1 Введение

1.1 Преподаватель

Павлов Роман Владимирович

1.2 Список литературы

1) Бесекерский В. А., Попов Е. П. «Теория систем автоматического регулирования». Москва, 1975 г.

2) Павлов Р. В. «Основы теории управления».

Посмотреть описания RC-цепочек, в пособии Вишнякова.
Ряд Тейлора.

2 Общие положения

Теория автоматического управления явялется технической наукой общего применения. Она дает теоритическую базу для исследования и разработки систем автоматического управления.

Операция управления — это действие, направленное на правильное и высококачественное функционирование технического объекта. Они обеспечивают в нужный момент времени начало, порядок следования и прекращение отдельных действий. Выделяют необходимые ресурсы, задают нужные параметры самому процессу управления.

Процесс управления — это совокупность операций управления.

Объект управления — это совокупность технических средств, выполняющих определенный процесс, подлежащий управлению.

Типовая функциональная схема управления имеет вид: Картинка 1.

Сигналы:

- $g(t)$ — задающее воздействие (например, педаль газа),
- $f(t)$ — возмущающее воздействие (вредное воздействие, тряска на кочках),
- $e(t)$ — сигнал разсогласования или ошибки (разность двух предыдущих входных сигналов),
- $z(t)$ — сигнал главной обратной связи,
- $y(t)$ — выходной сигнал (регулируемая величина).

Блоки:

- 1. Задающее устройство. Преобразует входной сигнал (например, к масштабам и природе сигнала обратной связи).
- 2, 5. Сравнивающие устройства.
- 3. Преобразующее устройство.
- 6. Усилительное устройство.

- 7. Исполнительное устройство.
- 9. Измерительный элемент (датчик положения, скорости и тд).
- 10. Элемент главной обратной связи (преобразование сигнала для сапостовления с входным).
- 11. Объект управления (сам самолет, антена и тд).
- 4, 8. Корректирующие устройства (улучшают качества системы), причем 4 — последовательное корректирующее устрйство, а 8 — местная обратная связь.

2.1 Классификация САУ

Критерии классификации САУ:

- Системы делят на:
    - автоматической стабилизации (поддержание какой то величины на постоянном уровне),
    - слежения (выходной сигнал повторяет входной),
    - программного управления (реализация какого-либо закона управления).
- Системы делят на:
    - замкнутые,
    - разомкнутые.

  Настоящие системы управления всегда замкнутые, но в задачах анализа также изучаются разомкнутые системы.
- Делят на:
    - автоматические,
    - автоматизированные (функции обратной связи выполняет человек).
- Делят на:
    - линейные (описывается линейным управлением),
    - нелинейные (нелинейным уравнением).

  Обычно уравнения дифферинциальные.
- По характеру сигнала делятся на:
    - непрерывные,
    - имульсные,
    - цифровые.

– Системы делят на:

  – обычные,
  – адаптивные (параметры системы подстраиваются под изменения среды).

2.2 Задачи теории САУ

1) Формирование функциональных и структурных схем САУ.
2) Построение статических и динамических характеристик отдельных звеньев системы и системы в целом.
3) Определение ошибок управления и показателей точности.
4) Исследование устойчивости работы САУ.
5) Оценка качественных показателей процесса управления.
6) Синтез корректирующих устройств и оптимизация параметров САУ.

3 Математический аппарат описания систем автоматического управления

Исчерпывающим описанием САУ является дифференциальное уравнение ее работы. В общем случае это **уравнение динамики**. Любое диффуравнение пишется относительно входных и выходных величин, если величины меняются, то и получается уравнение динамики. Если приравнять к 0 входной сигнал, то получим **уравнение статики**, те описание системы в установившемся режиме.

Диффуры получаются на основе изучения физ. законов системы. В общем случае эти диффуры являются нелинейными. Для упрощения анализа выполняется линеаризация. Существует большое количество способов линеаризации, например разложение в ряд Тейлора. Линейное диффуравнение может быть представлено следующим образом:

$$a_n\frac{d^nx_2}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x_2}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0x_2(t)=b_m\frac{dx^m}{dt^m}+\ldots+b_0x_1(t)$$

где x_1 — входныя величина, а x_2 — выходная. Это стандартный вид диффура, но в теории автоматического управления существует другая форма, принятая за стандарт, например для уравнения 3й степени:

$$(T_2^2p^2+T_1p+1)x_2(t)=k(T_3p+1)x_1(t)$$

где k — коэффициент усиления, T — постоянная времени, а $p=\frac{d}{dt}$.

Это уравнение называют **первой формой записи САУ**. Кроме нее существует еще 2 формы, где отличается смысл параметр p.

Описание путем использования диффуров используется редко в связи со сложностью анализа. Для этого в теории САУ вводится понятие **передаточная функция** или функция передачи. Функцию передачи можно получить путем использования преобразования Лапласа:

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt, p=a+jb$$

где f(t) — оригинал, а F(p) — изображение. Другая форма записи $F(p) = L(f(t))$. Это **вторая форма записи**.

После преобразования диффура уравнение примет вид:

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)X_2(p) = k(T_3 p + 1)X_1(p)$$

из этого уравнения можно найти отношение:

$$W(p) = \frac{X_2(p)}{X_1(p)} = \frac{k(T_3 p + 1)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

где $p = j\omega$. Тогда $W(j\omega)$. Это **третья форма записи**.

Это и называется **передаточной функцией**, как правило это отношение двух полиномов для конкретной системы (обычно степень числителя меньше степени знаменателя). Эта функция служит основой для теории САУ.

3.1 Характеристики САУ

При анализе САУ применяются различные методы оценки реакции САУ на внешние воздействия (какой-то входный сигнал). Например, для сравнения двух систем берут один входной сигнал, подаем на вход обоих систем и сравниваем выходные сигналы. Для сравнения необходимо, чтобы входные воздействия были стандартные (эталонный). Таких сигналов в теории САУ 3.

3.1.1 Мощный короткий входной импульс (дельта-импульс)

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$\omega(t)$ — **весовая функция**. Картинка 2.

После применения преобразования Лапласа $L(\delta(t)) = 1$, тогда $X_2(p) = W(p)X_1(p)$, те $L(\omega(t)) = W(p)$. Картинка 3.

$x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau)\omega(1-\tau)d\tau$ — это интеграл свертки или интеграл Дюамеля.

3.1.2 Единичная ступенька

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t >= 0 \end{cases}$$

Тогда $h(t)$ — переходная характеристика.

$$L(1(t)) = \frac{1}{p}$$

. Найти математическую связь между переходной и весовой характеристикой.

3.1.3 СИнусоидальный сигнал

Частотные характеристики — это выражения и графические зависимости, выражающие реакцию системы на воздействие вида $\sin \omega t$. При передаче такого сигнала на вход САУ, выходной сигнал будет $x_2 = A \sin(\omega t + \phi)$. Где ϕ — начальная фаза второго сигнала или **сдвиг фаз**.

