



数论基础

ACM 中的数学小知识

陈德创
Codeforces: **dcac**

July 13, 2021

■ 简介

整除与同余

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

■ 素数

■ 筛法

■ 大数

- 最大公约数
- 最小公倍数

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

■ 简介

- 单个求解
- 多个求解

■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

主要讲什么？

- ACM 中的基础数学小知识

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

数论分块

习题推荐

结束

主要讲什么？

- ACM 中的基础数学小知识

有啥用？

- 单独的题目考察
- 一些题目解答的必备前提
- 玩

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

1. $x|y$: x 整除 y , 即 x 是 y 的因数, y 是 x 的倍数
2. $x \bmod y$: x 除以 y 的得到的余数
3. $x \equiv y \pmod{M}$: x 同余 y (在模 M 的意义下)
4. $\gcd(x, y)$: x 和 y 的最大公约数, 简写作 (x, y)
5. $\text{lcm}(x, y)$: x 和 y 的最小公倍数, 简写作 $[x, y]$
6. $\lfloor x \rfloor$: 下取整
7. $\lceil x \rceil$: 上取整
8. $[\text{命题}P]$: 当命题 P 为真时值为 1, 否则为 0
9. Σ : 求和, 如 $\sum_{i=1}^n f(i)$, $\sum_{1 \leq i \leq n, i \in P} f(i)$

1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

- ## ■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

整除基本性质

整除的定义：若整数 a 除以非零整数 b ，商为整数且余数为零，即 a 能被 b 整除，记做 $b|a$ ，读作： b 整除 a 或 a 能被 b 整除。 a 叫做 b 的倍数， b 叫做 a 的约数，或称为因数。

整除基本性质

整除的定义：若整数 a 除以非零整数 b ，商为整数且余数为零，即 a 能被 b 整除，记做 $b|a$ ，读作： b 整除 a 或 a 能被 b 整除。 a 叫做 b 的倍数， b 叫做 a 的约数，或称为因数。

- 若 $a|c, b|c$ ，则 $a|(b \pm c)$
- 若 $a|b$ ，则对任意的 $c (c \neq 0)$ ，有 $a|bc$
- 若 $a|b$ ，且 $b|c$ ，则 $a|c$
- 若 $a|bc$ ，且 $(a, c) = 1$ ，则 $a|b$
- 若 $c|a$ ，且 $c|b$ ，则对于任意整数 m, n ，有 $c|(ma + nb)$
- 若 $a|c, b|c$ ，且 $(a, b) = 1$ ，则 $ab|c$
- 若 $p|bc$ ， p 是质数，那么 $p|b$ 或 $p|c$ 至少一个成立
- **带余除法定理：** $\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}$ ， \exists 唯一的数对 q, r ，使 $a = bq + r, (0 \leq r < b)$ 。

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- 证明基本思路: $a = k_1m + b, c = k_2m + b$

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- 证明基本思路: $a = k_1m + b, c = k_2m + b$
- 基本用法: 求模运算下求解问题 (避免大数运算)、快速幂

同余基本性质

- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \pm b \equiv c \pm d \pmod{m}$
- 若 $a \equiv b \pmod{m}, c \equiv d \pmod{m}$,
则 $a \times b \equiv c \times d \pmod{m}$
- 证明基本思路: $a = k_1m + b, c = k_2m + b$
- 基本用法: 求模运算下求解问题 (避免大数运算)、快速幂
- 注意: 除法不满足以上的性质

快速幂

求解： $a^b \equiv x \pmod{m}, (a, b \leq 1e9)$

求解: $a^b \equiv x \pmod{m}, (a, b \leq 1e9)$

■ 朴素求法:

```
1 inline ll mpow(ll a, ll b, ll m) {  
2     ll res = 1;  
3     for (int i = 1; i <= b; ++i)  
4         res = res * a % m;  
5     return res;  
6 }
```

■ 时间复杂度: $O(b)$

求解: $a^b \equiv x \pmod{m}, (a, b \leq 1e9)$

■ 快速幂

```
1  inline ll mpow(ll a, ll b, ll m) {
2      ll res = 1;
3      while(b) {
4          if (b & 1) res = res * a % m;
5          a = a * a % m;
6          b >>= 1;
7      }
8      return res;
9  }
```

■ 时间复杂度: $O(\log b)$

■ 简介

■ 整除与同余

■ 素数

欧几里得

■ 最小公倍数

5 欧拉函数

■ 欧拉函数

■ 费马小定理

■ 欧拉定理

6 乘法逆元

■ 简介

■ 单个求解

■ 多个求解

7 莫比乌斯反演

■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定义： 只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定义： 只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定义： 只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
- 素数的分布: $1e9$ 范围内，任意两个相邻的素数差不超过 400

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定义： 只能被 1 和自身整除的数称为素数，又称为质数

- 1 既不是素数，也不是合数
- 2 是最小的素数，也是唯一的偶素数

基本性质：

- 素数计数函数 $\pi(x)$: $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
- 素数的分布: $1e9$ 范围内，任意两个相邻的素数差不超过 400
- 威尔逊定理: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

素数的判定

- 暴力枚举所有可能的因子即可
- 事实：如果 $x|a$ ，那么 $\frac{a}{x}|a$ 。
- 判定算法：

```
1 inline bool isPrime(ll n) {  
2     if (n < 2) return false;  
3     for (int i = 2; i <= sqrt(n) + 1; ++i) {  
4         if (!(n % i)) return false;  
5     }  
6     return true;  
7 }
```

- 时间复杂度： $O(\sqrt{n})$

素数的判定

- 暴力枚举所有可能的因子即可
- 事实：如果 $x|a$ ，那么 $\frac{a}{x}|a$ 。
- 判定算法：

```
1 inline bool isPrime(ll n) {  
2     if (n < 2) return false;  
3     for (int i = 2; i <= sqrt(n) + 1; ++i) {  
4         if (!(n % i)) return false;  
5     }  
6     return true;  
7 }
```

- 时间复杂度： $O(\sqrt{n})$
- Miller-Rabin 素性测试： $O(k \log^3 n)$
- 我不会

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

数论分块

习题推荐

结束

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数
- 对每个数，将其倍数标记为非素数，那么没被标记的数，就是素数

筛法用于求出 $1 \sim n$ 中所有的素数。

- 事实：一个数 x 的任意整数倍一定是素数
- 对每个数，将其倍数标记为非素数，那么没被标记的数，就是素数
- 算法实现：

```
1  const int MAXN = 1e6 + 5;  
2  bool inp[MAXN], prime[MAXN], cnt;  
3  inline void getPrime(int n) {  
4      memset(inp, 0, sizeof(inp));  
5      for (int i = 2; i <= n; ++i) {  
6          if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;  
7          for (int j = 2; i * j <= n; ++j)  
8              inp[i * j] = true;  
9      }  
10 }
```

