y)$는 x없이 y만으로 이루어진 함수를 뜻한다. y만의 함수는 x로 편미분하면 0이 되기 때문이다. 물론 반드시 y의 함수이어야 하는 것은 아니고 단순한 숫자 상수일 수도 있다.

마찬가지로 만약 $f(x,y)$가 함수 $F_2(x,y)$를 y로 편미분한 함수였다면 이 함수를 나타내는 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} = f(x,y) \;\leftrightarrow\; F_2(x,y) = \int f(x,y)dy + C(x) \tag{4.3.7}$$

상수항 $C(x)$가 x의 함수라는 점에 주의하라.

연습 문제 4.3.2

다음 부정적분을 구하라.

(1)

$$\int (1 + xy)\, dx \tag{4.3.8}$$

(2)

$$\int xy \exp(x^2 + y^2) dx \tag{4.3.9}$$

다차 도함수와 다중적분

미분을 여러번 한 결과로 나온 다차 도함수로부터 원래의 함수를 찾아내려면 여러번 적분을 하는 다중적분 (multiple integration)이 필요하다.

예를 들어 $f(x,y)$가 함수 $F_3(x,y)$를 x로 한번 편미분한 후 y로 다시 편미분하여 나온 이차 도함수라고 하자.

이 이차 도함수에서 원래의 함수를 찾으려면 y로 적분한 후 다시 x로 적분해야 한다. 식으로는 다음처럼 나타낸다.

$$\frac{\partial^2 F_3(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) \;\leftrightarrow\; F_3(x,y) = \int_x \int_y f(x,y) dy dx \tag{4.3.10}$$

적분기호 아래의 변수명을 생략하고 다음처럼 표기할 수도 있다.

$$\iint f(x,y) dy dx \tag{4.3.11}$$

연습 문제 4.3.3

다음 부정적분을 구하라.

$$\iint xy \exp(x^2+y^2) dx dy \tag{4.3.12}$$

심파이를 이용한 부정적분

심파이의 `integrate()` 명령을 사용하면 부정적분을 할 수 있다. 상수항은 반환하지 않는다.

In [1]:

```
import sympy

sympy.init_printing(use_latex='mathjax')

x = sympy.symbols('x')
f = x * sympy.exp(x) + sympy.exp(x)
f
```

Out[1]:

$$xe^x + e^x$$

In [2]:

```
sympy.integrate(f)
```

Out[2]:

$$xe^x$$

In [3]:

```
x, y = sympy.symbols('x y')
f = 2 * x + y
f
```

Out[3]:

$$2x + y$$

In [4]:

```
sympy.integrate(f, x)
```

Out[4]:

$$x^2 + xy$$

연습 문제 4.3.4

연습 문제 4.3.1, 4.3.2의 답을 SymPy를 사용하여 구하라.

정적분

정적분(definite integral)은 독립변수 x가 어떤 구간 $[a, b]$ 사이일 때 그 구간에서 함수 $f(x)$의 값과 수평선(x축)이 이루는 면적을 구하는 행위(integration) 혹은 그 값(integral)을 말한다. 수학 기호로는 다음과 같이 표기한다.

