Correction des TDs du cours d'Introduction à l'Algorithmique Quantique *

Elian Masnada

1er janvier 2024

* **J'encourage les élèves à me faire part de leurs remarques par email elian.masnada@cyu.fr afin de m'aider à améliorer ce corrigé.**

Table des matières

1 Correction du TD 1

1.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD1

1. Montrons tout d'abord que f est linéaire. Pour cela, on définit

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad P'(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

L'application f est linéaire si et seulement si $\forall P, P'$ et λ

$$f(\lambda P + P') = \lambda f(P) + f(P')$$

Commençons par calculer $\lambda P + P'$

$$\lambda P + P' = (\lambda\alpha + \alpha')x^2 + (\lambda\beta + \beta')x + \lambda\gamma + \gamma'$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + P') &= f\Big((\lambda\alpha + \alpha')x^2 + (\lambda\beta + \beta')x + \lambda\gamma + \gamma'\Big) \\ &= (\lambda\alpha + \alpha' + \lambda\beta + \beta' + \lambda\gamma + \gamma')x^2 + (\lambda\alpha + \alpha' - \lambda\gamma + \gamma')x + \lambda\beta + \beta' \\ &= \lambda(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + \lambda(\alpha - \gamma)x + \lambda\beta \\ &\qquad\qquad + (\alpha' + \beta' + \gamma')x^2 + (\alpha' - \gamma')x + \beta' \\ &= \lambda f(P) + f(P') \end{aligned}$$

donc il s'agit bien d'une application linéaire.

2. Pour obtenir la représentation matricielle de f, il faut déterminer comment les vecteurs de la base sont transformés par f.

$$f(x^2) = x^2 + x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{1,x,x^2\}} \qquad f(x) = x^2 + 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{1,x,x^2\}}$$

$$f(1) = x^2 - x \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{1,x,x^2\}}$$

Il suffit maintenant de rentrer ces vecteurs en colonne pour obtenir A_f

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On cherche maintenant l'image par f de

$$P_1(x) = 1 + x + x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de multiplier A_f par le vecteur colonne précédent :

$$f(P_1) = A_f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$f(P_1) = 3x^2 + 1$$

Cherchons maintenant l'imagine par f de

$$P_2(x) = 1 + 2x + 3x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f(P_2) = A_f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 6x^2 + 2x + 2$$

Les résultats obtenus ici avec l'expression matricielle de f sont évidemment les mêmes que ceux qui auraient été obtenus en calculant directement l'image par f de ces deux polynômes.

4. Montrons maintenant que la base donnée est bien orthonormale.

$$\langle 1|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = \langle x|x\rangle = \langle x^2|x^2\rangle$$

Calculons maintenant les produits scalaires croisés

$$\langle 1|x\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \langle 1|x^2\rangle = \langle x|x^2\rangle$$

On voit donc que la base donnée vérifie les relations

$$\forall i, j \in [\![0; 2]\!] \qquad \langle x^i|x^j\rangle = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

La base proposée est donc bien orthonormée.

5. Nous allons maintenant utiliser les notations de Dirac pour déterminer la matrice représentative de f que l'on va noter cette fois-ci $\hat{A}$ (par convention des notations de Dirac)

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \hat{A}\,|1\rangle & \hat{A}\,|x\rangle & \hat{A}\,|x^2\rangle \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} & \\ \hat{A} = & \begin{pmatrix} \langle 1|\,\hat{A}\,|1\rangle & \langle 1|\,\hat{A}\,|x\rangle & \langle 1|\,\hat{A}\,|x^2\rangle \\ \langle x|\,\hat{A}\,|1\rangle & \langle x|\,\hat{A}\,|x\rangle & \langle x|\,\hat{A}\,|x^2\rangle \\ \langle x^2|\,\hat{A}\,|1\rangle & \langle x^2|\,\hat{A}\,|x\rangle & \langle x^2|\,\hat{A}\,|x^2\rangle \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \quad |1\rangle \\ \leftarrow \quad |x\rangle \\ \leftarrow \quad |x^2\rangle \end{array} \end{array}$$

or d'après l'expression de f

$$\begin{cases} \hat{A}\,|1\rangle = |x^2\rangle - |x\rangle \\ \hat{A}\,|x\rangle = |x^2\rangle + |1\rangle \\ \hat{A}\,|x^2\rangle = |x^2\rangle + |x\rangle \end{cases}$$

il est alors facile de prendre le produit scalaire de ces expressions avec les vecteurs $|1\rangle$, $|x\rangle$ et $|x^2\rangle$ afin de remplir la matrice précédente. Ainsi on retrouve bien l'expression de la matrice représentative de f

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD1

1. Commençons par déterminer $\langle\Psi|$ qui est le transconjugué de $|\Psi\rangle$

$$\langle\Psi| = (\alpha i)^* \langle e_1| + \alpha^* \langle e_2| - \alpha^* \langle e_3|$$
$$\langle\Psi| = -\alpha^* i \langle e_1| + \alpha^* \langle e_2| - \alpha^* \langle e_3|$$

où $.^*$ est le complexe conjugué. On a alors

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \Big(- \alpha^* i \langle e_1| + \alpha^* \langle e_2| - \alpha^* \langle e_3| \Big)\Big(\beta\,|e_2\rangle + \beta\,|e_3\rangle\Big)$$

en distribuant le produit scalaire on obtient

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \alpha^*\beta - \alpha^*\beta = 0$$

Donc pour tout α et β appartenant à $\mathbb{C}$, le produit scalaire est nulle.

Il est également possible d'utiliser une notation plus standard.

$$|\Psi\rangle = \alpha \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle\Psi| = \alpha^* \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|\Phi\rangle = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle\Phi| = \beta^* \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors le produit scalaire se calcule simplement de la façon suivante

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \alpha^*\beta \begin{pmatrix} -i & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

2. Calculons $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$:

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\Psi\rangle &= \Big(- \alpha^* i \langle e_1| + \alpha^* \langle e_2| - \alpha^* \langle e_3| \Big)\Big(\alpha(i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle - |e_3\rangle)\Big) \\ &= -\alpha^* i \alpha i + \alpha^*\alpha + \alpha^*\alpha = 3|\alpha|^2\end{aligned}$$

or $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1 \Longrightarrow |\alpha|^2 = 1/3$ et finalement $\alpha = e^{i\varphi}/\sqrt{3}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

Par le même type de démonstration, on obtient :
$\langle\Phi|\Phi\rangle = 1 \Longrightarrow |\beta|^2 = 1/4$ et finalement $\beta = e^{i\chi}/2$ avec $\chi \in \mathbb{R}$.

3. On pose

$$|\Theta\rangle = a\,|e_1\rangle + b\,|e_2\rangle + c\,|e_3\rangle$$

et pour déterminer a, b, c nous allons utiliser les équations suivantes

$$\begin{aligned}\langle\Theta|\Theta\rangle = 1 &\Longrightarrow |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1 \\ \langle\Psi|\Theta\rangle = 0 &\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\varphi}(-ia + b - c) = 0 \\ \langle\Phi|\Theta\rangle = 0 &\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\chi}(b + c) = 0\end{aligned}$$

On a donc le système d'équations

$$\begin{aligned}
1 &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 \\
0 &= -ia + b - c \\
0 &= b + c
\end{aligned}$$

On a alors $b = -c$ et $a = 2ic$ d'où l'on déduit, en injectant dans la première équation $6|c|^2 = 1$. On a donc $c = e^{i\delta}/\sqrt{6}$ (avec $\delta \in \mathbb{R}$). Donc $a = 2ie^{i\delta}/\sqrt{6}$ et $b = -e^{i\delta}/\sqrt{6}$. Finalement,

$$|\Theta\rangle = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{6}}\Big(2i\,|e_1\rangle - |e_2\rangle + |e_3\rangle\Big) = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}$$

1.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD1

On a donc

$$\begin{aligned}
\hat{A}\,|0\rangle &= \alpha(|0\rangle + i\,|1\rangle) \\
\hat{A}\,|1\rangle &= \beta(-i\,|0\rangle + |1\rangle)
\end{aligned}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Comme la base $\{|0\rangle\,;|1\rangle\}$ est orthonormée on a

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est encore une fois le symbole de Kronecker.

2. On cherche donc à normer, dans un premier temps, le vecteur $|\Psi\rangle = \hat{A}\,|0\rangle$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle\Psi|\Psi\rangle &= 1 \\
&= \alpha^2(\langle 0| - i\,\langle 1|)(|0\rangle + i\,|1\rangle) = \alpha^2(\langle 0|0\rangle + i\,\langle 0|1\rangle - i\,\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle) \\
&= 2\alpha^2
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

le signe est, comme nous le verrons, sans importance en mécanique quantique. C'est pour cela que nous allons choisir arbitrairement la racine positive

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Faisons maintenant le même travail avec le $|\Psi\rangle = \hat{A}|1\rangle$. Ainsi

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\Psi\rangle &= 1\\ &= \beta^2(i\langle 0| + \langle 1|)(-i|0\rangle + |1\rangle) = \beta^2(\langle 0|0\rangle + i\langle 0|1\rangle - i\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle)\\ &= 2\beta^2\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

le signe est encore une fois sans importance et nous allons encore une fois prendre la racine positive

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalement

$$\begin{cases}\hat{A}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\\[2em] \hat{A}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i|0\rangle + |1\rangle)\end{cases}$$

3. Déterminons la représentation matricielle de $\hat{A}$

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}|0\rangle & \hat{A}|1\rangle & \\ \downarrow & \downarrow & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix}\langle 0|\hat{A}|0\rangle & \langle 0|\hat{A}|1\rangle\\[2em] \langle 1|\hat{A}|0\rangle & \langle 1|\hat{A}|1\rangle\end{pmatrix}} & \begin{array}{c}\leftarrow \quad |0\rangle\\[2em] \leftarrow \quad |1\rangle\end{array}\end{array}$$

Finalement

$$\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$$

4. On cherche maintenant les valeurs propres $\{a_i\}$ et vecteurs propres associés $\{|u_i\rangle\}$, c'est-à-dire, on cherche à résoudre l'équation

$$\hat{A}|u_i\rangle = a_i|u_i\rangle$$

<u>Etape 1 :</u> On commence par déterminer les valeurs propres :
Résolvons l'équation

$$\det\left(\hat{A} - a_i\mathbb{1}\right) = 0 \Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} - a_i & -\frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - a_i\end{pmatrix} = 0$$

L'équation précédente devient alors

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - a_i\right)^2 - \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - a_i = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où finalement

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \\ a_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Etape 2 : Détermination des vecteurs propres :

vecteur propre associé à $a_1 = 0$:
Pour déterminer ce vecteur propre, nous devons résoudre le système d'équations

$$\left(\hat{A} - a_1 \mathbb{1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow x - iy = 0 \Longleftrightarrow x = iy$$

finalement à un facteur multiplicatif près, on a

$$|u_1\rangle = y\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = y\big(i\,|0\rangle + |1\rangle\big)$$

Nous nous limiterons ici à $y \in \mathbb{R}$.

vecteur propre associé à $a_2 = \sqrt{2}$:
Pour déterminer ce vecteur propre, nous devons cette fois-ci résoudre le système d'équations

$$\left(\hat{A} - a_2 \mathbb{1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow -x - iy = 0 \Longleftrightarrow x = -iy$$

finalement à un facteur multiplicatif près, on a

$$|u_2\rangle = y\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = y\big(-i\,|0\rangle + |1\rangle\big)$$

Nous nous limiterons encore une fois à $y \in \mathbb{R}$.

<u>Etape 3 :</u> Normalisation des vecteurs propres :
On veut donc

$$\langle u_1|u_1\rangle = \langle u_2|u_2\rangle = 1$$

Ainsi

$$\langle u_1|u_1\rangle = 2y^2 = 1$$

ce qui conduit à

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Encore une fois le signe n'ayant aucune importance nous allons prendre la racine positive : $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. De la même façon, on peut prendre $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour $|u_2\rangle$.

Finalement

$$\begin{cases}|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(i\,|0\rangle + |1\rangle\big)\\ \\ |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-i\,|0\rangle + |1\rangle\big)\end{cases}$$

5. Commenons par montrer que $\hat{A}$ est auto-adjoint :

$$\hat{A}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i^*\\(-i)^* & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\i & 1\end{pmatrix} = \hat{A}$$

De plus, comme nous l'avons vu les vecteurs propres de $\hat{A}$ forment une base orthonormées de $\mathbb{C}^2$ donc il s'agit bien d'un opérateur observable.

6. On cherche maintenant les expressions des projecteurs sur $|u_1\rangle$ et sur $|u_2\rangle$.

<u>Expressions de $\hat{P}_1 = |u_1\rangle\langle u_1|$:</u>
Commençons par déterminer $\hat{P}_1$ dans la base $\{|0\rangle\,;|1\rangle\}$. Pour rappel :

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(i\,|0\rangle + |1\rangle\big)$$

Il y a deux méthodes :

$$\hat{P}_1^{\{|0\rangle,|1\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} |u_1\rangle\langle u_1| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(i\,|0\rangle + |1\rangle\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(-i\,\langle 0| + \langle 1|\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|0\rangle\langle 0| + i\,|0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\,\big) \end{aligned}$$

ce qui permet de nouveau d'écrire

$$\hat{P}_1^{\{|0\rangle,|1\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\{|u_1\rangle\,;|u_2\rangle\}$ la situation est beaucoup plus simple puisque :

$$\hat{P}_1^{\{|u_1\rangle,|u_2\rangle\}} = |u_1\rangle\langle u_1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Expressions de $\hat{P}_2 = |u_2\rangle\langle u_2|$:</u>

Déterminons maintenant $\hat{P}_2$ dans la base $\{|0\rangle\,;|1\rangle\}$. Pour rappel :

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-i\,|0\rangle + |1\rangle\big)$$

Il y a deux méthodes :

$$\hat{P}_2^{\{|0\rangle,|1\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{aligned} |u_2\rangle\langle u_2| &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(-i\,|0\rangle + |1\rangle\big)\frac{1}{\sqrt{2}}\big(i\,\langle 0| + \langle 1|\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|0\rangle\langle 0| - i\,|0\rangle\langle 1| + i\,|1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\,\big) \end{aligned}$$

ce qui permet de nouveau d'écrire

$$\hat{P}_2^{\{|0\rangle,|1\rangle\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\{|u_1\rangle\,;|u_2\rangle\}$ la situation est encore une fois beaucoup plus simple puisque :

$$\hat{P}_2^{\{|u_1\rangle,|u_2\rangle\}} = |u_2\rangle\langle u_2| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelque soit la base que l'on considère, on a évidemment la relation de fermeture

$$\hat{P}_1 + \hat{P}_2 = \mathbb{1}$$

1.4 Corrigé de l'exercice 4 du TD1

On rappelle que l'opérateur d'Hadamard peut s'écrire en notation de Dirac comme

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \Big)$$

1.

$$\begin{array}{cccc} \hat{H}\,|0\rangle & \hat{H}\,|1\rangle & & \\ \downarrow & \downarrow & & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \langle 0|\,\hat{H}\,|0\rangle & \langle 0|\,\hat{H}\,|1\rangle \\ & \\ \langle 1|\,\hat{H}\,|0\rangle & \langle 1|\,\hat{H}\,|1\rangle \end{pmatrix}} & \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix} & \begin{matrix} |0\rangle \\ \\ |1\rangle \end{matrix} \end{array}$$

d'après l'expression de $\hat{H}$, on a clairement

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle \Big) \qquad ; \qquad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - |1\rangle \Big)$$

On obtient alors sans difficulté

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. On cherche maintenant l'effet de $\hat{H}$ sur le vecteur

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Il y a deux méthodes.

<u>Méthode matricielle :</u>

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\alpha+\beta\big)\,|0\rangle + \big(\alpha-\beta\big)\,|1\rangle \Big)$$

Méthode en notation de Dirac :

$$\begin{aligned}
\hat{H}\left|\psi\right\rangle &= \hat{H}(\alpha\left|0\right\rangle + \beta\left|1\right\rangle) = \alpha\hat{H}\left|0\right\rangle + \beta\hat{H}\left|1\right\rangle \\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\big(\alpha+\beta\big)\left|0\right\rangle + \big(\alpha-\beta\big)\left|1\right\rangle\Big)
\end{aligned}$$

1.5 Corrigé de l'exercice 5 du TD1

Pour rappel, on a

$$\hat{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \left|\psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\right\rangle$$

1. Calculons le carré de la norme de $\left|\psi\right\rangle$

$$\begin{aligned}
\left\langle\psi|\psi\right\rangle &= \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle 0\right| + \sqrt{\frac{2}{3}}\left\langle 1\right|\Big)\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\left|0\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1\right\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{3}\left\langle 0|0\right\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3}\left\langle 0|1\right\rangle - \frac{\sqrt{2}}{3}\left\langle 1|0\right\rangle + \frac{2}{3}\left\langle 1|1\right\rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. On cherche à calculer $\left|\psi'\right\rangle = \hat{U}\left|\psi\right\rangle$:

$$\begin{aligned}
\left|\psi'\right\rangle = \hat{U}\left|\psi\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + i\sqrt{\frac{2}{3}} \\ -i\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\big(1+i\sqrt{2}\big)\left|0\right\rangle - \big(i+\sqrt{2}\big)\left|1\right\rangle\Big]
\end{aligned}$$

3. Sans difficulté, on obtient

$$\left\langle\psi'|\psi'\right\rangle = \frac{1}{6}\Big[(1+2)\left\langle 0|0\right\rangle + (2+1)\left\langle 1|1\right\rangle\Big] = 1$$

4. Vérifions que $\hat{U}$ est unitaire , c'est-à-dire que $\hat{U}$ vérifie

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}$$

or † signifie le transconjugué. Ainsi

$$\hat{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} = \hat{U}$$

Il suffit donc de montrer que $\hat{U}^2 = \mathbb{1}$ ce qui est trivial. Finalement $\hat{U}$ est bien un opérateur unitaire.

5. Soit $\hat{U}$ un opérateur unitaire quelconque et $|\psi\rangle$ un vecteur quelconque. Alors en introduisant $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$, on a

$$\langle\psi'| = \langle\psi|\hat{U}^\dagger$$

Ainsi

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle$$

or comme $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$, on démontre finalement que

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

1.6 Corrigé de l'exercice 6 du TD1

Soit $\hat{H}$ et $\{|\phi_n\rangle\}$ tels que

$$\hat{H}|\phi_n\rangle = a_n|\phi_n\rangle$$

où $a_n \in \mathbb{R}$ car $\hat{H}$ est hermitique. De plus

$$\hat{U}(m,n) = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|$$

1.
$$\hat{U}(m,n)^\dagger = (|\phi_m\rangle\langle\phi_n|)^\dagger = |\phi_n\rangle\langle\phi_m| = \hat{U}(n,m)$$

2.
$$\begin{aligned}\left[\hat{H}, \hat{U}(m,n)\right] &= \hat{H}\hat{U}(m,n) - \hat{U}(m,n)\hat{H} \\ &= \hat{H}|\phi_m\rangle\langle\phi_n| - |\phi_m\rangle\langle\phi_n|\hat{H} \\ &= a_m|\phi_m\rangle\langle\phi_n| - a_n|\phi_m\rangle\langle\phi_n| \\ &= (a_m - a_n)|\phi_m\rangle\langle\phi_n|\end{aligned}$$

3.
$$\hat{U}(m,n)\hat{U}(p,q)^\dagger = |\phi_m\rangle\langle\phi_n|\phi_q\rangle\langle\phi_p| = \delta_{nq}|\phi_m\rangle\langle\phi_p| = \delta_{nq}\hat{U}(m,p)$$

4.

$$
\begin{aligned}
Tr\left(\hat{U}(m,n)\right) &= \sum_i \langle\phi_i|\,\hat{U}(m,n)\,|\phi_i\rangle \\
&= \sum_i \langle\phi_i|\phi_m\rangle\,\langle\phi_n|\phi_i\rangle = \sum_i \delta_{im}\delta_{in} \\
&= \begin{cases} = 1 \text{ si } m = n \\ = 0 \text{ si } m \neq n \end{cases}
\end{aligned}
$$

2 Correction du TD 2

2.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD2

1. Normalisation de $|\Psi\rangle$:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \eta^2 \langle\overline{\Psi}|\overline{\Psi}\rangle = 5\eta^2 = 1$$

nous allons prendre arbitrairement la racine positive : $\eta = 1/\sqrt{5}$.

Normalisation de $|\Phi\rangle$:

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \nu^2 \langle\overline{\Phi}|\overline{\Phi}\rangle = 4\nu^2 = 1$$

nous allons prendre arbitrairement la racine positive : $\nu = 1/2$. Finalement les vecteurs normalisés sont

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\ i\end{pmatrix} \qquad\qquad |\Phi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\end{pmatrix}$$

2. Vérifions que $\hat{A}$ est hermitique. Pour cela, on peut directement calculer $\hat{A}^\dagger$ (transconjugué). On a alors

$$\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix}0^* & (-2i)^*\\ (2i)^* & 3^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 2i\\ -2i & 3\end{pmatrix} = \hat{A}$$

donc $\hat{A}$ est bien hermitique.

Pour que l'opérateur puisse être une observable, il faut de plus que les vecteurs propres de l'opérateur forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert.

3. Recherche des valeurs propres. On calcule $\det(\hat{A} - \lambda \mathbb{1}) = 0$ qui donne le polynôme caractéristique $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ conduisant aux valeurs propres :

$$\lambda_1 = 4 \qquad\qquad \lambda_2 = -1$$

Donc la mesure de la grandeur A ne peut donner que $\lambda_1 = 4$ ou $\lambda_2 = -1$.

4. Vecteur propre $|u_2\rangle$ associé à $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix}1 & 2i\\ -2i & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha + 2i\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = -2i\beta$$

finalement

$$|u_2\rangle = \beta \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\Big(-2i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle \Big)$$

De même, on peut montrer que le vecteur propre $|u_1\rangle$ associé à $\lambda_1 = 4$ est

$$|u_1\rangle = \alpha \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha\Big(\frac{1}{2}i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle \Big)$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Or on veut une base orthonormée. Il faut donc normer $|u_1\rangle$ et $|u_2\rangle$. On montre alors que

$$|u_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\delta} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\delta'} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$. On vérifie alors bien que $\langle u_1|u_2\rangle = 0$ et donc l'opérateur $\hat{A}$ est bien une observable.

5. Relation de fermeture dans la base $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$:

$$|u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| = \mathbb{1}$$

Vérifions-le.

<u>Méthode 1 :</u>
Nous allons calculer explicitement $|u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| = \mathbb{1}$.

$$|u_1\rangle\langle u_1| = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}$$

$$|u_2\rangle\langle u_2| = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$|u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

<u>Méthode 3 :</u>

On peut également déterminer les projecteurs en utilisant directement les notations de Dirac. En effet

$$|u_1\rangle = \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{5}}(i\,|e_1\rangle + 2\,|e_2\rangle) \Longleftrightarrow \langle u_1| = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{5}}(-i\,\langle e_1| + 2\,\langle e_2|)$$

6. La probabilité d'obtenir la valeur propre λ_i (associée au vecteur propre $|u_i\rangle$) alors que le système se trouve dans l'état $|\Psi\rangle$ est donnée par

$$P(\lambda_i) = |\,\langle u_i|\Psi\rangle\,|^2$$

et tout de suite après la mesure le système se trouvera dans l'état $|\Psi'\rangle$

$$|\Psi'\rangle = \frac{\hat{P}_i\,|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|\,\hat{P}_i\,|\Psi\rangle}}$$

avec $\hat{P}_i = |u_i\rangle\,\langle u_i|$.

Commençons par calculer les probabilités

$$P(\lambda_1 = 4) = |\,\langle u_1|\Psi\rangle\,|^2 \qquad P(\lambda_2 = -1) = |\,\langle u_2|\Psi\rangle\,|^2$$

Pour cela, on peut soit calculer $\langle u_1|\Psi\rangle$ et $\langle u_2|\Psi\rangle$ en utilisant les expressions de $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ et $|\Psi\rangle$ dans la base $(|e_1\rangle\,,|e_2\rangle)$ soit on exprime directement $|\Psi\rangle$ dans la base $(|u_1\rangle\,,|u_2\rangle)$. Nous allons utiliser la seconde méthode car l'expression de $|Psi\rangle$ est particulièrement simple dans la base $(|u_1\rangle\,,|u_2\rangle)$. En effet

$$|\Psi\rangle = ie^{-i\delta'}\,|u_2\rangle \text{ avec } \delta' \in \mathbb{R}$$

Ainsi

$$\langle u_1|\Psi\rangle = ie^{-i\delta'}\,\langle u_1|u_2\rangle = 0 \quad ; \quad \langle u_2|\Psi\rangle = ie^{-i\delta'}\,\langle u_2|u_2\rangle = ie^{-i\delta'}$$

et donc

$$\begin{cases} P(\lambda_1 = 4) = |\,\langle u_1|\Psi\rangle\,|^2 = |0|^2 = 0 \\ \\ P(\lambda_2 = -1) = |\,\langle u_2|\Psi\rangle\,|^2 = \left|ie^{-i\delta'}\right| = 1 \end{cases}$$

Il est donc impossible d'obtenir $\lambda_1 = 4$ et à coup sûr on obtient $\lambda_2 = -1$.

Après avoir obtenu $\lambda_2 = -1$, le système sera projeté sur l'état quantique $|\Psi_2\rangle$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{\hat{P}_2 |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi| \hat{P}_2 |\Psi\rangle}} = \frac{|u_2\rangle \langle u_2|\Psi\rangle}{\sqrt{P(\lambda_2 = -1)}} = ie^{-i\delta'} |u_2\rangle = |\Psi\rangle$$

Ainsi le système reste dans l'état avant mesure.

7. De la même façon. Les probabilités sont données par

$$P(\lambda_1) = |\langle u_1|\Phi\rangle|^2 \qquad\qquad P(\lambda_2) = |\langle u_2|\Phi\rangle|^2$$

Compte-tenu des expressions de $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ et $|\Phi\rangle$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_1|\Phi\rangle &= \frac{2e^{-i\delta}}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}i \langle e_1| + \langle e_2|\Big)\Big((1+i)|e_1\rangle + (i-1)|e_2\rangle\Big) \\ &= \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2}i(i+1) + i - 1\right) = \frac{e^{-i\delta}}{2\sqrt{5}}(i-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle u_2|\Phi\rangle &= \frac{e^{-i\delta'}}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{2}\Big(2i \langle e_1| + \langle e_2|\Big)\Big((1+i)|e_1\rangle + (i-1)|e_2\rangle\Big) \\ &= \frac{e^{-i\delta'}}{2\sqrt{5}}(2i(i+1) + i - 1) = 3\frac{e^{-i\delta'}}{2\sqrt{5}}(i-1)\end{aligned}$$

D'où l'obtient les probabilités suivantes

$$\begin{aligned}P(\lambda_1) &= |\langle u_1|\Phi\rangle|^2 = \frac{1}{10} \\ P(\lambda_2) &= |\langle u_2|\Phi\rangle|^2 = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

Déterminons maintenant les états quantiques après mesures.

<u>Après avoir obtenu λ_1 :</u>

$$\begin{aligned}|\Phi_1\rangle &= \frac{\hat{P}_1 |\Phi\rangle}{\sqrt{P(\lambda_1)}} = \sqrt{10}\,|u_1\rangle \langle u_1|\Phi\rangle = \sqrt{10}\frac{e^{-i\delta}}{2\sqrt{5}}(i-1)|u_1\rangle \\ &= \frac{e^{-i\delta}}{\sqrt{2}}(i-1)|u_1\rangle\end{aligned}$$

<u>Après avoir obtenu λ_2 :</u>

$$|\Phi_2\rangle = \frac{\hat{P}_2 |\Phi\rangle}{\sqrt{P(\lambda_2)}} = \sqrt{\frac{10}{9}}\,|u_2\rangle \langle u_2|\Phi\rangle = \frac{e^{-i\delta'}}{\sqrt{2}}(i-1)|u_2\rangle$$

2.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD2

1. Pour être des opérateurs associés à une grandeur physique, il faut que ces opérateurs soient auto-adjoint (un opérateur $\hat{A}$ est dit auto-adjoint si et seulement si $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ où $\dagger$ signifie transconjugué)

$$\hat{S}_z^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{S}_y^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & i^* \\ -i^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{S}_y$$

   Ainsi les deux opérateurs sont bien auto-adjoints.

