Kryptologia laboratorium 5. Szyfry podstawieniowe polialfabetyczne

Tomasz Gzella Instytut Matematyki Stosowanej





Oparty na kluczu K o długości n. Klucz należy przedłużyć do długości tekstu jawnego przez powielenie.

Następnie należy przyporządkować literom (tekstu jawnego i klucza) pozycje liter w alfabecie. Oznaczy te liczby tekście jawnym jako $x = \{x_i\}_{i=1}^m$, a w przedłużonym kluczu $K = \{k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}, ..., k_m\}$. Wystarczy dodać je wg wzoru

$$E_K(x) = x_i + k_i \mod 26$$

otrzymując pozycje liter alfabetu w szyfrogramie $y = \{y_i\}_{i=1}^m$.

Oparty na kluczu K o długości n. Klucz należy przedłużyć do długości tekstu jawnego przez powielenie.

Następnie należy przyporządkować literom (tekstu jawnego i klucza) pozycje liter w alfabecie. Oznaczy te liczby tekście jawnym jako $x = \{x_i\}_{i=1}^m$, a w przedłużonym kluczu $K = \{k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}, ..., k_m\}$. Wystarczy dodać je wg wzoru

$$E_K(x) = x_i + k_i \mod 26$$

otrzymując pozycje liter alfabetu w szyfrogramie $y = \{y_i\}_{i=1}^m$. Deszyfrowanie przebiega według analogicznego wzoru:

$$D_K(x) = y_i - k_i \mod 26$$

Oparty na kluczu K o długości n. Klucz należy przedłużyć do długości tekstu jawnego przez powielenie.

Następnie należy przyporządkować literom (tekstu jawnego i klucza) pozycje liter w alfabecie. Oznaczy te liczby tekście jawnym jako $x = \{x_i\}_{i=1}^m$, a w przedłużonym kluczu $K = \{k_1, k_2, ..., k_n, k_{n+1}, ..., k_m\}$. Wystarczy dodać je wg wzoru

$$E_K(x) = x_i + k_i \mod 26$$

otrzymując pozycje liter alfabetu w szyfrogramie $y = \{y_i\}_{i=1}^m$. Deszyfrowanie przebiega według analogicznego wzoru:

$$D_K(x) = y_i - k_i \mod 26$$

Przyjrzyjmy się przykładowi:

tekst jawny: tajny tekst klucz: gdansk

tekstjawny: tajny tekst

```
tekst jawny: t a j n y t e k s t tekst jawny (num): 19 \quad 0 \quad 9 \quad 13 \quad 24 \quad 19 \quad 4 \quad 10 \quad 18 \quad 19
```

```
tekst jawny: t a j n y t e k s t tekst jawny (num): 19 0 9 13 24 19 4 10 18 19 klucz: g d a n s k g d a n
```

```
tekst jawny:
                 ajnyt
                                    k
tekst jawny (num): 19 0 9 13 24 19
                                    10
                                       18
                                          19
        klucz: g d a n s k g d
                                       a n
               3
                    0
                      13
                          18
                                    3
    klucz (num):
                             10
                                       0
                                          13
```

```
tekst jawny:
                   a j
                                        k
                        n
tekst jawny (num):
              19
                         13
                             24
                                19
                                        10
                                           18
                                               19
                                 k
         klucz:
              g dan s
                                    g d
                                            a
                                               n
              6 3 0 13
                                   6 3
    klucz (num):
                             18
                                10
                                            0
                                               13
   suma mod 26:
               25 3
                      9
                         0
                             16
                                 3
                                    10
                                        13
                                               6
                                            18
```

```
t
     tekst jawny:
                          j
                                                k
                       a
                              n
                                      t
                                                    S
tekst jawny (num):
                 19
                             13
                                  24
                                      19
                                               10
                                                   18
                                                        19
           klucz:
                       d
                          a
                                       k
                                               d
                 g
                              n
                                 S
                                           g
                                                    a
                                                        n
                 6 3
                                           6
     klucz (num):
                          0 13
                                  18
                                      10
                                               3
                                                    0
                                                        13
                  25 3 9
                                       3
    suma mod 26:
                              0
                                  16
                                           10
                                               13
                                                   18
                                                        6
                   Ζ
                          J
                              Α
                                           Κ
                                               Ν
                                                    S
                                                        G
      szyfrogram:
                       D
                                  Q
                                       D
```

```
tekst jawny:
                                              k
                 t
                      a
                             n
                                     t
tekst jawny (num):
                            13
                                             10
                19
                                24
                                     19
                                                 18
                                                     19
          klucz:
                      d a
                                     k
                                             d
                g
                             n
                                S
                                         g
                                                  а
                                                      n
                6 3
     klucz (num):
                         0 13
                                              3
                                                  0
                                 18
                                     10
                                                     13
   suma mod 26: 25 3 9
                             0
                                 16
                                     3
                                         10
                                             13
                                                 18
                                                      6
                                                  S
                                                      G
                  Ζ
                      D
                       J
                             Α
                                 Q
                                     D
                                         Κ
                                              Ν
      szyfrogram:
```

Szyfr z autokluczem:

```
tekstjawny: taj nytekst
klucz: x taj nyteks
```

Pytanie: jak tutaj wygląda odszyfrowanie?

Szyfr Hilla

Oparty na kluczu o długości n^2 . Najpierw należy przyporządkować literom (tekstu jawnego i klucza) liczby wg kolejności alfabetu. Tekst jawny dzielimy na bloki długości n (braki uzupełniamy losowo). Klucz długości n^2 zapisujemy w formacie macierzy o wymiarach $n \times n$, którą mnożymy przez bloki tekstu jawnego (mod26). Otrzymane wyniki zamieniamy na litery.

