西安电子科技大学 XIDIAN UNIVERSITY | 程序设计竞赛实训基地 Programming Contest Training Base

数论基础

ACM 中的数学小知识

陈德创
Codeforces: dcac

July 12, 2021

简介

主要讲什么？

- ACM 中的基础数学小知识

简介

主要讲什么？

- ACM 中的基础数学小知识

有啥用？

- 单独的题目考察
- 一些题目解答的必备前提
- 玩

符号约定

1. $x|y$：x 整除 y，即 x 是 y 的余数
2. $x \mod y$：x 除以 y 的得到的余数
3. $x \equiv y \pmod{M}$：x 同余 y（在模 M 的意义下）
4. $\gcd(x,y)$：x 和 y 的最大公约数，简写作 (x,y)
5. $\mathrm{lcm}(x,y)$：x 和 y 的最小公倍数，简写作 $[x,y]$
6. $\lfloor x \rfloor$：下取整
7. $\lceil x \rceil$：上取整
8. $\sum$：求和，如 $\sum_{i=1}^{n} f(i)$，$\sum_{1 \le i \le n, i \in P} f(i)$

整除基本性质

整除的定义：若整数 a 除以非零整数 b，商为整数且余数为零，即 a 能被 b 整除，记做 b|a，读作：b 整除 a 或 a 能被 b 整除。a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数，或称为因数。

整除基本性质

整除的定义：若整数 a 除以非零整数 b，商为整数且余数为零，即 a 能被 b 整除，记做 $b|a$，读作：b 整除 a 或 a 能被 b 整除。a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数，或称为因数。

- 若 $a|c, b|c$，则 $a|(b \pm c)$
- 若 $a|b$，则对任意的 $c(c \neq 0)$，有 $a|bc$
- 若 $a|b$，且 $b|c$，则 $a|c$
- 若 $a|bc$，且 $(a,c)=1$，则 $a|b$
- 若 $c|a$，且 $c|b$，则对于任意整数 m,n，有 $c|(ma+nb)$
- 若 $a|c, b|c$，且 $(a,b)=1$，则 $ab|c$
- **带余除法定理**：$\forall a,b>0, a,b \in \mathbb{N}$，$\exists$ 唯一的数对 q,r，使 $a=bq+r, (0 \leq r < b)$。

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- 证明基本思路：$a = k_1 m + b, c = k_2 m + b$

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- 证明基本思路：$a = k_1 m + b, c = k_2 m + b$
- 基本用法：求模运算下求解问题（避免大数运算）、快速幂

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$，
  则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- **证明基本思路**：$a = k_1 m + b, c = k_2 m + b$
- **基本用法**：求模运算下求解问题（避免大数运算）、快速幂
- **注意**：除法不满足以上的性质

快速幂

求解：$\mathrm{a}^{\mathrm{b}} \equiv \mathrm{x} \pmod{\mathrm{m}}, (\mathrm{a}, \mathrm{b} \leq 1\mathrm{e}9)$

快速幂

求解：$a^b \equiv x \pmod{m}, (a, b \leq 1e9)$

- **朴素求法**：

```
1  inline ll mpow(ll a, ll b, ll m) {
2    ll res = 1;
3    for (int i = 1; i <= b; ++i)
4      res = res * a % m;
5    return res;
6  }
```

- **时间复杂度**：$O(b)$

快速幂

求解：$a^b \equiv x \pmod{m}, (a, b \leq 1e9)$

- 快速幂

```
1  inline ll mpow(ll a, ll b, ll m) {
2    ll res = 1;
3    while(b) {
4      if (b & 1) res = res * a % m;
5      a = a * a % m;
6      b >>= 1;
7    }
8    return res;
9  }
```

- 时间复杂度：$O(\log b)$

素数基础

定义：只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

素数基础

定义：只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$：$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

素数基础

定义：只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$：$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
- 素数的分布：1e9 范围内，任意两个相邻的素数差不超过 400

素数基础

定义：只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$：$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
- 素数的分布：1e9 范围内，任意两个相邻的素数差不超过 400
- **威尔逊定理**：$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

