Programmation avancée
Les Arbres

Walter Rudametkin

Walter.Rudametkin@polytech-lille.fr
https://rudametw.github.io/teaching/

Bureau F011
Polytech'Lille

CM7

Les arbres

Collection d’informations hiérarchisées

Exemple

- Arbre généalogique, organigramme d’une entreprise, table des matières d’un livre
- Organisation d’informations dans une base de données, représentation de la structure syntaxique d’un programme dans les compilateurs

Les arbres: terminologie

../common-images/arbre.pdf

Les arbres: définitions

- **Niveau d'un nœud** : nombre d'arêtes entre le nœud et la racine (ex : niveau de s3.2 = 2)
- **Hauteur d'un arbre** : niveau maximum de l'arbre (3 pour l'exemple)
- **Arbre ordonné** : l'ordre des fils de chaque nœud est spécifié
- **Degré sortant d'un nœud** : nombre de fils que le nœud possède
- **Arbre n-aire** : les nœuds sont de degré n

Les arbres binaires

Définition

$$\mathtt{AB} = \varnothing \mid \langle \mathtt{R},\ \mathtt{G},\ \mathtt{D} \rangle$$

$$\text{où} \begin{cases} \mathtt{R}: & \text{Noeud Racine} \\ \mathtt{G}: & \text{Sous-arbre gauche} \\ \mathtt{D}: & \text{Sous-arbre droite} \end{cases}$$

Exemple

../common-

Le *type* arbre binaire

- **Déclaration :** `A` <u>`de type`</u> `ArbreBinaire` <u>`de`</u> `‹T›`

Primitives

- `init_arbre(A)` : crée un arbre binaire vide
- `vide(A)` : teste si `A` vide
- `valeur(A)` : retourne la valeur de la racine
- `gauche(A)` : retourne le sous-arbre gauche de `A`
- `droite(A)` : retourne le sous-arbre droit
- `put_valeur(A,v)` : range la valeur de `v` à la racine
- `put_droite(A,D)` : `D` devient le sous-arbre droit de `A`
- `put_gauche(A,G)` : `G` devient le sous-arbre gauche de `A`
- `cons(v, G, D)` : construit l'arbre `‹v, G, D›`

Le *type* arbre binaire: exemple

- Fonction qui teste si un arbre est une feuille (1 seul nœud)

```
Fonction feuille(A)
    D : A : ArbreBinaire de <T>
    Si vide(A) Alors
        retourner (faux)
    Sinon
        retourner( vide(gauche(A)) et vide(droite(A)) )
    Fsi
Ffonction
```

Le *type* arbre binaire: exemple

- Calcul du nombre de noeuds d'un arbre binaire

$$\texttt{nb\_noeuds(A)} \begin{cases} \texttt{A = } \emptyset : & 0 \\ \texttt{A = } \langle \texttt{R,G,D} \rangle : & 1 + \texttt{nb\_noeuds(G)} + \texttt{nb\_noeuds(D)} \end{cases}$$

```
Fonction nb_noeuds(A)
    D : A : ArbreBinaire de <T>
    Si vide(A) Alors
        retourner (0)
    Sinon
        retourner ( 1 + nb_noeuds(gauche(A))
                      + nb_noeuds(droite(A)) )
    Fsi
Ffonction
```

Algorithmes sur les arbres

3 types de parcours pour effectuer un traitement sur tous les noeuds

- Préfixé
- Postfixé
- Infixé

Les arbres: parcours prefixé ou RGD

Parcours prefixé ou RGD

- Traiter la racine
- Traiter le sous-arbre gauche
- Traiter le sous-arbre droit

Les arbres: parcours prefixé ou RGD

```
Action RGD(A)
    D : A : ArbreBinaire de <T>
    Si non vide(A) Alors
        traiter(valeur(A))
        RGD(gauche(A))
        RGD(droite(A))
    Fsi
Faction
```

../common-

Exemple :

`traiter(valeur(A)) = écrire(valeur(A))`

$\Rightarrow$ `+ * 3 - 1 8 / 5 4` (notation préfixée)

Les arbres: parcours postfixé ou GDR

Parcours postfixé ou GDR

- Traiter le sous-arbre gauche
- Traiter le sous-arbre droit
- Traiter la racine

Les arbres: parcours postfixé ou GDR

```
Action GDR(A)
    D : A : ArbreBinaire de ‹T›
    Si non vide(A) Alors
        GDR(gauche(A))
        GDR(droite(A))
        traiter(valeur(A))
    Fsi
Faction
```

../common-

Exemple :

`traiter(valeur(A)) = écrire(valeur(A))`

$\Rightarrow$ `3 1 8 - * 5 4 / +` (notation postfixée)