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.3.13}$$

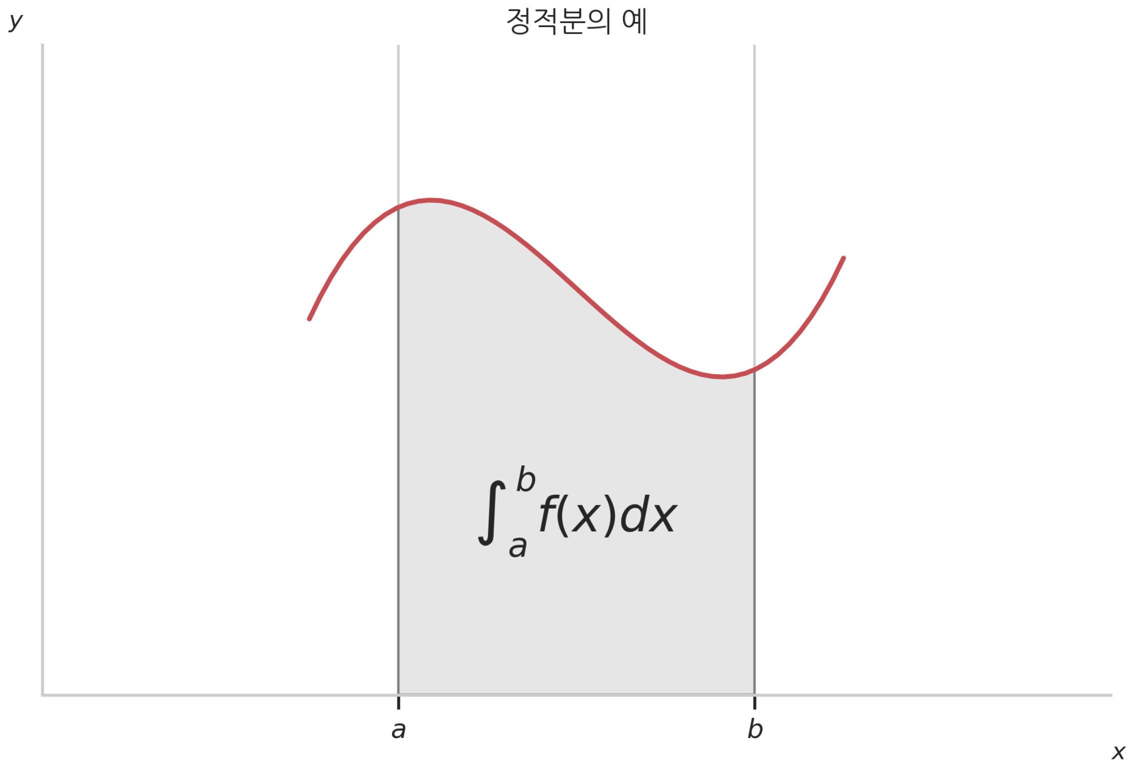
In [5]:

```
from matplotlib.patches import Polygon


def f(x):
    return x ** 3 - 3 * x ** 2 + x + 6


a, b = 0, 2
x = np.linspace(a - 0.5, b + 0.5, 50)
y = f(x)

ax = plt.subplot(111)
plt.title("정적분의 예")
plt.plot(x, y, 'r', linewidth=2)
plt.ylim(bottom=0)
ix = np.linspace(a, b)
iy = f(ix)
verts = [(a, 0)] + list(zip(ix, iy)) + [(b, 0)]
poly = Polygon(verts, facecolor='0.9', edgecolor='0.5')
ax.add_patch(poly)
plt.text(0.5 * (a + b), 0.2 * (f(a) + f(b)), r"$\int_a^b f(x)dx$",
         horizontalalignment='center', fontsize=20)
plt.figtext(0.9, 0.05, '$x$')
plt.figtext(0.1, 0.9, '$y$')
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.set_xticks((a, b))
ax.set_xticklabels(('$a$', '$b$'))
ax.set_yticks([])
ax.set_xlim(-2, 4)
ax.set_ylim(0, 8)
plt.show()
```



정적분은 미분과 아무런 상관이 없어 보이지만 부정적분으로 구한 함수 $F(x)$를 이용하면 다음처럼 정적분의 값을 구할 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.3.14}$$

이를 **미적분학의 기본 정리(Fundamental Theorem of Calculus)**라고 부른다.

정적분은 심파이 등으로 부정적분을 한 뒤 미적분학의 기본 정리를 사용하여 푸는 방법과 원래 함수의 면적 부분을 실제로 잘게 쪼개어 면적을 근사하게 구하는 **수치적분(numerical integration)** 이렇게 두가지 방법으로 구할 수 있다.