   Il faut de plus que les vecteurs propres de l'opérateur forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert. Nous vérifierons ce dernier point lorsque nous déterminerons les vecteurs propres des deux opérateurs.

2. Pour que $|\psi\rangle$ soit un état quantique, il faut que $|\psi\rangle$ soit normé, c'est-à-dire que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2 = 2$$
$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1^2 = 1$$

   Donc $|\psi_2\rangle$ est le seul état physiquement acceptable.

3. Soit $\hat{A}$, l'opérateur auto-adjoint associé à la grandeur physique A. Alors, en effectuant une mesure sur A, on ne peut obtenir que des valeurs propres de $\hat{A}$.

   Pour $\hat{S}_z$:
   Cette matrice est déjà diagonale, il n'y a donc pas besoin de la diagonaliser. Les valeurs propres sont $\lambda_1(z) = 1$ et $\lambda_2(z) = -1$. Les vecteurs propres associés sont trivialement $|u_1(z)\rangle = |e_1\rangle$ pour $\lambda_1(z)$, et $|u_2(z)\rangle = |e_2\rangle$ pour $\lambda_2(z)$.

   Pour $\hat{S}_y$:
   $\hat{S}_y$ n'est pas diagonale, nous devons donc commencer par diagonalier cet opérateur.

$$\det\left(\hat{S}_y - \lambda\mathbb{1}\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

On obtient donc les deux valeurs propres suivantes

$$\lambda_1(y) = 1 \qquad \lambda_2(y) = -1$$

Déterminons maintenant les vecteurs propres associés.

<u>vecteur propre associé à $\lambda_1(y) = 1$:</u>

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow -c_1 - ic_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1 = -ic_2$$

Le vecteur propre associé à $\lambda_1(y)$ est donc donné par

$$|u_1(y)\rangle = c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = c_2(-i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle)$$

On peut maintenant normer le vecteur :

$$\langle u_1(y)|u_1(y)\rangle = 2|c_2|^2 = 1$$

d'où l'on déduit que

$$c_2 = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \text{ avec } \varphi \in \mathbb{R}$$

et finalement

$$|u_1(y)\rangle = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}(-i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle) \text{ avec } \varphi \in \mathbb{R}$$

<u>vecteur propre associé à $\lambda_2(y) = -1$:</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$
$$\Longleftrightarrow c_1 - ic_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1 = ic_2$$

Le vecteur propre associé à $\lambda_2(y)$ est donc donné par

$$|u_2(y)\rangle = c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = c_2(i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle)$$

On peut maintenant normer le vecteur :

$$\langle u_2(y)|u_2(y)\rangle = 2|c_2|^2 = 1$$

d'où l'on déduit que

$$c_2 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

et finalement

$$|u_2(y)\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} (i\,|e_1\rangle + |e_2\rangle) \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

4. Le système est dans l'état $|\psi_2\rangle = |e_2\rangle$.

$$P(\lambda_1(z)) = |\langle u_1(z)|\psi_2\rangle|^2 = |\langle e_1|e_2\rangle|^2 = 0$$
$$P(\lambda_2(z)) = |\langle u_2(z)|\psi_2\rangle|^2 = |\langle e_2|e_2\rangle|^2 = 1$$
$$P(\lambda_1(y)) = |\langle u_1(y)|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} (\langle e_1|\, i + \langle e_2|)\, |e_2\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$
$$P(\lambda_2(y)) = |\langle u_2(y)|\psi_2\rangle|^2 = \left| \frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}} (-\langle e_1|\, i + \langle e_2|)\, |e_2\rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

2.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD2

1. Il faut que $\hat{A}$ soit auto-adjoint, c'est à dire que

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

où $\hat{A}^\dagger$ est le transconjugué de $\hat{A}$. Ici, on a

$$\hat{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & (-i)^* \\ i^* & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \hat{A}$$

Il faut de plus que les vecteurs propres de $\hat{A}$ forment une base orthonormée de l'espace de Hilbert. Nous vérifierons que c'est bien le cas.

2. Pour que $|\psi\rangle$ puisse être interprété comme un vecteur d'état, il faut que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Pour un vecteur d'état quelconque $|\psi\rangle = \alpha\,|e_1\rangle + \beta\,|e_2\rangle$, on a $\langle\psi|\psi\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Ainsi

$$\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2 = 1$$
$$\langle\psi_2|\psi_2\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\langle\psi_3|\psi_3\rangle = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

Donc $|\psi_1\rangle$ est le seul vecteur qui puisse être interprété comme un vecteur d'état.

3. (a) Les résultats possibles lors d'une mesure de la grandeur physique A, ne peut conduire qu'à des valeurs propres de l'opérateur associé $\hat{A}$. Nous devons donc déterminer les valeurs propres de cet opérateur.

$$\det(\hat{A} - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

d'où l'on déduit

$$(1-\lambda)^2 = 1 \Longleftrightarrow 1 - \lambda = \pm 1$$

Finalement

$$\begin{cases} \lambda_+ = 2 \\ \lambda_- = 0 \end{cases}$$

(b) En toute généralité, soit a_n la valeur propre associée au vecteur propre $|u_n\rangle$ de l'opérateur $\hat{A}$ et $|\psi\rangle$ un vecteur d'état. Alors, d'après les postulats de Dirac, la probabilité d'obtenir lors d'une mesure de la grandeur physique A, la valeur propre a_n sachant que le système est dans l'état quantique $|\psi\rangle$ est donnée par

$$P(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$$

Ici

$$P(\lambda_+ = 2) = |\langle u_+|\psi_1\rangle|^2$$
$$P(\lambda_- = 0) = |\langle u_-|\psi_1\rangle|^2$$

où $|u_+\rangle$ et $|u_-\rangle$ sont les vecteurs propres associés à $\lambda_+ = 2$ et $\lambda_- = 0$ respectivement. Nous voyons donc qu'il faut déterminer ces vecteurs propres.

<u>Pour $|u_+\rangle$ associé à $\lambda_+ = 2$:</u>

$$\hat{A} - \lambda_+ \mathbb{1} = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \text{ ainsi, } \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le pivot de Gauss, on obtient

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations précédent conduit à

$$-c_1 + ic_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1 = ic_2 \Longleftrightarrow |u_+\rangle = c_2 \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_2 est un coefficient de normalisation. On cherche donc c_2 tel que

$$\langle u_+|u_+\rangle = 1 = |c_2|^2 \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 2|c_2|^2$$

on voit donc que $c_2 = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}$. Finalement

$$|u_+\rangle = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \varphi \in \mathbb{R}$$

Pour $|u_-\rangle$ associé à $\lambda_- = 0$:

$$\hat{A} - \lambda_- \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \text{ ainsi, } \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le pivot de Gauss, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations précédent conduit à

$$c_1 + ic_2 = 0 \Longleftrightarrow c_1 = -ic_2 \Longleftrightarrow |u_-\rangle = c_2 \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

c_2 est un coefficient de normalisation. On cherche donc c_2 tel que

$$\langle u_-|u_-\rangle = 1 = |c_2|^2 \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 2|c_2|^2$$

on voit donc que $c_2 = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}$. Finalement

$$|u_-\rangle = \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in \mathbb{R}$$

On peut alors vérifier que les deux vecteurs sont bien orthogonaux

$$\langle u_-|u_+\rangle = \frac{e^{-i\theta}e^{i\varphi}}{2}\begin{pmatrix} i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ 1\end{pmatrix} = 0 \ \forall(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$$

On peut maintenant calculer les probabilités d'obtenir λ_+ et λ_- :

$$P(\lambda_+ = 2) = |\langle u_+|\psi_1\rangle|^2 = \left|\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$P(\lambda_- = 0) = |\langle u_-|\psi_1\rangle|^2 = \left|\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

(c) Nous devons maintenant déterminer l'état quantique après mesure

$$|\psi_{\lambda_+=2}\rangle = \frac{|u_+\rangle\langle u_+|\psi_1\rangle}{\sqrt{P(\lambda_+ = 2)}} = e^{-i\varphi}\begin{pmatrix} -i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}|u_+\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i\varphi}(-i+\sqrt{2})\,|u_+\rangle$$

$$|\psi_{\lambda_-=0}\rangle = \frac{|u_-\rangle\langle u_-|\psi_1\rangle}{\sqrt{P(\lambda_- = 0)}} = e^{-i\theta}\begin{pmatrix} i & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}|u_-\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i\theta}(i+\sqrt{2})\,|u_-\rangle$$

2.4 Corrigé de l'exercice 4 du TD2

— Calculons explicitement $\hat{\rho}_{\Phi'} = |\Phi'\rangle\langle\Phi'|$

$$|\Phi'\rangle = e^{i\varphi}|\Phi\rangle \Longrightarrow \langle\Phi'| = e^{-i\varphi}\langle\Phi|$$

d'où l'on déduit

$$\hat{\rho}_{\Phi'} = |\Phi'\rangle\langle\Phi'| = e^{-i\varphi}e^{i\varphi} = |\Phi\rangle\langle\Phi| = \hat{\rho}_\Phi$$

Donc 2 vecteurs qui ne diffèrent que par leur phase sont représentés par le même opérateur densité. Or, la phase n'intervient pas dans le calcul de $P(\lambda_i)$ et la projection. On en déduit que la connaissance de $\hat{\rho}_\Phi$ est suffisante.

1er Postulat : Tout système quantique est représenté par un opérateur densité.

— Calculons la probabilité d'obtenir la valeur propre λ_i

$$\begin{aligned}
P(\lambda_i) &= |\langle u_i|\Phi\rangle|^2 = \langle\Phi|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle \\
&= \sum_j \langle\Phi|u_j\rangle\,\langle u_j|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle = \sum_j \langle u_j|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi|u_j\rangle \\
&= Tr\Big(\hat{P}_i\hat{\rho}_\Phi\Big)
\end{aligned}$$

— Après mesure le système est projeté sur l'état $|\Phi''\rangle$

$$|\Phi''\rangle = \frac{\hat{P}_i\,|\Phi\rangle}{\sqrt{\langle\Phi|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle}}$$

d'où l'on déduit

$$\hat{\rho}_{\Phi''} = |\Phi''\rangle\,\langle\Phi''| = \frac{\hat{P}_i\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi|\,\hat{P}_i}{\langle\Phi|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle} = \frac{\hat{P}_i\hat{\rho}_\Phi\hat{P}_i}{\langle\Phi|\,\hat{P}_i\,|\Phi\rangle}$$

— L'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Phi\rangle = \hat{H}(t)\,|\Phi\rangle \Longrightarrow -i\hbar\frac{d}{dt}\,\langle\Phi| = \langle\Phi|\,\hat{H}(t)$$

Calculons $i\hbar d\hat{\rho}_\Phi/dt$

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d\hat{\rho}_\Phi}{dt} &= i\hbar\frac{d}{dt}(|\Phi\rangle\,\langle\Phi|) \\
&= i\hbar\Big(\frac{d}{dt}\,|\Phi\rangle\Big)\,\langle\Phi| + i\hbar\,|\Phi\rangle\,\Big(\frac{d}{dt}\,\langle\Phi|\Big) \\
&= \hat{H}(t)\,|\Phi\rangle\,\langle\Phi| - |\Phi\rangle\,\langle\Phi|\,\hat{H}(t) \\
&= \hat{H}(t)\hat{\rho}_\Phi - \hat{\rho}_\Phi\hat{H}(t)
\end{aligned}$$

finalement

$$i\hbar\frac{d\hat{\rho}_\Phi}{dt} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}_\Phi]$$

— L'état initial du système est

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+i\\1-i\end{pmatrix}$$

On peut montrer (voir exercice 2) que les valeurs propres et vecteurs propres de $\hat{A}$ sont

$$\lambda_1 = 4, |u_1\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}i/2\\1\end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = -1, |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2i\\1\end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$\hat{P}_1 = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{P}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\rho}_\Phi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

On peut maintenant calculer $\hat{P}_1\hat{\rho}_\Phi$ et $\hat{P}_2\hat{\rho}_\Phi$

$$\hat{P}_1\hat{\rho}_\Phi = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4}i \\ -\frac{3}{2}i & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \hat{P}_2\hat{\rho}_\Phi = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{i} \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

On déduit donc

$$P(\lambda_1) = Tr(\hat{P}_1\hat{\rho}_\Phi) = \frac{9}{10} \qquad P(\lambda_2) = Tr(\hat{P}_2\hat{\rho}_\Phi) = \frac{1}{10}$$

Calculons maintenant l'état sur lequel le système est projeté si on mesure la valeur propre λ_1 par exemple. On rappelle qu'après mesure l'opérateur densité devient

$$\hat{\rho}_{\Phi'} = \frac{\hat{P}_1\hat{\rho}_\Phi\hat{P}_1}{P(\lambda_1)} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 4 \end{pmatrix}$$

équivalent à l'état

$$|\Phi'\rangle = (1-i)\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} i/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce résultat est bien équivalent au résultat $|\Phi'\rangle = (i-1)\,|u_1\rangle/\sqrt{2}$ obtenu à l'exercice précédent.

Si on effectue une nouvelle mesure après avoir obtenu ce résultat alors

$$P(\lambda_1) = Tr(\hat{P}_1\hat{\rho}_{\Phi'}) = Tr\Big[\frac{4}{5}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & 1 \end{pmatrix}\Big] = 1$$

et la projection donne

$$\hat{\rho}_{\Phi''} = \frac{\hat{P}_1\hat{\rho}_{\Phi'}\hat{P}_1}{P(\lambda_1)} = \hat{\rho}_{\Phi'}$$

3 Correction du TD3

3.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD3

1. (a) Si l'on souhaite effectuer la mesure du spin de l'électron selon l'axe z, il suffit de reprendre le dispositif de l'expérience de Stern et Gerlach en positionnant le gradient de champ magnétique selon z. Pour plus de précision voir les schémas dessinés dans la correction de l'exercice suivant.

   (b) Rappelons tout d'abord que l'opérateur associé au spin selon z, s'écrit

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet opérateur a évidemment deux valeurs propres : $-\hbar/2$ associé au vecteur propre $|0\rangle_z$ et $\hbar/2$ associé au vecteur propre $|1\rangle_z$.

<u>Mesure de $|0\rangle_z$:</u>
Commençons par regarder la probabilité d'obtenir $|0\rangle_z$ et l'état quantique après mesure. Alors

$$\begin{aligned} P(|0\rangle_z) = |\,{}_z\langle 0|\psi\rangle\,|^2 &= \left|\,{}_z\langle 0|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle_z\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,{}_z\langle 0|0\rangle_z|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,{}_z\langle 0|1\rangle_z|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$|\psi'\rangle = \frac{|0\rangle_z\,{}_z\langle 0|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|0\rangle_z\;{}_z\langle 0|\psi\rangle}} = |0\rangle_z$$

<u>Mesure de $|1\rangle_z$:</u>
Regardons maintenant ce qu'il en est pour $|1\rangle_z$. Alors

$$\begin{aligned} P(|1\rangle_z) = |\,{}_z\langle 1|\psi\rangle\,|^2 &= \left|\,{}_z\langle 1|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle_z\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,{}_z\langle 1|0\rangle_z|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,{}_z\langle 1|1\rangle_z|^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$|\psi'\rangle = \frac{|1\rangle_z\, {}_z\langle 1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|1\rangle_z\ {}_z\langle 1|\psi\rangle}} = |1\rangle_z$$

2. On considère maintenant que l'état après la mesure précédente est $|\psi'\rangle = |0\rangle_z$.
   (a) Si l'on souhaite effectuer la mesure du spin de l'électron selon l'axe z, il suffit de reprendre le dispositif de l'expérience de Stern et Gerlach en positionnant le gradient de champ magnétique selon z. Pour plus de précision voir les schémas dessinés dans la correction de l'exercice suivant.
   (b) Mesure de $|0\rangle_z$:
   Commençons par regarder la probabilité d'obtenir $|0\rangle_z$ et l'état quantique après mesure. Alors

$$P(|0\rangle_z) = |\, {}_z\langle 0|\psi'\rangle\,|^2 = |\, {}_z\langle 0|0\rangle_z|^2 = 1$$

   et

$$|\psi''\rangle = \frac{|0\rangle_z\, {}_z\langle 0|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle\psi'|0\rangle_z\ {}_z\langle 0|\psi'\rangle}} = |0\rangle_z$$

   Mesure de $|1\rangle_z$:
   Regardons maintenant ce qu'il en est pour $|1\rangle_z$. Alors

$$P(|1\rangle_z) = |\, {}_z\langle 1|\psi'\rangle\,|^2 = |\, {}_z\langle 1,0\rangle_z|^2 = 0$$

   et

$$|\psi''\rangle = \frac{|1\rangle_z\, {}_z\langle 1|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle\psi'|1\rangle_z\ {}_z\langle 1|\psi'\rangle}} = \emptyset$$

3. On s'intéresse maintenant à la mesure du spin selon y. Or, on rappelle que l'opérateur associé à cette grandeur est donné par

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où $\hat{S}_y$ est exprimé dans la base $(|0\rangle_z, |1\rangle_z)$. Les états propres de $\hat{S}_y$ sont alors

$$|1\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_z + i\,|0\rangle_z \Big)$$
$$|0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_z - i\,|0\rangle_z \Big)$$

L'état avant mesure est d'après l'énoncé $|\psi'\rangle = |0\rangle_z$, puis on effectue la mesure du spin selon y, on ne peut alors obtenir qu'une valeur propre et un vecteur propre de $\hat{S}_y$.

<u>Pour $|0\rangle_y$:</u>
Commençons par calculer la probabilité d'obtenir cet état :

$$\begin{aligned} P(|0\rangle_y) &= \big|\ {}_y\langle 0|\psi'\rangle\big|^2 = |\ {}_y\langle 0|0\rangle_z|^2 \\ &= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\ {}_z\langle 1| + i\ {}_z\langle 0| \Big) \right) |0\rangle_z \right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et après avoir obtenu cette valeur propre, l'état quantique devient

$$|\psi''\rangle = \frac{|0\rangle_y\,{}_y\langle 0|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle\psi'|0\rangle_y\ {}_y\langle 0|\psi'\rangle}} = |0\rangle_y$$

<u>Pour $|1\rangle_y$:</u>
Commençons par calculer la probabilité d'obtenir cet état :

$$\begin{aligned} P(|1\rangle_y) &= \big|\ {}_y\langle 1|\psi'\rangle\big|^2 = |\ {}_y\langle 1|0\rangle_z|^2 \\ &= \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\ {}_z\langle 0| + i\ {}_z\langle 1| \Big) \right) |0\rangle_z \right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et après avoir obtenu cette valeur propre, l'état quantique devient

$$|\psi''\rangle = \frac{|1\rangle_y\,{}_y\langle 1|\psi'\rangle}{\sqrt{\langle\psi'|1\rangle_y\ {}_y\langle 1|\psi'\rangle}} = |1\rangle_y$$

4. Donc avant mesure le système est dans l'état

$$|\psi''\rangle = |0\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_z + i\,|0\rangle_z \Big)$$

Pour $|0\rangle_z$:
Commençons par calculer la probabilité d'obtenir cet état :

$$P(|0\rangle_z) = \left|\ {}_z\langle 0|\psi''\rangle\right|^2 = \left|\ {}_z\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_z + i\,|0\rangle_z\Big)\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

et après avoir obtenu cette valeur propre, l'état quantique devient

$$|\psi'''\rangle = \frac{|0\rangle_z\, {}_z\langle 0|\psi''\rangle}{\sqrt{\langle\psi''|0\rangle_z\ {}_z\langle 0|\psi''\rangle}} = i\,|0\rangle_z$$

Pour $|1\rangle_z$:
Commençons par calculer la probabilité d'obtenir cet état :

$$P(|1\rangle_z) = \left|\ {}_z\langle 1|\psi''\rangle\right|^2 = \left|\ {}_z\langle 1| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle_z + i\,|0\rangle_z\Big)\right)\right|^2 = \frac{1}{2}$$

et après avoir obtenu cette valeur propre, l'état quantique devient

$$|\psi'''\rangle = \frac{|1\rangle_z\, {}_z\langle 1|\psi''\rangle}{\sqrt{\langle\psi''|1\rangle_y\ {}_y\langle 1|\psi''\rangle}} = |1\rangle_z$$

5. Résumons ce que nous venons de voir :

   Initialement, l'état quantique était dans l'état

   $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_z + |1\rangle_z)$$

   Puis on a effectué une mesure du spin selon z. Alors cette mesure ne peut que donner $|0\rangle_z$ ou $|1\rangle_z$ puis le système est ensuite projeté sur l'état obtenu. Si bien que si on effectue une mesure selon z, on obtiendra alors toujours $|0\rangle_z$ si la première mesure avait projeté sur cet état, ou $|1\rangle_z$ si la première mesure avait donné ce résultat.

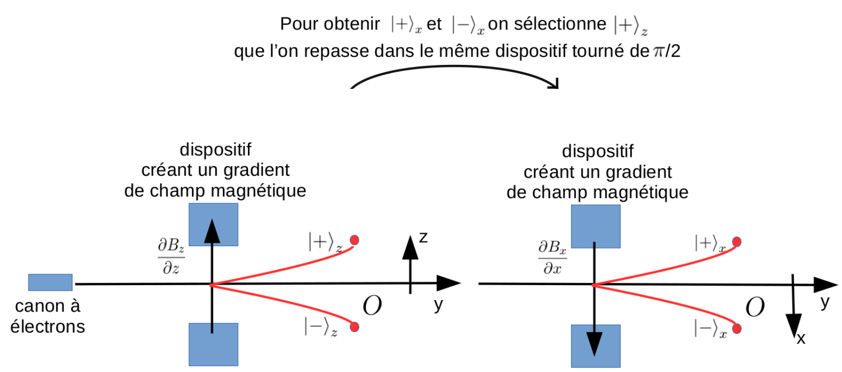
   En effectuant ensuite une mesure du spin selon y, nous pourrions alors nous attendre à obtenir le même résultat que selon z. Mais ce n'est pas le cas (en fait cela vient du fait que $\hat{S}_y$ et $\hat{S}_z$ ne commutent pas). On a vu que si l'état était $|0\rangle_z$ avant la mesure selon y, le résultat à 50% de chance de donner $|0\rangle_y$ et 50% de chance de donner $|1\rangle_y$. On voit donc que connaitre le spin selon une direction ne détermine pas le spin selon une autre direction.

Enfin, après avoir fait la mesure selon y, on refait une mesure selon z et nous pouvons constater que nous ne réobtenons pas $|0\rangle_z$. Le résultat est de nouveau aléatoire entre $|0\rangle_z$ et $|1\rangle_z$.

En conclusion : il est maintenant certain que connaitre le spin dans une direction ne permet pas de connaitre le spin dans une autre direction et que de plus mesurer le spin dans une direction réinitialise l'état quantique intial.

3.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD3

1. Afin de créer les états $|+\rangle_z$ et $|-\rangle_z$, Alice dispose d'un canon à électron et d'un dispositif magnétique créant un champ magnétique variable dans la direction z. Les électrons déviés vers le haut sont $|+\rangle_z$ tandis que les électrons déviés vers le bas sont $|-\rangle_z$. Si maintenant Alice souhaite créer des états $|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$ il suffit de faire passer les électrons issus du canon à électron par un Stern & Gerlachd créant un champ magnétique variable dans la direction x. Alors, les électrons déviés selon $+x$ sont dans l'état $|+\rangle_x$ tandis que ceux déviés dans la direction $-x$ sont $|-\rangle_x$.



2. Il suffit que Bob ai un dispositif comme celui utilisé par Alice et qu'il puisse l'orienter soit pour créer un champ magnétique dans la direction x soit dans la direction z. On a alors plusieurs cas de figure. Si l'état qui arrive sur Bob est $|+\rangle_z$ ou $|-\rangle_z$ et que Bob fait bien la mesure dans la direction z, il observera le même résultat à savoir $|+\rangle_z$ dans le premier cas et $|-\rangle_z$ dans le second cas. Si par contre, il mesure selon x alors que le système soit dans l'état $|+\rangle_z$ ou $|-\rangle_z$, il mesurera

avec une probabilité 0.5 que l'électron est dans l'état $|+\rangle_x$ et avec une probabilité 0.5 que l'électron est dans l'état $|-\rangle_x$ (voir l'exercice précédent). Il en va de même si l'état qui arrive sur Bob est $|+\rangle_x$ ou $|-\rangle_x$.

3. Compte-tenu de ce qui a été dit à la question précédente, le résultat obtenu par Bob sera

$$|+\rangle_z \,, |\pm\rangle_x \,, |\pm\rangle_x \,, |\pm\rangle_z \,, |\pm\rangle_z \,, |+\rangle_z \,, |-\rangle_x \,, |+\rangle_x$$

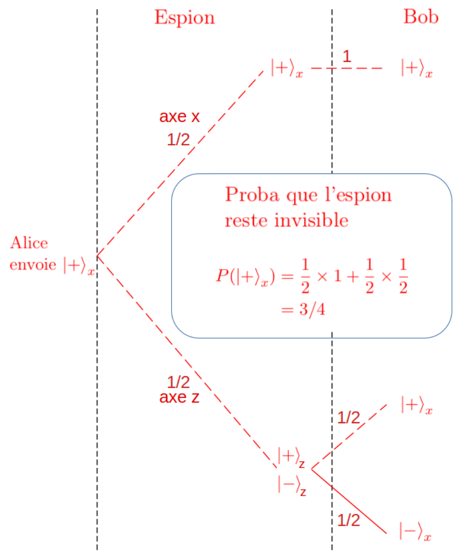
$|\pm\rangle_i$ (où i représente soit x soit z) signifiant que le résultat sera dans 50% des cas $|+\rangle_i$ et dans 50% des cas $|-\rangle_i$.

4. Lorsque le choix des axes ne coïncide pas, aucune conclusion ne peut être tiré. Par contre, si Alice et Bob choisissent les mêmes axes, ils doivent obtenir les mêmes résultats. Or ici, on constate que le même choix d'axes est fait pour le premier électron et les trois derniers électrons (électrons 6, 7 et 8) mais les résultats diffèrent pour les électrons 6 et 7.

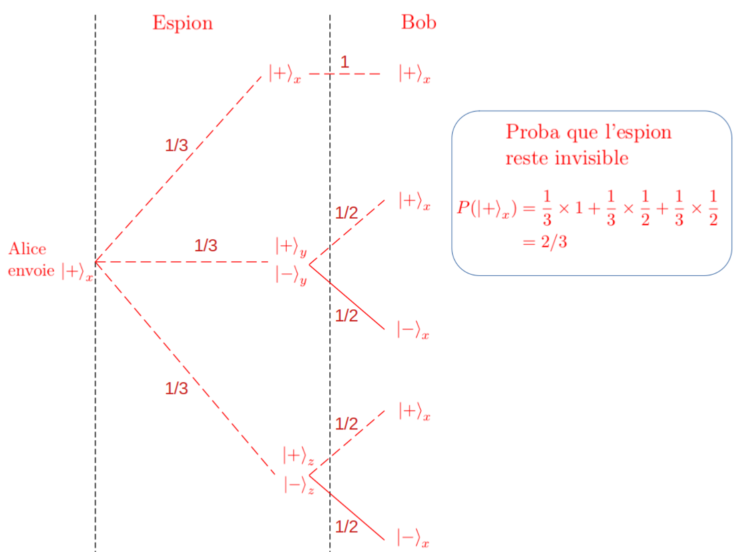
   Cela s'explique par le fait qu'un espion à intercepter les électrons.

   Pour expliquer cela, considérons le 6ème électron. En théorie Bob aurait dû obtenir + (puisque Bob mesure bien dans la direction z et qu'Alice a émis $|+\rangle_z$) mais il mesure $|-\rangle_z$. Cela vient du fait qu'un espion a lui-même effectué une mesure mais en ne prenant pas le bon axe : il a fait sa mesure sur x. Après la mesure, l'électron s'est trouvé projeté dans l'état $|+\rangle_x$ et $|-\rangle_x$. Alors lorsque Bob effectue sa mesure, il n'a plus qu'une chance sur deux d'obtenir le bon résultat.