- 时间复杂度： $O(n \log n)$

埃拉托斯特尼筛法

- 只需要对素数的倍数进行标记就好了

埃拉托斯特尼筛法

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

- 只需要对素数的倍数进行标记就好了
- 算法实现：

```
1 inline void getPrime(int n) {  
2     memset(inp, 0, sizeof(inp));  
3     for (int i = 2; i <= n; ++i) {  
4         if (inp[i]) continue;  
5         prime[++cnt] = i;  
6         for (int j = 2; i * j <= n; ++j)  
7             inp[i * j] = true;  
8     }  
9 }
```

- 时间复杂度： $O(n \log \log n)$

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了
- 算法实现：

```
1 inline void getPrime(int n) {  
2     for (int i = 2; i <= n; ++i) {  
3         if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;  
4         for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= n; ++j) {  
5             inp[i * prime[j]] = true;  
6             if (!(i % prime[j])) break;  
7         }  
8     }  
9 }
```

- 如果能让每个合数都只被标记一次就好了
- 算法实现：

```
1 inline void getPrime(int n) {  
2     for (int i = 2; i <= n; ++i) {  
3         if (!inp[i]) prime[++cnt] = i;  
4         for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= n; ++j) {  
5             inp[i * prime[j]] = true;  
6             if (!(i % prime[j])) break;  
7         }  
8     }  
9 }
```

- 时间复杂度： $O(n)$
- 非常重要，可以用来线性求解某些积性函数

1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定理 (算术基本定理)

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = A$
其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

定理 (算术基本定理)

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \cdots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = A$
其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

- $1 \sim 1e9$ 的数最多有 1344 个因子。(by 欢神)

定理 (算术基本定理)

$\forall A \in \mathbb{N}, A > 1 \quad \exists p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n, a_i \in \mathbb{Z}^+ \text{ s.t. } \prod_{i=1}^n p_i^{a_i} = A$
其中 p_i 是一个质数。这种表示的方法存在，而且是唯一的。

- $1 \sim 1e9$ 的数最多有 1344 个因子。(by 欢神)
- 求解一个数的所有因数：

```
1 vector<int> breakdown(int n) {  
2     vector<int> res;  
3     for (int i = 2; i * i <= n; i++) {  
4         if (n % i == 0) {  
5             res.push_back(i);  
6             res.push_back(n / i);  
7         }  
8     }  
9     return res;  
10 }
```

- 时间复杂度: $O(\sqrt{n})$

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

- 求解一个数的所有质因数（即质因数分解）：

■ 求解一个数的所有质因数（即质因数分解）：

```
1 vector<int> breakdown(int n) {  
2     vector<int> res;  
3     for (int i = 2; i * i <= n; i++) {  
4         if (n % i == 0) {  
5             while (n % i == 0) n /= i;  
6             res.push_back(i);  
7         }  
8     }  
9     if (n != 1) res.push_back(n);  
10    return res;  
11 }
```

■ 时间复杂度： $O(\sqrt{\frac{n}{\ln n}})$

■ 求解一个数的所有质因数（即质因数分解）：

```
1 vector<int> breakdown(int n) {  
2     vector<int> res;  
3     for (int i = 2; i * i <= n; i++) {  
4         if (n % i == 0) {  
5             while (n % i == 0) n /= i;  
6             res.push_back(i);  
7         }  
8     }  
9     if (n != 1) res.push_back(n);  
10    return res;  
11 }
```

■ 时间复杂度： $O(\sqrt{\frac{n}{\ln n}})$

■ 详细介绍：[分解质因数 - Oi-Wiki](#)

最大公约数

GCD

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

- a 和 b 的最大公约数记为： $\gcd(a, b)$

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

■ a 和 b 的最大公约数记为： $\gcd(a, b)$

■ 事实：

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - b)$$

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, a \bmod b)$$

最大公约数

GCD

最大公约数，是指一组数所有公约数里面最大的一个。

- a 和 b 的最大公约数记为： $\gcd(a, b)$

- **事实：**

$$\gcd(a, b) = \gcd(b, a - b)$$

$$\gcd(a, b) = \gcd(a, a \bmod b)$$

- 集合 $S = \{\gcd(a_i, \dots, a_n) | 1 \leq i \leq n\}$ 至多有 $O(\max(a_i))$ 个元素。

欧几里得算法

■ 算法实现：

```
1 int gcd(int a, int b) {  
2     if (b == 0) return a;  
3     return gcd(b, a % b);  
4 }
```

■ 时间复杂度： $O(\log n)$

欧几里得算法

■ 算法实现：

```
1 int gcd(int a, int b) {  
2     if (b == 0) return a;  
3     return gcd(b, a % b);  
4 }
```

■ 时间复杂度： $O(\log n)$

■ 求解斐波那契数列相邻两项时达到最坏时间复杂度

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

数论分块

习题推荐

结束

■ 算法实现：

```
1 int gcd(int a, int b) {  
2     if (b == 0) return a;  
3     return gcd(b, a % b);  
4 }
```

■ 时间复杂度： $O(\log n)$

■ 求解斐波那契数列相邻两项时达到最坏时间复杂度

■ `<algorithm>`库内置了`__gcd()`函数

欧几里得算法

■ 算法实现：

```
1 int gcd(int a, int b) {  
2     if (b == 0) return a;  
3     return gcd(b, a % b);  
4 }
```

- 时间复杂度： $O(\log n)$
- 求解斐波那契数列相邻两项时达到最坏时间复杂度
- `<algorithm>`库内置了`__gcd()`函数
- 本质上是将大规模问题转化为小规模问题
- 将问题 (a, b) 转化为了 $(b, a \bmod b)$

多个数的最大公约数

求解多个数的最大公约数：

- 可以证明, $\gcd(a, \gcd(b, c)) = \gcd(a, b, c)$
- 即每次取出两个数求出 \gcd 后再放 \gcd 回去, 不会对所需要的答案造成影响。

多个数的最大公约数

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

求解多个数的最大公约数：

- 可以证明, $\gcd(a, \gcd(b, c)) = \gcd(a, b, c)$
- 即每次取出两个数求出 \gcd 后再放 \gcd 回去, 不会对所需要的答案造成影响。

```
1  int gcd(int a[], int n) {  
2      int res = a[1];  
3      for (int i = 2; i <= n; ++i)  
4          res = __gcd(res, a[i]);  
5      return res;  
6  }
```