예제

다음 정적분을 구하는 문제를 생각하자.

$$\int_0^2 (x^3 - 3x^2 + x + 6)dx \tag{4.3.15}$$

In [6]:

```
x, y = sympy.symbols('x y')
f = x ** 3 - 3 * x ** 2 + x + 6
f
```

Out[6]:

$$x^3 - 3x^2 + x + 6$$

우선 부정 적분 방법으로 미분하기 전의 함수를 구한다.

In [7]:

```
# 부정 적분
F = sympy.integrate(f)
F
```

Out[7]:

$$\frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} + 6x$$

구해진 미분하기 전의 함수에 정적분 구간을 넣어 값을 계산한다. 심볼릭 함수의 변수에 실제 숫자를 넣어서 함수의 값을 계산하려면 `subs()` , `evalf()` 메서드를 사용한다.

In [8]:

```
(F.subs(x, 2) - F.subs(x, 0)).evalf()
```

Out[8]:

$$10.0$$

수치적분

수치적분(numerical integration)은 함수를 아주 작은 구간으로 나누어 실제 면적을 계산함으로써 정적분의 값을 구하는 방법이다. Scipy의 integrate 서브패키지의 `quad` 명령으로 수치적분을 할 수 있다.

In [9]:

```
def f(x):
    return x ** 3 - 3 * x ** 2 + x + 6


sp.integrate.quad(f, 0, 2)  # 정적분 (수치적분)
```

Out[9]:

$$(10.0,\ 1.1102230246251565e - 13)$$

수치적분 결과값의 두번째 숫자는 오차의 상한값을 뜻한다. 수치적분으로 구한 값과 정적분으로 구한 값이 같다는 것을 알 수 있다.

연습 문제 4.3.5

다음 정적분의 값을 부정적분과 수치적분 두 가지 방법으로 구하라.

(1)

$$\int_0^1 (3x^2 - 6x + 1)dx \tag{4.3.16}$$

(2)

$$\int_1^{10} \left(2 + 6x + 4\exp(x) + \frac{5}{x}\right) dx \tag{4.3.17}$$

다변수 정적분

입력 변수가 2개인 2차원 함수 $f(x, y)$의 경우에는 정적분을 다양한 방법으로 정의할 수 있다.

두 변수로 모두 적분하는 것은 2차원 평면에서 주어진 사각형 영역 아래의 부피를 구하는 것과 같다.