   Si il y a un espion, alors la probabilité qu'il reste invisible sur une interception est de 3/4 comme le montre le schéma ci-dessous



Dans le cas où Alice et Bob aurait le droit aux 3 axes, x, y et z alors la propabilité pour l'espion de rester invisible ne serait que de $2/3$ comme le montre la figure suivante



5. Nous allons décrire ici le protocole qui pourrait être utilisé pour faire de la cryptographie quantique :

Alice peut préparer grâce à un Stern & Gerlach dans la direction x des électrons qui sont soit $|+\rangle_x$ soit $|-\rangle_x$. De même, elle peut préparer grâce à un Stern & Gerlach dans la direction z des électrons qui sont soit $|+\rangle_z$ soit $|-\rangle_z$. Bob possède aussi des Stern & Gerlach dans les deux mêmes directions. Bob et Alice se sont mis d'accord sur les points suivants :

(a) sur ce qu'ils appellent l'axe x et l'axe z (de manière à ce que les axes coïncident).

(b) sur le fait que $|+\rangle_z$ et $|+\rangle_x$ seront équivalent au bit 1, tandis que $|-\rangle_z$ et $|-\rangle_x$ seront équivalent au bit 0.

(c) Enfin, Alice peut envoyer de manière numéroté les électrons et Bob et Alice savent donc lequel est le 1er électron, lequel est le 2ème électron et ainsi de suite.

Alice veut envoyer un message de N bits (par exemple : 10010110...). Pour cela, elle va préparer $2N+n$ électrons. $2N$ électrons serviront au processus d'encodage proprement dit, tandis que les n électrons qui seront choisis aléatoirement par Bob serviront à vérifier la présence ou non d'un espion.

Alice prépare donc en choisissant aléatoirement entre les deux Stern & Gerlach, les $2N+n$ électrons. Elle note de son côté pour chaque électron, le numéro qu'elle lui associe, ainsi que l'axe choisi et l'état quantique de l'électron. Ainsi, elle peut remplir le tableau suivant (qui restera totalement privé)

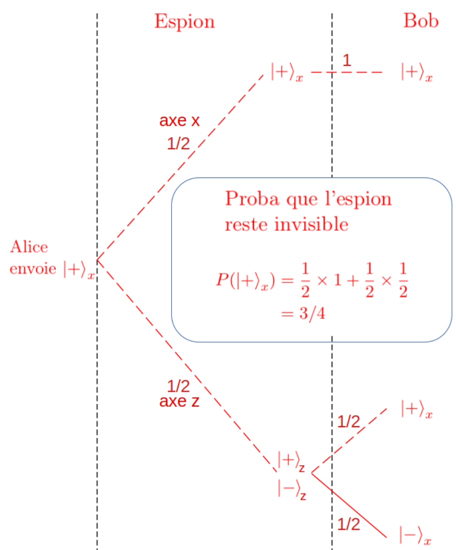
électron	1	2	3	4	...	$2N+n-1$	$2N+n$
axe	x	x	z	x	...	z	z
résultat	$\|+\rangle_x$	$\|+\rangle_x$	$\|-\rangle_z$	$\|-\rangle_x$	...	$\|-\rangle_z$	$\|+\rangle_z$

Elle envoie alors les $2N+n$ électrons à Bob en ne donnant aucune autre indication que le numéro associé à l'électron.

Bob peut alors passer les électrons dans un Stern & Gerlach de son choix (c'est-à-dire soit x soit z). Il peut alors remplir le tableau suivant

électron	1	2	3	4	...	$2N+n-1$	$2N+n$
axe	x	z	z	z	...	x	z
résultat	$\|+\rangle_x$	$\|-\rangle_z$	$\|-\rangle_z$	$\|-\rangle_z$	...	$\|+\rangle_x$	$\|+\rangle_z$

On sait alors grâce aux questions précédentes de l'exercice que
— Pour un électron donné, si Bob est Alice font les mêmes choix d'axe, ce qui arrive statistiquement une fois sur deux, et qu'il n'y a pas d'espion, alors ils doivent obtenir le même résultat.
— Pour un électron donné, si le choix des axes est différent alors ni Alice ni Bob ne peut prévoir le résultat de l'autre.
— Si il y a un espion, alors la probabilité qu'il reste invisible sur une interception est de $3/4$ comme le montre le schéma ci-dessous



Bob envoie alors les choix d'axe pour chaque électron et pour n de ces électrons, choisis totalement aléatoirement parmis les $2N+n$, il envoie en plus du choix d'axe, le résultat obtenu.

De son côté Alice commence par analyser les n électrons pour lesquels Bob a à la fois envoyé le choix d'axe et le résultat obtenu. Statistiquement, les choix de Bob concorderont pour $n/2$ électrons. Si pour ces $n/2$ électrons, les résultats de Bob coïncident avec les états quantiques envoyés par Alice, alors la probabilité pour qu'un espion soit intervenu tout en restant invisible est de $(3/4)^{n/2}$ (pour $n = 200$ cette probabilité peut être assimilée à 0). Par contre si des résultats sont différents alors, Alice a la certitude qu'il y a un espion sur la ligne.

Dans le cas où la présence d'un espion a été écartée par Alice, alors elle peut continuer la procédure. Elle est maintenant en mesure de prédire tous les résultats de Bob, lorsque le choix de Bob pour un électron donné coïncide avec le choix de préparation de l'électron par Alice. Elle peut maintenant permettre à Bob de construire le message qu'elle souhaite lui envoyé. En effet, ils se sont entendus sur le fait que $|+\rangle_x$ et $|+\rangle_z$ seront équivalent au bit 1, tandis que $|-\rangle_x$ et $|-\rangle_z$ seront équivalent au bit 0. Elle peut donc lui dire que le 1er bit du message correspond au résultat qu'il a obtenu pour tel électron...et ainsi de suite...

4 Correction du TD4

4.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD4

1. On cherche la représentation matricielle de $CNOT$. Afin de l'obtenir, plusieurs méthodes sont à notre disposition. Toutes les méthodes utilisent le fait que la base de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ est orthonormée, c'est-à-dire que :

$$\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l \\ = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire explicitement de la façon suivante

$$\langle 00|00\rangle = \langle 01|01\rangle = \langle 10|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$$

tous les autres produits scalaires valent 0.

(a) Méthode 1 :
on calcule pour chaque vecteur de la base de départ l'effet de CNOT que l'on exprime dans la base d'arrivée (qui est évidemment la même). Puis, on rentre dans une matrice, les vecteurs obtenus précédemment en colonne.

On se donne pour cela une base canonique (comme cela avait été fait dans l'exercice 1 du TD1 où l'on traité une fonction agissant sur l'espace des polynômes). On peut par exemple introduire la base suivante :

$$|00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad |00\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Cette base est bien orthonormée. Si on calcule par exemple $\langle 00|00\rangle$ alors

$$\langle 00|00\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 1$$

Alors que si on calcule $\langle 00|01\rangle$, on obtient

$$\langle 00|01\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

Si on appelle $\hat{A}_{\text{CNOT}}$ l'opérateur représentant CNOT, alors, d'après l'énoncé

$$\hat{A}_{\text{CNOT}}\,|00\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{\text{CNOT}}\,|01\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{\text{CNOT}}\,|10\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{\text{CNOT}}\,|11\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

On peut alors remplir en colonne la matrice représentative de CNOT.

$$\hat{A}_{\text{CNOT}} |01\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{\text{CNOT}} |10\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{\text{CNOT}} |00\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{\text{CNOT}} |11\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Méthode 2 :
On utilise directement les notations de Dirac en introduisant une base canonique qui permet d'ordonner les vecteurs de base de l'espace $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Ainsi

$$|00\rangle \longrightarrow |1\rangle \qquad |01\rangle \longrightarrow |2\rangle$$

$$|10\rangle \longrightarrow |3\rangle \qquad |11\rangle \longrightarrow |4\rangle$$

(qui signifie simplement que $|1\rangle$ est le 1er vecteur de base, $|2\rangle$ le 2ème vecteur de base, $|3\rangle$ le 3ème vecteur de base et enfin $|4\rangle$ le 4ème et dernier vecteur de base). La base canonique ainsi introduite est bien une base orthonormée

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

où i, j prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4.

On peut maintenant exprimer les éléments de la matrice $\hat{A}_{\text{CNOT}}$ grâce à la relation suivante

$$\left(\hat{A}_{\text{CNOT}}\right)_{ij} = \langle i| \hat{A}_{CNOT} |j\rangle$$

où encore une fois i, j prennent les valeurs 1, 2, 3 et 4. $\hat{A}_{\text{CNOT}}$ s'écrit donc comme la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle 1| \hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle & \langle 1| \hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle & \langle 1| \hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle & \langle 1| \hat{A}_{\text{CNOT}} |4\rangle \\ \langle 2| \hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle & \langle 2| \hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle & \langle 2| \hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle & \langle 2| \hat{A}_{\text{CNOT}} |4\rangle \\ \langle 3| \hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle & \langle 3| \hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle & \langle 3| \hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle & \langle 3| \hat{A}_{\text{CNOT}} |4\rangle \\ \langle 4| \hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle & \langle 4| \hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle & \langle 4| \hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle & \langle 4| \hat{A}_{\text{CNOT}} |4\rangle \end{pmatrix}$$

Or d'après l'énoncé

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |01\rangle
\end{aligned}$$

En utilisant la base canonique que l'on vient d'introduire, on a donc

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle &= |1\rangle \\
\hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle &= |2\rangle \\
\hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle &= |4\rangle \\
\hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle &= |3\rangle
\end{aligned}$$

On voit alors que

$$\begin{aligned}
\langle 1| \hat{A}_{\text{CNOT}} |1\rangle &= \langle 1|1\rangle = 1 \\
\langle 2| \hat{A}_{\text{CNOT}} |2\rangle &= \langle 2|2\rangle = 1 \\
\langle 4| \hat{A}_{\text{CNOT}} |3\rangle &= \langle 4|4\rangle = 1 \\
\langle 3| \hat{A}_{\text{CNOT}} |4\rangle &= \langle 3|3\rangle = 1
\end{aligned}$$

Tous les autres termes sont nuls. La matrice s'écrit donc

$$\hat{A}_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Méthode 3 :
On peut également utiliser les notations de Dirac sans introduire explicitement la base ordonnée $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. Pour cela, on ordonne directement la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. On trouve alors

	$\hat{A}_{\text{CNOT}} \|00\rangle$	$\hat{A}_{\text{CNOT}} \|01\rangle$	$\hat{A}_{\text{CNOT}} \|10\rangle$	$\hat{A}_{\text{CNOT}} \|11\rangle$
$\langle 00\| \longrightarrow$	1	0	0	0
$\langle 01\| \longrightarrow$	0	1	0	0
$\langle 10\| \longrightarrow$	0	0	0	1
$\langle 11\| \longrightarrow$	0	0	1	0

où l'on a utilisé que la base $\{|ij\rangle\}$ est orthonormée et que donc

$$\langle 00|00\rangle = \langle 01|01\rangle = \langle 10|10\rangle = \langle 11|11\rangle = 1$$

alors que tous les autres produits scalaires valent 0.

2. l'opérateur est effectivement unitaire : $\hat{A}^\dagger_{CNOT}\hat{A}_{CNOT} = \hat{A}_{CNOT}\hat{A}^\dagger_{CNOT} = \mathbb{1}$. Donc cet opérateur est bien représentatif de l'évolution d'un ket par l'équation de Schrödinger. Nous verrons effectivement dans la seconde partie qu'il s'agit d'une opération importante de l'informatique quantique.
3. Il y a encore une fois deux méthodes. Mais dans un premier temps, commençons par développer $|\psi_1\rangle$:

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \Big(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle\Big) \otimes \Big(-\frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle\Big)\\ &= \sqrt{\frac{8}{15}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}|01\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|11\rangle\end{aligned}$$

   (a) Méthode 1 : En utilisant la représentation matricielle de $\hat{A}_{\text{CNOT}}$. Dans la base choisie pour exprimer la matrice $\hat{A}_{CNOT}$ le vecteur $|\psi_1\rangle$ s'écrit

$$|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{8}{15}}\\ -\sqrt{\frac{2}{15}}\\ -\sqrt{\frac{4}{15}}\\ \sqrt{\frac{1}{15}}\end{pmatrix}$$

   puis on fait le produit matriciel $\hat{A}_{CNOT}|\psi_1\rangle$ d'où l'on obtient

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\text{CNOT}}|\psi_1\rangle &= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{8}{15}}\\ -\sqrt{\frac{2}{15}}\\ -\sqrt{\frac{4}{15}}\\ \sqrt{\frac{1}{15}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{\frac{8}{15}}\\ -\sqrt{\frac{2}{15}}\\ \sqrt{\frac{1}{15}}\\ -\sqrt{\frac{4}{15}}\end{pmatrix}\\ &= \sqrt{\frac{8}{15}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}|01\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}|10\rangle - \sqrt{\frac{4}{15}}|11\rangle\end{aligned}$$

   A noter que cette méthode ne dépend absolument pas de la base canonique choisie pour exprimer la matrice, c'est-à-dire que ca ne dépend pas de la méthode utilisée à la question 1 (parmis les 3 méthodes)

(b) Méthode 2 :
l'autre méthode consiste à directement prendre le vecteur $|\psi_1\rangle$

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{8}{15}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}\,|01\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\,|11\rangle$$

puis à appliquer les transformations mentionnées dans l'énoncé, à savoir

$$\begin{aligned}|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle\\ |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle\\ |10\rangle &\longrightarrow |11\rangle\\ |11\rangle &\longrightarrow |10\rangle\end{aligned}$$

Alors

$$|\psi_1\rangle \longrightarrow \sqrt{\frac{8}{15}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}\,|01\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}}\,|11\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\,|10\rangle$$

4.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD4

1. On rappelle que $\mathbb{C}^2$ a pour base $\{|0\rangle\,;|1\rangle\}$. Cette base étant orthonormée, on a

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

avec $i, j \in [\![0;1]\!]$. Alors la représentation matricielle d'un opérateur $\hat{H}$ est donnée par

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle 0|\,\hat{H}\,|0\rangle & \langle 0|\,\hat{H}\,|1\rangle \\ \langle 1|\,\hat{H}\,|0\rangle & \langle 1|\,\hat{H}\,|1\rangle \end{pmatrix}$$

Or d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\\ \hat{H}\,|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{H}|0\rangle &= \langle 0|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\langle 1|\hat{H}|0\rangle &= \langle 1|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\langle 0|\hat{H}|1\rangle &= \langle 0|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\langle 1|\hat{H}|1\rangle &= \langle 1|\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle\big) = -\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

2. Clairement $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ (Rappel : $\hat{H}^\dagger$ est le transconjugué de $\hat{H}$), et $\hat{H}^2 = \mathbb{1}$ donc c'est bien un opérateur unitaire (Rappel : un opérateur est unitaire ssi $\hat{H}\hat{H}^\dagger = \hat{H}^\dagger\hat{H} = \mathbb{1}$). Ainsi ce processus est réalisable quantiquement.
3. Pour trouver la représentation matricielle de $\hat{H}^{(2)}$, il y a deux méthodes.

   <u>Méthode matricielle :</u>

   $$\hat{H}^{(2)} = \hat{H}\otimes\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\otimes\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

   On a alors

   $$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ 1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} & -1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

   Ce résultat est exprimé dans la base ordonnée $\{|00\rangle\,;|01\rangle\,;|10\rangle\,;|11\rangle\}$.

   <u>Méthode directe :</u>
   On peut également trouver la représentation matricielle de $\hat{H}^{(2)}$ en regardant l'effet de cet opérateur $\hat{H}^{(2)}$ sur les vecteurs de base : $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Comme dans l'exercice précédent, nous aurions 3 possibilités pour déterminer directement dépendant de la base

canonique que nous introduisons pour faire le calcul (toutes les méthodes sont évidemment équivalentes). Ici, nous allons utiliser la méthode 3, c'est-à-dire que nous introduisons tout simplement la base ordonnée $\{|00\rangle\,;|01\rangle\,;|10\rangle\,;|11\rangle\}$. On a alors

	$\hat{H}^{(2)}\|00\rangle$	$\hat{H}^{(2)}\|01\rangle$	$\hat{H}^{(2)}\|10\rangle$	$\hat{H}^{(2)}\|11\rangle$
$\langle 00\| \longrightarrow$	$\langle 00\|\hat{H}^{(2)}\|00\rangle$	$\langle 00\|\hat{H}^{(2)}\|01\rangle$	$\langle 00\|\hat{H}^{(2)}\|10\rangle$	$\langle 00\|\hat{H}^{(2)}\|11\rangle$
$\langle 01\| \longrightarrow$	$\langle 01\|\hat{H}^{(2)}\|00\rangle$	$\langle 01\|\hat{H}^{(2)}\|01\rangle$	$\langle 01\|\hat{H}^{(2)}\|10\rangle$	$\langle 01\|\hat{H}^{(2)}\|11\rangle$
$\langle 10\| \longrightarrow$	$\langle 10\|\hat{H}^{(2)}\|00\rangle$	$\langle 10\|\hat{H}^{(2)}\|01\rangle$	$\langle 10\|\hat{H}^{(2)}\|10\rangle$	$\langle 10\|\hat{H}^{(2)}\|11\rangle$
$\langle 11\| \longrightarrow$	$\langle 11\|\hat{H}^{(2)}\|00\rangle$	$\langle 11\|\hat{H}^{(2)}\|01\rangle$	$\langle 11\|\hat{H}^{(2)}\|10\rangle$	$\langle 11\|\hat{H}^{(2)}\|11\rangle$

Ainsi

$$\hat{H}^{(2)}|00\rangle = \hat{H}|0\rangle\otimes\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)$$
$$\hat{H}^{(2)}|01\rangle = \hat{H}|0\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)$$
$$\hat{H}^{(2)}|10\rangle = \hat{H}|1\rangle\otimes\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle)$$
$$\hat{H}^{(2)}|11\rangle = \hat{H}|1\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle-|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle)$$

On obtient alors sans difficulté la représentation suivante (qui est bien la même que celle obtenue avec la méthode précédente) :

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

4. On souhaite maintenant trouver l'image par $\hat{H}^{(2)}$ du vecteur

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle\right)\otimes\left(\frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle\right) \tag{2}$$

Il y a encore une fois deux méthodes.

Méthode matricielle :
En développant $|\psi_1\rangle$, on obtient :

$$|\psi_1\rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}|01\rangle - \frac{2}{\sqrt{15}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\hat{H}^{(2)}|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{15}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 3(\sqrt{2}-1) \\ \sqrt{2}+1 \\ 3(\sqrt{2}+1) \end{pmatrix}$$

Méthode directe :

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|\psi_1\rangle &= \hat{H}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle\right) \otimes \hat{H}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle - \frac{2}{\sqrt{5}}|0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle - |1\rangle) - \sqrt{\frac{2}{3}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(|0\rangle - |1\rangle) - \frac{2}{\sqrt{5}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{15}}|00\rangle + \frac{3(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{15}}|01\rangle + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{15}}|10\rangle + \frac{3(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{15}}|11\rangle\right)
\end{aligned}$$

et on retrouve bien le même résultat.

4.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD4

1. Vérifions que les états $|\psi\rangle$, $|\psi'\rangle$ et $|\phi^+\rangle$ sont normés.

   Soit $|\varphi\rangle$ un vecteur quelconque de $\mathcal{E}_{\text{tens}}$ exprimé dans la base orthonormée $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Alors

   $$|\varphi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

   alors

   $$\langle\varphi|\varphi\rangle = (c_{00}^*\langle 00| + c_{01}^*\langle 01| + c_{10}^*\langle 10| + c_{11}^*\langle 11|)(c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle)$$

   or

   $$\langle ij|kl\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}$$

d'où l'on déduit, en utilisant la linéarité à gauche et à droite du produit sésquilinéaire :

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 + |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2$$

Nous pouvons donc utiliser cette relation pour chacun des vecteurs donnés. Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \left|\sqrt{\frac{8}{15}}\right|^2 + \left|-\sqrt{\frac{2}{15}}\right|^2 + \left|-\sqrt{\frac{4}{15}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{1}{15}}\right|^2 = 1 \\
\langle\psi'|\psi'\rangle &= \left|\sqrt{\frac{9}{36}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{4}{36}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{7}{36}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{16}{36}}\right|^2 = 1 \\
\langle\phi^+|\phi^+\rangle &= \left|\sqrt{\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{1}{2}}\right|^2 = 1
\end{aligned}$$

2. Regardons si les états sont intriqués ou non.

Généralité :
Soit $|\varphi\rangle$ un vecteur quelconque de $\mathcal{E}_{\text{tens}}$ exprimé dans la base orthonormée $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$. Il faut donc trouver (a_0, a_1) et (b_0, b_1) tels que

$$\begin{aligned}
|\varphi\rangle &= c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle \\
&= \Big(a_0|0\rangle + a_1|1\rangle\Big) \otimes \Big(b_0|0\rangle + b_1|1\rangle\Big) \\
&= a_0b_0|00\rangle + a_0b_1|01\rangle + a_1b_0|10\rangle + a_1b_1|11\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui revient à résoudre le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
c_{00} &= a_0b_0 \\
c_{01} &= a_0b_1 \\
c_{10} &= a_1b_0 \\
c_{11} &= a_1b_1 \\
|a_0|^2 + |a_1|^2 &= |b_0|^2 + |b_1|^2 = 1
\end{aligned}$$

La dernière relation provient du fait que l'on veut que le vecteur de chacun des espaces soit normé.

On peut alors montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que cette décomposition existe est

$$c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}$$

En appliquant la condition nécessaire et suffisante précédente, on voit immédiatement que $|\psi\rangle$ n'est pas intriqué alors que $|\psi'\rangle$ et $|\phi^+\rangle$ le sont.

Pour $|\psi\rangle$ on peut même résoudre le système d'équations pour obtenir la factorisation (même si cela n'est pas nécessaire pour cette question) qui s'écrit alors

$$a_0 b_0 = \sqrt{\frac{8}{15}} = c_{00} \qquad (1)$$

$$a_0 b_1 = -\sqrt{\frac{2}{15}} = c_{01} \qquad (2)$$

$$a_1 b_0 = -\sqrt{\frac{4}{15}} = c_{10} \qquad (3)$$

$$a_1 b_1 = \sqrt{\frac{1}{15}} = c_{11} \qquad (4)$$

$$a_0^2 + a_1^2 = b_0^2 + b_1^2 = 1 \qquad (5)$$

En toute rigueur, on a $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{C}^4$ et on devrait donc, dans la dernière expression faire intervenir des modules. Toutefois, par soucis de simplification, nous allons chercher ici $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$.

D'après (1), on peut écrire

$$a_0 = \frac{1}{b_0}\sqrt{\frac{8}{15}}$$

que l'on peut injecter dans (2) :

$$\frac{b_1}{b_0}\sqrt{\frac{8}{15}} = -\sqrt{\frac{2}{15}} \Longleftrightarrow \frac{b_1}{b_0} = -\sqrt{\frac{2}{8}} = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow b_1 = -\frac{1}{2}b_0$$

On peut maintenant utiliser la condition de normalisation (5) :

$$b_0^2 + b_1^2 = 1 \Longleftrightarrow b_0^2 + \frac{1}{4}b_0^2 = 1 \Longleftrightarrow \frac{5}{4}b_0^2 = 1 \Longleftrightarrow b_0 = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

En reprenant la relation obtenue précédemment entre b_0 et b_1, on obtient

$$b_1 = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Comme les signes sont sans importances (si ils sont tout de même cohérents entre eux), posons

$$b_0 = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad\qquad b_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Grâce à l'expression (1), nous pouvons maintenant déterminer a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{b_0}\sqrt{\frac{8}{15}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

et l'équation (3) donne

$$a_1 = -\frac{1}{b_0}\sqrt{\frac{4}{15}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Finalement, nous avons montré que

$$|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\right)$$

3. Le système des 2 électrons est dans l'état quantique

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{8}{15}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}\,|01\rangle - \sqrt{\frac{4}{15}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\,|11\rangle$$

(a) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|0\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle = \Gamma\left(\sqrt{\frac{8}{15}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{2}{15}}\,|01\rangle\right)$$

où Γ est le coefficient de normalisation qu'il faut déterminer. Ainsi

$$\langle\psi_{e_1=|0\rangle}|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle = |\Gamma|^2\left(\frac{8}{15} + \frac{2}{15}\right) = \frac{2}{3}\,|\Gamma|^2 = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = e^{i\alpha}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'état quantique du système après avoir mesuré l'électron 1 dans l'état $|0\rangle$ est donc donné par :

$$|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle = e^{i\alpha}\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{1}{5}}\,|01\rangle\right)$$

Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 00|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = \left|e^{i\alpha}\sqrt{\frac{4}{5}}\right|^2 = \frac{4}{5}$$

Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 01|\psi_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = \left|e^{i\alpha}\sqrt{\frac{1}{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}$$

(b) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |1\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |1\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|1\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle = \Gamma\left(-\sqrt{\frac{4}{15}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\,|11\rangle\right)$$

où Γ est le coefficient de normalisation qu'il faut déterminer. Ainsi

$$\langle\psi_{e_1=|1\rangle}|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle = |\Gamma|^2\left(\frac{4}{15} + \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{3}\,|\Gamma|^2 = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = e^{i\beta}\sqrt{3}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. L'état quantique du système après avoir mesuré l'électron 1 dans l'état $|1\rangle$ est donc donné par :

$$|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle = e^{i\beta}\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{5}}\,|11\rangle\right)$$

Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 10|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \left|-e^{i\beta}\sqrt{\frac{4}{5}}\right|^2 = \frac{4}{5}$$

Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 11|\psi_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \left|e^{i\beta}\sqrt{\frac{1}{5}}\right|^2 = \frac{1}{5}$$

(c) On voit donc que :

$$P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) = P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \frac{4}{5}$$
$$P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) = P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \frac{1}{5}$$

ce qui signifie que la mesure de l'électron 1 n'a aucune influence sur la mesure de l'électron 2. Les deux électrons sont donc indépendants. Cela vient du fait qu'ils ne sont pas intriqués (ils sont indépendants l'un de l'autre car l'état quantique $|\psi\rangle$ peut s'écrire comme le produit tensoriel d'un unique état quantique de l'électron 1 avec un unique état quantique de l'électron 2). On peut même facilement retrouver les résultats calculés ici en se rappelant que cet état peut s'écrire :

$$|\psi\rangle = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\rangle\right) \otimes \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\right)$$

On voit donc que l'électron 2 est dans l'état

$$|\psi_{\text{électron 2}}\rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}\,|1\rangle\right)$$

et on a alors

$$P(e_2 = |0\rangle) = |\langle 0|\psi_{\text{électron 2}}\rangle|^2 = \frac{4}{5}$$
$$P(e_2 = |1\rangle) = |\langle 1|\psi_{\text{électron 2}}\rangle|^2 = \frac{1}{5}$$

4. Le système des 2 électrons est dans l'état quantique

$$|\psi'\rangle = \sqrt{\frac{9}{36}}\,|00\rangle + \sqrt{\frac{4}{36}}\,|01\rangle + \sqrt{\frac{7}{36}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{16}{36}}\,|11\rangle$$

(a) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|0\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle = \Gamma\left(\sqrt{\frac{9}{36}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{4}{36}}\,|01\rangle\right)$$

où Γ est le coefficient de normalisation qu'il faut déterminer. Ainsi

$$\langle\psi'_{e_1=|0\rangle}|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle = |\Gamma|^2\left(\frac{9}{36}+\frac{4}{36}\right) = \frac{13}{36}\,|\Gamma|^2 = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = e^{i\alpha}\sqrt{\frac{36}{13}}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'état quantique du système après avoir mesuré l'électron 1 dans l'état $|0\rangle$ est donc donné par :

$$|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle = e^{i\alpha}\left(\sqrt{\frac{9}{13}}\,|00\rangle - \sqrt{\frac{4}{13}}\,|01\rangle\right)$$

<u>Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$:</u>
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 00|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = \left|e^{i\alpha}\sqrt{\frac{9}{13}}\right|^2 = \frac{9}{13}$$

<u>Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle)$:</u>
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 01|\psi'_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = \left|e^{i\alpha}\sqrt{\frac{4}{13}}\right|^2 = \frac{4}{13}$$

(b) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|1\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle = \Gamma \left(\sqrt{\frac{7}{36}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{16}{36}}\,|11\rangle \right)$$

où Γ est le coefficient de normalisation qu'il faut déterminer. Ainsi

$$\langle\psi'_{e_1=|1\rangle}|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle = |\Gamma|^2 \left(\frac{7}{36} + \frac{16}{36} \right) = \frac{23}{36}\,|\Gamma|^2 = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = e^{i\beta}\sqrt{\frac{36}{23}}$$

où $\beta \in \mathbb{R}$. L'état quantique du système après avoir mesuré l'électron 1 dans l'état $|1\rangle$ est donc donné par :

$$|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle = e^{i\beta} \left(\sqrt{\frac{7}{23}}\,|10\rangle + \sqrt{\frac{16}{23}}\,|11\rangle \right)$$

<u>Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:</u>
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 10|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \left| e^{i\beta}\sqrt{\frac{7}{23}} \right|^2 = \frac{7}{23}$$

<u>Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:</u>
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 11|\psi'_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \left| e^{i\beta}\sqrt{\frac{16}{23}} \right|^2 = \frac{16}{23}$$

(c) On voit donc que :

$$P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) \neq P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$$
$$P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) \neq P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$$

ce qui signifie que la mesure de l'électron 1 a une influence sur la mesure de l'électron 2. Les deux électrons sont donc corrélés. Cela vient du fait qu'ils sont intriqués.