素数的判定

- 暴力枚举所有可能的因子即可
- 事实：如果 $x|a$，那么 $\frac{a}{x}|a$。
- 判定算法：

```
1  inline bool isPrime(ll n) {
2    if (n < 2) return false;
3    for (int i = 2; i <= sqrt(n) + 1; ++i) {
4      if (!(n % i)) return false;
5    }
6    return true;
7  }
```

- 时间复杂度：$O(\sqrt{n})$

素数的判定

- 暴力枚举所有可能的因子即可
- 事实：如果 $x|a$，那么 $\frac{a}{x}|a$。
- 判定算法：

```
1  inline bool isPrime(ll n) {
2    if (n < 2) return false;
3    for (int i = 2; i <= sqrt(n) + 1; ++i) {
4      if (!(n % i)) return false;
5    }
6    return true;
7  }
```

- 时间复杂度：$O(\sqrt{n})$
- Miller-Rabin 素性测试：$O(k \log^3 n)$
- 我不会

筛法

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数

筛法

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数
- 对每个数，将其倍速标记为**非素数**，那么没被标记的数，就是素数

筛法

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数
- 对每个数，将其倍速标记为**非素数**，那么没被标记的数，就是素数
- 算法实现：

```
1  const int MAXN = 1e6 + 5;
2  bool inp[MAXN], prime[MAXN], cnt;
3  inline void getPrime(int n) {
4      memset(inp, 0, sizeof(inp));
5      for (int i = 2; i <= n; ++i) {
6          if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;
7          for (int j = 2; i * j <= n; ++j)
8          inp[i * j] = true;
9      }
10 }
```

- 时间复杂度：$O(n \log n)$

埃拉托斯特尼筛法

- 只需要对素数的倍数进行标记就好了

埃拉托斯特尼筛法

- 只需要对素数的倍数进行标记就好了
- 算法实现：

```
1  inline void getPrime(int n) {
2      memset(inp, 0, sizeof(inp));
3      for (int i = 2; i <= n; ++i) {
4          if (inp[i]) continue;
5          prime[++cnt] = i;
6          for (int j = 2; i * j <= n; ++j)
7              inp[i * j] = true;
8      }
9  }
```

- 时间复杂度：$O(n \log \log n)$

线性筛

欧拉筛

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了

线性筛

欧拉筛

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了
- 算法实现：

```
1  inline void getPrime(int n) {
2      for (int i = 2; i <= n; ++i) {
3          if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;
4          for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= n; ++j) {
5              inp[i * prime[j]] = true;
6              if (!(i % prime[j])) break;
7          }
8      }
9  }
```

线性筛

欧拉筛

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了
- 算法实现：

```
1  inline void getPrime(int n) {
2      for (int i = 2; i <= n; ++i) {
3          if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;
4          for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= n; ++j) {
5              inp[i * prime[j]] = true;
6              if (!(i % prime[j])) break;
7          }
8      }
9  }
```

- 时间复杂度：$O(n)$
- 非常重要，可以用来线性求解某些**积性函数**

因数

定理（算术基本定理）

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = A$

其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

因数

定理（算术基本定理）

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = A$
其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

- $1 \sim 1e9$ 的数最多有 1344 个因子。（by 欢神）

因数

定理（算术基本定理）

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^{n} p_i^{a_i} = A$
其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

- $1 \sim 1e9$ 的数最多有 1344 个因子。（by 欢神）
- 求解一个数的所有因数：

```
1  vector<int> breakdown(int n) {
2    vector<int> res;
3    for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
4      if (n % i == 0) {
5        res.push_back(i);
6        res.push_back(n / i);
7      }
8    }
9    return res;
10 }
```

- 时间复杂度：$O(\sqrt{n})$

因数

- 求解一个数的所有**质因数**（即质因数分解）：

因数

- 求解一个数的所有**质因数**（即质因数分解）：

```cpp
vector<int> breakdown(int n) {
  vector<int> res;
  for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
    if (n % i == 0) {
      while (n % i == 0) n /= i;
      res.push_back(i);
    }
  }
  if (n != 1) res.push_back(n);
  return res;
}
```