Существует зависимость параметров выходного сигнала от частоты входного. Это и называют **частотными характеристиками**, те $A(\omega)$ — это коэффициент усиления системы и $\phi(\omega)$ — сдвиг фаз. Обе характеристики находят из **частотной передаточной функции**:$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$ в Декартовых координатах и $W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$.

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$$
$$\phi(\omega) = \arctan \frac{v(\omega)}{u(\omega)}$$

Частотные характеристики удобно представлять в графическом виде на осях u,jv. Картинка 6.

Эта кривая наз. **Амплитудно-Фазовая характеристика** или **годограф**, те показывает зависимость коэфициента усиления и сдвига фаз от частоты сигнала. Это характеристика системы или звена.

Возможно построить отдельно **Амплитодно-частотную характеристику** и **Фазово-частотную характеристику**, но эти графики как правило не строят, а чаще строят логарифмические графики. Для его построяния берут десятичный логарифм:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$$

это Логарифмическая Амплитудно-Частотная Характеристика(ЛАЧХ). Величина измеряется в дБ.

Это строится графически на осях ω,$L(\omega)$. Частота откладывается в лагорифмическом масштабе. Картинка 7.

Если частота изменяется на декаду (порядок), то логарифмическая хорактеристика меняется на число кратное 20 дБ (в зависимости от степени частоты). Наклон в графике стандартный. График уходит в отрицательную область, значит сигнал ослабляется, те Амплитуда<1 и логарифм<0.

С помощью логарифмических характеристик можно легко исследовать САУ на устойчивость и др. Кроме того имея ЛХ отдельных звеньев легко получить ЛХ всей системы.

Первый сигнал — единичнй удар, второй — постоянное нажатие, а третий — постоянное изменение (вправо, влево).

3.2 Сотавление исходных диффуравнений и передаточных функций

В общем случае для системы можно записать несколько видов диффуров:

1) $D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t)$, где $x(t)$— ошибка, $f(t)$ — задающее значение, $g(t)$ —

возмущающее значение.

$$D(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$$
$$x(t) = g(t) - y(t)$$

где $y(t)$ — выходной сигнал Полином $D(p)$ имеет специфическое название **Характеристический полином** и часто используется для анализа системы.

2) $D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t)$, где $y(t)$ — выходня величина, а $R(p) = D(p) - Q(p)$

Передаточные функции. Картинка 8.
Блоки:

- ПУ — преобразующее устройство,
- ИЭ — исполнительый элемент,
- РО — регулируемый объект.

Здесь также введен новый сигнал $u(t)$ — регулирующий сигнал. Для рассмотреного случая можно написать следующие формулы.

$$u(t) = W_{per}(p)x(t)$$
$$y(t) = W_0(p)u(t) + W_f(p)f(t)$$

Здесь присутствует 3 передаточные функции: W_{per} — описывает звенья САУ, W_0 — передаточная функция по регулирующему воздействию (описывает РО) и W_f — передаточная функция по возмущающему воздействию.

$$y(t) = W(p)x(t) + W_f(p)f(t)$$
$$W(p) = W_0(p)W_{per}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Последняя функция называется **передаточная функция разомкнутой системы**.

Теперь рассмотрим замкнутую систему, те введем обратную связь, для этого добавляем уравнение $x(t) = g(t) - y(t)$ — уравнение замыкания.

$$y(t) = \frac{W(p)}{1 + W(p)}g(t) + \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}f(t)$$
$$x(t) = \frac{1}{1 + W(p)}g(t) - \frac{W_f(p)}{1 + W(p)}f(t)$$

Глядя на эти выражения можно ввести еще несколько стандартных передаточных функций:

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{R(p)}{R(p) + Q(p)} = \frac{Y(p)}{G(p)}$$

Это **Передаточная функция замкнутой системы**.

$$\Phi_x = \frac{1}{1 + W(p)} = 1 - \Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)}$$

Это **Передаточная функция замкнутой системы по ошибке**. Существует **Передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию**. САМОСТОЯТЕЛЬНО!

4 Типовые звенья САУ

Рассмотрим наиболее распространенные звенья:

4.1 Усилительное (пропорциональное или безинерционное)

Картинка 9.

Дифференциальное уравнение выглядит очень просто $x_2(t) = k_1 * x_1(t)$. Передаточная функция равна $W(p) = k_1$. Весовая функция $\omega(t) = k_1\delta(t)$, а $h(t) = k_1 1(t)$. Графики нарисовать самостоятельно.

Пример, любой усилитель, механическая передача, потенциометр.

4.2 Апереодическое (инерционное звено первого порядка)

Диффур выглядит так $T\frac{dx_2}{dt} + x_2(t) = k_1x_1(t)$. Передаточная функция выглядит следующим образом $W(p) = \frac{k_1}{Tp+1}$. Весовая функция $\omega(t) = \frac{k_1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$. $h(t) = k_1(1 - e^{-\frac{t}{T}})$. Графики.

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = u(\omega) + jv(\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} \times \frac{1 - Tj\omega}{1 - Tj\omega} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \arctan \omega T$$

$$A(\omega) = \dots$$

Картинка 10.

Лагорифмические характеристики:

$$L(\omega) = 20\lg(\frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}) = 20(\lg(k) - \lg(\sqrt{1 + T^2\omega^2}))$$

Картинка 11.

Частота $\omega_c = \frac{1}{T}$ называют **сопрягающей**.

4.3 Апереодическое звено 2го порядка

$$(T_2^2p^2 + T_1p + 1)x_2(t) = kx_1(t)$$

$$W(p) = \frac{k}{T_2^2p^2 + T_1p + 1}$$

Для разложения полинома 2го порядка на произведение полиномов первого порядка, необходимо чтобы $T_1 \leq 2T_2$, тогда:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3p + 1)(T_4p + 1)}$$

Таким образом это объединение двух апереодических звеньев первого порядка.

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T_3^2\omega^2)(T_4^2\omega^2 + 1)}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan T_3\omega - \arctan T_4\omega$$

В данном случае сопрягающих частот будет 2.

Картинка 12.

4.4 Колебательные и консервативные звенья

Для обоих звеньев диференциальное уравнение имеет тот же самый вид.

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)x_2(t) = kx_1(t)$$

Но соотношение постоянных времени будет обратным $T_1 < 2T_2$. В этом случае данную передаточную функцию записыают в другом виде.

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$$

Где $T = T_2$, а $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ — коэфициент затухания (от 0 до 1).
Переходная характеристика выглядит так: Картинка 13
Величина колебаний зависит от коэффициента затухания, чем он меньше, тем больше колебания.
Лагорифмические характеристики выглядят так: картинка 14.

Консервативное звено.

Если задать коэфициент затухания = 0, то графики будут выглядеть так: картинка 15.