5. Le système des 2 électrons est dans l'état quantique

$$|\phi^+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

(a) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|0\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\phi^+_{e_1=|0\rangle}\rangle = \Gamma\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle = e^{i\alpha}|00\rangle$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\phi^+_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 00|\phi^+_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = 1$$

Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\phi^+_{e_1=|0\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |0\rangle) = \left|\langle 01|\phi^+_{e_1=|0\rangle}\rangle\right|^2 = 0$$

(b) Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$ et $P(e_2 = |1\rangle \backslash e_1 = |1\rangle)$:

Pour les deux probabilités demandées, on commence par faire une mesure sur l'électron 1 qui est trouvé dans l'état $|1\rangle$. Donc après cette 1ère mesure, le système se retrouve projeté dans l'état quantique

$$|\phi^+_{e_1=|1\rangle}\rangle = \Gamma\sqrt{\frac{1}{2}}|11\rangle = e^{i\beta}|11\rangle$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.

Calcul de $P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |1\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\phi^+_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 10|\phi^+_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = 0$$

Calcul de $P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |1\rangle)$:
On cherche maintenant la probabilité de trouver l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ sachant que le système est dans l'état $|\phi^+_{e_1=|1\rangle}\rangle$. Cette probabilité est d'après les postulats de Dirac donnée par

$$P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |1\rangle) = \left|\langle 11|\phi^+_{e_1=|1\rangle}\rangle\right|^2 = 1$$

(c) On voit donc que :

$$\begin{aligned} P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) &\neq P(e_2 = |0\rangle \setminus e_1 = |1\rangle) \\ P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |0\rangle) &\neq P(e_2 = |1\rangle \setminus e_1 = |1\rangle) \end{aligned}$$

ce qui signifie que la mesure de l'électron 1 a une influence sur la mesure de l'électron 2. Les deux électrons sont donc corrélés. Cela vient du fait qu'ils sont intriqués.

6. Vérifions la normalisation :

$$\begin{aligned} \langle\phi^+|\phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 0,0| + \langle 1,1|\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0,0\rangle + |1,1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0,0|0,0\rangle + \langle 0,0|1,1\rangle + \langle 1,1|0,0\rangle + \langle 1,1|1,1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|0\rangle\,\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle\,\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle\,\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle\,\langle 1|1\rangle\Big) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Il en va de même pour $|\phi^-\rangle$, $|\psi^+\rangle$ et $|\psi^-\rangle$. Donc les vecteurs sont bien normés.

Vérifions maintenant l'orthogonalité

$$\begin{aligned}
\langle \phi^+|\phi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\langle 0,0| + \langle 1,1|\Big)\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0,0\rangle - |1,1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 0,0|0,0\rangle - \langle 0,0|1,1\rangle + \langle 1,1|0,0\rangle - \langle 1,1|1,1\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|0\rangle\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle\langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle\langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Il en va de même pour les autres $\langle \phi^+|\phi^-\rangle = \langle \phi^+|\psi^+\rangle = \langle \phi^+|\psi^-\rangle = \langle \phi^-|\psi^+\rangle = \langle \phi^-|\psi^-\rangle = \langle \psi^+|\psi^-\rangle = 0$.

L'espace est de dimension 4, nous avons 4 vecteurs indépendants (car orthogonaux deux à deux) donc cette famille est une base orthonormée.

4.4 Corrigé de l'exercice 4 du TD4

On considère l'état quantique suivant :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{20}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|001\rangle + \frac{3}{\sqrt{20}}|010\rangle + \frac{2}{\sqrt{20}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{20}}|110\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}|111\rangle$$

1. Vérifions que l'état $|\psi\rangle$ est bien normé, c'est-à-dire que $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Pour cela, rappelons que

$$\langle ijk|lmn\rangle = \langle i|l\rangle\langle j|m\rangle\langle k|n\rangle = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$, et 0 sinon. On voit alors immédiatement que

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle = &\left(\langle 000|\frac{1}{\sqrt{20}} + \langle 001|\frac{1}{\sqrt{10}} + \langle 010|\frac{3}{\sqrt{20}} + \langle 100|\frac{2}{\sqrt{20}} + \langle 110|\frac{1}{\sqrt{20}} + \langle 111|\sqrt{\frac{3}{20}}\right) \\
&\left(\frac{1}{\sqrt{20}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|001\rangle + \frac{3}{\sqrt{20}}|010\rangle + \frac{2}{\sqrt{20}}|100\rangle + \frac{1}{\sqrt{20}}|110\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}|111\rangle\right) \\
= &\frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{9}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = 1
\end{aligned}$$

2. Calculons la probabilité que le 2ème électron soit dans l'état $|0\rangle$ et l'état dans lequel se trouve le système après avoir mesuré le 2ème

électron dans l'état $|0\rangle$:

$$\begin{aligned} P(e_2 = |0\rangle) &= P(|000\rangle) + P(|001\rangle) + P(|100\rangle) + P(|101\rangle) \\ &= |\langle 000|\psi\rangle|^2 + |\langle 001|\psi\rangle|^2 + |\langle 100|\psi\rangle|^2 + |\langle 101|\psi\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{4}{20} + 0 = \frac{7}{20} \end{aligned}$$

Après mesure, le système se trouvera alors dans l'état

$$|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{20}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|001\rangle + \frac{2}{\sqrt{20}}|100\rangle\right)\Gamma$$

On a sélectionné les seuls états contenus dans $|\psi\rangle$ qui sont compatibles avec le fait que l'électron 2 est dans l'état $|0\rangle$. Le facteur numérique Γ permet d'assurer que $|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle$ est bien normé. Donc pour déterminer Γ, on effectue le calcul suivant :

$$\langle\psi_{e_2=|0\rangle}|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle = |\Gamma|^2\left(\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{4}{20}\right) = 1$$

On a alors $\Gamma = e^{i\theta}\sqrt{\frac{20}{7}}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi

$$|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle = e^{i\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}}|001\rangle + \frac{2}{\sqrt{7}}|100\rangle\right)$$

3. Même question mais cette fois-ci pour un électron 2 se trouvant dans l'état $|1\rangle$.

$$\begin{aligned} P(e_2 = 1) &= P(|010\rangle) + P(|011\rangle) + P(|110\rangle) + P(|111\rangle) \\ &= |\langle 010|010\rangle|^2 + |\langle 011|011\rangle|^2 + |\langle 110|110\rangle|^2 + |\langle 111|111\rangle|^2 \\ &= \frac{9}{20} + \frac{1}{20} + \frac{3}{20} = \frac{13}{20} \end{aligned}$$

Remarque : On retrouve bien $P(e_2 = |0\rangle) + P(e_2 = |1\rangle) = 1$.

Déterminons maintenant l'état quantique après mesure du 2ème électron dans l'état $|1\rangle$.

$$|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle = \left(\frac{3}{\sqrt{20}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{20}}|110\rangle + \sqrt{\frac{3}{20}}|111\rangle\right)\Gamma$$

On détermine alors Γ grâce à la relation $\langle\psi_{e_2=|1\rangle}|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle = 1$, d'où l'on déduit $\Gamma = e^{i\gamma}\sqrt{\frac{20}{13}}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$. On a alors

$$|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle = e^{i\gamma}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{13}}|110\rangle + \sqrt{\frac{3}{13}}|111\rangle\right)$$

Remarque : Γ est tout simplement la racine de la probabilité d'obtenir le résultat à l'étape précédente.

4. Commençons par calculer $P(e_1 = |0\rangle\, |e_2 = |0\rangle)$ et $P(e_1 = |1\rangle\, |e_2 = |0\rangle)$. On sait alors que la première mesure (celle sur l'électron 2 donne l'état $|0\rangle$). Or, à la question 2, nous avons déjà déterminé l'état quantique dans lequel le système serait après avoir obtenu $|0\rangle$ pour l'électron 2 :

$$|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle = e^{i\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}|000\rangle + \sqrt{\frac{2}{7}}|001\rangle + \frac{2}{\sqrt{7}}|100\rangle\right)$$

(a) La probabilité $P(e_1 = |0\rangle \setminus e_2 = |0\rangle)$ est alors donnée par la probabilité que le 1er électron soit dans l'état $|0\rangle$ sachant que le système se trouve dans l'état $|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle$. Alors

$$\begin{aligned}P(e_1 = |0\rangle \setminus e_2 = |0\rangle) &= P(|000\rangle) + P(|001\rangle) = |\langle 000|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle|^2 + |\langle 001|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

(b) Par la même méthode, nous pouvons maintenant calculer $P(e_1 = |1\rangle \setminus e_2 = |0\rangle)$

$$\begin{aligned}P(e_1 = |1\rangle \setminus e_2 = |0\rangle) &= P(|100\rangle) + P(|101\rangle) = |\langle 100|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle|^2 + |\langle 101|\psi_{e_2=|0\rangle}\rangle|^2 \\ &= \frac{4}{7}\end{aligned}$$

(c) Calculons maintenant $P(e_1 = |0\rangle \setminus e_2 = |1\rangle)$. Pour cela, rappelons nous que l'état quantique après avoir mesuré l'électron 2 dans l'état $|1\rangle$ est donné par (question 3.) :

$$|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle = e^{i\gamma}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}|010\rangle + \frac{1}{\sqrt{13}}|110\rangle + \sqrt{\frac{3}{13}}|111\rangle\right)$$

Alors

$$P(e_1 = |0\rangle \setminus e_2 = |1\rangle) = \left|\langle 010|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle\right|^2 + \left|\langle 011|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \frac{9}{13}$$

(d) Calculons maintenant $P(e_1 = |1\rangle \setminus e_2 = |1\rangle)$. Alors

$$P(e_1 = |1\rangle \setminus e_2 = |1\rangle) = \left|\langle 110|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle\right|^2 + \left|\langle 111|\psi_{e_2=|1\rangle}\rangle\right|^2 = \frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$$

(e) Clairement le résultat de la mesure sur l'électron 1 dépend de la mesure obtenue sur l'électron 2. Cela provient du fait que les électrons 1 et 2 sont intriqués.

4.5 Corrigé de l'exercice 5 du TD4

laissé en exercice

5 Correction du TD5

5.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD5

Rappel :

L'effet d'une porte d'Hadamard est donné par

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \qquad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$$

ce qui conduit à la représentation matricielle

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

tandis que l'effet de $\hat{Z}$ est

$$\hat{Z}\,|0\rangle = |0\rangle \qquad \hat{Z}\,|1\rangle = -\,|1\rangle$$

donnant donc

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour répondre aux questions posées.

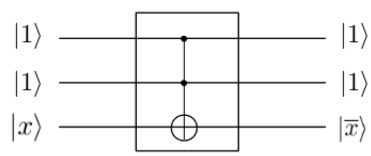
1. On cherche l'effet de l'enchainement $\hat{H}\hat{Z}\hat{H}$ sur $|0\rangle$. $|0\rangle$ commence donc par passer par une porte d'Hadamard. Or, ce faisant, nous savons que $|0\rangle$ devient $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Puis ce nouvel état quantique passe par la porte $\hat{Z}$ qui transforme $|1\rangle$ en $-|1\rangle$ et qui laisse inchangé $|0\rangle$. Ainsi, l'état devient $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Enfin l'état repasse par une porte d'Hadamard, transformant l'état quantique de la façon suivante
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) - \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = |1\rangle$$
finalement, on voit que $|0\rangle$ est devenu $|1\rangle$.
2. On cherche l'effet de l'enchainement $\hat{H}\hat{Z}\hat{H}$ sur $|1\rangle$. $|1\rangle$ commence donc par passer par une porte d'Hadamard. Or, ce faisant, nous savons que $|1\rangle$ devient $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Puis ce nouvel état quantique passe par la porte $\hat{Z}$ qui transforme $|1\rangle$ en $-|1\rangle$ et qui laisse inchangé $|0\rangle$. Ainsi, l'état devient $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Enfin l'état repasse par une porte d'Hadamard, transformant l'état quantique de la façon suivante
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = |0\rangle$$
finalement, on voit que $|1\rangle$ est devenu $|0\rangle$.
3. Ecrivons maintenant la représentation matricielle $\hat{A}$ de ce circuit
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
On peut donc noter que $\hat{A} = \hat{A}_{QNOT}$.
4. On peut retouver ce résultat en utilisant directement les représentation matricielle de chacune des portes. Comme les portes sont en série il suffit de faire le produit des matrices en sens inverse de leur ordre d'apparition, ainsi
$$\hat{A} = \hat{H}\hat{Z}\hat{H} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
où le $\hat{H}$ le plus à droite dans l'expression précédente correspond à la porte la plus à gauche dans le schéma des portes logiques.

5.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD5

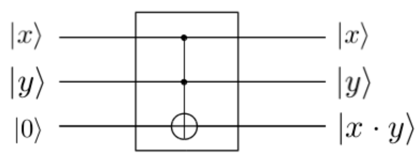
Rappelons que la porte de Toffoli (CC-NOT) a pour définition

$$\begin{array}{lcl}
|000\rangle \longrightarrow |000\rangle & \qquad & |100\rangle \longrightarrow |100\rangle \\
|001\rangle \longrightarrow |001\rangle & & |101\rangle \longrightarrow |101\rangle \\
|010\rangle \longrightarrow |010\rangle & & |110\rangle \longrightarrow |111\rangle \\
|011\rangle \longrightarrow |011\rangle & & |111\rangle \longrightarrow |110\rangle
\end{array}$$

1. Le schéma précédent permet de produire le NON



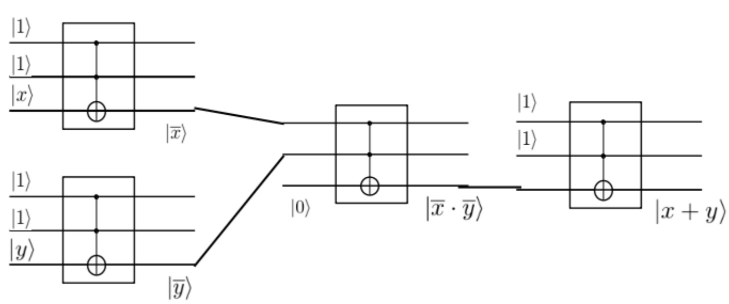
2. Le schéma précédent permet de produire le ET



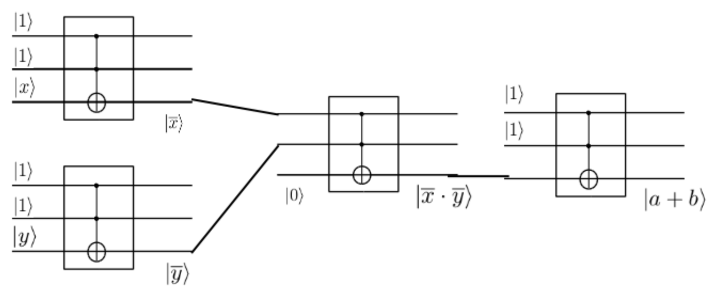
3. On cherche ici à produire OU à partir du ET et du NON

$$\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}} = a + b$$

   ce qui peut donc être fait par le circuit de portes logiques classiques suivant



4. On peut donc obtenir le OU classique à partir de portes de Toffoli en utilisant le circuit suivant



5. La puissance de calcul est la même que celle d'un ordinateur classique puisque l'on utilise pas du tout la superposition des états quantiques (parallélisme quantique)

5.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD5

Rappel :

L'effet d'une porte d'Hadamard est donné par

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \qquad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$$

ce qui conduit à la représentation matricielle

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons l'effet de ce circuit sur $|000\rangle$, $|001\rangle$, $|010\rangle$,..., $|111\rangle$:

   Pour $|000\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}\,|000\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\,\big)
\end{aligned}$$

Pour $|001\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|001\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|000\rangle - |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle\big)
\end{aligned}$$

Pour $|010\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|010\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|000\rangle + |001\rangle - |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle\big)
\end{aligned}$$

Pour $|011\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|011\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|000\rangle - |001\rangle - |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle + |111\rangle\big)
\end{aligned}$$

Pour $|100\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|100\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle - |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle\big)
\end{aligned}$$

Pour $|101\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|101\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|000\rangle - |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle - |100\rangle + |101\rangle - |110\rangle + |111\rangle\,\big)
\end{aligned}$$

Pour $|110\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|110\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|000\rangle + |001\rangle - |010\rangle - |011\rangle - |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\,\big)
\end{aligned}$$

Pour $|111\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(3)}|111\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\,\big)\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}^3}\big(\,|000\rangle - |001\rangle - |010\rangle + |011\rangle - |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle\,\big)
\end{aligned}$$

2. En utilisant la base $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}$, on peut donner la représentation matricielle de $\hat{H}^{(3)}$:

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}^3}\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\
1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1
\end{pmatrix}$$

3. On peut retrouver la matrice précédente par le calcul suivant

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}^3}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}^3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{H}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}^3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1\\1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

5.4 Corrigé de l'exercice 4 du TD5

1.
$|00\rangle$:
On commence donc par le vecteur $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, le premier $|0\rangle$ passant par le circuit du haut tandis que le second passe par le circuit du bas. On rappelle que

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

0n considère d'abord le passage par les deux premières portes d'Hadamard

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(2)}\,|00\rangle = \hat{H}\,|0\rangle \otimes \hat{H}\,|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)\end{aligned}$$

Puis cet état passe par la porte $CNOT$ qui transforme $|10\rangle$ en $|11\rangle$ et $|11\rangle$ en $|10\rangle$ (et laisse inchangée les deux autres états de base). Alors

$$|\psi\rangle = \hat{A}_{CNOT}\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |11\rangle + |10\rangle)$$

Puis de nouveau, cet état passe par Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle + \hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle + \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle + \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) + \big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&\qquad + \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) + \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
&\qquad + |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle + |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\Big) \\
&= |00\rangle
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$|00\rangle \longrightarrow |00\rangle$$

<u>$|01\rangle$:</u>

On commence donc par le vecteur $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, le premier $|0\rangle$ passant par le circuit du haut tandis que $|1\rangle$ passe par le circuit du bas. On rappelle que

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

0n considère d'abord le passage par les deux premières portes d'Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|01\rangle = \hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}$$

Puis cet état passe par la porte $CNOT$ qui transforme $|10\rangle$ en $|11\rangle$ et $|11\rangle$ en $|10\rangle$ (et laisse inchangée les deux autres états de base). Alors

$$|\psi\rangle = \hat{A}_{CNOT}\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |11\rangle - |10\rangle)$$

Puis de nouveau, cet état passe par Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle - \hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle + \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle - \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) - \big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&\qquad + \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) - \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle - |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \\
&\qquad + |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle - |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= |11\rangle
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$|01\rangle \longrightarrow |11\rangle$$

$\underline{|10\rangle :}$

On commence donc par le vecteur $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$, $|1\rangle$ passant par le circuit du haut tandis que $|0\rangle$ passe par le circuit du bas. On rappelle que

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

0n considère d'abord le passage par les deux premières portes d'Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|10\rangle = \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}$$

Puis cet état passe par la porte $CNOT$ qui transforme $|10\rangle$ en $|11\rangle$ et $|11\rangle$ en $|10\rangle$ (et laisse inchangée les deux autres états de base). Alors

$$|\psi\rangle = \hat{A}_{CNOT}\frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |11\rangle - |10\rangle)$$

Puis de nouveau, cet état passe par Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle + \hat{H}|0\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle - \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle - \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|0\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big) + \big(|0\rangle + |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \\
&\qquad - \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle - |1\rangle\big) - \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\
&\qquad - |00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle - |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\Big) \\
&= |10\rangle
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$|10\rangle \longrightarrow |10\rangle$$

$\underline{|11\rangle\ :}$

On commence donc par le vecteur $|11\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, le premier $|1\rangle$ passant par le circuit du haut tandis que le second passe par le circuit du bas. On rappelle que

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

0n considère d'abord le passage par les deux premières portes d'Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|11\rangle = \hat{H}|1\rangle \otimes \hat{H}|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)
\end{aligned}$$

Puis cet état passe par la porte $CNOT$ qui transforme $|10\rangle$ en $|11\rangle$ et $|11\rangle$ en $|10\rangle$ (et laisse inchangée les deux autres états de base). Alors

$$|\psi\rangle = \hat{A}_{CNOT}\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle - |11\rangle + |10\rangle)$$

Puis de nouveau, cet état passe par Hadamard

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(2)}|\psi\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\hat{H}|0\rangle\otimes\hat{H}|0\rangle - \hat{H}|0\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle - \hat{H}|1\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle + \hat{H}|1\rangle\otimes\hat{H}|0\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\big(|0\rangle+|1\rangle\big) - \big(|0\rangle+|1\rangle\big)\big(|0\rangle-|1\rangle\big)\\
&\qquad - \big(|0\rangle-|1\rangle\big)\big(|0\rangle-|1\rangle\big) + \big(|0\rangle-|1\rangle\big)\big(|0\rangle+|1\rangle\big)\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle-|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle\\
&\qquad -|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle+|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle\Big)\\
&= |01\rangle
\end{aligned}$$

On voit donc que

$$|11\rangle \longrightarrow |01\rangle$$

2.

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{circuit} &= \Big(\hat{H}\otimes\hat{H}\Big)\hat{A}_{CNOT}\Big(\hat{H}\otimes\hat{H}\Big) = \hat{H}^{(2)}\hat{A}_{CNOT}\hat{H}^{(2)}\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{CNOT} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

3. C'est bien unitaire puisque $\hat{A}_{circuit}\hat{A}^{\dagger}_{circuit} = \hat{A}^{\dagger}_{circuit}\hat{A}_{circuit} = \mathbb{1}$. Cela signifie bien qu'il est possible de produire cette porte quantique.
4. C'est un CNOT où le second qubit sert de qubit de contrôle tandis que le premier qubit est la cible (c'est donc le cas opposé de CNOT).

5.5 Corrigé de l'exercice 5 du TD5

1. Nous cherchons donc à construire la porte $CNOT$ qui induit les transformations suivantes

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle & \qquad |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle\\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle & \qquad |11\rangle &\longrightarrow |10\rangle
\end{aligned}$$

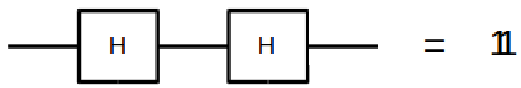
et qui s'écrit matriciellement de la façon suivante

$$A_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

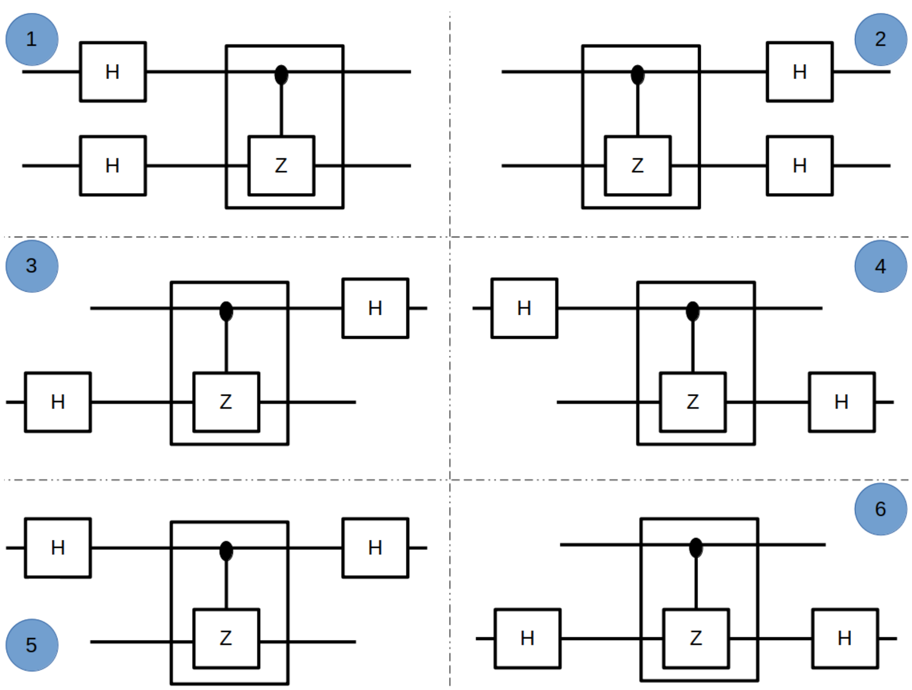
à partir de deux portes d'Hadamard et une porte controlled-Z qui s'écrivent matriciellement

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \hat{A}_{cZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons donner tous les schémas possibles et les étudier. Notons tout d'abord que



Alors tous les schémas possibles sont donnés dans la figure suivante



Il existe plusieurs méthodes pour trouver le bon schéma :

(a) On calcule la représentation matricielle de chaque circuit jusqu'à trouver la représentation matricielle correspondant à CNOT. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que les calculs se limitent à des produits matricielles qui ne présentent aucune difficulté mais la contre-partie est la lourdeur des calculs.

(b) On peut également se contenter de calculer la transformation de l'un des vecteurs de base ($|00\rangle$ ou $|01\rangle$ ou $|10\rangle$ $|11\rangle$) pour faire un 1er tri puis, sur les circuits ayant passés ce premier filtre, calculer les transformations des autres vecteurs de base.

(c) On peut finalement faire un 1er filtre en remarquant que dans CNOT, le 1er qubit n'est jamais modifié. Cela implique que sur le fil correspondant au 1er qubit, il doit nécessairement y avoir soit 1 porte d'Hadamard de part et d'autre de la porte controled-Z (car comme nous l'avons rappelé précédemment 2 portes d'Hadamard consécutives donnent l'identité) soit aucune porte d'Hadamard. Ce filtre nous permet de limiter notre étude (qui peut être faite soit en utilisant (a) soit en utilisant (b)) aux schémas 5 et 6.

