Samenvatting Probleem Oplossend Denken II

TIN 2 - HoGent

Lorenz Verschingel

16 april 2015

Kansrekening

1 Gebeurtenissen en hun kansen

1.1 Inleiding

De kansrekening houdt zich bezig met de studie van gebeurtenissen of toevalsveranderlijken.

1.2 Universum of uitkomstenruimte

Het universum of de utkomstenruimte van een experiment is de verzameling van alle mogelijke uitkomsten van dit experiment en wordt genoteerd met Ω.

Het is van belang dat de uitkomstenruimte volledig is: elke mogelijke uitkomst van een experiment moet tot Ω behoren. Bovendien moet elke uitkomst van een experiment overeenkomen met juist één element van Ω.

1.3 Gebeurtenis

Een gebeurtenis is een deelverzameling van de uitkomstenruimte. Een enkelvoudige of elementaire gebeurtenis is een *singleton*.

Een *samengestelde* gebeurtenis heeft cardinaliteit groter dan 1.

Gebeurtenissen die geen gemeenschappelijke uitkomsten hebben noemt men *disjunct*. Disjuncte gebeurtenissen kunnen dus nooit samen voorkomen.

1.4 Kansen en kansruimte

We wensen nu aan elke gebeurtenis A een getal te koppelen dat uitdrukt hoe waarschijnlijk het is dat deze gebeurtenis voorkomt bij het uitvoeren van een experiment. We noemen dit getal de *kans* of *waarschijnlijkheid* van A, en we noteren deze kans als $P(A)$.

Het toekennen van kansen aan gebeurtenissen dient aan de volgende drie regels te voldoen:

1. Kansen zijn steeds positief: voor elke gebeurtenis A geldt dat $P(A) \geq 0$.
2. De uitkomstenruimte heeft kans 1: $P(\Omega) = 1$.
3. Wanneer A en B disjuncte gebeurtenissen zij dan is: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

   Dit noemt men de **somregel**.

Wanneer de functie P aan de bovenstaande eigenschappen voldoet dan noemt ment het drietal $(\Omega, P(\Omega), P)$ een *kansruimte*.

Kansen voldoen aan de volgende eigenschappen:

1. Voor elke gebeurtenis A geldt dat $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

   $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$
2. De onmogelijke gebeurtenis heeft een kans nul: $P(\emptyset) = 0$

   $P(\emptyset) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 0$
3. Als $A \subseteq B$ dan is $P(A) \leq P(B)$, dan geldt= $P(A) = P(B) - P(B \setminus A)$.
4. De **uitgebreide somregel** is: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A))$
   $= P(A) + P(B \setminus A)$
   $= P(A) + P(B \setminus (A \cap B))$
   $= P(A) + -P(B) - P(A \cap B)$

1.4.1 Eindig universum

Formule van Laplace: $P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$
De formule van Laplace is enkel van toepassing als alle kansen even waarschijnlijk zijn.

1.5 Voorwaardelijke kansen en (on)afhankelijkheid van gebeurtenissen

Als $P(B) > 0$, dab is de **voorwaardelijke kans** dat A voorkomt als gegeven is dat B voorkomt gedefinieerd is als: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A|B)$ spreken we uit als "De kans op A gegeven B".

Twee gebeurtenissen A en B zijn **onafhankelijk** als: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Bewijs: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

1.5.1 De regel van Bayes

$P(B_j|A) = \frac{P(B_j)P(P(A|B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$

Dit resultaat is belangrijk voor het opstellen van zogenaamde boomdiagrammen of beslissingsbomen in het kader van opeenvolgende beslissingen.

2 Kans- of toevalsvariabelen

2.1 Inleiding

Een *kansvariabele* X is een afbeelding van Ω naar R. Deze afbeelding associeert met elke mogelijke uitkomst van een kansexperiment dus een reëel getal.

2.2 Discrete kansvariabelen

Een kansvariabele X is *discreet* wanneer X slechts een eindig of aftelbaar oneindig aantal waarden aanneemt. Dit wil zeggen dat: $bld(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$.