- 时间复杂度：$O(\sqrt{\frac{n}{\ln n}})$

因数

- 求解一个数的所有**质因数**（即质因数分解）：

```cpp
vector<int> breakdown(int n) {
  vector<int> res;
  for (int i = 2; i * i <= n; i++) {
    if (n % i == 0) {
      while (n % i == 0) n /= i;
      res.push_back(i);
    }
  }
  if (n != 1) res.push_back(n);
  return res;
}
```

- 时间复杂度：$O(\sqrt{\frac{n}{\ln n}})$
- **详细介绍**：分解质因数 - Oi-Wiki

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

- a 和 b 的最大公约数记为：$\gcd(a,b)$

最大公约数
GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

- a 和 b 的最大公约数记为：$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b})$
- **事实**：

$$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \gcd(\mathrm{b},\mathrm{a}-\mathrm{b})$$
$$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b}) = \gcd(\mathrm{a},\mathrm{a} \bmod \mathrm{b})$$

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

- a 和 b 的最大公约数记为：$\gcd(a,b)$
- **事实**：

$$\gcd(a,b)=\gcd(b,a-b)$$
$$\gcd(a,b)=\gcd(a,a \bmod b)$$

- 集合 $S=\{\gcd(a_i,\ldots,a_n)|1\le i\le n\}$ 至多有 $O(\max(a_i))$ 个元素。

欧几里得算法

- 算法实现：

```
1  int gcd(int a, int b) {
2    if (b == 0) return a;
3    return gcd(b, a % b);
4  }
```

- 时间复杂度：$O(\log n)$

欧几里得算法

- 算法实现：

```
1  int gcd(int a, int b) {
2    if (b == 0) return a;
3    return gcd(b, a % b);
4  }
```

- 时间复杂度：$O(\log n)$
- 求解**斐波那契数列**相邻两项时达到最坏时间复杂度

欧几里得算法

- 算法实现：

```
1  int gcd(int a, int b) {
2    if (b == 0) return a;
3    return gcd(b, a % b);
4  }
```

- 时间复杂度：$O(\log n)$
- 求解**斐波那契数列**相邻两项时达到最坏时间复杂度
- `<algorithm>`库内置了`__gcd()`函数

欧几里得算法

- 算法实现：

```
1  int gcd(int a, int b) {
2    if (b == 0) return a;
3    return gcd(b, a % b);
4  }
```

- 时间复杂度：$O(\log n)$
- 求解**斐波那契数列**相邻两项时达到最坏时间复杂度
- `<algorithm>`库内置了`__gcd()`函数
- 本质上是将将大规模问题转化为小规模问题
- 将问题 (a, b) 转化为了 $(b, a \bmod b)$

多个数的最大公约数

求解多个数的最大公约数：

- 可以证明，$\gcd(a,\gcd(b,c)) = \gcd(a,b,c)$
- 即每次取出两个数求出 gcd 后再放 gcd 回去，不会对所需要的答案造成影响。

多个数的最大公约数

求解多个数的最大公约数：

- 可以证明，$\gcd(a,\gcd(b,c)) = \gcd(a,b,c)$
- 即每次取出两个数求出 gcd 后再放 gcd 回去，不会对所需要的答案造成影响。

```
1  int gcd(int a[], int n) {
2    int res = a[1];
3    for (int i = 2; i <= n; ++i)
4      res = __gcd(res, a[i]);
5    return res;
6  }
```

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- **反向考虑**，即考虑一个数 x，$1 \sim n$ 中有多少数被它整除。

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- **反向考虑**，即考虑一个数 x，$1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max\limits_{x}\{[\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k]\}$，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- **反向考虑**，即考虑一个数 x，$1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max\limits_{x}\{[\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k]\}$，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度：$O(1)$

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- **反向考虑**，即考虑一个数 x，$1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x\{[\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k]\}$，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度：$O(1)$

```
1  n, k = map(int, input().split())
2  print(int(n / k))
```

例题

又是毕业季

题目链接：又是毕业季 I

题目描述

给定 n 和 k，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 gcd 最大，求最大值是多少。
$1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- **反向考虑**，即考虑一个数 x，$1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x\{[\lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k]\}$，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度：$O(1)$

```
1  n, k = map(int, input().split())
2  print(int(n / k))
```