Nous allons développer les 3 méthodes dans l'ordre exposé précédemment :

(a) <u>Méthode 1 :</u> Calcul de la représentation matricielle de chacun des circuits :

<u>Pour le circuit 1 :</u>

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_{cZ}\hat{H}^{(2)} = \hat{A}_{cZ}(\hat{H}\otimes\hat{H}) = \frac{1}{2}\hat{A}_{cZ}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$$

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \neq \hat{A}_{CNOT}$$

Pour le circuit 2 :

$$\hat{A}_2 = \hat{H}^{(2)}\hat{A}_{cZ} = (\hat{H}\otimes\hat{H})\hat{A}_{cZ} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)\hat{A}_{cZ}$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix} \neq \hat{A}_{CNOT}$$

Pour le circuit 3 :

$$\hat{A}_3 = \left(\hat{H}\otimes\mathbb{1}\right)\hat{A}_{cZ}\left(\mathbb{1}\otimes\hat{H}\right)$$

$$\hat{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \neq \hat{A}_{CNOT}$$

Pour le circuit 4 :

$$\hat{A}_4 = \left(\mathbb{1}\otimes\hat{H}\right)\hat{A}_{cZ}\left(\hat{H}\otimes\mathbb{1}\right)$$

$$\hat{A}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_4 \neq \hat{A}_{CNOT}$$

Pour le circuit 5 :

$$\hat{A}_5 = \left(\hat{H} \otimes \mathbb{1}\right) \hat{A}_{cZ} \left(\hat{H} \otimes \mathbb{1}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \hat{A}_{CNOT}$$

Pour le circuit 6 :

$$\hat{A}_6 = \left(\mathbb{1} \otimes \hat{H}\right) \hat{A}_{cZ} \left(\mathbb{1} \otimes \hat{H}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{A}_{CNOT}$$

(b) Méthode 2 : Etudions les transformations du vecteur $|10\rangle$ par exemple par l'ensemble des circuits. Nous devrons conserver les schémas qui effectuent la transformation suivante de CNOT :

$$|10\rangle \longrightarrow |11\rangle$$

Pour le circuit 1 :

$$\begin{aligned} |10\rangle &\longrightarrow \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \\ &\longrightarrow \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \end{aligned}$$

finalement

$$\hat{A}_1 |10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \neq |11\rangle$$

Pour le circuit 2 :

$$
\begin{aligned}
|10\rangle &\longrightarrow |10\rangle \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}
$$

finalement

$$\hat{A}_2 \,|10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \neq |11\rangle$$

<u>Pour le circuit 3 :</u>

$$
\begin{aligned}
|10\rangle &\longrightarrow |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\Big[\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big) \otimes |0\rangle - \Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big) \otimes |1\rangle\,\Big] = \frac{1}{2}(|00\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle)
\end{aligned}
$$

finalement

$$\hat{A}_3 \,|10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle) \neq |11\rangle$$

<u>Pour le circuit 4 :</u>

$$
\begin{aligned}
|10\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\Big[\,|0\rangle \otimes \Big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\Big) - |1\rangle \otimes \Big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\Big)\Big] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)
\end{aligned}
$$

finalement

$$\hat{A}_4 \,|10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \neq |11\rangle$$

<u>Pour le circuit 5 :</u>

$$
\begin{aligned}
|10\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\Big[\Big(\,|0\rangle + |1\rangle\,\Big) \otimes |0\rangle - \Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big) \otimes |0\rangle\,\Big] = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle - |00\rangle + |10\rangle) = |10\rangle
\end{aligned}
$$

finalement

$$\hat{A}_5 \left|10\right\rangle = \left|10\right\rangle \neq \left|11\right\rangle$$

<u>Pour le circuit 6 :</u>

$$\begin{aligned}
\left|10\right\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left|1\right\rangle \otimes (\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\left|10\right\rangle - \left|11\right\rangle) \\
&\longrightarrow \frac{1}{2}\Big[\left|1\right\rangle \otimes \Big(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\Big) - \left|1\right\rangle \otimes \Big(\left|0\right\rangle - \left|1\right\rangle\Big)\Big] = \frac{1}{2}(\left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle - \left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle) = \left|11\right\rangle
\end{aligned}$$

finalement

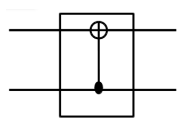
$$\hat{A}_6 \left|10\right\rangle = \left|11\right\rangle$$

Il s'agit donc du bon schéma quantique.

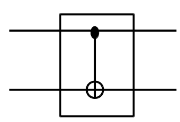
2. On cherche à construire une porte logique à deux qubits permettant la transformation suivante

$$\left|xy\right\rangle \longrightarrow \left|yx\right\rangle$$

en utilisant des portes logiques CNOT où le bit de contrôl est soit le premier qubit soit le second qubit. Pour rappel, voilà les deux portes logiques CNOT :

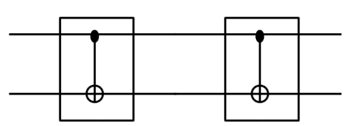


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



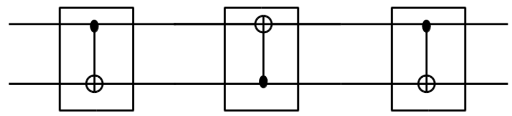
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est également imporant de noter que (il en va de même pour la seconde CNOT)



$$= \mathbb{1}$$

On peut alors proposer comme premier schéma, le schéma suivant



(nous aurions pu proposer le même schéma en inversant les portes CNOT). Alors, matriciellement, on a

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned} |00\rangle &\longrightarrow |00\rangle & \qquad |10\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\ |01\rangle &\longrightarrow |10\rangle & \qquad |11\rangle &\longrightarrow |11\rangle \end{aligned}$$

CQFD.

A noter quand inversant les portes CNOT, nous aurions obtenu le même résultat.

5.6 Corrigé de l'exercice 6 du TD5

1. Nous allons expliciter tous les détails de calcul pour $|00\rangle$.

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |00\rangle \\ |\psi_2\rangle &= (\hat{X}\otimes \mathbb{1})\,|00\rangle = \hat{X}\,|0\rangle \otimes \mathbb{1}\,|0\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle \\ |\psi_3\rangle &= \hat{A}_{CNOT}\,|\psi_2\rangle = \hat{A}_{CNOT}\,|10\rangle = |11\rangle \\ |\psi_4\rangle &= (\hat{X}\otimes \mathbb{1})\,|\psi_3\rangle = (\hat{X}\otimes \mathbb{1})\,|11\rangle = \hat{X}\,|1\rangle \otimes \mathbb{1}\,|1\rangle = |01\rangle \end{aligned}$$

Ainsi, $|00\rangle \longrightarrow |01\rangle$

Faisons la même chose pour les 3 autres états de base

$$\begin{aligned} |01\rangle \longrightarrow |11\rangle \longrightarrow |10\rangle \longrightarrow |00\rangle \\ |10\rangle \longrightarrow |00\rangle \longrightarrow |00\rangle \longrightarrow |10\rangle \\ |11\rangle \longrightarrow |01\rangle \longrightarrow |01\rangle \longrightarrow |11\rangle \end{aligned}$$

2. Obtenons maintenant la représentation matricielle de ce circuit à partir des représentations matricielles de $\hat{X}$, $\mathbb{1}$ et $\hat{A}_{CNOT}$. Pour cela, on remarque que

$$\hat{A}_{circuit} = (\hat{X}\otimes \mathbb{1})\hat{A}_{CNOT}(\hat{X}\otimes \mathbb{1})$$

avec

$$\hat{X} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à faire les multiplications matricielles

$$\hat{A}_{circuit} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.7 Corrigé de l'exercice 7 du TD5

1. L'effet d'une porte $CNOT$ est le suivant

$$\begin{aligned} |00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\ |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\ |11\rangle &\longrightarrow |10\rangle \end{aligned}$$

   ce qui s'écrit matriciellement

$$\hat{A}_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Un état de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, $|\psi\rangle$ est dit non intriqué, s'il peut s'écrire comme produit tensoriel d'un état pur du premier espace par un vecteur pur du second. Ceci signifie que

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle) \otimes (b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle) \\ &= c_{00} |00\rangle + c_{01} |01\rangle + c_{10} |10\rangle + c_{11} |11\rangle \end{aligned}$$

   Dit autrement il faut qu'il existe (a_0, a_1), (b_0, b_1) tels que

$$\begin{cases} a_0 b_0 = c_{00} \\ a_0 b_1 = c_{01} \\ a_1 b_0 = c_{10} \\ a_1 b_1 = c_{11} \end{cases}$$

cela est possible si et seulement si $c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}$.

Si l'état est intriqué alors il n'existe aucune solution au système d'équations précédent ce qui est le cas si et seulement si $c_{00}c_{11} \neq c_{01}c_{10}$.

3. On a $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Par identification, on a donc

$$\begin{cases} c_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}} = c_{11} \\ c_{01} = 0 = c_{01} \end{cases}$$

on voit donc que $c_{00}c_{11} \neq c_{01}c_{10}$ ce qui signifie que cet état est intriqué.

4. Calculons l'état initial

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle = |\psi\rangle\, \beta_{00} &= (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|100\rangle + \beta\,|111\rangle) \end{aligned}$$

5. On applique maintenant une porte $CNOT$ sur les deux premiers qubits

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= (\hat{A}_{CNOT} \otimes \mathbb{1})\,|\psi_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{A}_{CNOT} \otimes \mathbb{1})(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|100\rangle + \beta\,|111\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\hat{A}_{CNOT}\,|00\rangle \otimes \mathbb{1}\,|0\rangle + \alpha\hat{A}_{CNOT}\,|01\rangle \otimes \mathbb{1}\,|1\rangle \\ &\qquad + \beta\hat{A}_{CNOT}\,|10\rangle \otimes \mathbb{1}\,|0\rangle + \beta\hat{A}_{CNOT}\,|11\rangle \otimes \mathbb{1}\,|1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|00\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\,|01\rangle \otimes |1\rangle + \beta\,|11\rangle \otimes |0\rangle + \beta\,|10\rangle \otimes |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|110\rangle + \beta\,|101\rangle) \end{aligned}$$

6. Le premier qubit passe maintenant par une porte d'Hadamard. Ainsi

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= (\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\,|\psi_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|110\rangle + \beta\,|101\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha\hat{H}\,|0\rangle \otimes |00\rangle + \alpha\hat{H}\,|0\rangle \otimes |11\rangle + \beta\hat{H}\,|1\rangle \otimes |10\rangle + \beta\hat{H}\,|1\rangle \otimes |01\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |00\rangle + \alpha\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |11\rangle + \beta\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |10\rangle + \beta\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |01\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|100\rangle + \alpha\,|011\rangle + \alpha\,|111\rangle + \beta\,|010\rangle - \beta\,|110\rangle + \beta\,|001\rangle - \beta\,|101\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,|00\rangle\,(\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) + |01\rangle\,(\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle) + |10\rangle\,(\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle) + |11\rangle\,(\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle)\Big]
\end{aligned}
$$

7. La probabilité de mesurer $|00\rangle$ sur les deux premiers qubits est donnés par

$$P(|00\rangle) = |\,\langle 00?|\psi_3\rangle\,|^2 = \frac{1}{4}$$

et dans ce cas, l'état quantique sur le 3ème qubit est donné par $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$.

La probabilité de mesurer $|01\rangle$ sur les deux premiers qubits est donnés par

$$P(|01\rangle) = |\,\langle 01?|\psi_3\rangle\,|^2 = \frac{1}{4}$$

et dans ce cas, l'état quantique sur le 3ème qubit est donné par $\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle$.

La probabilité de mesurer $|10\rangle$ sur les deux premiers qubits est donnés par

$$P(|10\rangle) = |\,\langle 10?|\psi_3\rangle\,|^2 = \frac{1}{4}$$

et dans ce cas, l'état quantique sur le 3ème qubit est donné par $\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle$.

La probabilité de mesurer $|11\rangle$ sur les deux premiers qubits est donnés par

$$P(|11\rangle) = |\,\langle 11?|\psi_3\rangle\,|^2 = \frac{1}{4}$$

et dans ce cas, l'état quantique sur le 3ème qubit est donné par $\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle$.

8. On voit donc que si Alice mesure $|00\rangle$ alors l'état quantique de Bob est déjà $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$. Il n'y a donc aucune transformation à imposer au 3ème qubit.

   On voit que si Alice mesure $|01\rangle$ alors l'état quantique de Bob est $\alpha\,|1\rangle + \beta\,|0\rangle$. Il faut alors appliquer l'opérateur $\hat{X}$ pour intervertir $|0\rangle$ et $|1\rangle$ et ainsi obtenir $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$.

   On voit que si Alice mesure $|10\rangle$ alors l'état quantique de Bob est $\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle$. Il faut alors appliquer l'opérateur $\hat{Z}$ pour changer le signe du terme devant $|1\rangle$ et ainsi obtenir $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$.

   On voit que si Alice mesure $|11\rangle$ alors l'état quantique de Bob est $\alpha\,|1\rangle - \beta\,|0\rangle$. Il faut alors appliquer l'opérateur $\hat{X}$ pour intervertir $|0\rangle$ et $|1\rangle$ (et ainsi obtenir l'état intermédiaire $\alpha\,|0\rangle - \beta\,|1\rangle$) puis appliquer l'opérateur $\hat{Z}$ pour changer le signe du terme devant $|1\rangle$ et ainsi obtenir $\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle$. On doit donc appliquer l'opérateur $\hat{Z}\cdot\hat{X}$.

5.8 Corrigé de l'exercice 8 du TD5

1. Nous devons déterminer les états en 1, 2, 3 et 4

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= |\psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle = (\alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|100\rangle + \beta\,|111\rangle\big)\end{aligned}$$

   Puis

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= (\hat{A}_{CNOT} \otimes \mathbb{1})\,|\psi_1\rangle \\ &= (\hat{A}_{CNOT} \otimes \mathbb{1})\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha\,|00\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\,|01\rangle \otimes |1\rangle + \beta\,|10\rangle \otimes |0\rangle + \beta\,|11\rangle \otimes |1\rangle\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha\hat{A}_{CNOT}\,|00\rangle \otimes |0\rangle + \alpha\hat{A}_{CNOT}\,|01\rangle \otimes |1\rangle \\ &\qquad + \beta\hat{A}_{CNOT}\,|10\rangle \otimes |0\rangle + \beta\hat{A}_{CNOT}\,|11\rangle \otimes |1\rangle\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\alpha\,|000\rangle + \alpha\,|011\rangle + \beta\,|110\rangle + \beta\,|101\rangle\Big]\end{aligned}$$

L'état passe maintenant par $\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= (\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) |\psi_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big[\alpha |000\rangle + \alpha |100\rangle + \alpha |011\rangle + \alpha |111\rangle \\ &\qquad + \beta |010\rangle - \beta |110\rangle + \beta |001\rangle - \beta |101\rangle \Big] \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\alpha |000\rangle + \alpha |100\rangle + \alpha |010\rangle + \alpha |110\rangle \\ &\qquad + \beta |011\rangle - \beta |111\rangle + \beta |001\rangle - \beta |101\rangle \Big] \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} |\psi_5\rangle &= \hat{Z}_c |\psi_4\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big[\alpha |000\rangle + \alpha |100\rangle + \alpha |010\rangle + \alpha |110\rangle \\ &\qquad + \beta |011\rangle + \beta |111\rangle + \beta |001\rangle + \beta |101\rangle \Big] \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \otimes (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) \end{aligned}$$

(b) L'état correspondant aux deux premiers qubits est clairement normé

$$\langle \psi_5^{qubits1,2} | \psi_5^{qubits1,2} \rangle = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 = 1$$

L'état correspondant au dernier qubit est clairement normé

$$\langle \psi_5^{qubit3} | \psi_5^{qubit3} \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

(c) Les deux premiers qubits sont indépendants du dernier qubit car ils ne sont pas intriqués.

(d) On voit que le dernier qubit est quoi qu'il se passe pour les deux premiers qubits dans l'état $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ qui est l'état $|\psi\rangle$ initial. On a donc téléporté l'état $|\psi\rangle$ du 1er qubit dans le dernier qubit.

5.9 Corrigé de l'exercice 9 du TD5

Il faut préciser un peu les choses pour faire l'exercice le plus proprement possible. Tout d'abord écrivons un peu plus en détail l'effet de $\hat{U}$. Pour cela, écrivons

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} \\ U_{10} & U_{11} \end{pmatrix}$$

On déduit donc que l'effet de $\hat{U}$ sur les vecteurs de base est

$$\begin{aligned}
\hat{U}\,|0\rangle &= U_{00}\,|0\rangle + U_{10}\,|1\rangle \\
\hat{U}\,|1\rangle &= U_{01}\,|0\rangle + U_{11}\,|1\rangle
\end{aligned}$$

ce qui permet bien de reconstruire la matrice précédente.

Il s'agit en réalité d'une porte $\hat{U}$ qui est contrôlée par les 2 premiers qubits. Ainsi

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{cc}\,|110\rangle &= |11\rangle \otimes \hat{U}\,|0\rangle = |11\rangle \otimes \Big(U_{00}\,|0\rangle + U_{10}\,|1\rangle\Big) = |11\rangle \otimes U_{00}\,|0\rangle + |11\rangle \otimes U_{10}\,|1\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|111\rangle &= |11\rangle \otimes \hat{U}\,|1\rangle = |11\rangle \otimes \Big(U_{01}\,|0\rangle + U_{11}\,|1\rangle\Big) = |11\rangle \otimes U_{01}\,|0\rangle + |11\rangle \otimes U_{11}\,|1\rangle
\end{aligned}$$

et tout les autres vecteurs de base reste inchangés :

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{cc}\,|000\rangle &= |000\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|001\rangle &= |001\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|010\rangle &= |010\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|011\rangle &= |011\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|100\rangle &= |100\rangle \\
\hat{U}_{cc}\,|101\rangle &= |101\rangle
\end{aligned}$$

1.

$$\begin{aligned}
&|000\rangle \longrightarrow |010\rangle \longrightarrow |010\rangle \longrightarrow |000\rangle \\
&|001\rangle \longrightarrow |011\rangle \longrightarrow |011\rangle \longrightarrow |001\rangle \\
&|010\rangle \longrightarrow |000\rangle \longrightarrow |000\rangle \longrightarrow |010\rangle \\
&|011\rangle \longrightarrow |001\rangle \longrightarrow |001\rangle \longrightarrow |011\rangle \\
&|100\rangle \longrightarrow |110\rangle \longrightarrow |11\rangle \otimes \hat{U}\,|0\rangle \longrightarrow |10\rangle \otimes \hat{U}\,|0\rangle = U_{00}\,|100\rangle + U_{10}\,|101\rangle \\
&|101\rangle \longrightarrow |111\rangle \longrightarrow |11\rangle \otimes \hat{U}\,|1\rangle \longrightarrow |10\rangle \otimes \hat{U}\,|1\rangle = U_{01}\,|100\rangle + U_{11}\,|101\rangle \\
&|110\rangle \longrightarrow |100\rangle \longrightarrow |100\rangle \longrightarrow |110\rangle \\
&|111\rangle \longrightarrow |101\rangle \longrightarrow |101\rangle \longrightarrow |111\rangle
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{00} & U_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{10} & U_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6 Correction du TD6

6.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD6

Remarque générale :

$$\begin{aligned} U_f\,|00\rangle &= |0, f(0)\rangle & U_f\,|10\rangle &= |1, f(1)\rangle \\ U_f\,|01\rangle &= |0, f(0)\oplus 1\rangle & U_f\,|11\rangle &= |1, f(1)\oplus 1\rangle \end{aligned} \tag{3}$$

1. Commençons par déterminer U_f dans le cas où $f(0) = f(1) = 0$ (que l'on notera $U_f^{(00)}$). D'après 7, on a

$$\begin{aligned} U_f^{(00)}\,|00\rangle &= |00\rangle & U_f^{(00)}\,|10\rangle &= |10\rangle \\ U_f^{(00)}\,|01\rangle &= |01\rangle & U_f^{(00)}\,|11\rangle &= |11\rangle \end{aligned} \tag{4}$$

   Donc $U_f^{(00)} = \mathbb{1}$.

   Notons $\hat{A}_{00}$ la matrice représentant le circuit quantique de Deutsch lorsque $f(0) = f(1) = 0$. Alors

$$\hat{A}_{00} = (\hat{H}\otimes\mathbb{1})U_f^{(00)}(\hat{H}\otimes\hat{H})$$

$$\hat{A}_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{00} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

   Calculons maintenant l'effet de ce circuit sur $|01\rangle$ (qui est le vecteur d'entrée du circuit et qui s'écrit $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ dans la base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$) :

$$\hat{A}_{00}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)$$

finalement, on voit que

$$|01\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle)$$

2.
<u>Cas où $f(0) = f(1) = 1$</u> :
Commençons par déterminer $U_f^{(11)}$. D'après 7, on a

$$\begin{aligned} U_f^{(11)}|00\rangle &= |01\rangle \qquad & U_f^{(11)}|10\rangle &= |11\rangle \\ U_f^{(11)}|01\rangle &= |00\rangle \qquad & U_f^{(11)}|11\rangle &= |10\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Donc

$$U_f^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\hat{A}_{11}$ la matrice représentant le circuit quantique de Deutsch lorsque $f(0) = f(1) = 1$. Alors

$$\hat{A}_{11} = (\hat{H} \otimes \mathbb{1})U_f^{(11)}(\hat{H} \otimes \hat{H})$$

$$\hat{A}_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant l'effet de ce circuit sur $|01\rangle$:

$$\hat{A}_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|00\rangle + |01\rangle)$$

finalement, on voit que

$$|01\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |00\rangle)$$

Cas où $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$:
Commençons par déterminer $U_f^{(01)}$. D'après 7, on a

$$\begin{aligned} U_f^{(01)} \left|00\right\rangle &= \left|00\right\rangle & U_f^{(01)} \left|10\right\rangle &= \left|11\right\rangle \\ U_f^{(01)} \left|01\right\rangle &= \left|01\right\rangle & U_f^{(01)} \left|11\right\rangle &= \left|10\right\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

Donc

$$U_f^{(01)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $\hat{A}_{01}$ la matrice représentant le circuit quantique de Deutsch lorsque $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Alors

$$\hat{A}_{01} = (\hat{H} \otimes \mathbb{1}) U_f^{(01)} (\hat{H} \otimes \hat{H})$$

$$\hat{A}_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{01} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant l'effet de ce circuit sur $\left|01\right\rangle$:

$$\hat{A}_{01} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|10\right\rangle - \left|11\right\rangle)$$

finalement, on voit que

$$\left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|10\right\rangle - \left|11\right\rangle)$$

Cas où $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$:

Commençons par déterminer $U_f^{(10)}$. D'après 7, on a

$$\begin{aligned} U_f^{(10)} \left|00\right\rangle &= \left|01\right\rangle \qquad & U_f^{(10)} \left|10\right\rangle &= \left|10\right\rangle \\ U_f^{(10)} \left|01\right\rangle &= \left|00\right\rangle \qquad & U_f^{(10)} \left|11\right\rangle &= \left|11\right\rangle \end{aligned} \tag{7}$$

Donc

$$U_f^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $\hat{A}_{10}$ la matrice représentant le circuit quantique de Deutsch lorsque $f(0) = 1,\ f(1) = 0$. Alors

$$\hat{A}_{10} = (\hat{H} \otimes \mathbb{1}) U_f^{(10)} (\hat{H} \otimes \hat{H})$$

$$\hat{A}_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_{10} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant l'effet de ce circuit sur $\left|01\right\rangle$:

$$\hat{A}_{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (- \left|10\right\rangle + \left|11\right\rangle)$$

finalement, on voit que

$$\left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|11\right\rangle - \left|10\right\rangle)$$

3. Résumons les résultats précédents

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ \left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|00\right\rangle - \left|01\right\rangle) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0) = f(1) = 1 \\ \left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|01\right\rangle - \left|00\right\rangle) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0,\ f(1) = 1 \\ \left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|10\right\rangle - \left|11\right\rangle) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(0) = 1,\ f(1) = 0 \\ \left|01\right\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\left|11\right\rangle - \left|10\right\rangle) \end{cases}$$

On voit donc que $P(|0\rangle_{1er\ qubit}) = 1$ si la fonction est constante et 0 si la fonction est balancée et on retrouve ainsi le résultat obtenu dans le cours (cas qui avait été traité sans passer par les matrices).

6.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD6

Partie 1 :

1. L'opérateur $\hat{U}$, représentant la porte quantique, doit être unitaire, c'est-à-dire qu'il doit vérifier la relation

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$$

2.
$$\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |0, f(0) \oplus 0\rangle = |0, f(0)\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |0, f(0) \oplus 1\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |1, f(1) \oplus 0\rangle = |1, f(1)\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |1, f(1) \oplus 1\rangle
\end{aligned}$$

3. On fait maintenant l'hypothèse seulement pour cette question et la suivante que $f(0) = f(1) = 1$. Alors les relations précédentes deviennent tout simplement

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |0, 1\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |0, 0\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |1, 1\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |1, 0\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui donne comme représentation matricielle

$$\hat{U}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. On peut alors vérifier sans problème que

$$\hat{U}_f\hat{U}_f^\dagger = \hat{U}_f^\dagger\hat{U}_f = \mathbb{1}$$

L'oracle peut donc bien être implémenté dans un ordinateur quantique.

Partie 2 :

1. l'état initial est, d'après le schéma, $|01\rangle$
2. D'après le schéma, chacun des deux qubits passe par une porte d'Hadamard

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle = \hat{H}\,|0\rangle \otimes \hat{H}\,|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\,\big)
\end{aligned}
$$

3. Vérifions l'égalité donnée dans cette question. Pour cela il suffit de se souvenir que $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

   <u>Pour $f(x) = 0$:</u>

$$
|0\rangle - |0 \oplus 1\rangle = |0\rangle - |1\rangle = (-1)^0(|0\rangle - |1\rangle) \text{ OK}
$$

   <u>Pour $f(x) = 1$:</u>

$$
|1\rangle - |1 \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle = (-1)^1(|0\rangle - |1\rangle) \text{ OK}
$$

   La relation proposée est donc vraie.
4. L'état $|\psi_2\rangle$ passe maintenant par l'oracle. Ainsi

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle = \hat{U}_f\,|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\Big[\hat{U}_f\,|00\rangle - \hat{U}_f\,|01\rangle + \hat{U}_f\,|10\rangle - \hat{U}_f\,|11\rangle\,\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,|0, f(0)\rangle - |0, f(0)\oplus 1\rangle + |1, f(1)\rangle - |1, f(1)\oplus 1\rangle\,\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,|0\rangle\,\Big(\,|f(0)\rangle - |f(0)\oplus 1\rangle\,\Big) + |1\rangle\,\Big(\,|f(1)\rangle - |f(1)\oplus 1\rangle\,\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[(-1)^{f(0)}\,|0\rangle\,\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big) + (-1)^{f(1)}\,|1\rangle\,\Big(\,|1\rangle - |1\rangle\,\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(-1)^{f(0)}\,|0\rangle + (-1)^{f(1)}\,|1\rangle\,\Big] \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

5. On ne s'intéresse maintenant qu'au premier qubit qui passe de nouveau par une porte d'Hadamard

$$\begin{aligned}
|\psi_4\rangle = \hat{H}\,|\psi_3(qubit\ 1)\rangle &= \frac{\hat{H}}{\sqrt{2}}\Big[(-1)^{f(0)}\,|0\rangle + (-1)^{f(1)}\,|1\rangle\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[(-1)^{f(0)}\Big(\,|0\rangle + |1\rangle\Big) + (-1)^{f(1)}\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{f(0)}\Big[\Big(\,|0\rangle + |1\rangle\Big) + (-1)^{f(1)\oplus f(0)}\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}(-1)^{f(0)}\Big[\,|0\rangle\Big(1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\Big) + |1\rangle\Big(1 - (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

6. La probabilité de mesurer le premier qubit dans l'état $|0\rangle$ est donnée par

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|\psi_4\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(-1)^{f(0)}\Big(1 + (-1)^{f(0)\oplus f(1)}\Big)\right|^2$$

Si la fonction est constante alors $f(0) \oplus f(1) = 0$, ce qui conduit à

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|\psi_4\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(-1)^{f(0)} \times 2\right|^2 = 1$$

Si la fonction est balancée alors $f(0) \oplus f(1) = 1$, ce qui conduit à

$$P(|0\rangle) = |\langle 0|\psi_4\rangle|^2 = \left|\frac{1}{2}(-1)^{f(0)} \times 0\right|^2 = 0$$

6.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD6

1. La différence réside dans la présence de la porte d'Hadamardsur le dernier qubit après l'oracle. En effet, dans l'algorithme traité en cours, cette porte d'Hadamard n'était pas présente. Toutefois, cette différence paraît insignifiante, puisque lors de la lecture de cet algorithme, nous avons totalement ignoré après l'oracle, ce qubit. Nous aurions donc pu lui faire subir n'importe quel porte quantique à 1 qubit, sans que cela ne modifie le premier qubit et donc l'efficacité et l'interprétation de l'algorithme.
2. Circuit en haut à gauche :

   Pour rappel, la porte $\hat{X}$ a les effets suivants

$$\hat{X}\,|0\rangle = |1\rangle$$
$$\hat{X}\,|1\rangle = |0\rangle$$

mais l'effet de $\hat{X}$ ne se fait sentir que si le qubit de contrôle (1er qubit) est dans l'état $|1\rangle$.