4.5 Интегрирующее

$$x_2(t) = k \int x_1(t)dt$$
$$W(p) = \frac{k}{p}$$

Картинка 16.

4.6 Дифференцирующее звено

$$x_2(t) = k\frac{dx_1}{dt}$$
$$W(p) = kp$$

Картинка 17.

5 Преобразование структурной схемы САУ

Имеется САУ заданной структуры, состоящяя из определенного количество звеньев. Может возникнуть 2 задачи:

1) На основе передаточных функций звеньев получить передаточную функцию всей системы. При этом используется 3 основных вида соединений звеньев.
2) Преобразования структурной схемы. Используется 2 приема:

5.1 Основные виды соединений звеньев

5.1.1 Последовательное соединений

Картинка 18.

$$W_{ekv}(p) = W_1(p) * W_2(p)$$

5.1.2 Паралелльное соединение

Картинка 19.

$$W_{ekv}(p) = W_1(p) + W_2(p)$$

5.1.3 Обратная связь

Картинка 20.

$$e = x \pm z$$
$$y = e * W_1$$
$$z = y * W_2$$
$$W_{ekv}(p) = \frac{y}{x} = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}$$

5.2 Преобразования структурной схемы

5.2.1 Перенос сумматора

Картинка 21.

5.2.2 Перенос узла

Картинка 22.

6 Устойчивость САУ

Под устойчивостью понимается способность системы сохранять свое состояние или принимать новое после окончания действия внешних сил.

Состояние системы определяется по выходному сигналу. Если выходной сигнал стремится к постоянному значению, то система устойчива, иначе неустойчива.

Картинка 23.

Для того, чтобы определить устойчивость необходимо определить теоретический выходной сигнал, те решить диффур (в общем виде и в частном, переходная составляющая, вынужденное решение, **УЗНАТЬ!!**). Для решения диффура в общем случае необходимо отсутствие правой части.

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots$$

Где $C_1, C_2, \dots$ — коэфициенты, найденные из начальных условий, $p_1, p_2, \dots$ — конри характеристического уравнений $D(p) = 0$. Вид выходного сигнала **зависит от вида корней**.

Рассмотрим частный случай решения характеристического уравнения:

1) Действительный корень.

$$p_1 = +\alpha$$
$$p_2 = -\alpha$$

График 24.

В этом случае на устойчивый сигнал подходит второй корень.

2) Мнимый корень.

$$y(t) = C_1 e^{\pm \alpha t} \sin(\beta t)$$

График 25.

В этом случае вещественная часть должна быть отрицательна.

3) Только мнимая часть (без вещественной).

$$y(t) = C_1 \sin(\beta t)$$

График 26.

В этом случае система находится на границе устойчивости.

Вывод: для устойчивости системы вещественная часть корня должна быть меньше 0.

Картинка 27.

Оценивать устойчивость системы решением диффура сложно, поэтому существуют косвенные методы оценки устойчивости, называемые **критерии устойчивости**.

6.1 Критерии устойчивости

Все критерии можно разделить на 2 большие группы:

– алгебраические,

– часттные.

6.1.1 Алгебраические критерии

Позволяют судить о устойчивости системы по коэффициентам.

Полином n-го порядка можно заменить n-полиномами 1-го порядка, те $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Отсюда следует, что если корни отрицательные, то коэффициенты положительные — это **необходимое условие устойчивости САУ**.

Однако на корни накладываются дополнительные эффекты. Необходимо выявить достаточные условия устойчивости системы. Существуют несколько критериев:

– Критерий Раусса,

– Критерий Гурвица.

Критерий Раусса Составляется таблица из коэффициентов. В первой строке записываются четные коэффициенты, во второй нечетные. Каждый следующий элемент таблицы вычисляется по формуле $C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i C_{k+1,i-1}$, где $r_i = \frac{C_{1,i-2}}{C_{1,i-1}}$.

a_0	a_2	a_4
a_1	a_3	a_5

$$C_{1,3} = a_2 - \frac{a_0}{a_1}a_3$$

$$\dots$$

Для того, чтобы система была устойчива **необходимо и достаточно**, чтобы коэффициенты первого столбца были положительными.

Критерий Гурвица Составляется матрица по следующему правилу: по главной диагонали слева-направо выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная с первого a_1. Вверх от главной диагонали пишутся коэффициенты с последовательно возрастающими импульсами, а вниз записываются коэффициенты с последовательно убывающими импульсами. Пустые места заполняются нулями.

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{Vmatrix}$$

Находятся определители этой матрицы. И критерий звучит так: для того, чтобы система была устойчива **необходимо и достаточно**, чтобы все определители были больше 0. Те $a_1 > 0$,$(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$ и т.д.

6.2 Частотные критерии

Существует 2 критерия устойчивости:

- Критерий Михайлова,
- Критерий Найквиста.

6.2.1 Критерий Михайлова

Основой для анализа является характеристическое уравнение, но в качестве аргумента используется мнимая частота $p = j\omega$. Для определения устойчивости необходимо построить годограф Михайлова.

Линейная система n-го порядка устойчива, если при изменении частоты от 0 до ∞ годограф Михайлова последовательно обходит n квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки, начинаясь на положительной части вещественной оси и не проходя через начало координат.

Картинка 28.

Допустим имеется система 1-го порядка, те $D(j\omega) = a_0p + a_1 = a_0(p - p_1) = a_0(j\omega - p_1)$. Возьмем частоту $= 0$, тогда в скобках остается $-p_1$, который для устойчивости должен быть < 0, значит все произведение > 0.

Картинка 29.

Допустим имеется система 2-го порядка, те $D(j\omega) = a_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)$. Если имеется 2 сомножителя, то фазы складываются, те $\phi_\Sigma = \phi_1 + \phi_2$.

Если хотя бы один из корней положительный, то годограф не сможет обойти нужное количество квадрантов. Если все корни положительные, то годограф начинается в отрицательной части. Если один из корней не имеет вещественной части, то годограф пройдет через начало координат.

6.2.2 Критерий Найквиста

На основе этого критерия можно судить об устойчивости замкнутой системы по виду годографа передаточной функции разомкнутой системы.

Передаточная функция, как правило, записывается в виде отношения полиномов, причем степень числителя, как правило, меньше степени знаменателя. Отсюда можно сделать вывод, что если частота стремится к ∞, то дробь и годограф стремятся к 0 (к началу координат).

Поведение годографа в области 0-х частот зависит от вида системы. С точки зрения поведения системы могут быть **статические и астатические**. Различаются по наличию сомножителя p в знаменателе.

Статические Если подставить в это выражение $\omega = 0$, то получим точку на положительной части вещественной оси.