同样思想解决的题：又是毕业季 II（双倍经验它不香吗 ?）。

例题

最大公约数

题目链接：最大公约数

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。
询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最小的次数；否则输出 -1。

例题

最大公约数

题目链接：最大公约数

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。
询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最小的次数；否则输出 -1。

数据范围：

$$1 \le n, m \le 2 \times 10^3, 1 \le a_{i,j} \le 10^{18}, 1 \le x \le n, 1 \le y \le m$$

例题

最大公约数

题目链接：最大公约数

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。
询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最小的次数；否则输出 -1。

数据范围：

$$1 \le n, m \le 2 \times 10^3, 1 \le a_{i,j} \le 10^{18}, 1 \le x \le n, 1 \le y \le m$$

hint

- **事实**：

$$\begin{aligned} \gcd(a, \gcd(b, c)) &= \gcd(a, b, c) \\ \gcd(\gcd(a, b), \gcd(b, c)) &= \gcd(a, b, c) \end{aligned}$$

- 分别考虑“判断可能”和“求解”。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次，$a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
  即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4。
  同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次，$a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
  即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4。
  同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
  即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次，$a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
  即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4。
  同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
  即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。
- 以此类推，假设第 k 次，$a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
  那么 b_i 也是由距离它小于 k 的点更新。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 $\gcd$ 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次，$a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
  即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4。
  同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
  即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。
- 以此类推，假设第 k 次，$a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
  那么 b_i 也是由距离它小于 k 的点更新。
- 那么显然第 $k+1$ 次，$a_{x,y}$ 由距离 b_i 小于 k 的点更新。
  即相当于距离它小于 $k+1$ 的点更新。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次，$a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后，$a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 gcd。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次，$a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后，$a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 gcd。
- 题目转化为：从 (x, y) 开始一层层取 gcd，直到 $\gcd = 1$。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次，$a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后，$a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 gcd。
- 题目转化为：从 (x,y) 开始一层层取 gcd，直到 $\gcd = 1$。
- 从 (x,y) 开始 bfs，同时对每个遍历到的元素取 gcd，直到 $\gcd = 1$。
- 遍历层数就是答案。

最小公倍数

LCM

- **事实**:

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \mathrm{lcm}(a, b)$$

- **所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 O(1) 的时间内求出**

最小公倍数

LCM

- **事实**:

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \mathrm{lcm}(a, b)$$

- **所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 O(1) 的时间内求出**
- **算法实现**:

```
1  int lcm(int a, int b) {
2    return a * b / __gcd(a, b);
3  }
```

最小公倍数

LCM

- **事实**：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \mathrm{lcm}(a, b)$$

- **所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 O(1) 的时间内求出**
- **算法实现**：

```
1  int lcm(int a, int b) {
2    return a * b / __gcd(a, b);
3  }
```

- **多个数的 LCM**
  - 与多个数的 GCD 类似

最小公倍数

LCM

- **事实**：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \mathrm{lcm}(a, b)$$

- **所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 O(1) 的时间内求出**
- **算法实现**：

```
1  int lcm(int a, int b) {
2    return a * b / __gcd(a, b);
3  }
```

- **多个数的 LCM**
  - 与多个数的 GCD 类似
  - 每次取出两个数求 LCM 后再将 LCM 放回去，不会对所需要的答案造成影响

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接：[NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0，y_0，$(2 \le x_0, y_0 \le 10^5)$，求出满足下列条件的 P，Q 的个数：

- P，Q 是正整数。
- 要求 P，Q 以 x_0 为最大公约数，以 y_0 为最小公倍数。

试求：满足条件的所有可能的 P，Q 的个数。

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接：[NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0，y_0，$(2 \le x_0, y_0 \le 10^5)$，求出满足下列条件的 P，Q 的个数：

- P，Q 是正整数。
- 要求 P，Q 以 x_0 为最大公约数，以 y_0 为最小公倍数。

试求：满足条件的所有可能的 P，Q 的个数。

题解

- 根据 $P \times Q = \gcd(P,Q) \times \mathrm{lcm}(P,Q) = x_0 y_0$，我们可以得到 $P \times Q$ 的值
- 枚举 $i | (x_0 y_0)$，考虑 $i, \lfloor \frac{x_0 y_0}{i} \rfloor$ 的最大公约数和最小公倍数是不是分别为 P, Q 即可