Alors

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |10\rangle
\end{aligned}
$$

ce qui donne comme représentation matricielle

$$\hat{A}_{\text{circuit1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Circuit en haut à droite :</u>

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |01\rangle \longrightarrow |01\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |00\rangle \longrightarrow |00\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \longrightarrow |10\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |10\rangle \longrightarrow |11\rangle
\end{aligned}
$$

ce qui donne comme représentation matricielle

$$\hat{A}_{\text{circuit2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Circuit en bas à gauche :</u>

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |10\rangle
\end{aligned}
$$

ce qui donne comme représentation matricielle

$$\hat{A}_{\text{circuit 3}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Circuit en bas à droite :

$$\begin{aligned}|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle\\ |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle\\ |10\rangle &\longrightarrow |10\rangle\\ |11\rangle &\longrightarrow |11\rangle\end{aligned}$$

ce qui donne comme représentation matricielle

$$\hat{A}_{\text{circuit4}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3. En toute généralité, l'oracle de Deutsch à l'effet suivant

$$\begin{aligned}|00\rangle &\longrightarrow |0, f(0)\rangle\\ |01\rangle &\longrightarrow |0, f(0)\oplus 1\rangle\\ |10\rangle &\longrightarrow |1, f(1)\rangle\\ |11\rangle &\longrightarrow |1, f(1)\oplus 1\rangle\end{aligned}$$

(a) $f(0) = f(1) = 0$ (on notera $\hat{U}_f^{(00)}$ sa représentation matricielle).

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle\\ |01\rangle &\longrightarrow |01\rangle\\ |10\rangle &\longrightarrow |10\rangle\\ |11\rangle &\longrightarrow |11\rangle\end{aligned}$$

On voit donc que

$$\hat{U}_f^{(00)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(b) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ (on notera $\hat{U}_f^{(01)}$ sa représentation matricielle).

Dans ce cas, on a

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |10\rangle
\end{aligned}
$$

On voit donc que

$$
\hat{U}_f^{(01)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

(c) $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ (on notera $\hat{U}_f^{(10)}$ sa représentation matricielle).

Dans ce cas, on a

$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |10\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |11\rangle
\end{aligned}
$$

On voit donc que

$$
\hat{U}_f^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(d) $f(0) = f(1) = 1$ (on notera $\hat{U}_f^{(11)}$ sa représentation matricielle).

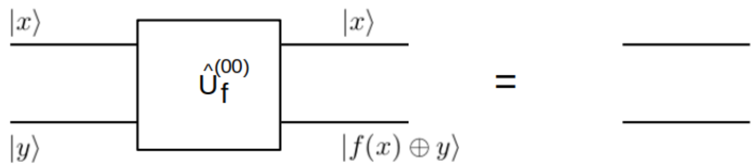
Dans ce cas, on a

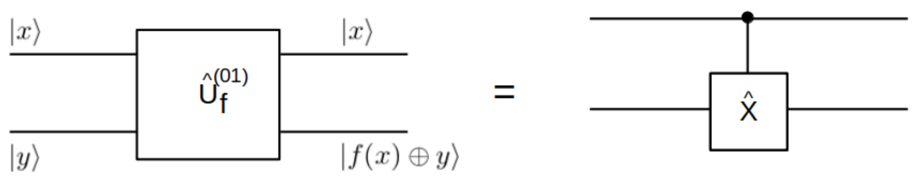
$$
\begin{aligned}
|00\rangle &\longrightarrow |01\rangle \\
|01\rangle &\longrightarrow |00\rangle \\
|10\rangle &\longrightarrow |11\rangle \\
|11\rangle &\longrightarrow |10\rangle
\end{aligned}
$$

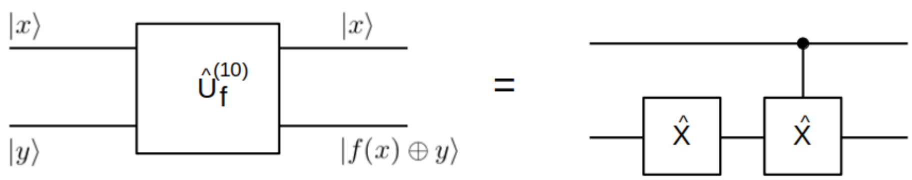
On voit donc que

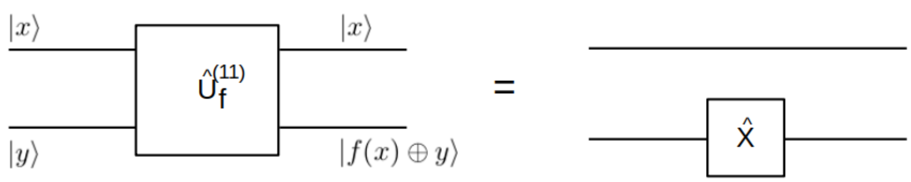
$$
\hat{U}_f^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

4. En comparant les représentations matricielles obtenues aux deux questions précédentes, on voit que









5. La façon la plus rapide de répondre à cette question est de faire le produit matriciel des deux boites. Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

6. Effectuons le produit matriciel des boites quantiques

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \hat{Z}$$

7. <u>Pour le circuit de gauche :</u>

$$\hat{H}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

On a donc

$$\hat{A} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

<u>Pour le circuit de gauche :</u>

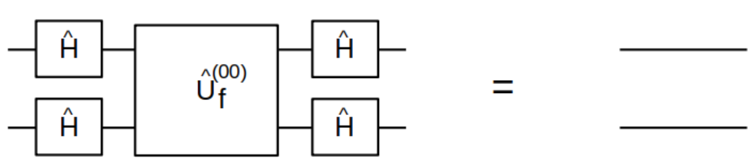
$$\begin{aligned}|00\rangle &\longrightarrow |00\rangle\\ |01\rangle &\longrightarrow |11\rangle\\ |10\rangle &\longrightarrow |10\rangle\\ |11\rangle &\longrightarrow |01\rangle\end{aligned}$$

ce qui conduit à la représentation matricielle suivante

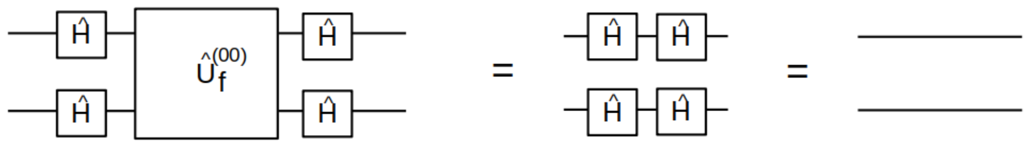
$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Les deux représentations matricielles sont identiques donc il y a bien égalité entre les deux circuits.

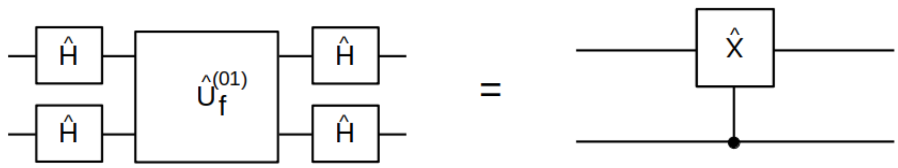
8. (a)



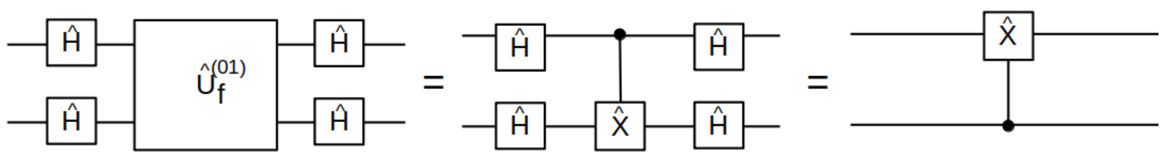
<u>démonstration :</u>



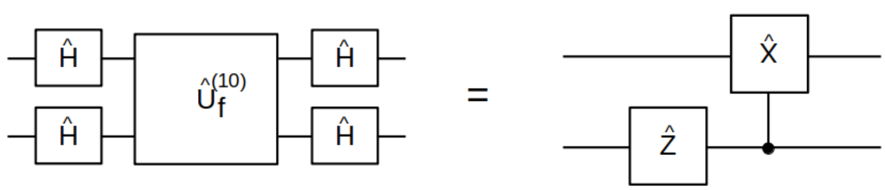
(b)



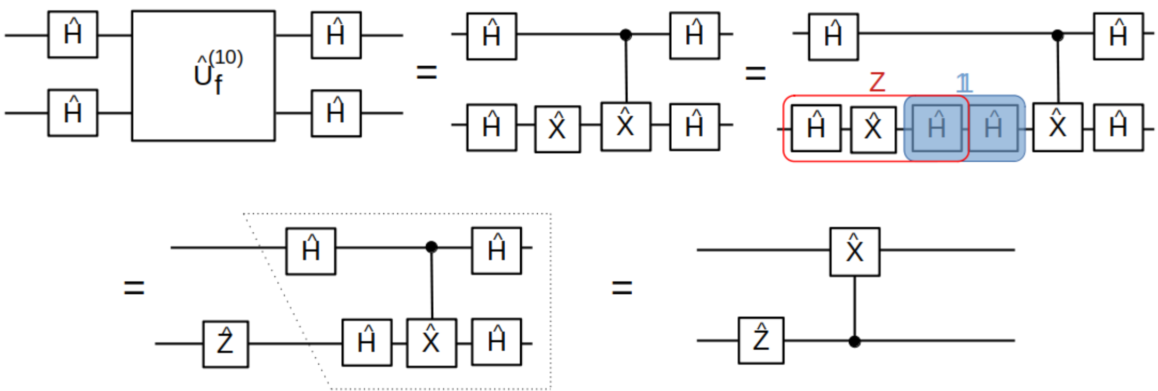
<u>démonstration :</u>



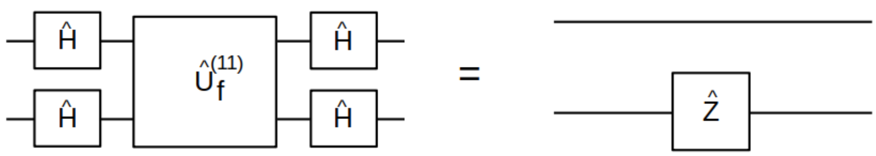
(c)



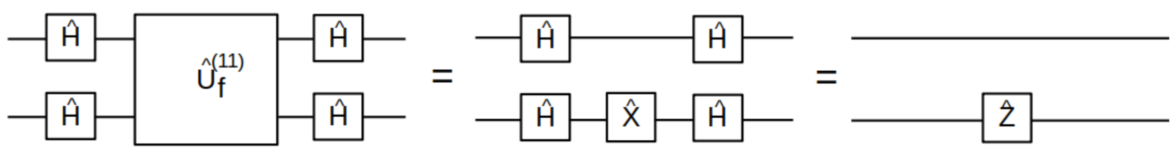
<u>démonstration :</u>



(d)



<u>démonstration :</u>



9. A partir des schémas précédents on montre facilement que

$$
\begin{aligned}
\text{cas } \hat{U}_f^{(00)} &: \ |01\rangle \longrightarrow |01\rangle \\
\text{cas } \hat{U}_f^{(01)} &: \ |01\rangle \longrightarrow |11\rangle \\
\text{cas } \hat{U}_f^{(10)} &: \ |01\rangle \longrightarrow -|01\rangle \longrightarrow -|11\rangle \\
\text{cas } \hat{U}_f^{(11)} &: \ |01\rangle \longrightarrow -|01\rangle
\end{aligned}
$$

6.4 Corrigé de l'exercice 4 du TD6

Etape 1 : (Etape initiale)
Initialement le système se trouve dans l'état $|000\cdots 01\rangle$ où donc les n premiers qubits sont dans l'état 0 tandis que le dernier qubit est dans l'état 1.

Etape 2 :
Chaque qubit passe par une porte d'Hadamard. Rappelons que l'effet d'une porte d'Hadamard à n qubits s'écrit

$$|x_1, x_2, ..., x_n\rangle \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1, i_2, ..., i_n} (-1)^{\sum_k x_k i_k} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle$$

où $\sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus ... \oplus x_n i_n$.

Les n premiers qubits sont dans l'état $|0\rangle$, ce qui revient à poser dans la formule précédente $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, en conséquence de quoi

$$\forall i_1, i_2, \cdots, i_n \in [\![0;1]\!], \ \sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus ... \oplus x_n i_n = 0$$

Ainsi

$$\hat{H}^{(n)} |000\cdots 0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1, i_2, ..., i_n} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle$$

Il ne reste plus qu'à considérer le $(n+1)$ème qubit qui passe également par une porte d'Hadamard et qui se trouve dans l'état $|1\rangle$:

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(n+1)} |000\cdots 001\rangle &= \hat{H}^{(n)} |000\cdots 00\rangle \otimes \hat{H} |1\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\sum_{i_1, i_2, ..., i_n} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Etape 3 :
Pour calculer l'état du système après l'oracle, commençons par remarquer que pour $\forall (i_1, i_2, ..., i_n, x) \in [\![0;1]\!]^{n+1}$, l'oracle a l'effet suivant

$$\hat{U}_f \Big(|i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes |x\rangle \Big) = |i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes |f(i_1, i_2, ..., i_n) \oplus x\rangle$$

où $x = 0$ ou 1. L'expression précédente permet maintenant d'écrire

$$\hat{U}_f \Big[|i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes \Big(|0\rangle - |1\rangle \Big) \Big] = |i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes \Big(|f(i_1, i_2, ..., i_n)\rangle - |f(i_1, i_2, ..., i_n) \oplus 1\rangle \Big)$$

Traitons maintenant le dernier terme de l'expression précédente et vérifions que

$$|f(i_1, i_2, ..., i_n)\rangle - |f(i_1, i_2, ..., i_n) \oplus 1\rangle = (-1)^{f(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big) \quad (8)$$

Il suffit de tester toutes les possibilités. Il y a en réalité que 2 cas de figure, soit $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 0$ et $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 1$.

<u>Si $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 0$:</u>

1. le terme de gauche de (8) donne $|0\rangle - |0 \oplus 1\rangle = |0\rangle - |1\rangle$
2. le terme de droite de (8) donne $(-1)^0\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = |0\rangle - |1\rangle$.

Donc l'expression proposée fonctionne si $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 0$.

<u>Si $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 1$:</u>

1. le terme de gauche de (8) donne $|1\rangle - |1 \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle$
2. le terme de droite de (8) donne $(-1)^1\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = |1\rangle - |0\rangle$.

Donc l'expression proposée fonctionne également si $f(i_1, i_2, \cdots, i_n) = 1$.

Finalement :

$$\hat{U}_f\,|i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = (-1)^{f(i_1,i_2,...,i_n)}\,|i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes \big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$$

Or comme cela est vrai pour $\forall(i_1, i_2, ..., i_n)$, c'est en particulier vrai pour la somme de tous les termes possibles

$$\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= \hat{U}_f\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,...,i_n} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,...,i_n} |i_1, i_2, ..., i_n\rangle \otimes \left(\frac{|f(i_1, i_2, ..., i_n)\rangle - |f(i_1, i_2, ..., i_n) \oplus 1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,...,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,...,i_n)}\,|i_1, i_2, ..., i_n\rangle\right] \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

On voit donc que l'état $|\psi_3\rangle$ est de la forme

$$|\psi_3\rangle = |\psi_3^{(n \text{ premiers qubits})}\rangle \otimes |\psi_3^{(\text{dernier qubit})}\rangle$$

ce qui signifie que les n premiers qubits sont indépendants du dernier qubit (je vous laisse vérifier que $|\psi_3^{(n \text{ premiers qubits})}\rangle$ et $|\psi_3^{(\text{dernier qubit})}\rangle$ sont normés).

En conséquence de cela, nous pouvons nous intéresser seulement aux n premiers qubits, puisqu'ils sont découplés du dernier, c'est-à-dire

$$|\psi_3^{(n \text{ premiers qubits})}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} |i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle$$

Etape 4 :

Il ne reste plus qu'à calculer l'effet de la dernière rangée de porte d'Hadamard sur les n premiers qubits.

$$\begin{aligned}
|\psi_4^{(n \text{ premiers qubits})}\rangle &= \hat{H}^{(n)}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} |i_1, i_2, \ldots, i_n\rangle\right] \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} (-1)^{\sum_k i_k j_k} |j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} \left[\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} (-1)^{\sum_k i_k j_k} |j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle\right] \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \left[(-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{\sum_k i_k j_k} |j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle\right]
\end{aligned}$$

Etape finale : La mesure.

On cherche la probabilité pour que l'état final des n premiers qubits soit $|000\cdots 00\rangle$. D'après les postulats de Dirac, elle est donnée par

$$\begin{aligned}
P(|00\cdots 00\rangle) &= \left|\langle 00\cdots 00|\psi_4^{(n \text{ premiers qubits})}\rangle\right|^2 \\
&= \left|\frac{1}{2^n} \sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} (-1)^{\sum_k i_k j_k} \langle 00\cdots 00|j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

Rappelons que la base $\{|j_1, j_2, \cdots, j_n\rangle\}$ est une base orthonormée. Ainsi

$$\langle 00\cdots 00|j_1, j_2, \ldots, j_n\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j_1 = j_2 = \cdots = j_n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit donc

$$P(|00\cdots 00\rangle) = \left|\frac{1}{2^n} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)}\right|^2 \quad \text{car } \sum_k i_k j_k = 0 \text{ puisque } \forall k,\ j_k = 0$$

Or

1. Si la fonction est constante alors $\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = \pm 2^n$
2. Si la fonction est balancée, alors $\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}(-1)^{f(i_1,i_2,\ldots,i_n)} = 0$.

Finalement

$$\begin{aligned} \text{fonction balancée } &\Longrightarrow P(|00\cdots00\rangle) = 0 \\ \text{fonction constante} &\Longrightarrow P(|00\cdots00\rangle) = 1 \end{aligned}$$

Si on mesure l'état $|00\cdots00\rangle$ la fonction est constante, si on mesure tout autre état à l'étape 4 la fonction est balancée.

Pour résoudre le problème posé, il faut donc, avec l'algorithme quantique, effectuer $4n+2$ opérations

1. $2n+1$ opérations d'Hadamard.
2. 1 opération changeant un état $|0\rangle$ en un état $|1\rangle$ (porte logique *non*).
3. n opérations sur l'oracle.
4. n mesures des qubits.

Ainsi, le problème est quantiquement facile alors qu'il est exponentiel d'un point de vu classique. Il s'agit donc d'une accéleration exponentielle.

7 Correction du TD7

7.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD7

Etape 1 : (initialement)

$$|\psi_1\rangle = |00\cdots 00\rangle_A \otimes |00\cdots 00\rangle_B$$

Le 1er ket correspond au registre A et le 2ème ket correspond au registre B.

Etape 2 :
Le registre A passe maintenant par $\hat{H}^{(n)}$. Pour établir l'état quantique après ces n portes d'Hadamard, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= \left(\hat{H}^{(n)} \otimes \mathbb{1}^{(n)}\right)\left(|00\cdots 00\rangle_A \otimes |00\cdots 00\rangle_B \right)\\ &= \left(\hat{H}^{(n)} |00\cdots 00\rangle_A\right) \otimes \left(\mathbb{1}^{(n)} |00\cdots 00\rangle_B\right)\end{aligned}$$

Evidemment $\mathbb{1}^{(n)} |00\cdots 00\rangle_B = |00\cdots 00\rangle_B$.

Pour le 1er terme, commençons par rappeler que l'effet d'une porte d'Hadamard à n qubits s'écrit

$$\hat{H}^{(n)} |x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} (-1)^{\sum_k x_k i_k} |i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle$$

où $\sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus \cdots \oplus x_n i_n$.

Or tous les qubits du registre A sont dans l'état $|0\rangle$, ce qui revient à poser dans la formule précédente $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, ce qui conduit à

$$\forall i_1, i_2, \cdots, i_n \in [\![0;1]\!],\ \sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus ... \oplus x_n i_n = 0$$

Ainsi

$$\hat{H}^{(n)} |00\cdots 00\rangle_A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n} |i_1, i_2, \cdots, i_n\rangle_A$$

Finalement

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= \Big(\hat{H}^{(n)}\,|00\cdots 00\rangle_A\Big) \otimes \Big(\mathbb{1}^{(n)}\,|00\cdots 00\rangle_B\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} |i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle_A\right) \otimes |00...0\rangle_B \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\Big(|i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle_A \otimes |00\cdots 0\rangle_B\Big)
\end{aligned}$$

<u>Etape 3 :</u>
L'état quantique $|\psi_2\rangle$ passe maintenant par l'oracle. L'effet de l'oracle consiste à écrire dans le registre B la fonction f qui prend pour argument les variables binaires contenues dans le registre A. Dit autrement

$$\hat{U}_f\Big(|i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle_A \otimes |00\cdots 00\rangle_B\Big) = |i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle_A \otimes |f(i_1,i_2,\cdots,i_n)\rangle_B$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\psi_{\text{après oracle}}\rangle &= \hat{U}_f\,|\psi_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\Big[|i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle_A \otimes |f(i_1,i_2,\cdots,i_n)\rangle_B\Big]
\end{aligned}$$

On effectue maintenant une mesure sur le registre B. Notons $|f_1^{\text{m}}, f_2^{\text{m}},\cdots,f_n^{\text{m}}\rangle_B$ le résultat obtenu sur le registre B. Il existe donc i_1^{m}, i_2^{m} et i_3^{m} tels que

$$f(i_1^{\text{m}}, i_2^{\text{m}},\cdots,i_n^{\text{m}}) = f_1^{\text{m}} f_2^{\text{m}}\cdots f_n^{\text{m}}$$

Or comme la fonction est de période $s = s_1 s_2 ... s_n$, on a également

$$f(i_1^{\text{m}}\oplus s_1, i_2^{\text{m}}\oplus s_2,\cdots,i_n^{\text{m}}\oplus s_n) = f_1^{\text{m}} f_2^{\text{m}}\cdots f_n^{\text{m}}$$

Donc le registre A est dans l'un des états suivants :

$$|i_1^{\text{m}}, i_2^{\text{m}},\cdots,i_n^{\text{m}}\rangle_A \qquad ; \qquad |i_1^{\text{m}}\oplus s_1, i_2^{\text{m}}\oplus s_2,\cdots,i_n^{\text{m}}\oplus s_n\rangle_A$$

Donc

$$|\psi_{\text{après mesure}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|i_1^{\text{m}}, i_2^{\text{m}},...,i_n^{\text{m}}\rangle_A + |i_1^{\text{m}}\oplus s_1, i_2^{\text{m}}\oplus s_2,\cdots,i_n^{\text{m}}\oplus s_n\rangle_A\Big)\otimes|f_1^{\text{m}}, f_2^{\text{m}},\cdots,f_n^{\text{m}}\rangle_B$$

<u>Etape 4 :</u>
Le registre A passe maintenant par $\hat{H}^{(n)}$. On obtient alors

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}\left[\sum_{j_1,j_2,...,j_n}(-1)^{\sum_k i_k^m j_k}\,|j_1,j_2,...,j_n\rangle + \sum_{j_1,j_2,...,j_n}(-1)^{\sum_k (i_k^m\oplus s_k) j_k}\,|j_1,j_2,...,j_n\rangle\right]$$

or

$$\sum_k (i_k^m \oplus s_k) j_k = \sum_k i_k^m j_k \oplus \sum_k s_k j_k$$

d'où l'on déduit que

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n} \left[(-1)^{\sum_k i_k^m j_k} \left(1 + (-1)^{\sum_k s_k j_k} \right) |j_1, j_2, ..., j_n\rangle \right]$$

On peut maintenant regarder les résultats obtenus lors d'une mesure à la fin de l'algorithme.

Quelle est la probabilité de mesurer $|j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*\rangle$?

$$\begin{aligned}
P(|j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*\rangle) &= |\ \langle j_1^*, j_2^*, ..., j_n^* | \psi_4 \rangle\ |^2 \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} (-1)^{\sum_k i_k^m j_k} \left(1 + (-1)^{\sum_k s_k j_k^*} \right) \right|^2 \\
&= \left| \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \left(1 + (-1)^{\sum_k s_k j_k^*} \right) \right|^2
\end{aligned}$$

Donc si $\sum_k s_k j_k^* = 1$ alors $P(|j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*\rangle) = 0$.

Donc si $\sum_k s_k j_k^* = 0$ alors $P(|j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*\rangle) = 1/(2^{n-1})$. Ainsi, toutes les valeurs de j telles que $s \cdot j^* = 0$ sont équiprobables.

On voit donc qu'en sortie de cet algorithme, on ne peut qu'obtenir un état quantique $|j_1^*, j_2^*, ..., j_n^*\rangle$ qui est tel que $s \cdot j^* = 0$. Il suffit alors de faire tourner autant de fois que nécessaire cet algorithme afin d'obtenir $n-1$ valeurs différentes de j^* pour déterminer s.

7.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD7

On a

$$f(x_1, x_2, x_3) = x \cdot s = x_1 s_1 \oplus x_2 s_2 \oplus x_3 s_3$$

et le but va être de trouver s.

1. Prenons par exemple $s = 101$. Alors

$$\begin{array}{lll}
f(0,0,0) = 0 & f(0,1,1) = 1 & f(1,1,0) = 1 \\
f(0,0,1) = 1 & f(1,0,0) = 1 & f(1,1,1) = 0 \\
f(0,1,0) = 0 & f(1,0,1) = 0 &
\end{array}$$

2. Pour déterminer s_1, il suffit de calculer $f(1,0,0,\cdots,0)$. Alors, si $f(1,0,0,\cdots,0)=0$ cela implique que $s_1=0$, si $f(1,0,0,\cdots,0)=1$ cela implique que $s_1=1$. Il en va de même, $\forall k \in [\![1;n]\!]$, pour s_k. Ainsi il faut évaluer n fois la fonction.

3. Initialement, l'état quantique est $|\psi_0\rangle = |00...0\rangle$.

   Puis l'état passe par n portes d'Hadamard. Commençons par rappeler que l'effet d'une porte d'Hadamard à n qubits sur un ket quelconconque $|x_1x_2\cdots x_n\rangle$ s'écrit

   $$\hat{H}^{(n)}|x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} (-1)^{\sum_k x_k i_k} |i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle$$

   où $\sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus \cdots \oplus x_n i_n$.

   Or tous les qubits de l'état rentrant dans les n portes d'Hadamard sont dans l'état $|0\rangle$, ce qui revient à poser dans la formule précédente $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, ce qui conduit à

   $$\forall i_1,i_2,\cdots,i_n \in [\![0;1]\!],\ \sum_{k=1}^n x_k i_k = x_1 i_1 \oplus x_2 i_2 \oplus x_3 i_3 \oplus ... \oplus x_n i_n = 0$$

   Ainsi, l'état du système à l'étape 1 (après les n portes d'Hadamard) s'écrit

   $$|\psi_1\rangle = \hat{H}^{(n)}|\psi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} |i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle$$

   Puis cet état passe par l'oracle, ce qui conduit à

   $$\begin{aligned} |\psi_2\rangle = \hat{U}_f|\psi_1\rangle = \hat{U}_f\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} |i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle\right] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \left[\hat{U}_f|i_1,i_2,\cdots,i_n\rangle\right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{f(i_1,\ldots,i_n)} |i_1 i_2 ... i_n\rangle \end{aligned}$$

   or

   $$f(i_1,i_2,...,i_n) = i \cdot s = i_1 s_1 \oplus i_2 s_2 \oplus ... \oplus i_n s_n$$

Donc

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \sum_{i_1,...,i_n} (-1)^{i_1 s_1 \oplus i_2 s_2 \oplus ... \oplus i_n s_n} |i_1 i_2 ... i_n\rangle$$

L'expression précédente peut largement être simplifiée en remarquant que

$$\sum_{i_1,...,i_n} (-1)^{i_1 s_1 \oplus i_2 s_2 \oplus ... \oplus i_n s_n} |i_1 i_2 ... i_n\rangle = \Big(|0\rangle + (-1)^{s_1}|1\rangle\Big)\Big(|0\rangle + (-1)^{s_2}|1\rangle\Big)...\Big(|0\rangle + (-1)^{s_n}|1\rangle\Big) \tag{9}$$

Vérifions cette expression pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i_1,i_2}(-1)^{i_1 s_1 \oplus i_2 s_2} |i_1 i_2\rangle &= \sum_{i_1} \Big[(-1)^{i_1 s_1} |i_1 0\rangle + (-1)^{i_1 s_1 \oplus s_2} |i_1 1\rangle\Big] \\ &= |00\rangle + (-1)^{s_1}|10\rangle + (-1)^{s_2}|01\rangle + (-1)^{s_1 \oplus s_2}|11\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

$$\Big(|0\rangle + (-1)^{s_1}|1\rangle\Big)\Big(|0\rangle + (-1)^{s_2}|1\rangle\Big) = |00\rangle + (-1)^{s_2}|01\rangle + (-1)^{s_1}|10\rangle + (-1)^{s_1 \oplus s_2}|11\rangle \tag{11}$$

On voit donc que l'on a (10) = (11). Il suffirait maintenant de vérifier l'hérédité pour s'assurer que la relation (9) est vraie. Ceci vous est laissé en exercice et nous allons dans la suite admettre que (9) est vraie.