Для определения поведения введем вспомогательную передаточную функцию $W_1(p) = W(p) + 1$ или $W_1(j\omega) = W(j\omega) + 1 = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}$. При изменении частоты от 0 до ∞ изменение фазы годографа числителя совпадает с изменением фазы годографа знаменателя, те результирующая фаза равна 0. Те при стремлении к ∞ фаза годографа стремится к 0. Те годограф не должен охватывать начало координат. Значит годограф исходной функции не должен охватывать точку с координатами $(-1; j0)$.

Картинка 30.

Астатические В астатической системе имеется сомножитель p. Для определения устойчивости в этомслучае годограф дополняется кривой ... радиуса, начинающегося в положительной части оси u и заканчивающейся в точке $\omega \to 0$

6.2.3 Логарифмический критерий

Картинка 33.

Основан на анализе логарифмических характеристик. Система устойчива, если длинна вектора при сдвиге фаз $-\pi$ должна быть меньше 1, что в логарифмических характеристиках значит, что при сдвиге фаз $-\pi$, ЛАЧХ меньше 0.

Картинка 34.

С помощью этих критериев можно определить запас устойчивости по амплитуде и фазе.

7 Законы управления

Это алгоритмы или функциональные зависимости, в соответствии с котороми управляющее устройство формирует управляющее воздействие.

Картинка 35.

На практике $u(t) = F_1(x) + F_2(g) + F_3(f)$. Тогда получается, что каждая функция независима от другой и законов получается 3:

- Управление (регулирование) по отклонению (первое слогаемое).
- Управление по внешнему воздействию (2, 3).
    - Управление по задающему воздействию (2),
    - Управление по возмущающему воздействию (3).

Наиболее распространены линейные уравнения, поэтому ограничимся их изучением.

7.1 Пропорциональное управление

$$
\begin{aligned}
u(t) &= W_{per}(p) * x(t) \\
y(t) &= W_0(p) \\
u(t) &= k_1 x(t) \\
W(p) &= k_1 W_0(p)
\end{aligned}
$$

Найдем передаточную функцию в установившемся состоянии (по окончании переходных процессов, те производная сигнала равна 0).

Найдем $\lim\limits_{p \to 0} W(p) = k_1 k_0 = k = \frac{y_{\text{уст}}}{x_0}$. В числителе установившееся значение выходной величины, а в знаменателе постоянное значение ошибки.

Найдем установившуюся ошибку в замкнутой системе. Для этого вспомним уравнение (*).

$$x_{\text{уст}} = \frac{g_0}{1+k} - \frac{x_{f\text{уст}}}{1+k}$$

Где k — коэффициент усиления, а g_0 — установившееся воздействие, $x_{f\text{уст}}$ — установившаяся ошибка от коэфициента усиления в этой системе (эта ошибка не равна 0, а уменьшеному в $k+1$ раз входное воздействие).

7.2 Интегральное управление

$$u(t) = k_2 \int x(t)dt$$
$$u(t) = \frac{k_2}{p} x(t)$$
$$W(p) = \frac{k_2}{p} W_0(p)$$
$$\lim_{p \to 0} \frac{g_0}{1 + W(p)} = 0$$

Поведение второго слогаемого зависит от поведения числителя.

Таким образом, если имеются интегрирующие звенья, то установившееся значение стремиться к 0.

Картинка 36.

Такая система является астатической по задающему воздействию.

Если задающее воздействие не постоянное, а изменяется с постоянной скоростью (картинка 37). Для избежания ошибки по скорости требуется добавить еще одно интегральное звено, те взять двойной интеграл, тогда система будет астатической второй степени.

Но при увеличении числа интеграторов замедляется процесс управления и изменяется устойчивость (как правило ухудшается).

7.3 Регулирование по производной

В состав системы включаются дифференцирующие звенья. Управляющий сигнал будет пропорционален производной сигнала.

Очевидно, что этот закон действует только для изменяющихся значений (производная постоянного значения равна 0). Поэтому данную систему не используют в чистом виде, а только в качестве дополнительных звеньев.

Плюсы данного управления в скорости.

$$u(t) = k_3 \frac{dx}{dt}$$
$$W_{per}(p) = k_3 p$$

7.4 Изодронное управление

Сочетает преимущества всех трех предыдущих законов.

Картинка 38.

$$u(t) = k_1 x(t) + \frac{k_2}{p} x(t) + k_3 p x(t)$$

В какой-то момент t_0 поступил входной сигнал и началось управление (ошибка изменяются по закону $x = at$). На начальном участке $(0, 1)$ интегральная и пропорционнальные части очень малы, поэтому существенный вклад вносит производная $k_3 a$. Дальше на участке $(1, 2)$ вступает в силу пропорциональный закон(интеграл еще мал, а производная остается постоянной). И дальше вступает в силу интегральный закон.

8 Коэффициенты ошибок

Речь идет о нахождении величины ошибки, которая имеет место в процессе управления. Один из способов нахождения ошибок был рассмотрен выше, поэтому рассмотрим иной подход. Ошибки могут быть найдены, как в случае задающего воздействия, так и в случае возмущающего. Найдем изображение ошибки:

$$X(p) = \Phi_x(p)G(p) = \frac{G(p)}{1+W(p)}$$

Разложим передаточную функцию в ряд:

$$X(p) = [c_0 + c_1 p + \frac{c_2}{2!}p^2 + \ldots]G(p)$$

Перейдем к оригиналу:

$$x_{\text{уст}} = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg}{dt} + fracc_2 d^2 gdt^2 + \ldots$$

Эти c — и есть коэффициенты ошибок, позволяющие связать входной сигнал с ошибкой. Их можно найти 2я способами: разложением в ряд Тейлора.

$$c_0 = \Phi_x(p)|_{p=0}$$

$$c_1 = [\frac{d\Phi_x}{dp}]|_{p=0}$$

$$\ldots$$

Эти коэффициенты ошибок принимают различные значения, позволяющие качественно оценить систему. Таким образом для статической системы $c_0 \neq 0$, для астатической системы 1-го порядка $c_0 = 0, c_1 \neq 0$ и т.д.

Пример Определить коэффициенты ошибок. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{k_v}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1+W(p)} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1+T_2)p^2 + p + k_v}$$

Поделим числитель на знаменатель:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{k_v}p + (\frac{T_1+T_2}{k_v} - \frac{1}{k_v^2})p^2 + (T_1 T_2 - 2\frac{T_1+T_2}{k_v} + \frac{1}{k_v^2})p^3 + \ldots$$

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{k_v}$$

$$c_2 = \frac{T_1+T_2}{k_v} - \frac{1}{k_v^2}$$

$$\ldots$$

Допустим $g(t) = g_0 + v_0 t + \frac{\epsilon t^2}{2}$, найдем установившуюся ошибку:

$$x_{\text{уст}} = \frac{v_0 + \epsilon t}{k_v} + \epsilon\frac{T_1+T_2}{k_v} - \frac{1}{k_v^2}$$

Таким образом имеется ошибка по скорости и по ускорению.