例题

又是毕业季

题目链接：[又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k ，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大，求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

例题

又是毕业季

题目链接：[又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k ，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大，求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- 反向考虑，即考虑一个数 x ， $1 \sim n$ 中有多少数被它整除。

例题

又是毕业季

题目链接: [又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k , 问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大, 求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- 反向考虑, 即考虑一个数 x , $1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x \{ \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k \}$, 显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$

例题

又是毕业季

题目链接: [又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k , 问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大, 求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- 反向考虑, 即考虑一个数 x , $1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x \{ \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k \}$, 显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度: $O(1)$

例题

又是毕业季

题目链接：[又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k ，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大，求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- 反向考虑，即考虑一个数 x ， $1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x \{ \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k \}$ ，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度： $O(1)$

```
1 n, k = map(int, input().split())
2 print(int(n / k))
```

例题

又是毕业季

题目链接：[又是毕业季 I](#)

题目描述

给定 n 和 k ，问在 $1 \sim n$ 中选 k 个数使得它们 \gcd 最大，求最大值是多少。
 $1 \leq k \leq n \leq 1e9$

题解

- 反向考虑，即考虑一个数 x ， $1 \sim n$ 中有多少数被它整除。
- 显然为 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 个
- 即求 $\max_x \{ \lfloor \frac{n}{x} \rfloor \geq k \}$ ，显然答案为 $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$
- 时间复杂度： $O(1)$

```
1 n, k = map(int, input().split())
2 print(int(n / k))
```

同样思想解决的题：[又是毕业季 II](#)（双倍经验它不香吗？）。

例题

最大公约数

题目链接：[最大公约数](#)

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a 。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。

询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最少的次数；否则输出 -1 。

例题

最大公约数

题目链接：[最大公约数](#)

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a 。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。

询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最少的次数；否则输出 -1 。

数据范围：

$$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^3, 1 \leq a_{i,j} \leq 10^{18}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$$

例题

最大公约数

题目链接：[最大公约数](#)

题目描述

有一个 $n \times m$ 的矩阵 a 。对此矩阵进行变换，定义为将这个矩阵内的所有元素变为其上下左右四个元素（不存在则忽略）及自身的最大公约数。

询问 $a_{x,y}$ 在进行最少多少次变换之后会变成 1。如果可以使 $a_{x,y}$ 经过若干次变换变成 1，输出其中最小的次数；否则输出 -1。

数据范围：

$$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^3, 1 \leq a_{i,j} \leq 10^{18}, 1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$$

hint

■ 事实：

$$\gcd(a, \gcd(b, c)) = \gcd(a, b, c)$$

$$\gcd(\gcd(a, b), \gcd(b, c)) = \gcd(a, b, c)$$

■ 分别考虑“判断可能”和“求解”。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次， $a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$ 。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4 。
同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次， $a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$ 。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4 。
同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次， $a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+2})$ 。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4 。
同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。
- 以此类推，假设第 k 次， $a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
那么 b_i 也是由距离它小于 k 的点更新。

例题

最大公约数

题解

显然，当且仅当所有元素的 \gcd 不为 1 时，答案不存在。
当答案存在时，我们考虑每一次矩阵变换。

- 第一次， $a_{x,y}$ 由 $a_{x,y}$ 上下左右四个点来更新。
即 $a_{x,y} = \gcd(a_{x-1,y}, a_{x+1,y}, a_{x,y-1}, a_{x,y+1})$ 。
- 记 $a_{x,y}$ 周围的四个点为 b_1, b_2, b_3, b_4 。
同时 b_i 也由它们的上下左右四个点来更新
- 第二次，相当于 $a_{x,y}$ 由每个 b_i 周围的四个点更新。
即相当于 $a_{x,y}$ 由距离它小于 2 的点更新。
- 同时 b_i 也是由距离它小于 2 的点更新。
- 以此类推，假设第 k 次， $a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
那么 b_i 也是由距离它小于 k 的点更新。
- 那么显然第 $k+1$ 次， $a_{x,y}$ 由距离 b_i 小于 k 的点更新。
即相当于距离它小于 $k+1$ 的点更新。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次， $a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后， $a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 gcd。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次， $a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后， $a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 \gcd 。
- 题目转化为：从 (x,y) 开始一层层取 \gcd ，直到 $\gcd = 1$ 。

例题

最大公约数

题解

- 即我们归纳证明了，第 k 次， $a_{x,y}$ 由距离它小于 k 的点更新。
- 即，第 k 次变换后， $a_{x,y}$ 的值变成了所有距它小于等于 k 的点的值的 \gcd 。
- 题目转化为：从 (x,y) 开始一层层取 \gcd ，直到 $\gcd = 1$ 。
- 从 (x,y) 开始 bfs，同时对每个遍历到的元素取 \gcd ，直到 $\gcd = 1$ 。
- 遍历层数就是答案。

最小公倍数

LCM

■ 事实：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b)$$

■ 所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 $O(1)$ 的时间内求出

最小公倍数

LCM

■ 事实：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b)$$

■ 所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 $O(1)$ 的时间内求出

■ 算法实现：

```
1 int lcm(int a, int b) {  
2     return a * b / __gcd(a, b);  
3 }
```

最小公倍数

LCM

■ 事实：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b)$$

■ 所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 $O(1)$ 的时间内求出

■ 算法实现：

```
1 int lcm(int a, int b) {  
2     return a * b / __gcd(a, b);  
3 }
```

■ 多个数的 LCM

■ 与多个数的 GCD 类似

最小公倍数

LCM

■ 事实：

$$\forall a, b > 0, a, b \in \mathbb{N}, a \times b = \gcd(a, b) \times \text{lcm}(a, b)$$

■ 所以求出俩数的 GCD 后 LCM 可在 $O(1)$ 的时间内求出

■ 算法实现：

```
1 int lcm(int a, int b) {  
2     return a * b / __gcd(a, b);  
3 }
```

■ 多个数的 LCM

- 与多个数的 GCD 类似
- 每次取出两个数求 LCM 后再将 LCM 放回去，不会对所需要的答案造成影响

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接: [NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0, y_0 , ($2 \leq x_0, y_0 \leq 10^5$), 求出满足下列条件的 P, Q 的个数:

- P, Q 是正整数。
- 要求 P, Q 以 x_0 为最大公约数, 以 y_0 为最小公倍数。

试求: 满足条件的所有可能的 P, Q 的个数。

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接: [NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0, y_0 , ($2 \leq x_0, y_0 \leq 10^5$), 求出满足下列条件的 P, Q 的个数:

- P, Q 是正整数。
- 要求 P, Q 以 x_0 为最大公约数, 以 y_0 为最小公倍数。

试求: 满足条件的所有可能的 P, Q 的个数。

题解

- 根据 $P \times Q = \gcd(P, Q) \times \text{lcm}(P, Q) = x_0 y_0$, 我们可以得到 $P \times Q$ 的值
- 枚举 $i | (x_0 y_0)$, 考虑 $i, \lfloor \frac{x_0 y_0}{i} \rfloor$ 的最大公约数和最小公倍数是不是分别为 P, Q 即可

例题

最大公约数和最小公倍数问题

题目链接: [NOIP2001 普及组] 最大公约数和最小公倍数问题

题目描述

输入两个正整数 x_0, y_0 , ($2 \leq x_0, y_0 \leq 10^5$), 求出满足下列条件的 P, Q 的个数:

- P, Q 是正整数。
- 要求 P, Q 以 x_0 为最大公约数, 以 y_0 为最小公倍数。

试求: 满足条件的所有可能的 P, Q 的个数。

题解

- 根据 $P \times Q = \gcd(P, Q) \times \text{lcm}(P, Q) = x_0 y_0$, 我们可以得到 $P \times Q$ 的值
- 枚举 $i | (x_0 y_0)$, 考虑 $i, \lfloor \frac{x_0 y_0}{i} \rfloor$ 的最大公约数和最小公倍数是不是分别为 P, Q 即可
- 时间复杂度: $O(n \log n)$

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的一组可行解

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的一组可行解
- 常用于求解**乘法逆元**

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的一组可行解
- 常用于求解乘法逆元
- 裴蜀定理：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a, b 是不全为零的整数，则存在整数 x, y ，使得 $ax + by = \gcd(a, b)$ 。

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的一组可行解
- 常用于求解乘法逆元
- 裴蜀定理：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a, b 是不全为零的整数，则存在整数 x, y ，使得 $ax + by = \gcd(a, b)$ 。

- 算法思想：将问题 (a, b) 转化为 $(b, a \bmod b)$

拓展欧几里得算法

简介

- 拓展欧几里得算法用于求解 $ax + by = \gcd(a, b)$ 的一组可行解
- 常用于求解乘法逆元
- 裴蜀定理：该方程组的解一定存在

定理（裴蜀定理）

设 a, b 是不全为零的整数，则存在整数 x, y ，使得 $ax + by = \gcd(a, b)$ 。

- 算法思想：将问题 (a, b) 转化为 $(b, a \bmod b)$
- 要注意负值

证明

Proof.

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$ax_1 + by_1 = \gcd(a, b)$$

$$bx_2 + (a \bmod b)y_2 = \gcd(b, a \bmod b)$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$ax_1 + by_1 = \gcd(a, b)$$

$$bx_2 + (a \bmod b)y_2 = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$\therefore \gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$ax_1 + by_1 = \gcd(a, b)$$

$$bx_2 + (a \bmod b)y_2 = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$\because \gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$\therefore ax_1 + by_1 = bx_2 + (a \bmod b)y_2$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$ax_1 + by_1 = \gcd(a, b)$$

$$bx_2 + (a \bmod b)y_2 = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$\because \gcd(a, b) = \gcd(b, a \bmod b)$$

$$\therefore ax_1 + by_1 = bx_2 + (a \bmod b)y_2$$

$$\because a \bmod b = a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \times b\right)$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned}
 ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
 bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
 \therefore a \bmod b &= a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \times b\right) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + \left(a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b\right)\right)y_2 \\
 &= ay_2 + bx_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot by_2
 \end{aligned}$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned}
 ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
 bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
 \therefore a \bmod b &= a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \times b\right) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + \left(a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b\right)\right)y_2 \\
 &= ay_2 + bx_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot by_2 \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= ay_2 + b\left(x_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y_2\right)
 \end{aligned}$$

拓展欧几里得算法

证明

Proof.

$$\begin{aligned}
 ax_1 + by_1 &= \gcd(a, b) \\
 bx_2 + (a \bmod b)y_2 &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore \gcd(a, b) &= \gcd(b, a \bmod b) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + (a \bmod b)y_2 \\
 \therefore a \bmod b &= a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \times b\right) \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= bx_2 + \left(a - \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot b\right)\right)y_2 \\
 &= ay_2 + bx_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \cdot by_2 \\
 \therefore ax_1 + by_1 &= ay_2 + b\left(x_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y_2\right) \\
 \therefore a &= a, \quad b = b \\
 \therefore x_1 &= y_2, \quad y_1 = x_2 - \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor y_2
 \end{aligned}$$



拓展欧几里得算法

实现

- $x_1 = y_2, y_1 = x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2$
- 其中 x_1, y_1 是问题 (a, b) 的答案
 x_2, y_2 是问题 $(b, a \bmod b)$ 的答案

拓展欧几里得算法

实现

- $x_1 = y_2, y_1 = x_2 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor y_2$
- 其中 x_1, y_1 是问题 (a, b) 的答案
 x_2, y_2 是问题 $(b, a \bmod b)$ 的答案
- 算法实现：

```
1  ll exgcd(ll a, ll b, ll& x, ll& y){
2      if (!b){
3          x = 1, y = 0;
4          return a;
5      }
6      ll gcd = exgcd(b, a % b, y, x);
7      y -= a / b * x;
8      return gcd;
9  }
```

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax + by = c$ 的一组解为 (x_0, y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} * t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax + by = c$ 的一组解为 (x_0, y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} * t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

- 另外，拓欧算法中，以下定理成立：

定理

当 $a, b > 0$ 且 $\gcd(a, b) \neq \min(a, b)$ 时有 $|x| < \frac{b}{\gcd(a, b)}$ 和 $|y| < \frac{a}{\gcd(a, b)}$

拓展欧几里得算法

拓展

- 我们已经知道了不定方程 $ax + by = c$ 的一组解为 (x_0, y_0) 那么它的全部解为:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{\gcd(a,b)} * t \\ y = y_0 - \frac{a}{\gcd(a,b)} * t \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

- 另外，拓欧算法中，以下定理成立：

定理

当 $a, b > 0$ 且 $\gcd(a, b) \neq \min(a, b)$ 时有 $|x| < \frac{b}{\gcd(a,b)}$ 和 $|y| < \frac{a}{\gcd(a,b)}$

- 此定理告知我们以下两个事实：
 1. 扩欧过程中不会发生溢出
 2. 不定方程的某个最小正整数解为 $\left(x + \frac{b}{\gcd(a,b)}\right) \bmod \frac{b}{\gcd(a,b)}$ 和 $\left(y + \frac{a}{\gcd(a,b)}\right) \bmod \frac{a}{\gcd(a,b)}$ 。