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接：[NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0，y_0，$(2 \le x_0, y_0 \le 10^5)$，求出满足下列条件的 P，Q 的个数：

- P，Q 是正整数。
- 要求 P，Q 以 x_0 为最大公约数，以 y_0 为最小公倍数。

试求：满足条件的所有可能的 P，Q 的个数。

题解

- 根据 $P \times Q = \gcd(P,Q) \times \mathrm{lcm}(P,Q) = x_0 y_0$，我们可以得到 $P \times Q$ 的值
- 枚举 $i | (x_0 y_0)$，考虑 $i, \lfloor \frac{x_0 y_0}{i} \rfloor$ 的最大公约数和最小公倍数是不是分别为 P, Q 即可
- 时间复杂度：$O(n \log n)$

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 的一组可行解

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=\gcd(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 的一组可行解
- 常用于求解**乘法逆元**

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax+by=\gcd(a,b)$ 的一组可行解
- 常用于求解**乘法逆元**
- **裴蜀定理**：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a,b 是不全为零的整数，则存在整数 x,y，使得 $ax+by=\gcd(a,b)$。

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax+by=\gcd(a,b)$ 的一组可行解
- 常用于求解**乘法逆元**
- **裴蜀定理**：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a,b 是不全为零的整数，则存在整数 x,y，使得 $ax+by=\gcd(a,b)$。

- **算法思想**：将问题 (a,b) 转化为 $(b,a \bmod b)$

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax+by=\gcd(a,b)$ 的一组可行解
- 常用于求解**乘法逆元**
- **裴蜀定理**：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a,b 是不全为零的整数，则存在整数 x,y，使得 $ax+by=\gcd(a,b)$。

- **算法思想**：将问题 (a,b) 转化为 $(b,a \bmod b)$
- 要注意负值

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\ bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \end{aligned}$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= \gcd(a,b) \\ bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \end{aligned}$$

$$\because \gcd(a,b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\ bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\ \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \end{aligned}$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
\because a \bmod b &= a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b)
\end{aligned}
$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
\because a \bmod b &= a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b))y_2 \\
&= ay_2 + bx_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot by_2
\end{aligned}
$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
\because a \bmod b &= a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b))y_2 \\
&= ay_2 + bx_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot by_2 \\
\therefore ax_1 + by_1 &= ay_2 + b(x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2)
\end{aligned}
$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$
\begin{aligned}
ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\because \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
\because a \bmod b &= a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \times b) \\
\therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a - (\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b))y_2 \\
&= ay_2 + bx_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot by_2 \\
\therefore ax_1 + by_1 &= ay_2 + b(x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2) \\
\because a = a, &\quad b = b \\
\therefore x_1 = y_2, &\quad y_1 = x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2
\end{aligned}
$$

□

拓展欧几里得算法

实现

- $x_1 = y_2, y_1 = x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2$
- 其中 x_1, y_1 是问题 (a, b) 的答案
  x_2, y_2 是问题 $(b, a \bmod b)$ 的答案

拓展欧几里得算法

实现

- $x_1 = y_2, y_1 = x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2$
- 其中 x_1, y_1 是问题 (a, b) 的答案
  x_2, y_2 是问题 $(b, a \bmod b)$ 的答案
- 算法实现：

```
1  ll exgcd(ll a, ll b, ll& x, ll& y){
2    if (!b){
3      x = 1, y = 0;
4      return a;
5    }
6    ll gcd = exgcd(b, a % b, y, x);
7    y -= a / b * x;
8    return gcd;
9  }
```

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax+by=c$ 的一组解为 (x_0,y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{gcd(a,b)} * t \end{cases} ,t \in \mathbb{Z}$$

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax+by=c$ 的一组解为 (x_0,y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} * t \end{cases} ,t \in \mathbb{Z}$$

- 另外，拓欧算法中，以下定理成立:

定理

当 $a,b>0$ 且 $\gcd(a,b) \neq \min(a,b)$ 时有 $|x| < \frac{b}{\gcd(a,b)}$ 和 $|y| < \frac{a}{\gcd(a,b)}$