$$\int_{y=c}^{y=d} \int_{x=a}^{x=b} f(x, y)dxdy \tag{4.3.18}$$

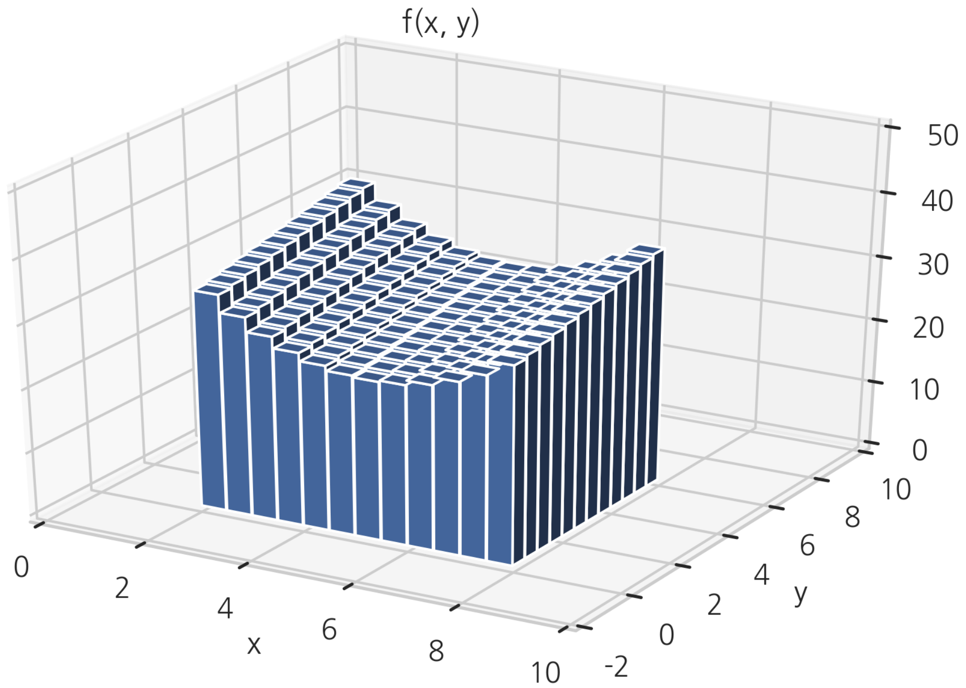
예제

다음 함수는 $x = 2$에서 $x = 8$까지, 그리고 $y = 0$에서 $y = 6$까지의 정사각형 영역에서 정적분으로 함수의 부피를 구하는 모습을 시각화한 것이다.

$$\int_{y=0}^{y=6} \int_{x=2}^{x=8} x^2 - 10x + y + 50 \;\; dxdy \tag{4.3.19}$$

In [10]:

```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
_x = np.arange(12) / 2 + 2
_y = np.arange(12) / 2
X, Y = np.meshgrid(_x, _y)
x, y = X.ravel(), Y.ravel()
z = x * x - 10 * x + y + 50
z0 = np.zeros_like(z)
ax.bar3d(x, y, z0, 0.48, 0.48, z)
ax.set_xlim(0, 10)
ax.set_ylim(-2, 10)
ax.set_zlim(0, 50)
ax.set_xlabel("x")
ax.set_ylabel("y")
plt.title("f(x, y)")
plt.show()
```



수치이중적분을 하려면 사이파이의 integrate 서브패키지의 `dblquad()` 명령을 사용한다. 함수 사용법은 다음과 같다.

    dblquad(func, a, b, gfun, hfun)

`a`, `b` 은 x의 하한(lower bound)과 상한(upper bound)이고 `gfun`, `hfun` 은 y의 하한과 상한이다. `gfun`, `hfun` 은 x의 함수이어야 한다.

예제

정적분

$$\int_0^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{\exp(-xy)}{x^2} dxdy \tag{4.3.20}$$

을 수치적분으로 계산하려면 다음과 같은 코드를 사용한다.

In [11]:

```
def f(y, x):
    return np.exp(-x * y) / x**2


sp.integrate.dblquad(f, 1, np.inf, lambda x: 0, lambda x: np.inf)
```

Out[11]:

$$(0.4999999999999961,\ 1.0684538743333441e-08)$$

연습 문제 4.3.6

다음 정적분의 값을 수치적분으로 구하라.

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (1+xy)\, dxdy \tag{4.3.21}$$

다차원 함수의 단일 정적분

2차원 함수이지만 이중적분을 하지 않고 단일 정적분을 하는 경우도 있다. 이 때는 하나의 변수만 진짜 변수로 보고 나머지 하나는 상수라고 간주하는 경우이다.

$$\int_a^b f(x,y)dx \tag{4.3.22}$$

예제

다음과 같은 함수를 생각하자.

$$f(x,y) = 4x^2 + 4xy + y^2 \tag{4.3.23}$$

여기에서 변수 x 만 진짜 입력 변수로 보고 y는 단순히 정해지지 않은 상수로 보면 이 함수는 다음과 같은 1차원 함수이다.

$$f(x;y) = 4x^2 + (4y)x + (y^2) \tag{4.3.24}$$

y의 앞에 쉼표(, comma)가 아니라 세미콜론(; semicolon)을 써서 y가 변수가 아니라는 점을 강조하였다.