例题

同余方程

题目链接: [NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。

数据保证一定有解。

$2 \leq a, b \leq 2e9$

例题

同余方程

题目链接: [NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。

数据保证一定有解。

$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$, 即 $ax + by = 1$ 。

例题

同余方程

题目链接: [NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。

数据保证一定有解。

$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$, 即 $ax + by = 1$ 。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。

例题

同余方程

题目链接: [NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。

数据保证一定有解。

$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$, 即 $ax + by = 1$ 。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。
- 时间复杂度: $O(\log a)$

例题

同余方程

题目链接: [NOIP2012 提高组] 同余方程

题目描述

求关于 x 的同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整数解。
数据保证一定有解。

$2 \leq a, b \leq 2e9$

题解

- $ax \equiv 1 \pmod{b}$ 可以转化为 $ax = (-b)y + 1$, 即 $ax + by = 1$ 。
- 拓展欧几里得裸题。
- 注意判断负值。
- 时间复杂度: $O(\log a)$

拓展欧几里得习题推荐:

- P1516 青蛙的约会 - 洛谷
- 5512 Pagodas - HDOJ (裴蜀定理)

9 结束

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$ ，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地， $\varphi(1) = 1$ 。

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$$

显然，当 n 是质数时， $\varphi(n) = n - 1$ 。

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$ ，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地， $\varphi(1) = 1$ 。

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$$

显然，当 n 是质数时， $\varphi(n) = n - 1$ 。

性质：

- 欧拉函数是积性函数（证明：[欧拉函数的积性证明](#)）
 - **积性函数：**若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a, b) = 1$ 时，有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ 。
 - **完全积性函数：**若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$ ，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地， $\varphi(1) = 1$ 。

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$$

显然，当 n 是质数时， $\varphi(n) = n - 1$ 。

性质：

- 欧拉函数是积性函数（证明：[欧拉函数的积性证明](#)）
 - **积性函数：**若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a, b) = 1$ 时，有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ 。
 - **完全积性函数：**若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ 。由莫比乌斯反演可得。

欧拉函数

基本概念

定义：欧拉函数，即 $\varphi(n)$ ，表示小于等于 n 且和 n 互质的数的个数。特别地， $\varphi(1) = 1$ 。

$$\varphi(n) = \sum_{i=1}^n [\gcd(i, n) = 1]$$

显然，当 n 是质数时， $\varphi(n) = n - 1$ 。

性质：

- 欧拉函数是积性函数（证明：[欧拉函数的积性证明](#)）
 - **积性函数：**若 $f(n)$ 是积性函数，那么当 $\gcd(a, b) = 1$ 时，有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ 。
 - **完全积性函数：**若 $f(n)$ 是完全积性函数，那么有 $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$
- $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ 。由莫比乌斯反演可得。
- 若 $n = p^k$ ，其中 p 是质数，那么 $\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$ 。
- 由唯一分解定理，设 $n = \prod_{i=1}^n p_i^{k_i}$ ，其中 p_i 是质数，有

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{i=1}^s \frac{p_i - 1}{p_i}。$$

欧拉函数

求解

■ 求解单个欧拉函数值：直接质因数分解就好了

```
1  int phi(int n) {  
2      int ans = n;  
3      for (int i = 2; i * i <= n; i++)  
4          if (n % i == 0) {  
5              ans = ans / i * (i - 1);  
6              while (n % i == 0) n /= i;  
7          }  
8      if (n > 1) ans = ans / n * (n - 1);  
9      return ans;  
10 }
```

欧拉函数

求解

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

■ 求解 $1 \sim n$ 的欧拉函数值：线性筛

```

1 void init() {
2     int cnt = 0;
3     phi[1] = 1;
4     for (int i = 2; i < MAXN; i++) {
5         if (!inp[i]) {
6             prime[++cnt] = i;
7             phi[i] = i - 1;
8         }
9
10        for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] < MAXN; j++) {
11            inp[i * prime[j]] = true;
12            if (i % prime[j] == 0) {
13                phi[i * prime[j]] = phi[i] * prime[j];
14                break;
15            }
16            else
17                phi[i * prime[j]] = phi[i] * (prime[j] - 1);
18        }
19    }
20 }

```

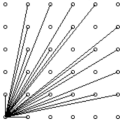
欧拉函数

例题

题目链接: P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员，C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N * N$ 的方阵，为了保证队伍在行进中整齐划一，C君会跟在仪仗队的左后方，根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



现在，C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

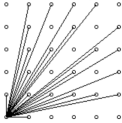
欧拉函数

例题

题目链接: P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员, C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N * N$ 的方阵, 为了保证队伍在行进中整齐划一, C君会跟在仪仗队的左后方, 根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



现在, C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？

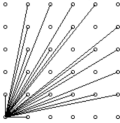
欧拉函数

例题

题目链接: P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员, C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N * N$ 的方阵, 为了保证队伍在行进中整齐划一, C君会跟在仪仗队的左后方, 根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



现在, C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住?
- 假设俩人坐标为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $x_1 \leq x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住

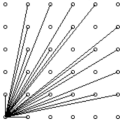
欧拉函数

例题

题目链接: P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员, C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N * N$ 的方阵, 为了保证队伍在行进中整齐划一, C君会跟在仪仗队的左后方, 根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



现在, C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住？
- 假设俩人坐标为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $x_1 \leq x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住
- 只考虑 $y < x$ 的部分, 可得第 i 列只有 $\phi(i)$ 个人没被挡住, 即可被看见

欧拉函数

例题

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

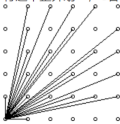
习题推荐

结束

题目链接: P2158 [SDOI2008] 仪仗队 - 洛谷

题目描述

作为体育委员, C君负责这次运动会仪仗队的训练。仪仗队是由学生组成的 $N * N$ 的方阵, 为了保证队伍在行进中整齐划一, C君会跟在仪仗队的左后方, 根据其视线所及的学生人数来判断队伍是否整齐(如下图)。



现在, C君希望你告诉他队伍整齐时能看到的学生人数。

题解

- 什么时候一个人会被另一个人挡住?
- 假设俩人坐标为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $x_1 \leq x_2$
- 显然当且仅当 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ 时 2 会被 1 挡住
- 只考虑 $y < x$ 的部分, 可得第 i 列只有 $\varphi(i)$ 个人没被挡住, 即可被看见
- 所以 $ans = 2 * (\sum_{i=1}^n \varphi(i)) + 1$

费马小定理

定理（费马小定理）

若 p 为素数， $\gcd(a, p) = 1$ ，则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

另一个形式：对于任意整数 a ，有 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

费马小定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定理 (费马小定理)

若 p 为素数, $\gcd(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

另一个形式: 对于任意整数 a , 有 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

费马小定理常用于结合快速幂求解乘法逆元:

$$a^{p-2} \cdot a \equiv 1 \pmod{p}, (\gcd(a, p) = 1)$$

费马小定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公因数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定理（费马小定理）

若 p 为素数, $\gcd(a, p) = 1$, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ 。

另一个形式：对于任意整数 a , 有 $a^p \equiv a \pmod{p}$ 。

费马小定理常用于结合快速幂求解乘法逆元：

$$a^{p-2} \cdot a \equiv 1 \pmod{p}, (\gcd(a, p) = 1)$$

证明：

我有一个对这个命题的十分美妙的证明，这里空白太小，我写不下了。

费马小定理

证明

Proof.