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax+by=c$ 的一组解为 (x_0,y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} * t \end{cases} ,t \in \mathbb{Z}$$

- 另外，拓欧算法中，以下定理成立:

定理

当 $a,b>0$ 且 $\gcd(a,b) \neq \min(a,b)$ 时有 $|x| < \frac{b}{\gcd(a,b)}$ 和 $|y| < \frac{a}{\gcd(a,b)}$

- 此定理告知我们以下两个事实:
  1. 扩欧过程中不会发生溢出
  2. 不定方程的某个最小正整数解为 $\left(x + \frac{b}{\gcd(a,b)}\right) \bmod \frac{b}{\gcd(a,b)}$ 和 $\left(y + \frac{a}{\gcd(a,b)}\right) \bmod \frac{a}{\gcd(a,b)}$。

例题

同余方程

题目链接：[NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的**最小正整数解**。
数据保证一定有解。
$2 \leq a, b \leq 2e9$

例题
同余方程

题目链接：[NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的**最小正整数解**。
数据保证一定有解。
$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$，即 $ax + by = 1$。

例题

同余方程

题目链接：[NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的**最小正整数解**。
数据保证一定有解。
$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$，即 $ax + by = 1$。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。

例题

同余方程

题目链接：[NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的**最小正整数解**。
数据保证一定有解。
$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$，即 $ax + by = 1$。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。
- 时间复杂度：$O(\log a)$

例题

同余方程

题目链接：[NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的**最小正整数解**。
数据保证一定有解。
$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$，即 $ax + by = 1$。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。
- 时间复杂度：$O(\log a)$

拓展欧几里得习题推荐：

- P1516 青蛙的约会 - 洛谷
- 5512 Pagodas - HDOJ（裴蜀定理）

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地，$\varphi(1)=1$。

$$\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$$

显然，当 n 是质数时，$\varphi(n)=n-1$。

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地，$\varphi(1)=1$。

$$\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$$

显然，当 n 是质数时，$\varphi(n)=n-1$。

性质：

- 欧拉函数是**积性函数**（证明：欧拉函数的积性证明）
  - **积性函数**：若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a,b)=1$ 时，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$。
  - **完全积性函数**：若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地，$\varphi(1)=1$。

$$\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$$

显然，当 n 是质数时，$\varphi(n)=n-1$。

性质：

- 欧拉函数是**积性函数**（证明：欧拉函数的积性证明）
  - **积性函数**：若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a,b)=1$ 时，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$。
  - **完全积性函数**：若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$
- $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$。由**莫比乌斯反演**可得。

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地，$\varphi(1)=1$。

$$\varphi(n)=\sum_{i=1}^{n}[\gcd(i,n)=1]$$

显然，当 n 是质数时，$\varphi(n)=n-1$。

性质：

- 欧拉函数是**积性函数**（证明：欧拉函数的积性证明）
  - **积性函数**：若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a,b)=1$ 时，有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$。
  - **完全积性函数**：若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$
- $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$。**由莫比乌斯反演**可得。
- 若 $n=p^k$，其中 p 是质数，那么 $\varphi(n)=p^k-p^{k-1}$。
- 由唯一分解定理，设 $n=\prod_{i=1}^{n}p_i^{k_i}$，其中 p_i 是质数，有 $\varphi(n)=n\cdot\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i-1}{p_i}$。

欧拉函数

求解

- **求解单个欧拉函数值**：直接质因数分解就好了

```
1   int phi(int n) {
2     int ans = n;
3     for (int i = 2; i * i <= n; i++)
4       if (n % i == 0) {
5         ans = ans / i * (i - 1);
6         while (n % i == 0) n /= i;
7       }
8     if (n > 1) ans = ans / n * (n - 1);
9     return ans;
10  }
```

欧拉函数

求解

- **求解 $1 \sim n$ 的欧拉函数值：线性筛**

```
1  void init() {
2    int cnt = 0;
3    phi[1] = 1;
4    for (int i = 2; i < MAXN; i++) {
5      if (!inp[i]) {
6        prime[++cnt] = i;
7        phi[i] = i - 1;
8      }
9
10     for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] < MAXN; j++) {
11       inp[i * prime[j]] = true;
12       if (i % prime[j] == 0) {
13         phi[i * prime[j]] = phi[i] * prime[j];
14         break;
15       }
16       else
17         phi[i * prime[j]] = phi[i] * (prime[j] - 1);
18     }
19   }
20 }
```