On peut donc écrire $|\psi_2\rangle$ comme

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Big(|0\rangle + (-1)^{s_1}|1\rangle\Big)\Big(|0\rangle + (-1)^{s_2}|1\rangle\Big)...\Big(|0\rangle + (-1)^{s_n}|1\rangle\Big)$$

L'état quantique $|\psi_2\rangle$ passe maintenant par des portes d'Hadamard.

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \hat{H}^{(n)} |\psi_2\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Big[\hat{H}\Big(|0\rangle + (-1)^{s_1}|1\rangle\Big)\Big]\Big[\hat{H}\Big(|0\rangle + (-1)^{s_2}|1\rangle\Big)\Big] \cdots \Big[\hat{H}\Big(|0\rangle + (-1)^{s_n}|1\rangle\Big)\Big] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \Big[\Big(\hat{H}|0\rangle + (-1)^{s_1}\hat{H}|1\rangle\Big)\Big]\Big[\Big(\hat{H}|0\rangle + (-1)^{s_2}\hat{H}|1\rangle\Big)\Big] \cdots \Big[\Big(\hat{H}|0\rangle + (-1)^{s_n}\hat{H}|1\rangle\Big)\Big]\end{aligned}$$

or, rappelons que

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

ce qui conduit à l'état suivant

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^{s_1}\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^{s_2}\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes ... \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^{s_n}\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Que l'on peut écrire comme suit

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Big(1 + (-1)^{s_1}\Big)|0\rangle + \Big(1 - (-1)^{s_1}\Big)|1\rangle\right]\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\Big(1 + (-1)^{s_n}\Big)|0\rangle + \Big(1 - (-1)^{s_n}\Big)|1\rangle\right]\right)$$

que l'on réécrit finalement comme

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{1}{2}\left[\Big(1 + (-1)^{s_1}\Big)|0\rangle + \Big(1 - (-1)^{s_1}\Big)|1\rangle\right]\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{1}{2}\left[\Big(1 + (-1)^{s_n}\Big)|0\rangle + \Big(1 - (-1)^{s_n}\Big)|1\rangle\right]\right)$$

Ainsi l'état du qubit k ($\forall k \in [\![1; n]\!]$) est donné par

$$|\psi_3^{\text{qubit } k}\rangle = \frac{1}{2}\left[\Big(1 + (-1)^{s_k}\Big)|0\rangle + \Big(1 - (-1)^{s_k}\Big)|1\rangle\right]$$

qui est bien un vecteur normé puisque

$$\langle\psi_3^{\text{qubit } k}|\psi_3^{\text{qubit } k}\rangle = \frac{1}{4}\left[\Big(1 + (-1)^{s_k}\Big)^2 + \Big(1 - (-1)^{s_k}\Big)^2\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}[(1+1)^2 + (1-1)^2] = 1 & \text{si } s_k = 0 \\ \\ \frac{1}{4}[(1-1)^2 + (1+1)^2] = 1 & \text{si } s_k = 1 \end{cases}$$

Le vecteur $|\psi_3\rangle$ est donc un vecteur non intriqué qui peut s'écrire

$$|\psi_3\rangle = |\psi_3^{\text{qubit } 1}\rangle \otimes |\psi_3^{\text{qubit } 1}\rangle \otimes \cdots \otimes |\psi_3^{\text{qubit } n}\rangle$$

4. On effectue maintenant une mesure sur l'état quantique $|\psi_3\rangle$. Comme l'état $|\psi_3\rangle$ est un état non intriqué alors, effectuer une mesure sur le $k$ème qubit (avec $k \in [\![1;n]\!]$) n'a aucun effet sur un autre qubit quelconque du circuit.

   Considérons donc le qubit k qui est dans l'état

   $$|\psi_3^{\text{qubit } k}\rangle = \frac{1}{2}\left[\Big(1+(-1)^{s_k}\Big)|0\rangle + \Big(1-(-1)^{s_k}\Big)|1\rangle\right]$$

   alors la probabilité pour que ce qubit soit dans l'état $|0\rangle$ est donnée par

   $$P\big(\,|\psi_3^{\text{qubit } k}\rangle = |0\rangle\,\big) = \Big|\langle 0|\psi_3^{\text{qubit } k}\rangle\Big|^2 = \frac{1}{4}\Big(1+(-1)^{s_k}\Big)^2 = \begin{cases} 1 & \text{si } s_k = 0 \\ \\ 0 & \text{si } s_k = 1 \end{cases}$$

   donc si lors de la mesure sur le qubit k, on obtient $|0\rangle$ alors $s_k = 0$ et si on obtient $|1\rangle$ alors $s_k = 1$.

   Il en va de même pour les autres qubits. Donc pour obtenir s, il suffit de lire l'état des qubits de sortie

5. question laissée aux étudiants.

7.3 Corrigé de l'exercice 3 du TD7

Partie I : Généralités

1. On cherche à vérifier

   $$|f(x_1,x_2,...,x_n)\rangle - |f(x_1,x_2,...,x_n)\oplus 1\rangle = (-1)^{f(x_1,x_2,...,x_n)}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big)$$

   Il n'y a que 2 possibilités à traiter, soit $f(x_1,x_2,...,x_n) = 0$, soit $f(x_1,x_2,...,x_n) = 1$ comme f renvoie soit 0, soit 1.

   Cas où $f(x_1,x_2,...,x_n) = 0$:
   Alors à gauche

   $$|f(x_1,x_2,...,x_n)\rangle - |f(x_1,x_2,...,x_n)\oplus 1\rangle = |0\rangle - |1\rangle$$

   tandis qu'à droite

   $$(-1)^{f(x_1,x_2,...,x_n)}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = (-1)^0\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = |0\rangle - |1\rangle$$

Donc l'égalité est vérifiée dans ce cas

Cas où $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$:
Alors à gauche

$$|f(x_1, x_2, ..., x_n)\rangle - |f(x_1, x_2, ..., x_n) \oplus 1\rangle = |1\rangle - |0\rangle$$

tandis qu'à droite

$$(-1)^{f(x_1, x_2, ..., x_n)}\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = (-1)^1\big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\big) = -\,|0\rangle + |1\rangle$$

Donc l'égalité est vérifiée dans ce cas.

Finalement l'égalité est vraie.

2. (a)
$$|x_i 0\rangle \longrightarrow |x_i, 0 \oplus x_i\rangle = |x_i, x_i\rangle$$

(b)
$$|x_i 1\rangle \longrightarrow |x_i, 1 \oplus x_i\rangle$$

On déduit donc que
$$|x_i x_j\rangle \longrightarrow |x_i, x_i \oplus x_j\rangle$$
C'est cette dernière relation qui va être utilisée dans la partie 2.

Partie II :

1. (a)

$$|x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\,|1\rangle \longrightarrow |x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\,\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \longrightarrow |x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\,\frac{|x_1\rangle - |1 \oplus x_1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\longrightarrow |x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\,\frac{|x_1 \oplus x_2\rangle - |1 \oplus x_1 \oplus x_2\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$\longrightarrow |\psi_{\text{fin}}\rangle = |x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\,\frac{|x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle - |1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle}{\sqrt{2}}$$

or $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_5$. On a donc

$$|x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle - |1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle = |f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\rangle - |1 \oplus f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\rangle$$

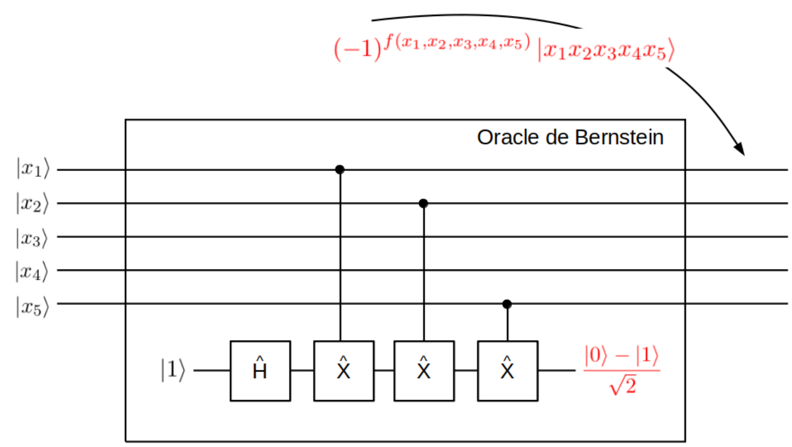
D'après la question 1 de la partie 1, on a alors

$$\begin{aligned}|x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle - |1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle &= |f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\rangle - |1 \oplus f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\rangle \\ &= (-1)^{f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\Big(\,|0\rangle - |1\rangle\,\Big)\end{aligned}$$

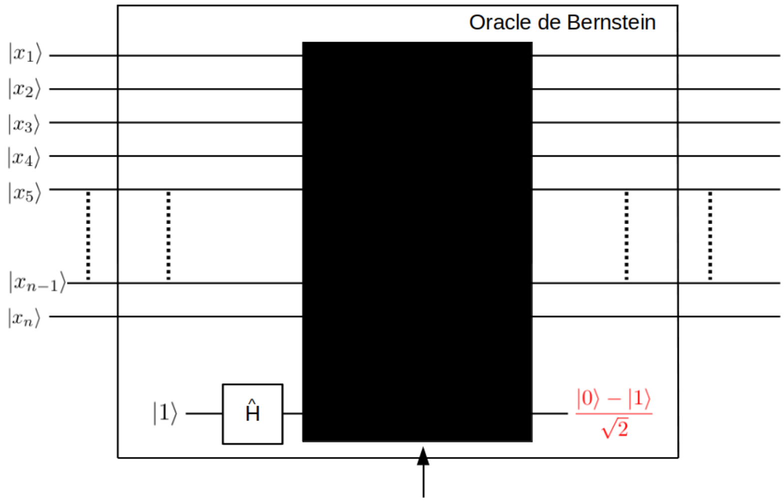
Ainsi

$$\begin{aligned}|\psi_{\text{fin}}\rangle &= |x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\left(\frac{|x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle - |1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_5\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (-1)^{f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)}\,|x_1x_2x_3x_4x_5\rangle\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

(b)



2. .



Il s'agit d'une boite noire permettant d'encoder la fonction. Ainsi, pour tout i allant de 1 à n, si $S_i = 1$ alors il existe dans cette boite noire une porte quantique $\hat{X}$ agissant sur le dernier qubit (celui qui est interne à l'oracle de Bernstein, c'est-à-dire le $(n+1)$ème qubit) et qui est contrôlé par le qubit $|x_i\rangle$. Si $S_i = 0$, alors le qubit $|x_i\rangle$ n'est pas connecté au qubit $n+1$.

8 Correction du TD8

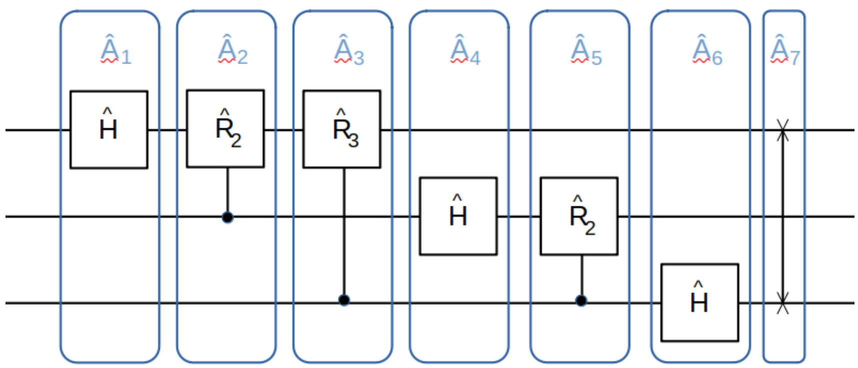
8.1 Corrigé de l'exercice 1 du TD8

Partie 1 : QFT

On rappelle que

$$\hat{R}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \qquad \hat{R}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

Pour écrire les réponses aux questions de la partie 1, nous allons nous baser sur le schéma suivant :



1. Nous allons commencer par écrire l'effet des opérateurs $\hat{A}_2$, $\hat{A}_3$, $\hat{A}_5$ et $\hat{A}_7$.

$$\hat{A}_2 \left|x_1x_2x_3\right\rangle = \begin{cases} e^{i\pi/2}\left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{si } x_1 = x_2 = 1 \\ \left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{A}_3 \left|x_1x_2x_3\right\rangle = \begin{cases} e^{i\pi/4}\left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{si } x_1 = x_3 = 1 \\ \left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{A}_5 \left|x_1x_2x_3\right\rangle = \begin{cases} e^{i\pi/2}\left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{si } x_2 = x_3 = 1 \\ \left|x_1x_2x_3\right\rangle & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{A}_7 \left|x_1x_2x_3\right\rangle = \left|x_3x_2x_1\right\rangle$$

Pour $|000\rangle$:

Nous allons expliciter l'intégralité des calculs pour le ket $|000\rangle$:

$$|\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |000\rangle = (\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) |000\rangle = \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big)$$

Puis le ket précédent passe par la partie de circuit $\hat{A}_2$

$$|\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \hat{A}_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_2 |000\rangle + \hat{A}_2 |100\rangle \big)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big)$$

Puis le ket précédent passe par la partie de circuit $\hat{A}_3$

$$|\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \hat{A}_3 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_3 |000\rangle + \hat{A}_3 |100\rangle \big)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big)$$

Le ket passe maintenant par $\hat{A}_4 = \mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}$

$$|\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \hat{A}_4 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|000\rangle + |100\rangle \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_4 |000\rangle + \hat{A}_4 |100\rangle \big)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\big(\mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}\big) |000\rangle + \big(\mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}\big) |100\rangle \Big]$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mathbb{1} |0\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle + \mathbb{1} |1\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle \Big]$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|0\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \Big]$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle)$$

$|\psi_4\rangle$ rencontre maintenant $\hat{A}_5$

$$|\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \hat{A}_5 \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(\hat{A}_5 |000\rangle + \hat{A}_5 |010\rangle + \hat{A}_5 |100\rangle + \hat{A}_5 |110\rangle)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle)$$

Puis le ket passe par $\hat{A}_6$

$$|\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \hat{A}_6 \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}(\hat{A}_6 |000\rangle + \hat{A}_6 |010\rangle + \hat{A}_6 |100\rangle + \hat{A}_6 |110\rangle)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\Big[\big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H}\big) |000\rangle + \big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H}\big) |010\rangle + \big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H}\big) |100\rangle + \big(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H}\big) |110\rangle\Big]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\Big[\mathbb{1} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle + \mathbb{1} |0\rangle \otimes |1\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle$$
$$+ \mathbb{1} |1\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle + \mathbb{1} |1\rangle \otimes \mathbb{1} |1\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle\Big]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\Big[|00\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + |01\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$
$$+ |10\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + |11\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\Big]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\Big)$$

Finalement

$$|\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\Big)$$

On voit donc que

$$|000\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\Big)$$

Pour $|001\rangle$:

Nous allons expliciter l'intégralité des calculs pour le ket $|001\rangle$:

$$|\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |001\rangle = (\hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) |001\rangle = \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |1\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + |101\rangle\big)$$

Puis le ket précédent passe par la partie de circuit $\hat{A}_2$

$$|\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \hat{A}_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + |101\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_2 |001\rangle + \hat{A}_2 |101\rangle\big)$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + |101\rangle\big)$$

Puis le ket précédent passe par la partie de circuit $\hat{A}_3$

$$|\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \hat{A}_3 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + |101\rangle \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_3 |001\rangle + \hat{A}_3 |101\rangle \big)$$
$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle \big)$$

Le ket passe maintenant par $\hat{A}_4 = \mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}$

$$|\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \hat{A}_4 \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|001\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle \big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_4 |001\rangle + e^{i\pi/4}\hat{A}_4 |101\rangle \big)$$
$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\big(\mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}\big) |001\rangle + e^{i\pi/4}\big(\mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}\big) |101\rangle \Big]$$
$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\mathbb{1} |0\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1} |1\rangle + e^{i\pi/4}(\mathbb{1} |1\rangle \otimes \hat{H} |0\rangle \otimes \mathbb{1}) |1\rangle \Big]$$
$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|0\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle + e^{i\pi/4} |1\rangle \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |1\rangle \Big]$$
$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle + |011\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle + e^{i\pi/4} |111\rangle)$$

$|\psi_4\rangle$ rencontre maintenant $\hat{A}_5$

$$|\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \hat{A}_5 \frac{1}{2}(|001\rangle + |011\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle + e^{i\pi/4} |111\rangle)$$
$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(\hat{A}_5 |001\rangle + \hat{A}_5 |011\rangle + e^{i\pi/4}\hat{A}_5 |101\rangle + e^{i\pi/4}\hat{A}_5 |111\rangle)$$
$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle + e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} |111\rangle)$$
$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle + e^{i\frac{3\pi}{4}} |111\rangle)$$

Puis le ket passe par $\hat{A}_6$

$$|\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \hat{A}_6 \frac{1}{2}(|001\rangle + e^{i\pi/2}|011\rangle + e^{i\pi/4}|101\rangle + e^{i\frac{3\pi}{4}}|111\rangle)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}(\hat{A}_6|001\rangle + e^{i\pi/2}\hat{A}_6|011\rangle + e^{i\pi/4}\hat{A}_6|101\rangle + e^{i\frac{3\pi}{4}}\hat{A}_6|111\rangle)$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\Big[\Big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\hat{H}\Big)|001\rangle + e^{i\pi/2}\Big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\hat{H}\Big)|011\rangle + e^{i\pi/4}\Big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\hat{H}\Big)|101\rangle + e^{i\frac{3\pi}{4}}\Big(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\otimes\hat{H}\Big)|111\rangle\Big]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\Big[\Big(\mathbb{1}|0\rangle\otimes\mathbb{1}|0\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle\Big) + e^{i\pi/2}\Big(\mathbb{1}|0\rangle\otimes\mathbb{1}|1\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle\Big) + e^{i\pi/4}\Big(\mathbb{1}|1\rangle\otimes\mathbb{1}|0\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle\Big) + e^{i\frac{3\pi}{4}}\Big(\mathbb{1}|1\rangle\otimes\mathbb{1}|1\rangle\otimes\hat{H}|1\rangle\Big)\Big]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(|00\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\pi/2}\left(|01\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\pi/4}\left(|10\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(|11\rangle\otimes\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle - |001\rangle + e^{i\pi/2}|010\rangle - e^{i\pi/2}|011\rangle + e^{i\pi/4}|100\rangle - e^{i\pi/4}|101\rangle + e^{i3\pi/4}|110\rangle - e^{i3\pi/4}|111\rangle\Big)$$

Finalement

$$|\psi_7\rangle = \hat{A}_7|\psi_7\rangle$$

$$|\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle - |100\rangle + e^{i\pi/2}|010\rangle - e^{i\pi/2}|110\rangle + e^{i\pi/4}|001\rangle - e^{i\pi/4}|101\rangle + e^{i3\pi/4}|011\rangle - e^{i3\pi/4}|111\rangle\Big)$$

On voit donc que

$$|001\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle - |100\rangle + e^{i\pi/2}|010\rangle - e^{i\pi/2}|110\rangle + e^{i\pi/4}|001\rangle - e^{i\pi/4}|101\rangle + e^{i3\pi/4}|011\rangle - e^{i3\pi/4}|111\rangle\Big)$$

A partir de maintenant, nous allons un peu moins détailler les étapes de calcul.

Pour $|010\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |010\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |010\rangle + e^{i\pi/2} |100\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |010\rangle + e^{i\pi/2} |100\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |001\rangle - |010\rangle - |011\rangle + e^{i\pi/2} |100\rangle + e^{i\pi/2} |101\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle - e^{i\pi/2} |111\rangle \Big]$$

$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |100\rangle - |010\rangle - |110\rangle + e^{i\pi/2} |001\rangle + e^{i\pi/2} |101\rangle - e^{i\pi/2} |011\rangle - e^{i\pi/2} |111\rangle \Big]$$

Pour $|011\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |011\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + e^{i\pi/2} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + e^{i(\pi/2+\pi/4)} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle - |011\rangle + e^{i3\pi/4} |101\rangle - e^{i3\pi/4} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle - e^{i\pi/2} |011\rangle + e^{i3\pi/4} |101\rangle - e^{i(3\pi/4+\pi/2)} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |001\rangle - e^{i\pi/2} |010\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle + e^{i3\pi/4} |100\rangle - e^{i3\pi/4} |101\rangle + e^{i\pi/4} |110\rangle - e^{i\pi/4} |111\rangle \Big]$$

$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |100\rangle - e^{i\pi/2} |010\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle + e^{i3\pi/4} |001\rangle - e^{i3\pi/4} |101\rangle + e^{i\pi/4} |011\rangle - e^{i\pi/4} |111\rangle \Big]$$

Pour $|100\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |100\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |100\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |100\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |100\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle - |100\rangle - |110\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle - |100\rangle - |110\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle - |100\rangle - |101\rangle - |110\rangle - |111\rangle\Big]$$
$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |100\rangle + |010\rangle + |110\rangle - |001\rangle - |101\rangle - |011\rangle - |111\rangle\Big]$$

Pour $|101\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |101\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |101\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |101\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle - e^{i\pi/4} |101\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle + |011\rangle - e^{i\pi/4} |101\rangle - e^{i\pi/4} |111\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle - e^{i\pi/4} |101\rangle - e^{i3\pi/4} |111\rangle)$$
$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |001\rangle + e^{i\pi/2} |010\rangle - e^{i\pi/2} |011\rangle - e^{i\pi/4} |100\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle - e^{i3\pi/4} |110\rangle + e^{i3\pi/4} |111\rangle\Big]$$
$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |100\rangle + e^{i\pi/2} |010\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle - e^{i\pi/4} |001\rangle + e^{i\pi/4} |101\rangle - e^{i3\pi/4} |011\rangle + e^{i3\pi/4} |111\rangle\Big]$$

Pour $|110\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |110\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |010\rangle - e^{i\pi/2} |100\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |010\rangle - e^{i\pi/2} |100\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |001\rangle - |010\rangle - |011\rangle - e^{i\pi/2} |100\rangle - e^{i\pi/2} |101\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle + e^{i\pi/2} |111\rangle \Big]$$

$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + |100\rangle - |010\rangle - |110\rangle - e^{i\pi/2} |001\rangle - e^{i\pi/2} |101\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle + e^{i\pi/2} |111\rangle \Big]$$

Pour $|111\rangle$:

$$\longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |111\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - e^{i\pi/2} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - e^{i3\pi/4} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle - |011\rangle - e^{i3\pi/4} |101\rangle + e^{i3\pi/4} |111\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_5\rangle = \hat{A}_5 |\psi_4\rangle = \frac{1}{2}(|001\rangle - e^{i\pi/2} |011\rangle - e^{i3\pi/4} |101\rangle + e^{i(3\pi/4+\pi/2)} |110\rangle)$$

$$\longrightarrow |\psi_6\rangle = \hat{A}_6 |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |001\rangle - e^{i\pi/2} |010\rangle + e^{i\pi/2} |011\rangle - e^{i3\pi/4} |100\rangle + e^{i3\pi/4} |101\rangle - e^{i\pi/4} |110\rangle + e^{i\pi/4} |111\rangle \Big]$$

$$\longrightarrow |\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle - |100\rangle - e^{i\pi/2} |010\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle - e^{i3\pi/4} |001\rangle + e^{i3\pi/4} |101\rangle - e^{i\pi/4} |011\rangle + e^{i\pi/4} |111\rangle \Big]$$

Pour donner la représentation matricielle du circuit, introduisons $\omega = e^{i\pi/4}$ d'où l'on déduit que :

$$\omega^2 = e^{i\pi/2} \ ; \ \omega^3 = e^{i3\pi/4} \ ; \ \omega^4 = -1 \ ; \ \omega^5 = -e^{i\pi/4} \ ; \ \omega^6 = -e^{i\pi/2} \ ; \ \omega^7 = -e^{i3\pi/4}$$

Alors la représentation matricielle du circuit est donnée par

$$\hat{A}_{QFT} = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega & \omega^4 & \omega^7 & \omega^2 & \omega^5 \\ 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 \\ 1 & \omega^5 & \omega^2 & \omega^7 & \omega^4 & \omega & \omega^6 & \omega^3 \\ 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^7 & \omega^6 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$$

2. Nous allons maintenant considérer en toute généralité le ket $|x_1x_2x_3\rangle$ que nous allons faire passer à travers le circuit proposé :

$$|x_1x_2x_3\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle = \hat{A}_1 |x_1x_2x_3\rangle = (\hat{H}\otimes\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}) |x_1x_2x_3\rangle = \hat{H} |x_1\rangle\otimes|x_2x_3\rangle$$

Or, on sait que

$$\begin{cases} \hat{H} |0\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ \\ \hat{H} |1\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

qui peut en fait se résumer de la façon suivante

$$\hat{H} |x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + e^{i\pi x_1} |1\rangle \big)$$

De ceci, on déuit que

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + e^{i\pi x_1} |1\rangle \big) \otimes |x_2x_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0x_2x_3\rangle + e^{i\pi x_1} |1x_2x_3\rangle \big)$$

L'état $|\psi_1\rangle$ passe maintenant par l'opérateur $\hat{A}_2$:

$$|\psi_2\rangle = \hat{A}_2 |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_2 |0x_2x_3\rangle + e^{i\pi x_1}\hat{A}_2 |1x_2x_3\rangle \big)$$

Clairement $\hat{A}_2 |0x_2x_3\rangle = |0x_2x_3\rangle$ car quoi qu'il se passe $\hat{R}_2$ appliqué à $|0\rangle$ donne $|0\rangle$. Les choses sont différentes pour $|1x_2x_3\rangle$. En effet, on sait que

$$\begin{cases} \hat{A}_2 |1x_2x_3\rangle = |1x_2x_3\rangle & \text{si } x_2 = 0 \\ \hat{A}_2 |1x_2x_3\rangle = e^{i\pi/2} |1x_2x_3\rangle & \text{si } x_2 = 1 \end{cases}$$

ce que l'on peut résumer en écrivant

$$\hat{A}_2 |1x_2x_3\rangle = e^{i\pi \frac{x_2}{2}} |1x_2x_3\rangle$$

Alors

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0x_2x_3\rangle + e^{i\pi(x_1 + \frac{x_2}{2})} |1x_2x_3\rangle \big)$$

Cet état passe maintenant par $\hat{A}_3$

$$|\psi_3\rangle = \hat{A}_3 |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_3 |0x_2x_3\rangle + e^{i\pi(x_1 + \frac{x_2}{2})} \hat{A}_3 |1x_2x_3\rangle \big)$$

Encore une fois, $\hat{A}_3 |0x_2x_3\rangle = |0x_2x_3\rangle$ tandis que

$$\begin{cases} \hat{A}_3 |1x_2x_3\rangle = |1x_2x_3\rangle & \text{si } x_3 = 0 \\ \hat{A}_3 |1x_2x_3\rangle = e^{i\pi/4} |1x_2x_3\rangle & \text{si } x_3 = 1 \end{cases}$$

ce que l'on peut résumer par

$$\hat{A}_3 |1x_2x_3\rangle = e^{i\pi \frac{x_3}{4}} |1x_2x_3\rangle$$

On a alors

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0x_2x_3\rangle + e^{i\pi(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4})} |1x_2x_3\rangle \big)$$

L'état $|\psi_3\rangle$ passe par $\hat{A}_4 = \mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1}$:

$$|\psi_4\rangle = \hat{A}_4 |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{A}_4 |0x_2x_3\rangle + e^{i\pi(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4})} \hat{A}_4 |1x_2x_3\rangle \big)$$

Donc $\hat{H}$ s'applique sur $|x_2\rangle$, alors

$$\hat{H} |x_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + e^{i\pi x_2} |1\rangle \big)$$

ce qui permet d'écrire

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\,|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + e^{i\pi x_2}\,|1\rangle\,\big) \otimes |x_3\rangle$$
$$+\, e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\,|0\rangle + e^{i\pi x_2}\,|1\rangle\,\big) \otimes |x_3\rangle\Big]$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}\Big[\,|00x_3\rangle + e^{i\pi x_2}\,|01x_3\rangle + e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|10x_3\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|11x_3\rangle\Big]$$

Puis

$$|\psi_5\rangle = \hat{A}_5\,|\psi_4\rangle = \frac{1}{2}\Big[\hat{A}_5\,|00x_3\rangle + e^{i\pi x_2}\hat{A}_5\,|01x_3\rangle$$
$$+\, e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\hat{A}_5\,|10x_3\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\hat{A}_5\,|11x_3\rangle\Big]$$

Or

$$\hat{A}_5\,|00x_3\rangle = |00x_3\rangle$$
$$\hat{A}_5\,|01x_3\rangle = e^{i\pi\frac{x_3}{2}}\,|01x_3\rangle$$
$$\hat{A}_5\,|10x_3\rangle = |10x_3\rangle$$
$$\hat{A}_5\,|11x_3\rangle = e^{i\pi\frac{x_3}{2}}\,|11x_3\rangle$$

que l'on injecte dans $|\psi_5\rangle$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{2}\Big(\,|00x_3\rangle + e^{i\pi(x_2+\frac{x_3}{2})}\,|01x_3\rangle + e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|10x_3\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|11x_3\rangle$$

Cet état passe par $\hat{A}_6 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H}$:

$$|\psi_6\rangle = \hat{A}_6\,|\psi_5\rangle$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[\,|000\rangle + e^{i\pi x_3}\,|001\rangle + e^{i\pi(x_2+\frac{x_3}{2})}\,|010\rangle + e^{i\pi(x_2+x_3+\frac{x_3}{2})}\,|011\rangle$$
$$+\, e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|100\rangle + e^{i\pi(x_1+x_3+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|101\rangle$$
$$+\, e^{i\pi(x_1+x_2+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}+\frac{x_3}{4})}\,|110\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2+x_3+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_3}{4})}\,|111\rangle\Big]$$

Enfin

$$|\psi_7\rangle = \hat{A}_7 |\psi_6\rangle$$

$$|\psi_7\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}} \Bigg[|000\rangle + e^{i\pi x_3} |100\rangle + e^{i\pi(x_2+\frac{x_3}{2})} |010\rangle + e^{i\pi(x_2+x_3+\frac{x_3}{2})} |110\rangle$$
$$+ e^{i\pi(x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})} |001\rangle + e^{i\pi(x_1+x_3+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4})} |101\rangle$$
$$+ e^{i\pi(x_1+x_2+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{2}+\frac{x_3}{4})} |011\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2+x_3+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\frac{x_3}{4})} |111\rangle \Bigg]$$

A partir de cette expression générale, on peut évidemment vérifier tous les résultats obtenus à la question précédente.