设一个质数为 p , 且 $\gcd(a, p) = 1$ 。

构造一个序列: $A = \{1, 2, 3 \dots, p-1\}$, 这个序列有着这样一个性质:

$$\prod_{i=1}^n A_i \equiv \prod_{i=1}^n (A_i \times a) \pmod{p}$$

费马小定理

证明

Proof.

设一个质数为 p , 且 $\gcd(a, p) = 1$ 。

构造一个序列: $A = \{1, 2, 3 \dots, p-1\}$, 这个序列有着这样一个性质:

$$\prod_{i=1}^n A_i \equiv \prod_{i=1}^n (A_i \times a) \pmod{p}$$

思路: 反证法可证得 $\forall i \neq j, A_i a \not\equiv A_j a \pmod{p}$

那么 $\{A_i a\}$ 将取到 $1 \sim p-1$ 内的所有值。

费马小定理

证明

Proof.

设一个质数为 p , 且 $\gcd(a, p) = 1$ 。

构造一个序列: $A = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$, 这个序列有着这样一个性质:

$$\prod_{i=1}^n A_i \equiv \prod_{i=1}^n (A_i \times a) \pmod{p}$$

思路: 反证法可证得 $\forall i \neq j, A_i a \not\equiv A_j a \pmod{p}$

那么 $\{A_i a\}$ 将取到 $1 \sim p-1$ 内的所有值。

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (A_i \times a) &\equiv \prod_{i=1}^n A_i \pmod{p} \\ \Rightarrow a^{p-1} \prod_{i=1}^n A_i &\equiv \prod_{i=1}^n A_i \pmod{p} \\ \Rightarrow a^{p-1} &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$



欧拉定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

定理（欧拉定理）

若 $\gcd(a, m) = 1$ ，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

则当 m 为质数时， $\varphi(m) = m - 1$ ，则可得 $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ，即得到了费马小定理。

欧拉定理

定理（欧拉定理）

若 $\gcd(a, m) = 1$ ，则 $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ 。

则当 m 为质数时， $\varphi(m) = m - 1$ ，则可得 $a^{m-1} \equiv 1 \pmod{m}$ ，即得到了费马小定理。

证明： 欧拉定理与费马小定理及证明

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a, p) = 1$ 时使用，限制很大。

拓展欧拉定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

数论分块

习题推荐

结束

欧拉定理只能在 $\gcd(a, p) = 1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a, p) = 1 \\ a^b, & \gcd(a, p) \neq 1, b < \varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)}, & \gcd(a, p) \neq 1, b \geq \varphi(p) \end{cases} \pmod{p}$$

拓展欧拉定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

欧拉定理只能在 $\gcd(a, p) = 1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a, p) = 1 \\ a^b, & \gcd(a, p) \neq 1, b < \varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)}, & \gcd(a, p) \neq 1, b \geq \varphi(p) \end{cases} \pmod{p}$$

完美满足所有情况，非常好用。—(虽然我没怎么用过)—

拓展欧拉定理

欧拉定理只能在 $\gcd(a, p) = 1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a, p) = 1 \\ a^b, & \gcd(a, p) \neq 1, b < \varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)}, & \gcd(a, p) \neq 1, b \geq \varphi(p) \end{cases} \pmod{p}$$

完美满足所有情况，非常好用。—(虽然我没怎么用过)—

证明：太长了我写不下 我不会

拓展欧拉定理

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

欧拉定理只能在 $\gcd(a, p) = 1$ 时使用，限制很大。

定理（拓展欧拉定理）

$$a^b \equiv \begin{cases} a^{b \bmod \varphi(p)}, & \gcd(a, p) = 1 \\ a^b, & \gcd(a, p) \neq 1, b < \varphi(p) \\ a^{b \bmod \varphi(p) + \varphi(p)}, & \gcd(a, p) \neq 1, b \geq \varphi(p) \end{cases} \pmod{p}$$

完美满足所有情况，非常好用。—(虽然我没怎么用过)—

证明：太长了我写不下 我不会

常用于欧拉降幂。

拓展欧拉定理

例题

题目链接: [P1066 AB%P - XDOJ](#)

题目描述

求解:

$$(\dots((A^{B_0})^{B_1})\dots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中, $B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$, $P = 1e9 + 7$ 。

数据范围: $0 < A < 2^{31}, 0 \leq n \leq 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

拓展欧拉定理

例题

题目链接: [P1066 AB%P - XDOJ](#)

题目描述

求解:

$$(\dots((A^{B_0})^{B_1})\dots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中, $B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$, $P = 1e9 + 7$ 。

数据范围: $0 < A < 2^{31}, 0 \leq n \leq 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$, 但是 B_i 是指数级增加, 无法直接求出

拓展欧拉定理

例题

题目链接: P1066 AB%P - XDOJ

题目描述

求解:

$$(\dots((A^{B_0})^{B_1})\dots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中, $B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$, $P = 1e9 + 7$ 。数据范围: $0 < A < 2^{31}, 0 \leq n \leq 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$, 但是 B_i 是指数级增加, 无法直接求出
- 显然欧拉降幂, 考虑适用条件
- $P = 1e9 + 7$ 是质数, 所以要么 $\gcd(A, P) = 1$, 要么 $P|A$

拓展欧拉定理

例题

题目链接: [P1066 AB%P - XDOJ](#)

题目描述

求解:

$$(\dots((A^{B_0})^{B_1})\dots)^{B_{n-1}} \bmod P$$

其中, $B_i = B_{i-1}^2 - 1 (i > 0)$, $P = 1e9 + 7$ 。

数据范围: $0 < A < 2^{31}, 0 \leq n \leq 1e5, 1 < B_0 < 2^{31}$

题解

- 即求 $A^{\sum_{i=0}^{n-1} B_i} \bmod p$, 但是 B_i 是指数级增加, 无法直接求出
- 显然欧拉降幂, 考虑适用条件
- $P = 1e9 + 7$ 是质数, 所以要么 $\gcd(A, P) = 1$, 要么 $P|A$
- 显然二者条件下, $A^x \equiv A^{x \bmod \varphi(P)} \pmod{P}$ 均成立
- 所以先求出 $\sum_{i=0}^{n-1} B_i \bmod \varphi(P)$ ($\varphi(P) = P - 1$) 即可。