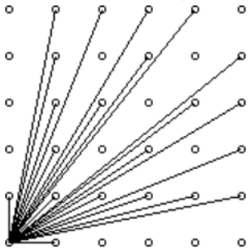
欧拉函数

例题

题目链接：P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的N * N的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



。现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

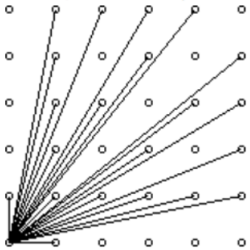
欧拉函数

例题

题目链接：P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的N * N的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



。现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？

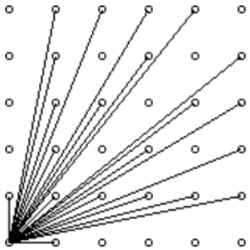
欧拉函数

例题

题目链接：P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的N * N的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



。现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？
- 假设俩人坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$x_1 \le x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住

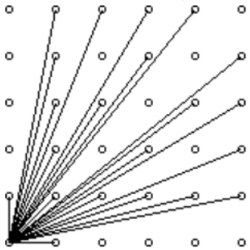
欧拉函数

例题

题目链接：P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的N * N的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



。现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？
- 假设俩人坐标为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，$x_1 \le x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住
- 只考虑 $y < x$ 的部分，可得第 i 列只有 $\varphi(i)$ 个人没被挡住，即可被看见

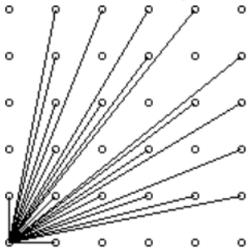
欧拉函数

例题

题目链接：P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的N * N的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



。现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？
- 假设俩人坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$x_1 \le x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住
- 只考虑 $y < x$ 的部分，可得第 i 列只有 $\varphi(i)$ 个人没被挡住，即可被看见
- 所以 $ans = 2 * (\sum_{i=1}^{n} \varphi(i)) + 1$

费马小定理

定理（费马小定理）

若 p 为素数，$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{p})=1$，则 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}-1}\equiv 1 \pmod{\mathrm{p}}$。
另一个形式：对于任意整数 a，有 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}}\equiv \mathrm{a} \pmod{\mathrm{p}}$。

费马小定理

定理（费马小定理）

若 p 为素数，$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{p})=1$，则 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}-1}\equiv 1 \pmod{\mathrm{p}}$。
另一个形式：对于任意整数 a，有 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}}\equiv \mathrm{a} \pmod{\mathrm{p}}$。

费马小定理常用于结合**快速幂**求解**乘法逆元**：

$$\mathrm{a}^{\mathrm{p}-2}\cdot \mathrm{a}\equiv 1 \pmod{\mathrm{p}},(\gcd(\mathrm{a},\mathrm{p})=1)$$

费马小定理

定理（费马小定理）

若 p 为素数，$\gcd(\mathrm{a},\mathrm{p})=1$，则 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}-1}\equiv 1 \pmod{\mathrm{p}}$。
另一个形式：对于任意整数 a，有 $\mathrm{a}^{\mathrm{p}}\equiv \mathrm{a} \pmod{\mathrm{p}}$。

费马小定理常用于结合**快速幂**求解**乘法逆元**：

$$\mathrm{a}^{\mathrm{p}-2}\cdot \mathrm{a}\equiv 1 \pmod{\mathrm{p}},(\gcd(\mathrm{a},\mathrm{p})=1)$$

证明：
~~我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，我写不下了。~~

费马小定理

证明

Proof.