9 Качество переходного процесса, показатели качества

Требования к качеству процесса управления могут различаться в каждом конкретном случае, но как правило оценивается характер переходного процесса при ступенчатом входном воздействии.

Рисунок 39.

Тут имеются следующие показатели качества:

- Время регулирования или длительность переходного процесса ($t_{\text{рег}}$). Это время в течении которого, начиная с момента приложения входного воздействия, отклонение регулируемой величины от ее установившегося значения становится меньше наперед заданного значения Δ. Обычно $\Delta = 5\%$.
- Перерегулирование (σ) или заброс. Это максимальное относительное отклонение выходной величины от установившегося значения.
- Колебательность. Количество полных колебаний выходной величины за время регулирования.
- Установившаяся ошибка. Разность между задающим и выходным воздействием. Не равна 0 только в статических системах.

9.1 Построение переходного процесса

Для определения показателей качества необходимо иметь график или функцию переходного процесса. Методы получения переходных функций:

- Решение диффуравнения.
- С использованием передаточных функций.
-

10 Пропуск

Он используется для определения запаса устойчивости. Находится модуль частотной передаточной функции замкнутой системы $|\Phi(j\omega)| = M$. Рисунок 40.

С точки зрения влияния на устойчивость более опасен график 1, поскольку у него наличиствует резонансный пик. Чем выше резонансный пик, тем сильней колебания (больше склонность системы к колебаниям), тем меньше устойчивость системы. Оценка высоты резонансного пика дает возможность оценить устойчивость системы.

$$M_k = \frac{M_{max}}{M_0}$$

Этот показатель можно оценить на основе передаточной функции разомкнутой системы.

При условии, что $M(0) = 1$.

$$M = |\Phi(j\omega)| = |\frac{W(j\omega}{1 + W(j\omega)}|$$

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega)$$

$$(u + c)^2 + v^2 = R^2$$

$$c = \frac{M^2}{M^2 - 1}$$

$$R = \frac{M}{M^2 - 1}$$

Это уравнение окружности, причем радиус и центер этой окружности зависят от M, величины, которую мы хотим оценить.

Рисунок 41.

По этому графику легко определить максимальное значение модуля на пересечении годографа и заготовки. Считается допустимым, когда показатель коллебательности лежит в диапозоне 1,1 . . . 1,5.

Этот критерий применяется в задачах проектирования системы, удовлетворяющей условиям. Те рисуется окружность интерисующего радиуса и стараются спроектировать систему, чтобы годограф не заходил внутрь этой окружности.

10.1 Интегральные оценки качества

Это такие оценки, которые позволяют одним числом оценить несколько показателей качества переходного процесса.

Рисунок 42. Переходный процесс.

В первую очередь оцениваются длительность переходного процесса и текущую ошибку. Для того чтобы оценить их требуется найти площадь между установившимся значением и $x(t)$.

$$J_1 = \int_0^\infty (x(t) - x_{\text{уст}})^2 dt$$

Эта оценка не очень хороша, потому что большую часть вносит первая левая часть площади и стараясь ее уменьшить мы увеличим скорость нарастания сигнала и большому колебанию.

Поэтому применяют **улучшеную интегральную оценку**.

$$J_k = \int_0^\infty (x^2(t) + T^2 x'^2) dt$$

Здесь учитывается квадрат скорости нарастания, но с определенным поправочным коэффициентом с какой-то постояной T. Руководствуясь этой оценкой мы получим, что наши колебания будут стремиться к экспаненте.

11 Синтез САУ

Задача синтеза обеспечить требуемое качество процесса управления. Она представляет из себя 2 подхода:

1) Цель синтеза достигается за счет изменения параметров существующих устройств/звеньев.

2) Изменяется структурная схема САУ. Введение дополнительных устройств (корректирующие устройства). Существует 4 типа корректирующих устройств:

    1) последовательные,

    2) парралельные

        i. собственно паралелльные,

        ii. местная обратная связь (чаще всего),

    3) корректирующие устройства по внешнему воздействию,

    4) неединичная главная обратная связь.

11.1 Последовательные корректирующие устройства

Рисунок 43.

Последовательно подключается еще одно звено. Характеристики звена зависят от выбора инженера и поставленной задачи. Наиболее часто используются:

– Пропорциональное.

$$W_k(p) = k$$
$$A(\omega) = A_0(\omega)k$$
$$\phi(\omega) = \phi_0(\omega)$$

– Интегрирующее звено. $W_k(p) = \frac{k}{p}$. Снижается быстродействие, ухудшается устойчивость, управление становится из пропорционального интегральным.

11.1.1 Паралелльное корректирующее устройство

Рисунок 44.

Распространенный пример — введение производной от ошибки.

$$W_k(p) = Tp$$
$$W(p) = W_0(p)(1 + W_k(p)) = W_0(p)(1 + Tp)$$
$$A(\omega) = A_0(\omega)\sqrt{1 + T^2\omega^2}$$
$$\phi(\omega) = \phi_0(\omega) + \arctan T\omega$$

В данном случае при подании сигнала низкой частоты амплитуда изменится незначительно, а если высокой частоты, то амплитуда резко возрастает. Это **поднятие высоких частот**. Таким образом это **повышает быстродействие переходных процессов**. Появляется дополнительный положительный сдвиг фаз.

11.1.2 Местная обратная связь

Как известно обратная связь бывает положительной (добавление ко входному сигналу) и отрицательной (вычитаение из входного сигнала выходного).

Также связь бывает гибкая (действует во время переходного процесса) и жесткая (постоянно действующая в одной и той же пропорции ошибка, существует постоянный коэффициент пропорциональности).

Положительная жесткая обратная связь Рисунок 45.

Допустим основное звено у нас апереодическое первого порядка, а корректирующим пропорциональное.

$$W_0(p) = \frac{k}{Tp+1}$$
$$W_k(p) = k_k$$
$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 - W_0(p)W_k(p)} = \frac{k_1}{T_1p+1}$$
$$k_1 = \frac{k}{1-kk_k}$$
$$T_1 = \frac{T}{1-kk_k}$$

Таким образом увеличился коэффициент усиления, что хорошо. Но увеличилась постоянная времени, что плохо, тк увеличивается время переходного процесса.

Отрицательная жесткая обратная связь Рисунок 46.

Таким образом получим.

$$W_0(p) = \frac{k}{Tp+1}$$
$$W_k(p) = k_k$$
$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_k(p)} = \frac{k_1}{T_1p+1}$$
$$k_1 = \frac{k}{1+kk_k}$$
$$T_1 = \frac{T}{1+kk_k}$$

Уменьшилась постоянная времени звена, что уменьшит время переходного процесса, а значит улучшит качество САУ. Также уменьшился коэффициент усиления, но его можно подкорректировать, как расказано ранее.