1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

- ## ■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

乘法逆元

简介

乘法逆元：如果一个线性同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ ，则 x 称为 $a \bmod b$ 的逆元，记作 a^{-1} 。

乘法逆元

简介

乘法逆元：如果一个线性同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ ，则 x 称为 $a \bmod b$ 的逆元，记作 a^{-1} 。

用处：

- 求解 $\frac{A}{B} \bmod P$
- 避免浮点运算，提高精度
- 某些题目的要求

乘法逆元

简介

乘法逆元：如果一个线性同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ ，则 x 称为 $a \bmod b$ 的逆元，记作 a^{-1} 。

用处：

- 求解 $\frac{A}{B} \bmod P$
- 避免浮点运算，提高精度
- 某些题目的要求

求解：

- 快速幂方法
- 拓展欧几里得方法

乘法逆元

简介

乘法逆元：如果一个线性同余方程 $ax \equiv 1 \pmod{b}$ ，则 x 称为 $a \bmod b$ 的逆元，记作 a^{-1} 。

用处：

- 求解 $\frac{A}{B} \bmod P$
- 避免浮点运算，提高精度
- 某些题目的要求

求解：

- 快速幂方法
- 拓展欧几里得方法
- 依据个人喜好

乘法逆元

求解单个

快速幂

■ 事实：

$$\begin{aligned} a^{b-1} &\equiv 1 \pmod{p} \\ \Rightarrow a \cdot a^{b-2} &\equiv 1 \pmod{p} \\ \Rightarrow x &\equiv a^{b-2} \pmod{p} \end{aligned}$$

乘法逆元

求解单个

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

快速幂

■ 事实：

$$\begin{aligned}
 a^{b-1} &\equiv 1 \pmod{p} \\
 \Rightarrow a \cdot a^{b-2} &\equiv 1 \pmod{p} \\
 \Rightarrow x &\equiv a^{b-2} \pmod{p}
 \end{aligned}$$

■ 算法实现：

```

1 inline int qpow(long long a, int b) {
2     int ans = 1;
3     a = (a % p + p) % p;
4     for (; b; b >>= 1) {
5         if (b & 1) ans = (a * ans) % p;
6         a = (a * a) % p;
7     }
8     return ans;
9 }
10 // int inv = qpow(a, p - 2);

```

乘法逆元

求解单个

快速幂

■ 事实：

$$\begin{aligned} a^{b-1} &\equiv 1 \pmod{p} \\ \Rightarrow a \cdot a^{b-2} &\equiv 1 \pmod{p} \\ \Rightarrow x &\equiv a^{b-2} \pmod{p} \end{aligned}$$

■ 算法实现：

```

1 inline int qpow(long long a, int b) {
2     int ans = 1;
3     a = (a % p + p) % p;
4     for (; b >>= 1) {
5         if (b & 1) ans = (a * ans) % p;
6         a = (a * a) % p;
7     }
8     return ans;
9 }
10 // int inv = qpow(a, p - 2);

```

■ 时间复杂度： $O(\log n)$

乘法逆元

求解单个

拓展欧几里得：

■ 事实：

$$ax \equiv 1 \pmod{p}$$

$$ax = (-y) \cdot p + 1$$

$$\text{求解： } ax + py = 1$$

乘法逆元

求解单个

拓展欧几里得：

■ 事实：

$$ax \equiv 1 \pmod{p}$$

$$ax = (-y) \cdot p + 1$$

$$\text{求解： } ax + py = 1$$

■ 算法实现：

```

1  int exgcd(int a, int b, int& x, int& y) {
2      if (b == 0) {
3          x = 1, y = 0;
4          return a;
5      }
6      int g = exgcd(b, a % b, y, x);
7      y -= a / b * x;
8      return g;
9  }
10 // exgcd(a, p, x, y);
11 // int inv = (x % p + p) % p;
```

乘法逆元

求解单个

拓展欧几里得：

■ 事实：

$$ax \equiv 1 \pmod{p}$$

$$ax = (-y) \cdot p + 1$$

$$\text{求解: } ax + py = 1$$

■ 算法实现：

```
1 int exgcd(int a, int b, int& x, int& y) {  
2     if (b == 0) {  
3         x = 1, y = 0;  
4         return a;  
5     }  
6     int g = exgcd(b, a % b, y, x);  
7     y -= a / b * x;  
8     return g;  
9 }  
10 // exgcd(a, p, x, y);  
11 // int inv = (x % p + p) % p;
```

■ 时间复杂度： $O(\log n)$

乘法逆元

求解 $1 \sim n$

线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

乘法逆元

求解 $1 \sim n$

线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。

乘法逆元

求解 $1 \sim n$

线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。

思路: 通过 $1 \sim i-1$ 的逆元在 $O(1)$ 的复杂度下求解 i^{-1} 。

乘法逆元

求解 $1 \sim n$

线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。

思路: 通过 $1 \sim i-1$ 的逆元在 $O(1)$ 的复杂度下求解 i^{-1} 。

设:

$$k = \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor, j = p \bmod i, \text{ 则 } p = ki + j$$

乘法逆元

求解 $1 \sim n$ 线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。**思路:** 通过 $1 \sim i-1$ 的逆元在 $O(1)$ 的复杂度下求解 i^{-1} 。

设:

$$k = \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor, j = p \bmod i, \text{ 则 } p = ki + j$$

我们有:

$$p = ki + j \equiv 0 \pmod{p}$$

乘法逆元

求解 $1 \sim n$ 线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。**思路:** 通过 $1 \sim i-1$ 的逆元在 $O(1)$ 的复杂度下求解 i^{-1} 。

设:

$$k = \left\lfloor \frac{p}{i} \right\rfloor, j = p \bmod i, \text{ 则 } p = ki + j$$

我们有:

$$p = ki + j \equiv 0 \pmod{p}$$

$$ki \cdot i^{-1} j^{-1} + j \cdot i^{-1} j^{-1} \equiv 0 \cdot i^{-1} j^{-1} \pmod{p}$$

$$k \cdot j^{-1} + i^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

乘法逆元

求解 $1 \sim n$ 线性时间复杂度求出 $1, 2, \dots, n$ 中每个数关于 p 的逆元。

Proof.