3.
$$\hat{A}_{QFT} = \hat{A}_7 \hat{A}_6 \hat{A}_5 \hat{A}_5 \hat{A}_4 \hat{A}_3 \hat{A}_2 \hat{A}_1$$

Il ne reste plus qu'à donner les expressions matricielles de chacun des opérateurs et à faire les produits matricielles.

$$\hat{A}_1 = \hat{H} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_4 = \mathbb{1} \otimes \hat{H} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

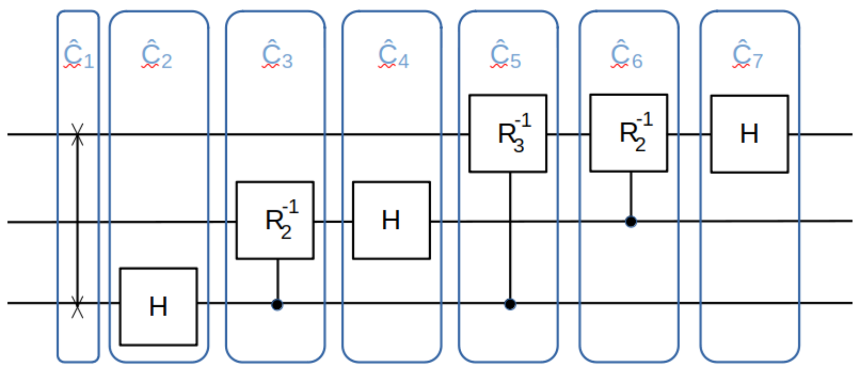
$$\hat{A}_6 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de faire les produits matricielles, en se rappelant que $\omega^4 = -1$, pour retrouver $\hat{A}_{QFT}$.

Partie 2 : QFT^{-1}



1. Nous allons donc faire passer chacun des états obtenus à la question 1) de la partie 1 à travers le circuit ci-dessus.

   Etat associé à $|000\rangle$:
   On rappelle que $|000\rangle$ a été transformé de la façon suivant par le circuit QFT

$$|000\rangle \longrightarrow |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle+|001\rangle+|010\rangle+|011\rangle+|100\rangle+|101\rangle+|110\rangle+|111\rangle \Big)$$

Prenons donc cet état et faisons le passer par le circuit QFT^{-1}

$$
\begin{aligned}
\longrightarrow |\varphi_1\rangle &= \hat{C}_1 |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_2\rangle &= \hat{C}_2 |\varphi_1\rangle = \frac{1}{4}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |000\rangle - |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |010\rangle - |011\rangle \\
&\qquad + |100\rangle + |101\rangle + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle + |110\rangle - |111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle) \\
\longrightarrow |\varphi_3\rangle &= \hat{C}_3 |\varphi_2\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |010\rangle + |100\rangle + |110\rangle) \\
\longrightarrow |\varphi_4\rangle &= \hat{C}_4 |\varphi_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|000\rangle + |010\rangle + |000\rangle - |010\rangle + |110\rangle + |100\rangle - |110\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle) \\
\longrightarrow |\varphi_5\rangle &= \hat{C}_5 |\varphi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle) \\
\longrightarrow |\varphi_6\rangle &= \hat{C}_6 |\varphi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle) \\
\longrightarrow |\varphi_7\rangle &= \hat{C}_7 |\varphi_6\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle + |100\rangle + |000\rangle - |100\rangle) = |000\rangle
\end{aligned}
$$

Nous voyons donc que l'on retrouve l'état $|000\rangle$.

<u>Etat associé à $|111\rangle$:</u>
On rappelle que $|111\rangle$ a été transformé de la façon suivant par le circuit QFT

$$
\begin{aligned}
|111\rangle \longrightarrow |\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(&|000\rangle - |100\rangle - e^{i\pi/2} |010\rangle + e^{i\pi/2} |110\rangle - e^{i3\pi/4} |001\rangle \\
&+ e^{i3\pi/4} |101\rangle - e^{i\pi/4} |011\rangle + e^{i\pi/4} |111\rangle \Big)
\end{aligned}
$$

Prenons donc cet état et faisons le passer par le circuit QFT^{-1}

$$\begin{aligned}
\longrightarrow |\varphi_1\rangle = \hat{C}_1 |\varphi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle - |001\rangle - e^{i\pi/2}|010\rangle + e^{i\pi/2}|011\rangle - e^{i3\pi/4}|100\rangle \\
&\qquad + e^{i3\pi/4}|101\rangle - e^{i\pi/4}|110\rangle + e^{i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_2\rangle = \hat{C}_2 |\varphi_1\rangle &= \frac{1}{4}\Big(|000\rangle + |001\rangle - |000\rangle + |001\rangle - e^{i\pi/2}|010\rangle \\
&\qquad - e^{i\pi/2}|011\rangle + e^{i\pi/2}|010\rangle - e^{i\pi/2}|011\rangle \\
&\qquad - e^{i3\pi/4}|100\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle + e^{i3\pi/4}|100\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle \\
&\qquad - e^{i\pi/4}|110\rangle - e^{i\pi/4}|111\rangle + e^{i\pi/4}|110\rangle - e^{i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|001\rangle - e^{i\pi/2}|011\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle - e^{i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_3\rangle = \hat{C}_3 |\varphi_2\rangle &= \frac{1}{2}(|001\rangle - e^{i\pi/2}e^{-i\pi/2}|011\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle - e^{i\pi/4}e^{-i\pi/2}|111\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\Big(|001\rangle - |011\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle - e^{-i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_4\rangle = \hat{C}_4 |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(|001\rangle + |011\rangle - |001\rangle + |011\rangle - e^{i3\pi/4}|101\rangle \\
&\qquad - e^{i3\pi/4}|111\rangle - e^{-i\pi/4}|101\rangle + e^{-i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(2|011\rangle + e^{-i\pi/4}|101\rangle + e^{-i\pi/4}|111\rangle - e^{-i\pi/4}|101\rangle + e^{-i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|011\rangle + e^{-i\pi/4}|111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_5\rangle = \hat{C}_5 |\varphi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|011\rangle + e^{-i\pi/4}e^{-i\pi/4}|111\rangle \Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|011\rangle + e^{-i\pi/2}|111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_6\rangle = \hat{C}_6 |\varphi_5\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + e^{-i\pi/2}e^{-i\pi/2}|111\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|011\rangle + e^{-i\pi}|111\rangle \Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|011\rangle - |111\rangle \Big) \\
\longrightarrow |\varphi_7\rangle = \hat{C}_7 |\varphi_6\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|011\rangle + |111\rangle - |011\rangle + |111\rangle \Big) = |111\rangle
\end{aligned}$$

Nous voyons donc que l'on retrouve l'état $|111\rangle$.

En faisant cela sur tous les autres états quantiques nous observerons bien que ce circuit correspond à la QFT^{-1}.

2.

$$
\begin{aligned}
|\varphi_1\rangle &= \hat{C}_1 |x_1x_2x_3\rangle = |x_3x_2x_1\rangle \\
|\varphi_2\rangle &= \hat{C}_2 |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_3x_20\rangle + e^{i\pi x_1} |x_3x_21\rangle) \\
|\varphi_3\rangle &= \hat{C}_3 |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_3x_20\rangle + e^{i\pi(x_1-\frac{x_2}{2})} |x_3x_21\rangle) \\
|\varphi_4\rangle &= \hat{C}_4 |\varphi_3\rangle = \frac{1}{2}(|x_300\rangle + e^{i\pi x_2} |x_310\rangle + e^{i\pi(x_1-\frac{x_2}{2})} |x_301\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2-\frac{x_2}{2})} |x_311\rangle) \\
|\varphi_5\rangle &= \hat{C}_5 |\varphi_4\rangle = \frac{1}{2}(|x_300\rangle + e^{i\pi x_2} |x_310\rangle + e^{i\pi(x_1-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4})} |x_301\rangle + e^{i\pi(x_1+x_2-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4})} |x_311\rangle) \\
|\varphi_6\rangle &= \hat{C}_6 |\varphi_5\rangle = \frac{1}{2}(|x_300\rangle + e^{i\pi(x_2-\frac{x_3}{2})} |x_310\rangle + e^{i\pi(x_1-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4})} |x_301\rangle \\
&\qquad\qquad + e^{i\pi(x_1+x_2-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4}-\frac{x_3}{2})} |x_311\rangle) \\
|\varphi_7\rangle &= \hat{C}_7 |\varphi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big[|000\rangle + e^{i\pi x_3} |100\rangle + e^{i\pi(x_2-\frac{x_3}{2})} |010\rangle + e^{i\pi(x_2+x_3-\frac{x_3}{2})} |110\rangle \\
&\qquad\qquad + e^{i\pi(x_1-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4})} |001\rangle + e^{i\pi(x_1+x_3-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4})} |101\rangle \\
&\qquad\qquad + e^{i\pi(x_1+x_2-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4}-\frac{x_3}{2})} |011\rangle) + e^{i\pi(x_1+x_2+x_3-\frac{x_2}{2}-\frac{x_3}{4}-\frac{x_3}{2})} |111\rangle \Big]
\end{aligned}
$$

3. On peut utiliser la formule précédente pour construire la matrice. Pour cela, on introduit

$$
\begin{aligned}
&\omega^{-1} = e^{-i\pi/4} \;\; ; \;\; \omega^{-2} = e^{-i\pi/2} \;\; ; \;\; \omega^{-3} = e^{-i3\pi/4} \;\; ; \;\; \omega^{-4} = e^{-i\pi} = e^{i\pi} = 1 \\
&\omega^{-5} = e^{-i5\pi/4} = -\omega \;\; ; \;\; \omega^{-6} = e^{-i6\pi/4} = -\omega^2 \;\; ; \;\; \omega^{-7} = e^{-i7\pi/4} = -\omega^3
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
|000\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + |100\rangle + |010\rangle + |110\rangle\,|001\rangle + |101\rangle + |011\rangle + |111\rangle) \\
|001\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + \omega^{-4}|100\rangle + \omega^{-2}|010\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}|110\rangle \\
&\qquad \omega^{-1}|001\rangle + \omega^{-4}\omega^{-1}|101\rangle + \omega^{-3}|011\rangle + \omega^{-4}\omega^{-3}|111\rangle) \\
|010\rangle &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + |100\rangle + \omega^{-4}|010\rangle + \omega^{-4}|110\rangle \\
&\qquad \omega^{-2}|001\rangle + \omega^{-2}|101\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}|011\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}|111\rangle)
\end{aligned}
$$

$$|011\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + \omega^{-4}\,|100\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}\,|010\rangle + \omega^{-2}\,|110\rangle$$
$$\omega^{-3}\,|001\rangle + \omega^{-4}\omega^{-3}\,|101\rangle + \omega^{-1}\,|011\rangle + \omega^{-4}\omega^{-1}\,|111\rangle)$$
$$|100\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + |100\rangle + |010\rangle + |110\rangle$$
$$\omega^{-4}\,|001\rangle + \omega^{-4}\,|101\rangle + \omega^{-4}\,|011\rangle + \omega^{-4}\,|111\rangle)$$
$$|101\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + \omega^{-4}\,|100\rangle + \omega^{-2}\,|010\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}\,|110\rangle$$
$$\omega^{-4}\omega^{-1}\,|001\rangle + \omega^{-1}\,|101\rangle + \omega^{-4}\omega^{-3}\,|011\rangle + \omega^{-3}\,|111\rangle)$$
$$|110\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + |100\rangle + \omega^{-4}\,|010\rangle + \omega^{-4}\,|110\rangle$$
$$\omega^{-4}\omega^{-2}\,|001\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}\,|101\rangle + \omega^{-2}\,|011\rangle + \omega^{-2}\,|111\rangle)$$
$$|111\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^3}}(\,|000\rangle + \omega^{-4}\,|100\rangle + \omega^{-4}\omega^{-2}\,|010\rangle + \omega^{-2}\,|110\rangle$$
$$\omega^{-4}\omega^{-3}\,|001\rangle + \omega^{-3}\,|101\rangle + \omega^{-4}\omega^{-1}\,|011\rangle + \omega^{-1}\,|111\rangle)$$

alors la représentation matricielle est

$$\hat{A}_{QFT^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & \omega^{-3} & \omega^{-4} & \omega^{-5} & \omega^{-6} & \omega^{-7} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} & 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & \omega^{-6} \\ 1 & \omega^{-3} & \omega^{-6} & \omega^{-1} & \omega^{-4} & \omega^{-7} & \omega^{-2} & \omega^{-5} \\ 1 & \omega^{-4} & 1 & \omega^{-4} & 1 & \omega^{-4} & 1 & \omega^{-4} \\ 1 & \omega^{-5} & \omega^{-2} & \omega^{-7} & \omega^{-4} & \omega^{-1} & \omega^{-6} & \omega^{-3} \\ 1 & \omega^{-6} & \omega^{-4} & \omega^{-2} & 1 & \omega^{-6} & \omega^{-4} & \omega^{-2} \\ 1 & \omega^{-7} & \omega^{-6} & \omega^{-5} & \omega^{-4} & \omega^{-3} & \omega^{-2} & \omega^{-1} \end{pmatrix}$$

4. On vérifie alors facilement que $\hat{A}_{QFT^{-1}}\hat{A}_{QFT} = \hat{A}_{QFT}\hat{A}_{QFT^{-1}} = \mathbb{1}$ en utilisant les relations données en équation (12).

8.2 Corrigé de l'exercice 2 du TD8

Partie 1

1. Par définition un opérateur $\hat{U}$ est dit unitaire ssi

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$$

2. Soit λ et $|u\rangle$ une valeur propre et le vecteur propre associé de l'opérateur $\hat{U}$. Alors

$$\hat{U}\,|u\rangle = \lambda\,|u\rangle$$

Prenons le transconjugué de cette relation

$$\langle u|\,\hat{U}^\dagger = \lambda^*\,\langle u|$$

Ainsi

$$\langle u|\,\hat{U}^\dagger\hat{U}\,|u\rangle = \lambda^*\lambda\,\langle u|u\rangle = |\lambda|^2\,\langle u|u\rangle$$

Or $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \mathbb{1}$, donc

$$\langle u|\,\hat{U}^\dagger\hat{U}\,|u\rangle = \langle u|u\rangle = |\lambda|^2\,\langle u|u\rangle$$

On déduit de l'expression précédente que

$$|\lambda|^2 = 1 \Longleftrightarrow \lambda = e^{2i\pi\theta} \text{ avec } \theta \in [0;1[$$

3.

$$\hat{U}^2\,|u\rangle = \hat{U}\hat{U}\,|u\rangle = \hat{U}e^{2i\pi\theta}\,|u\rangle = e^{4i\pi\theta}\,|u\rangle$$
$$\hat{U}^4\,|u\rangle = \hat{U}^2\hat{U}^2\,|u\rangle = \hat{U}^2e^{4i\pi\theta}\,|u\rangle = e^{8i\pi\theta}\,|u\rangle$$
$$\hat{U}^8\,|u\rangle = \hat{U}^4\hat{U}^4\,|u\rangle = \hat{U}^4e^{8i\pi\theta}\,|u\rangle = e^{16i\pi\theta}\,|u\rangle$$
$$\hat{U}^{2^t}\,|u\rangle = e^{2i\pi\theta\times 2^t}\,|u\rangle$$

4.

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |u\rangle \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\,\big) \otimes |u\rangle \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle \otimes |u\rangle + |01\rangle \otimes |u\rangle + |10\rangle \otimes |u\rangle + |11\rangle \otimes |u\rangle\,\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle \otimes |u\rangle + |01\rangle \otimes e^{2i\pi\theta}\,|u\rangle + |10\rangle \otimes |u\rangle + |11\rangle \otimes e^{2i\pi\theta}\,|u\rangle\,\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle \otimes |u\rangle + e^{2i\pi\theta}\,|01\rangle \otimes |u\rangle + |10\rangle \otimes |u\rangle + e^{2i\pi\theta}\,|11\rangle \otimes |u\rangle\,\big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\psi_3\rangle &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle \otimes |u\rangle + e^{2i\pi\theta}\,|01\rangle \otimes |u\rangle + e^{4i\pi\theta}\,|10\rangle \otimes |u\rangle + e^{6i\pi\theta}\,|11\rangle \otimes |u\rangle\,\big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\,|00\rangle + e^{2i\pi\theta}\,|01\rangle + e^{4i\pi\theta}\,|10\rangle + e^{6i\pi\theta}\,|11\rangle\,\big) \otimes |u\rangle\end{aligned}$$

5. Pour cela, il suffit de développer l'expression et de vérifier qu'on obtient bien le résultat de la question précédente. Partons donc de

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{4i\pi\theta}|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{2i\pi\theta}|1\rangle) \otimes |u\rangle$$

En développant, on obtient

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + e^{2i\pi\theta}|01\rangle + e^{4i\pi\theta}|10\rangle + e^{6i\pi\theta}|11\rangle) \otimes |u\rangle$$

qui correspond bien à l'état obtenu à la question précédente.

Partie 2

1.

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \otimes |u\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle\Big) \otimes |u\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(&|000\rangle + e^{2i\pi\theta}|001\rangle + |010\rangle + e^{2i\pi\theta}|011\rangle + |100\rangle \\
&+ e^{2i\pi\theta}|101\rangle + |110\rangle + e^{2i\pi\theta}|111\rangle\Big) \otimes |u\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(&|000\rangle + e^{2i\pi\theta}|001\rangle + e^{4i\pi\theta}|010\rangle + e^{6i\pi\theta}|011\rangle + |100\rangle \\
&+ e^{2i\pi\theta}|101\rangle + e^{4i\pi\theta}|110\rangle + e^{6i\pi\theta}|111\rangle\Big) \otimes |u\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(&|000\rangle + e^{2i\pi\theta}|001\rangle + e^{4i\pi\theta}|010\rangle + e^{6i\pi\theta}|011\rangle + e^{8i\pi\theta}|100\rangle \\
&+ e^{10i\pi\theta}|101\rangle + e^{12i\pi\theta}|110\rangle + e^{14i\pi\theta}|111\rangle\Big) \otimes |u\rangle
\end{aligned}$$

2. Partons de l'état

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{8i\pi\theta}|1\rangle\Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{4i\pi\theta}|1\rangle\Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta}|1\rangle\Big) \otimes |u\rangle$$

Développons cette expression, pour finalement obtenir

$$\begin{aligned}
|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^3}}\Big(&|000\rangle + e^{2i\pi\theta}|001\rangle + e^{4i\pi\theta}|010\rangle + e^{6i\pi\theta}|011\rangle + e^{8i\pi\theta}|100\rangle \\
&+ e^{10i\pi\theta}|101\rangle + e^{12i\pi\theta}|110\rangle + e^{14i\pi\theta}|111\rangle\Big) \otimes |u\rangle
\end{aligned}$$

Partie 3

1.

$$|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{t-1}} |1\rangle \Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{t-2}} |1\rangle \Big)\otimes$$
$$... \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{1}} |1\rangle \Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{0}} |1\rangle \Big) \otimes |u\rangle$$

Partie 4

On rappelle que l'on postule ici que θ peut s'écrire très exactement sous forme binaire. Ainsi

$$\theta = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \frac{\theta_3}{2^3} + \cdots + \frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}} + \frac{\theta_t}{2^t}$$

où $(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_t) \in [\![0;1]\!]^t$.

1. (a) Montrons que

$$e^{2i\pi\theta\times 2^{t-1}} = e^{2i\pi\theta_t/2}$$

Pour cela calculons explicitement $\theta \times 2^{t-1}$:

$$\begin{aligned}\theta \times 2^{t-1} &= \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \frac{\theta_3}{2^3} + \cdots + \frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}} + \frac{\theta_t}{2^t}\right) \times 2^{t-1} \\ &= \theta_1 \times 2^{t-2} + \theta_2 \times 2^{t-3} + \theta_3 \times 2^{t-4} + \cdots + \theta_{t-1} + \frac{\theta_t}{2}\end{aligned}$$

alors

$$e^{2i\pi\theta\times 2^{t-1}} = \left(e^{2i\pi\theta_1\times 2^{t-2}}\right)\times\left(e^{2i\pi\theta_2\times 2^{t-3}}\right)\times\cdots\times\left(e^{2i\pi\theta_{t-1}}\right)\times\left(e^{2i\pi\theta_t/2}\right) = e^{2i\pi\theta_t/2}$$

(b) Montrons que

$$e^{2i\pi\theta\times 2^{t-2}} = e^{2i\pi\left(\frac{\theta_{t-1}}{2} + \frac{\theta_t}{2^2}\right)}$$

Pour cela calculons explicitement $\theta \times 2^{t-2}$:

$$\begin{aligned}\theta \times 2^{t-2} &= \left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \frac{\theta_3}{2^3} + \cdots + \frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}} + \frac{\theta_t}{2^t}\right) \times 2^{t-2} \\ &= \theta_1 \times 2^{t-3} + \theta_2 \times 2^{t-4} + \theta_3 \times 2^{t-5} + \cdots + \frac{\theta_{t-1}}{2} + \frac{\theta_t}{2^2}\end{aligned}$$

alors

$$e^{2i\pi\theta\times 2^{t-2}} = \left(e^{2i\pi\theta_1\times 2^{t-3}}\right)\times\left(e^{2i\pi\theta_2\times 2^{t-4}}\right)\times\cdots\times\left(e^{2i\pi\theta_{t-1}/2}\right)\times\left(e^{2i\pi\theta_t/2^2}\right)$$
$$= e^{2i\pi\left(\frac{\theta_{t-1}}{2}+\frac{\theta_t}{2^2}\right)}$$

(c) Montrons que

$$e^{2i\pi\theta\times 2} = e^{2i\pi\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_t}{2^{t-1}}\right)}$$

Pour cela calculons explicitement $\theta\times 2$:

$$\theta\times 2 = \left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\frac{\theta_3}{2^3}+\cdots+\frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}}+\frac{\theta_t}{2^t}\right)\times 2$$
$$= \theta_1+\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_{t-1}}{2^{t-2}}+\frac{\theta_t}{2^{t-1}}$$

alors

$$e^{2i\pi\theta\times 2^{t-2}} = \left(e^{2i\pi\theta_1}\right)\times\left(e^{2i\pi\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_t}{2^{t-1}}\right)}\right)$$
$$= e^{2i\pi\left(\frac{\theta_2}{2}+\frac{\theta_3}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_t}{2^{t-1}}\right)}$$

(d) Montrons que

$$e^{2i\pi\theta\times 2^0} = e^{2i\pi\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\cdots+\frac{\theta_t}{2^t}\right)}$$

Pour cela calculons explicitement $\theta\times 2^0$:

$$\theta\times 2^0 = \left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\frac{\theta_3}{2^3}+\cdots+\frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}}+\frac{\theta_t}{2^t}\right)\times 2^0$$
$$= \left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\frac{\theta_3}{2^3}+\cdots+\frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}}+\frac{\theta_t}{2^t}\right)$$

alors

$$e^{2i\pi\theta\times 2^0} = e^{2i\pi\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\frac{\theta_3}{2^3}+\cdots+\frac{\theta_{t-1}}{2^{t-1}}+\frac{\theta_t}{2^t}\right)}$$

2. On avait montrer dans la partie 3 qu'à la fin de l'algorithme général (ce qui correspond à l'état en A), l'état quantique était donné par

$$|\psi_A\rangle = |\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{t-1}} |1\rangle \Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{t-2}} |1\rangle \Big)\otimes$$
$$... \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{1}} |1\rangle \Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\theta 2^{0}} |1\rangle \Big) \otimes |u\rangle$$

Or d'après les questions 1(a), 1(b), 1(c) et 1(d), on a

$$|\psi_A\rangle = |\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\frac{\theta_t}{2}} |1\rangle \Big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\left(\frac{\theta_{t-1}}{2}+\frac{\theta_t}{2^2}\right)} |1\rangle \Big)\otimes$$
$$\cdots \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + e^{2i\pi\left(\frac{\theta_1}{2}+\frac{\theta_2}{2^2}+\frac{\theta_3}{2^3}+\cdots+\frac{\theta_t}{2^t}\right)} |1\rangle \Big) \otimes |u\rangle$$

L'expression précédente correspond très exactement à la transformée de Fourier quantique du vecteur $|\theta_1\theta_2, \theta_3 \cdots \theta_t\rangle$ d'où l'on déduit que

$$|\psi_A\rangle = QFT(|\theta_1\theta_2\theta_3 \cdots \theta_t\rangle)$$

3. On applique ensuite QFT^{-1}. Or $QFT^{-1}(QFT) = \mathbb{1}$. On voit donc que

$$|\psi_B\rangle = QFT^{-1}\Big(QFT\big(|\theta_1\theta_2\theta_3 \cdots \theta_t\rangle \big)\Big) = |\theta_1\theta_2\theta_3 \cdots \theta_t\rangle$$

4. On voit donc que l'on mesure à la fin de l'algorithme θ_1, θ_2, $\cdots$, θ_t, en mesurant simplement les états quantiques du qubit 1, du qubit 2 et ainsi de suite jusqu'au qubit t respectiviement. On a alors

$$\theta = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots + \frac{\theta_t}{2^t}$$

Discussion pour le cas où θ ne s'écrit pas exactement avec n bits et le cas où l'on ne connait pas le vecteur propre dont on cherche la valeur propre.