Допустим у нас $W_0(p) = \frac{k}{p}$ — интегрирующее звено, тогда

$$k_1 = \frac{1}{k_k}$$
$$T_1 = \frac{1}{kk_k}$$

Охватив интегратор обратной связью мы получаем апереодическое звено, те не только улучшаем характеристики САУ, но и качественно меняем управление.

11.1.3 Отрицательная гибкая обратная связь

Для гибкой обратной связи необходимо использовать дифференцирующее звено. Пусть основное звено у нас колебательное.

$$W_0(p) = \frac{k}{p}$$
$$W_0(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi Tp + 1}$$
$$W_k(p) = k_k p$$
$$W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2\xi_1 Tp + 1}$$
$$\xi_1 = \xi + \frac{kk_k}{2T}$$

11.2 Корректирующее устройсвто по внешнему воздействию

Как известно основной принцип управляющего устройства ... по величине ошибки. Однако возможно формирование управляющего воздействия непосредственно из самого входного воздействия. В этом случае в САУ получается 2 контура управления: замкнутый (по ошибке) и разомкнутый. Такое управление называют комбинированным. При таком подходе можно свести величину установившейся ошибки в системе к 0 при любой форме внешнего воздействия. Другими словами система инвариантна к внешнему воздействию.

Возможны 2 ситуации.

11.2.1 Корректирующее устройство по задающему воздействию

Рисунок 47.

Найдем передаточную функцию замкнутой системы и передаточную функцию замкнутой системы по ошибке.

$$\Phi(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)}(1 + W_k(p)) = \frac{X(p)}{G(p)}$$
$$\Phi_\epsilon(p) = \frac{\epsilon(p)}{G(p)} = 1 - \Phi(p) = \frac{1 - W_k(p)W_0(p)}{1 + W_0(p)}$$

В данном случае ни устойчивость ни качесвто переходного процесса не меняются. Необходимо определить условие при котором установившаяся ошибка будет равна 0. Те передаточная функция замкнутой системы должна быть равна 0. Отсюда получаем $W_k(p) = \frac{1}{W_0(p)}$. Это условие полной инвариантности. В общем случае $W_k(p) = a_0 + \tau_1 p + \tau_2^2 p^2 + \ldots$. Таким образом полная инвариантность невозможна или труднодостижима из за бесконечности полученого ряда. Поэтому часто используют частичную инвариантность, например отбрасывают производные высоких порядков предположив, что они равны 0. Также можно исследовать частотный диапозон и выбирать степень производных в зависимости от частоты, добиваясь наибольшего провдоподобия.

11.2.2 Корректирующее устройство по возмущающему воздействию

Рисунок 48.

Имеется система, на которую кроме полезного сигнала имеется вредное воздействие. Мы хотим «укротить его», добавив корректирующее звено.

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{F(p)} = \frac{(W_3 - W_k W_1)W_2}{1 + W_1 W_2}$$

$$W_k(p) = \frac{W_3(p)}{W_1(p)}$$

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Если степень числителя меньше знаменателя, то возможно достижение полной инвариантности и наоборот.

11.2.3 Нееденичная главная обратная связь

Структурная схема показана на рисунке 49.

$$\Phi(p) = \frac{X(p)}{G(p)} = \frac{W_0(p)}{1 + W_0(p)W_k(p)}$$

$$W_k(p) = 1 - \frac{1}{W_0(p)} = a_0 - (\tau_1 p + \tau_2^2 p + \ldots)$$

В такой системе должна быть введена положительная обратная связь по производной. Полная инвариантность не достижима в следствии наличия производных высоких порядков. При таком способе коррекции изменяется характеристическое уравнение (знаменатель передаточной функции). В общем случаи система увеличивает коллебательность и попадает на границу устойчивости.

11.2.4 Примеры синтеза САУ

Синтез последовательного корректирующего устройства Алгоритм:

1) Строятся логарифмические характеристики исходной системы.
2) На основе показателей качества строится желаемая ЛАЧХ.
3) Находим разность ЛАЧХ и получаем характеристику корректирующего звена.
4) Выполняется апроксимация и находится передаточная функция корректирующего звена.

Рисунок 50.

Нет фазовой характеристики!!! Предположим ее такой, чтобы мы могли строить новую ЛАЧХ по качеству. Пусть наше САУ неустойчиво. И с точки зрения качества желательно, чтобы наклон характеристики в области частоты среза равнялся $-20\frac{dB}{dek}$.

Рисуем желаемую ЛАЧХ. Рисунок 50. Дорисовываем наклонную, так, чтобы на частоте среза ЛАЧХ пересекала ось под углом $-40\frac{dB}{dek}$.

Находим разницу между результатами. Находим передаточную функцию по графику:

$$W_k(p) = \frac{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}$$

Синтез паралелльного корректирующего устройства

$$W(p) = \frac{W_0(p)}{1 + W_k(p)W_0(p)}$$

Предположим, что первое слогаемое в знаменателе много меньше второго и отбросим 1.

$$W(p) = \frac{1}{W_k(p)}$$

$$L_k(\omega) + L_0(\omega) >> 0$$

Такимо образом второе условие сильно зависит от частоты, поэтому упрощение возможно только в пределах определенной частоты.

1) Строим логарифмические характеристики исходной системы.
2) На основе заданный критериев качества строим ЛЧХ требуемой системы.
3) Определяем интервал частот для который выполняются условия.
4) Определяем логарифмическую характеристику корректирующего устройства.
5) Аппроксимируем характеристику и находим передаточную функцию корректирующего звена.

$$W_k(p) = \frac{kp^2}{T_3p + 1}$$

12 Разработка системы автоматическогои процессов управления

Самостоятельно по методичке!!!!

Сельсинная пара состоит из 2х моторчиков, вырабатывающее напряжение из за разности углов двух осей.

13 Случайные процессы в САУ

13.1 Случайные процессы в САУ

Выше предпологалось, что на вход САУ поступают детерминированные воздействия, однако во многих случаях воздействия носят случайных характер. При оценке таких воздействий можно оперировать только вероятностными характеристиками.

Характеристики случайных величин

– Случайный процесс — изменение случайной величины во времени.
– Величины бывают непрерывные и дискретные.
– Вероятность — это предельное значение частоты появления события.
– Плотность вероятности — это вероятность попадания значения в определенный диапозон.
– Математическое ожидание — среднее значение случайной величины, с учетом вероятности появления значений.
– Дисперсия — разброс значений сл. величины от мат. ожидания.

– Корреляционная функция — степень связаности.

Законы распределения: равномерное, нормальное (закон распространения нормально-распределенной СВ при прохождении через САУ не меняется).

Случайные процессы делятся на стационарные и эргодические.

$$S(\omega) = \int_{\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$R(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} S(\omega e^{j\omega\tau} d\tau$$

Где $R(\tau)$ — корреляционная функция, где τ — расстояние между отчетами. Корреляционная функция от 0 равняется дисперсии. Если рорелляционная функция длинная, то значит зависимость между элементами сильна и график функции меняет свое значение медленно/плавно.