事实: $\forall p \in \mathbb{Z}, 1 \times 1 \equiv 1 \pmod{p}$ 恒成立, 即 \pmod{p} 意义下 $1^{-1} = 1$ 。**思路:** 通过 $1 \sim i-1$ 的逆元在 $O(1)$ 的复杂度下求解 i^{-1} 。

设:

$$k = \lfloor \frac{p}{i} \rfloor, j = p \bmod i, \text{ 则 } p = ki + j$$

我们有:

$$p = ki + j \equiv 0 \pmod{p}$$

$$ki \cdot i^{-1} j^{-1} + j \cdot i^{-1} j^{-1} \equiv 0 \cdot i^{-1} j^{-1} \pmod{p}$$

$$k \cdot j^{-1} + i^{-1} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$i^{-1} \equiv -k \cdot j^{-1} \pmod{p}$$

$$i^{-1} \equiv -k \cdot \lfloor \frac{p}{i} \rfloor^{-1} \pmod{p}$$



1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

- ## ■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

演

数论分块

习题推荐

结束

引理

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反演

莫比乌斯反演

数论分块

习题推荐

结束

引理

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$

Proof.

$$\frac{a}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r (0 \leq r < 1)$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c} \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} + \frac{r}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$



数论分块

引理

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$

Proof.

$$\frac{a}{b} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r (0 \leq r < 1)$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{a}{bc} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{c} \left(\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + r \right) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} + \frac{r}{c} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}{c} \right\rfloor$$



引理

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, \left| \left\{ \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \mid d \in \mathbb{N}_+, d \leq n \right\} \right| \leq \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor$$

$|V|$ 表示集合 V 的元素个数。

求解类似于 $\sum_{i=1}^n f(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$ 的式子。(假设 $f(x)$ 可以 $O(1)$ 求出)

- 直接求和，时间复杂度为 $O(n)$ ，可通过数据约为 $n \leq 1e8$ 。
- 事实上， $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 种，能否简化求和次数？

求解类似于 $\sum_{i=1}^n f(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$ 的式子。(假设 $f(x)$ 可以 $O(1)$ 求出)

- 直接求和，时间复杂度为 $O(n)$ ，可通过数据约为 $n \leq 1e8$ 。
- 事实上， $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$ 只有 $O(\sqrt{n})$ 种，能否简化求和次数？

对于任意一个 $i(i \leq n)$ ，我们需要找到一个最大的 $j(i \leq j \leq n)$ ，使得：

$$\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor$$

可得：

$$j = \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor$$

数论分块

证明

Proof.

$$\begin{aligned}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor &\leq \frac{n}{i} \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor &\geq \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{i}} \right\rfloor = \lfloor i \rfloor = i \\ \Rightarrow i &\leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor = j\end{aligned}$$



数论分块

证明

Proof.

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor &\leq \frac{n}{i} \\ \Rightarrow \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor &\geq \left\lfloor \frac{n}{\frac{n}{i}} \right\rfloor = \lfloor i \rfloor = i \\ \Rightarrow i &\leq \left\lfloor \frac{n}{\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor} \right\rfloor = j \end{aligned}$$



■ 基本使用：

```

1 for (int l = 1, r; l <= n; l = r + 1) {
2     int t = n / l;
3     r = n / t;
4     // ... 若 l <= i <= r, 那么 n / i == t 为真
5 }
```

数论分块

例题

题目链接: [P2261 \[CQOI2007\] 余数求和 - 洛谷](#)

题目描述

给定正整数 n 和 k , 求解:

$$G(n, k) = \sum_{i=1}^n k \bmod i$$

数据范围: $1 \leq n, k \leq 10^9$

数论分块

例题

题目链接: [P2261 \[CQOI2007\] 余数求和 - 洛谷](#)

题目描述

给定正整数 n 和 k , 求解:

$$G(n, k) = \sum_{i=1}^n k \bmod i$$

数据范围: $1 \leq n, k \leq 10^9$

题解

- 直接求和, $O(n)$ 时间复杂度会 TLE。

数论分块

例题

题目链接: [P2261 \[CQOI2007\] 余数求和 - 洛谷](#)

题目描述

给定正整数 n 和 k , 求解:

$$G(n, k) = \sum_{i=1}^n k \bmod i$$

数据范围: $1 \leq n, k \leq 10^9$

题解

- 直接求和, $O(n)$ 时间复杂度会 TLE。
- 转化为整除形式, 然后数论分块:

$$\text{ans} = \sum_{i=1}^n (k \bmod i) = \sum_{i=1}^n k - i \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor = n \cdot k - \sum_{i=1}^{\min(n, k)} i \left\lfloor \frac{k}{i} \right\rfloor$$

数论分块

例题

■ 算法实现：

```
1  #include<iostream>
2  using namespace std;
3
4  inline long long sum(long long i, long long j){
5      return (j * (j + 1) / 2 - i * (i - 1) / 2);
6  }
7
8  int main(){
9      long long n, k, ans;
10     cin >> n >> k;
11     ans = n * k;
12     for (long long i = 1, j; i <= k && i <= n; i = j + 1){
13         long long t = k / i;
14         j = min(k / t, n);
15         ans -= t * sum(i, j);
16     }
17     cout << ans ;
18     return 0;
19 }
```

数论分块

例题

题目推荐：

- P2261 [CQOI2007] 余数求和 - 洛谷
- P2260 [清华集训 2012] 模积和 - 洛谷
- Debugging - Codeforces

1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

- ## ■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

习题推荐

■ 基础数论题单

■ 5512 Pagodas - HDOJ

- P1066 AB%P - XDOJ

- Debugging - Codeforces

1 概述

- 简介
- 符号约定

2 整除与同余

- 整除与同余
- 快速幂

3 素数

- 素数
- 筛法

4 欧几里得

- 因数
- 最大公约数
- 最小公倍数

■ 拓展欧几里得

5 欧拉函数

- 欧拉函数
- 费马小定理
- 欧拉定理

6 乘法逆元

- 简介
- 单个求解
- 多个求解

7 莫比乌斯反演

- ## ■ 数论分块

8 习题推荐

9 结束

数论基础

dcac

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反

演

数论分块

习题推荐

结束

Questions?

数论基础

dcac

概述

简介

符号约定

整除与同余

整除与同余

快速幂

素数

素数

筛法

欧几里得

因数

最大公约数

最小公倍数

拓展欧几里得

欧拉函数

欧拉函数

费马小定理

欧拉定理

乘法逆元

简介

单个求解

多个求解

莫比乌斯反

演

数论分块

习题推荐

结束

Thank!