Les arbres: parcours infixé ou GRD

- Traiter le sous-arbre gauche
- Traiter la racine
- Traiter le sous-arbre droit

```
Action GRD(A)
    D : A : ArbreBinaire de <T>
    Si non vide(A) Alors
        GRD(gauche(A))
        traiter(valeur(A))
        GRD(droite(A))
    Fsi
Faction
```

Implantation des arbres binaires

Représentation par pointeurs

../common-images/arbre3.pdf

Implantation des arbres binaires

```
type ArbreBinaire = pointeur de Noeud

type Noeud = structure
        val : <T>
        gauche, droit: ArbreBinaire
fin
```

Implantation des arbres binaires

Soit A un ArbreBinaire

```
vide(A)           ⇒   retourner(A = NULL)
init_arbre(A)     ⇒   A ← NULL
valeur(A)         ⇒   retourner(A↑•val)
gauche(A)         ⇒   retourner(A↑•gauche)
droite(A)         ⇒   retourner(A↑•droite)
put_valeur(A,v)   ⇒   A↑•val    ← v
put_gauche(A,G)   ⇒   A↑•gauche ← G
put_droite(A,D)   ⇒   A↑•droit  ← D

cons(v,G,D)       ⇒   allouer(A)
                      A↑•val    ← v
                      A↑•gauche ← G
                      A↑•droit  ← D
```

Les arbres binaires ordonnées

Rappel

- Liste contiguë : recherche dichotomique en $O(\log_2 n)$
  Ajout / suppression en $O(n)$
- Liste chaînée : recherche en $O(n)$
  Ajout / suppression en temps constant

Arbre binaire ordonné (ou arbre de recherche)

- Recherche / ajout / suppression : même efficacité
- Au mieux (arbre équilibré) en $\log_2(n)$

Les arbres binaires ordonnées: définition

Soit `A = <R, G, D>`, `A` est ordonné si

- Pour tout nœud `nd` de `G`, $\texttt{valeur(nd)} \leqslant \texttt{R}$
- Pour tout nœud `nd` de `D`, $\texttt{valeur(nd)} > \texttt{R}$
- `G` et `D` sont des arbres ordonnés

../common-images/arbre4.pdf

- Parcours `GRD` d'un arbre ordonné $\Rightarrow$ par ordre croissant
- Parcours `DRG` d'un arbre ordonné $\Rightarrow$ par ordre décroissant

Recherche dans un arbre binaire ordonné

Recherche associative d'un élément `X`

- `A` = $\varnothing$ $\Rightarrow$ non trouvé
- `A = <V, G, D>`
  - `V = X` $\Rightarrow$ trouvé
  - `X < V` $\Rightarrow$ rechercher `X` dans `G`
  - `X > V` $\Rightarrow$ rechercher `X` dans `D`

Coût de la recherche

- Dans tous les cas $\leqslant$n
- Au mieux $\log_2(n)$ si l'arbre est équilibré $\Rightarrow$ techniques de construction d'arbres équilibrés

Recherche dans un arbre binaire ordonné

```
Fonction existe(A, X) : booléen
    D : X : <T> ;
        A : ArbreBinaire
    Si vide(A) Alors
        retourner(faux)
    Sinon
        Si X = valeur(A) Alors
            retourner(vrai)
        Sinon
            Si X < valeur(A) Alors
                retourner(existe(gauche(A),X))
            Sinon
                retourner(existe(droite(A),X))
            Fsi
        Fsi
    Fsi
Ffonction
```

Ajout dans un arbre binaire ordonné

Solution simple : ajout en feuille

../common-images/arbre5.pdf

Ajout dans un arbre binaire ordonné

`Ajout(A,V) :`

- $A = \varnothing \Rightarrow A = \langle V, \varnothing, \varnothing \rangle$
- $A = \langle R, G, D \rangle$
  - $V \leqslant R \Rightarrow$ ajouter `V` dans `gauche(A)`
  - $V > R \Rightarrow$ ajouter `V` dans `droite(A)`
- Utilisation du passage de `A` en `D/R` pour établir le lien père/fils
- cf : algorithme récursif d'ajout d'un élément dans une liste chaînée

Ajout dans un arbre binaire ordonné

```
Action ajout(A, V)
    D : V : ‹T› ;
    D/R : A : ArbreBinaire de ‹T›
    Si vide(A) Alors
        A ← cons(V,∅,∅)
    Sinon
        Si V ⩽ valeur(A) Alors
            ajout (gauche(A),V)
        Sinon
            ajout (droite(A),V)
        Fsi
    Fsi
Faction
```