Рисунок 53.

13.2 Прохождение случанйого сигнала через линейную непрерывную систему

Рисунок 54.

Имеется система управления, на вход подается случайный сигнал. **Общая задача**: нахождение распределения на выходе, зная распределение на входе. **Частная задача**:найти мат.ожидание, дисперсию, корреляционной функции на выходе, зная мат.ожидание, дисперсию, корреляционной функции на входе.

Частную задачу решают двумя способами:во временной области и в частотной области(области изображения).

Для нахождения мат.ожидания можно воспользоваться формулой свертки:

$$x_2(t) = \int_0^t w(\tau) x_1(t-\tau) d\tau$$

Это формула для общего случая, но подходит и для мат. ожидания.

$$\overline{x_2}(t) = \int_0^t w(\tau) \overline{x_1}(t-\tau) d\tau$$

Для получения дисперсии необходимо найти корреляционную функцию:

$$R_2(t, t_1) = \int_0^t w(\eta) d\eta \int_0^{t_1} w(\lambda) R_1(t-\eta, t_1-\lambda) d\lambda$$

Если процесс стационарный, то нам не важно когда брать первый отчет и интеграл значительно упрощается:

$$R_2(\tau) = R_1(\tau - \eta + \lambda)$$

Зная корреляционную функцию найдем дисперсию, как $R_2(0) = D_2$

14 Особые САУ

14.1 Системы с переменными параметрами

14.1.1 Основные понятия

Это такие системы, которые описываются линейными диффурами с переменными во времени коэффициентами.

$$a_0(t)\frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + a_{n-1}(t)\frac{dx}{dt} + a_n(t)x(t) =$$
$$= b_0(t)\frac{d^m f}{dt^m} + \ldots + b_{m-1}\frac{df}{dt} + b_m(t)f(t)$$

Задание коэффициентов происходит аналитически, либо экспериментально в виде таблицы или графика и т.д. Такая система с переменными параметрами получается, если в составе имеется хотя бы одно переменное звено. Например, при движении летательного аппарата должно учитываться изменение массы(сгорает топливо).

Перейдем к описанию переходной характеристики и весовой функции. Это реакции на эталонный сигнал, значит вид функции будет зависить от времени начала сигнала и времени работы сигнала. Рисунок 60. Здесь множество параметров:

- t — текущее время, время начала слежения.
- ν — время подачи входного сигнала.
- τ — время с момента подачи входного сигнала.

Таким образом функции зависят от 2х параметров τ, u или $t - \nu, \nu$. Графики функций в этом случае рисуются в 3хмерном пространстве. Рисунок 61.

Есть какая-то область сечения $u = const$, тогда получаем срез весовой функции, называемый **нормальная весовая функция**. Если зафиксировать $t = const$, то мы варьируем время подачи сигнала и смотрим на изменение функции. Это **сопряженная функция**. Для нее рассматривают **реверс-смещение** $\Theta = t - \nu, \omega(\Theta, t - \Theta)$. Для систем с переменными параметрами связь между входом и выходом идет через сопряженную весовую функцию. Используя реверс-смещение можно получить интеграл свертки:

$$x(t) \int_0^t \omega(\Theta, t - \Theta) f(t - \Theta) d\Theta$$

14.1.2 Построение функции веса и нахождение переходных процессов

Существуют различные методы нахождения весовой функции. В общем случае задача является сложной и при расчета на ЭВМ применяют численные методы. Однако существуют несколько частных случаев, которые мы и рассмотрим.

Система описывается диффуром 1го порядка

$$\frac{dx}{dt} + P(x)x(t) = Q(t)$$

Решение этого диффура можно найти в следующем виде:

$$x(t) = e^{-S(t)}[\int Q(t)e^{S(t)}dt + C], S(t) = \int P(t)dt$$

Пример:

$$t\frac{dx}{dt} + a_1x(t) = f(t)$$

Найдем переходную характеристику, те $f(t) = 1(t-u)$.

$$P(x) = \frac{a_q}{t}$$
$$Q(t) = \frac{1(t-\nu)}{t}$$
$$S(t) = a_1 \ln t$$
$$e^{S(t)} = t^{a_1}$$
$$e^{-S(t)} = t^{-a_1}$$
$$A = \frac{t^{a_1}}{a_1}$$
$$h(t-\nu,\nu)\frac{1}{a_1} + \frac{c}{t^{a_1}}$$

Постоянную C находят из начальных условий, пологая $h(0,\nu) = 0$

Система описывается диффуром 2го порядка

Метод последовательных приближений Рассмотрим исходное диффуравнение. будем считать, что САУ является квазистационарной, те похожей на систему с постоянными параметрами(коэффициенты уравнения a_i и b_i меняются медленно). В этом случае коэффициенты могут быть представленны как:

$$a_i = a_i(t) = a_i^0 + a_i^* = a_i(\nu) + a_i^*(t-\nu)$$

Таким образом коэффициент состоит из постоянной части и переменной. За постоянную обычно берется значение в момент времени ν.

Тогда уравнение можно переписать как сумму постоянной и переменной части:

$$a_0^0\frac{d^nx}{dt^n} + \ldots + a_n^0x(t) = f_0(t) - y(t)$$
$$f_0(t) = b_0\frac{d^mf}{dt^m} + \ldots + b_m^0f(t)$$
$$y(t) = a_0^*\frac{d^nx}{dt^n} + \ldots + a_n^*x(t)$$

Поскольку изменение коэффициентов очень моло можно считать, что слогаемое $y(t)$ много меньше, чем левая часть и его можно рассматривать, как возмущение.

Выходной сигнал ищется в виде ряда $x(t) = x_1 + x_2 + \ldots$.

Для нахождения x_1 уравнения решается для постоянных коэффициентов, те $y(t)$. Воспользовавшись известными методами(преобразование Лапласса) легко найти выходной сигнал в этом случае.

Следующий шаг: в правую часть уравнения подставляется x_1, а в левую $-x = x_1 + x_2$ и так далее. Получаем ряд, на каком то шаге мы получаем очень маленькие коэффициенты и считается, что решение можно прекратить. Чем медленнее меняются коэффициенты, тем быстрее сойдется ряд.

Численно-графический метод Башкирова Основная формула:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t + \frac{\Delta t}{2} - x(t)}{T(t + \frac{\Delta t}{2}) + \frac{\Delta t}{2}}$$

Для случая:

$$T(t)\frac{dx}{dt} + x(t) = f(t)$$

Мы разбиваем все время на интервалы Δt и считаем значения функции для значения коэффициентов на интервалах(например середина интервала). Зная коэффициент порпорциональности можно восстановить функцию.