设一个质数为 p，且 $\gcd(a,p)=1$。
构造一个序列：$A=\{1,2,3\ldots,p-1\}$，这个序列有着这样一个性质：

$$\prod_{i=1}^{n} A_i \equiv \prod_{i=1}^{n}(A_i \times a) \pmod{p}$$

思路：反证法可证得 $\forall i \neq j, A_i a \not\equiv A_j a \pmod{p}$
那么 $\{A_i a\}$ 将取到 $1 \sim p-1$ 内的所有值。

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(A_i \times a) &\equiv \prod_{i=1}^{n} A_i \pmod{p} \\
\Rightarrow a^{p-1} \prod_{i=1}^{n} A_i &\equiv \prod_{i=1}^{n} A_i \pmod{p} \\
\Rightarrow a^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p}
\end{aligned}$$

□

欧拉定理

定理（欧拉定理）

若 $\gcd(a, m) = 1$，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$。

则当 m 为质数时，$\varphi(m) = m - 1$，则可得 $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$，即得到了费马小定理。

欧拉定理

定理（欧拉定理）

若 $\gcd(a, m) = 1$，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$。

则当 m 为质数时，$\varphi(m) = m - 1$，则可得 $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$，即得到了费马小定理。

证明：欧拉定理与费马小定理及证明

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a,p)=1$ 时使用，限制很大。

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a,p)=1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a,p)=1 \\ a^b, & \gcd(a,p)\neq 1, b<\varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, & \gcd(a,p)\neq 1, b\geq \varphi(p) \end{cases} \pmod p$$

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a,p)=1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a,p)=1 \\ a^b, & \gcd(a,p)\neq 1, b<\varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, & \gcd(a,p)\neq 1, b\geq \varphi(p) \end{cases} \pmod p$$

完美满足所有情况，非常好用。~~（虽然我没怎么用过）~~

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a,p)=1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a,p)=1 \\ a^b, & \gcd(a,p)\neq 1, b<\varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, & \gcd(a,p)\neq 1, b\geq \varphi(p) \end{cases} \pmod p$$

完美满足所有情况，非常好用。~~（虽然我没怎么用过）~~

证明：~~太长了我写不下~~ ~~我不会~~

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a,p)=1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a,p)=1 \\ a^b, & \gcd(a,p)\neq 1, b<\varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p)+\varphi(p)}, & \gcd(a,p)\neq 1, b\geq \varphi(p) \end{cases} \pmod p$$

完美满足所有情况，非常好用。~~（虽然我没怎么用过）~~

证明：~~太长了我写不下　我不会~~

常用于**欧拉降幂**。

拓展欧拉定理

例题

题目链接：P1066 AB%P - XDOJ

题目描述

求解：

$$(\ldots((A^{B_0})^{B_1})\ldots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中，$B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$，$P = 1e9 + 7$。

数据范围：$0 < A < 2^{31}, 0 \le n \le 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

拓展欧拉定理

例题

题目链接：P1066 AB%P - XDOJ

题目描述

求解：

$$(\ldots((A^{B_0})^{B_1})\ldots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中，$B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$，$P = 1e9 + 7$。

数据范围：$0 < A < 2^{31}, 0 \le n \le 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$，但是 B_i 是指数级增加，无法直接求出

拓展欧拉定理

例题

题目链接：P1066 AB%P - XDOJ

题目描述

求解：

$$(\ldots((A^{B_0})^{B_1})\ldots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中，$B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$，$P = 1e9 + 7$。

数据范围：$0 < A < 2^{31}, 0 \le n \le 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$，但是 B_i 是指数级增加，无法直接求出
- 显然**欧拉降幂**，考虑适用条件
- $P = 1e9 + 7$ 是质数，所以要么 $\gcd(A, P) = 1$，要么 $P|A$

拓展欧拉定理

例题

题目链接：P1066 AB%P - XDOJ

题目描述

求解：

$$(\ldots((A^{B_0})^{B_1})\ldots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中，$B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$，$P = 1e9 + 7$。

数据范围：$0 < A < 2^{31}, 0 \le n \le 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$，但是 B_i 是指数级增加，无法直接求出
- 显然**欧拉降幂**，考虑适用条件
- $P = 1e9 + 7$ 是质数，所以要么 $\gcd(A, P) = 1$，要么 $P|A$
- 显然二者条件下，$A^x \equiv A^{x \bmod \varphi(P)} \pmod P$ 均成立
- 所以先求出 $\sum_{i=0}^{n-1} B_i \bmod \varphi(P)$ $(\varphi(P) = P - 1)$ 即可。

Questions?