Przykładowe szyfrowanie dla n=2 przebiega następująco: tekst jawny: laborki =

Szyfr Hilla

Oparty na kluczu o długości n^2 . Najpierw należy przyporządkować literom (tekstu jawnego i klucza) liczby wg kolejności alfabetu. Tekst jawny dzielimy na bloki długości n (braki uzupełniamy losowo). Klucz długości n^2 zapisujemy w formacie macierzy o wymiarach $n \times n$, którą mnożymy przez bloki tekstu jawnego (mod26). Otrzymane wyniki zamieniamy na litery.

tekst jawny: laborki = $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 1 & 14 & 17 & 10 & 8 \end{bmatrix}$ tekst dzielimy na fragmenty o długości n=2: la = $\begin{bmatrix} 11 & 0 \end{bmatrix}$, bo = $\begin{bmatrix} 1 & 14 \end{bmatrix}$, rk = $\begin{bmatrix} 17 & 10 \end{bmatrix}$, i = $\begin{bmatrix} 8 & 14 \end{bmatrix}$

Przykładowe szyfrowanie dla n=2 przebiega następująco:

Przykładowy klucz: list =

Przykładowy klucz: list = $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix}$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} =$$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

- $A \in M_{n \times n}$
- \bullet istnieje $|A|^{-1}$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

- \bullet $A \in M_{n \times n}$
- istnieje $|A|^{-1}$

• istnieje
$$|A|^{-1}$$
[1^{-1} 3^{-1} 5^{-1} 7^{-1} 9^{-1} 11^{-1} 15^{-1} 17^{-1} 19^{-1} 21^{-1} 23^{-1} 25^{-1}] =
[1 9 21 15 3 19 7 23 11 5 17 25]

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

- $A \in M_{n \times n}$
- istnieje $|A|^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1^{-1} & 3^{-1} & 5^{-1} & 7^{-1} & 9^{-1} & 11^{-1} & 15^{-1} & 17^{-1} & 19^{-1} & 21^{-1} & 23^{-1} & 25^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 21 & 15 & 3 & 19 & 7 & 23 & 11 & 5 & 17 & 25 \end{bmatrix}$$

Klucz list jest nieodpowiedni! Zaszyfrowanej wiadomości nie da się odszyfrować! Musimy wybrać inny klucz:

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

- $A \in M_{n \times n}$
- istnieje $|A|^{-1}$

Klucz **list** jest nieodpowiedni! Zaszyfrowanej wiadomości nie da się odszyfrować! Musimy wybrać inny klucz:

$$text = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 23 & 19 \end{bmatrix}$$

Przykładowy klucz: list =
$$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 18 & 19 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$det(list) = det \begin{bmatrix} 11 & 8 \\ 18 & 19 \end{bmatrix} = 65 \mod 26 = 13$$

Macierz klucza musi być odwracalna, by odszyfrować wiadomość. Jakie są warunki na odwracalność macierzy?

- $A \in M_{n \times n}$
- istnieje $|A|^{-1}$

[
$$15$$
 15th lege | A| [1^{-1} 3 -1 5 -1 7 -1 9 -1 11 -1 15 -1 17 -1 19 -1 21 -1 23 -1 25 -1] = [1 9 21 15 3 19 7 23 11 5 17 25]

Klucz **list** jest nieodpowiedni! Zaszyfrowanej wiadomości nie da się odszyfrować! Musimy wybrać inny klucz:

$$\mathsf{text} = \left[\begin{array}{cccc} 19 & 4 & 23 & 19 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{array} \right]$$

Następnie wykonujemy mnożenia macierzy modulo 26:

$$text \cdot la = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \end{bmatrix}^T =$$

Następnie wykonujemy mnożenia macierzy modulo 26:

$$text \cdot la = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 209 \\ 253 \end{bmatrix} mod \ 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} = BT$$

Następnie wykonujemy mnożenia macierzy modulo 26:

$$text \cdot la = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 209 \\ 253 \end{bmatrix} mod \ 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} = BT$$

$$text \cdot bo = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 14 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 75 \\ 289 \end{bmatrix} mod \ 26 = \begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} = XD$$

$$text \cdot rk = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 10 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 363 \\ 581 \end{bmatrix} mod \ 26 = \begin{bmatrix} 25 \\ 9 \end{bmatrix} = ZJ$$

$$text \cdot i = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 14 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 208 \\ 450 \end{bmatrix} mod \ 26 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = AI$$

Następnie wykonujemy mnożenia macierzy modulo 26:

$$text \cdot la = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 0 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 209 \\ 253 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} = BT$$

$$text \cdot bo = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 14 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 75 \\ 289 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} = XD$$

$$text \cdot rk = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 & 10 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 363 \\ 581 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 25 \\ 9 \end{bmatrix} = ZJ$$

$$text \cdot i = \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 14 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 208 \\ 450 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = AI$$

szyfrogram: BTXDZJAI

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$
$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$
$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{array}\right] BT =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{array}\right] BT = \left[\begin{array}{cc} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ 19 \end{array}\right] =$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} BT = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 271 \\ 104 \end{bmatrix} \mod 26$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} BT = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 271 \\ 104 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$det(text) = det \begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix} = 269 \mod 26 = 9,$$

$$\begin{bmatrix} 19 & 4 \\ 23 & 19 \end{bmatrix}^{-1} = 9^{-1} \begin{bmatrix} 19 & -4 \\ -23 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 =$$

$$3 \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 3 & 19 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} BT = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 9 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 19 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 271 \\ 104 \end{bmatrix} \mod 26 = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \end{bmatrix} = la \quad itd.$$