$P(X = x_i) = P(\{\omega \cap \Omega | X(\omega) = x_i\}) = f_X(x_i)$

2.3 Continue kansvariabelen

Een toevalsveranderlijke X is *continu* als er een functie f_X van R naar R^+ bestaat zodanig dat: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$

De functie f_X wordt de *kansdichtheid* genoemd.

2.4 Verwachtingswaarde en variantie

2.4.1 Discrete kansvariabele

$E[x] = \sum_i^n x_i P(X = x_i)$

$E[x] = \mu =$ expected value $=$ verwachtingswaarde $=$ gemiddelde

$Var[x] = \sum_i^n (x_i - E[x])^2 P(X = x_i)$

$Var[x] = \sigma^2 =$ variantie $=$ gemiddelde kwadratische afwijking

$\sigma =$ standaardafwijking

2.4.2 Continue kansvariabele

$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

$Var[x] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \sigma_x)^2 f_X(x) dx$

2.4.3 Eigenschappen van verwachtingswaarde en variantie

1. Als X constant is, i.e. $X(\omega) = k$ voor alle elementen ω van Ω, dan is $E(X) = k$.
2. Als $a \in R$ een constante is, dan geldt: $E(X + a) = E(X) + a$

   waaruit volgt dat: $E(X - \mu_X) = 0$
3. Als $a \in R$ een constante is, dan geldt: $E(aX) = aE(X)$
4. Er geldt steeds dat: $\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2$

   Deze formule geeft de mogelijkheid om de variantie efficiënter te berekenen dan rechtstreeks via de definitie.
5. $\sigma_{X+a}^2 = \sigma_X^2$
6. $\sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2$

3 Kansverdelingen

3.1 Discrete kansverdelingen

3.1.1 De Bernoulliverdeling

x kan maar twee waarden aannemen.

x	0	1
$f_X(x)$	1-p	p

$\mu_X = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

$\sigma_X^2 = E[x^2] - E[x]^2 = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1 - p) = pq$

Het Bernouilliverdeling kan het best beschreven worden met het volgende voorbeeld: één maal een muntstuk opgooien en kijken of je munt hebt.

3.1.2 De binomiale verdeling

$X \approx B(n, p)$

De binimiale verdeling kan het best beschreven worden met het volgende voorbeeld: tien maal met een munt gooien en kijken hoeveel keer je munt hebt.

$f_X(k) = P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

met $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\mu_X = np$

$\sigma_X^2 = np(1 - p)$

3.1.3 De geometrische verdeling

De geometrische verdeling kan het best beschreven worden met het volgende voorbeeld: blijven gooien met een muntstuk tot je munt hebt.

$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$

$\mu_X = \frac{1}{1-q}$

$\sigma_X^2 = \frac{q}{p^2}$

De markov-eigenschap

$$\begin{aligned} P(X > m + n | X > m) &= \tfrac{P((X>m+n)\cap(X>n))}{P(X>n)} \\ &= \tfrac{P(X>m+n)}{P(X>m)} \\ &= \tfrac{q^{m+n}}{q^m} \\ &= q^n \\ &= P(X > n) \end{aligned} \quad (1)$$

3.1.4 De Poisson verdeling

De Poisson verdeling kan gezien worden als een binomiale verdeling met n zeer groot en p ≈ 0.

$\Rightarrow np = \lambda$

$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

$\mu_X = np = \lambda$

$\sigma_X^2 = (np(1 - p)) = \lambda \times 1 = \lambda$

Het Poisson-proces

$P(\text{k voorkomens in [0,t]}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

3.2 Continue kansverdelingen

3.2.1 Uniforme kansverdeling

$\mu_X = \frac{a+b}{2}$

$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

3.2.2 De exponentiële verdeling

X $\rightarrow$ Poisson-proces met parameter λ.

T = tijd tot eerste voorkomen.

$P(T > t) = P(0 \text{ voorkomens in}[0,t]) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ als t ≥ 0

$\mu_T = \frac{1}{\lambda}$

$\sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

De exponentiële verdeling voldoet aan de Markov-eigenschap: ze bezit geen geheugen.