14.1.3 Передаточные функции САУ для систем с переменными параметрами

Для получения предаточной функции можно воспользоваться выражениями:

$$x(t) = \int_0^t w(t-\nu, \nu) f(\nu) d\nu$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\infty} W(j\omega, t) F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$W(j\omega, t) = \int_{\infty}^{\infty} w(\nu, t-\nu) e^{-j\omega(t-\nu)} d\nu$$
$$X(j\omega, t) = W(j\omega, t) F(j\omega)$$

Такая передаточная функция называется **Параметрическая частотная передаточная функция САУ с переменными параметрами**. Использовать эти выражения для нахождения передаточной функции САУ неудобно и нерационально, потому что необходимо знать весовую функцию. Чаще используется метод нахождения параметрической частотной передаточной функции через **диффуравнение**.

Совтавим диффур для случая весовой функции:

$$[a_0(t)\frac{d^n}{dt^n} + \ldots + a_n(t)] w(t-\nu, \nu) = [b_0(t)\frac{d^m}{dt^m} + \ldots + b_m(t)]\delta(t-\nu)$$

Домножим на $e^{p\nu}$, а $\nu \to -\infty \ldots t$.

$$A(p,t)W(p,t) + \frac{dA}{dp}\frac{dW}{dt} + \ldots + \frac{1}{n!}\frac{d^n A}{dp^n}\frac{d^n W}{dt^n} = B(p,t)$$
$$A(p,t) = a_0(t)p^n + \ldots + a_n(t)$$
$$B(p,t) = b_0(t)p^m + \ldots + b_m(t)$$

Найти решение данного можно методом последовательных приближений. Если нужно найти частотную передаточную функцию, то вместо p ставится $j\omega$.

14.1.4 Использование параметрической передаточной функции

Используется для нахождения выходного сигнала. С ее помощью можно находить переходный процесс. Точно так же можно применять в методе Солодовникова,но

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{P(\omega t)\sin\omega t}{\omega}d\omega$$

Отличие при использовании данного метода в том, что найденный выходной сигнал справедлив только для одного момента времени $t = const$. Таким образом необходимо выполнить гораздо больший объем вычислений. Рисунок 62.

14.1.5 Устойчивость и качество регулирования

Для определения устойчивости существует специфика. Так как система исследуется в пределах ограниченного интервала времени, то отсутствует понятие асимптотической устойчивости.

Рассмотрим квазистационарную систему, те коэффициенты меняются. **Определение**: будет считат систему с переменными параметрами устойчивой в заданном интервале времени T, если ее нормальная функция веса затухает во времени для всех фиксированных значений ν, лежащих внутри этого интервала.

$$I_t = \int_\nu^\infty |w(t-\nu,\nu)|dt = \int_0^\infty |w(\tau,\nu)|d\tau < \infty$$

$$0 < \nu < T$$

Аналогичное условие можно задать на основе сопряженной функции веса, причем выполнение одного условия не гарантирует выполнение другого.

Как известно весовая функция связана с передаточной и устойчивость можно оценивать с помощью параметрической передаточной функции. Все методы выше рассмотренные справедливы и для этого случая. Можно воспользоваться уже исследованными критериями устойчивости.

Качество регулирования можно также определить по виду переходного процесса. На основе нормальной весовой функции или нормальной переходной характеристики.

14.1.6 Синтез САУ с переменными параметрами

В связи с сложностью математического описания и вычисления синтез таких систем производится либо численными методами с использованием ЭВМ или моделированием в реальных условиях.

Численные методы При использовании ЭВМ исследуются наиболее важные режимы работы, особые ситуации и т.д.

Существуют и упращенные аналитические методы:

Метод замороженных коэффициентов Система заменяется системой с постоянными параметрами, фиксируются параметры(например в момент подачи сигнала). Более сложный вариант — значения фиксируются в нескольких точках. Таким образом производится синтез нескольких систем с постоянными параметрами. Огромное значение имеет выбор точек для заморозки. В частном случае требуется исследовать «опасные точки»(например момент до смены знака, нулевой моменты и после смены знака коэффициента).

Метод замароженных реакций Обычно в системе переменные параметры имеет одно звено. Как правило это объект управления. Синтез упростится, если это звено исследовать отдельно, а затем заменить эквивалентным звеном с постоянными параметрами. Замена также производится в какой-то точке, так же как и в прошлый раз наиболее простой вариант зафиксировать коэффициенты в момент подачи сигнала.

Рассмотрим метод подробнее. Рисунок 63. Система разбивается на 2 части: с постоянными и переменными параметрами. Для системы с постоянными параметрами можно вычислить весовую функцию $w_1(\tau)$ и найти передаточную функцию $W(p) = \int_0^\infty w(\tau)e^{-\tau p}d\tau$.

Для звена с переменными параметрами существует параметрическая весовая функция:

$$w_2(t-\nu,\nu) = w_2(\tau,\nu)$$

Находится она с помощью диффура(решается диффур 1го или 2го порядка, либо приблеженном).

Далее фиксируется момент времени $t = \nu_0$ и получаем $w_2(t-\nu,\nu_0) = w_2(\tau,\nu_0)$. Известными методами находим передаточную функцию $W_2(p,\nu_0) = W_2(p)$. Дальше передаточная функция разомкнутой системы равна $W(p) = W_1(p)W_2(p)$. Теперь применяются обычные методы синтеза.

Отличие в том, что необходимо задать несколько точек фиксации ν_0 и получить несколько передаточных функций $W_2(p)$, просчитав поведение для каждого случая.

Этот метод считается точнее предыдущего, тк позволяет оценить характер изменения параметров.

14.2 Нелинейные САУ

Это такие САУ, в которых есть хотя бы одно звено, описываемое нелинейным диффуром. Существуют следующие виды нелинейных звеньев:

- релейного типа,
- звено с кусочно-линейной характеристикой,
- звено с нелинейной характеристикой любого очертания,
- звено, описываемое произведением переменных,
- нелинейное звено с запаздываением,
- логическое звено,
- и т.д.

14.2.1 Общий метод составления или описания нелинейных САУ

В общем случае синтез линейных сау оооооочень сложный процесс. Поэтому применяются методы упрощения.

Сначала производится линеаризация, в результате чего получаются звенья линейные и существенно-нелинейные. Таким образом получается большое количество диффуров линейных и малое количество нелинейных.

Процессы, проходящие в САУ имеют существенные особенности. Выделяется в поведении САУ значительно большее количество состояний:

- устойчивое равновесное состояние с постоянным значением регулируемой выходной величины,
- область неустойчивости,
- устойчивые автоколлебания(на выход подается сигнал, хотя на вход ничего не подается),
- более сложные случаи.

Само понятие устойчивости имеет разные градации. Например, вводятся такие понятия, как «в малом» и «в большом». Тут идет речь о влиянии начальных условий на поведение системы. Рисунок 64.

Для описания нелинейных САУ часто используется такой метод, как фазовое пространство.

Фазовое пространство Диффур n-го порядка для замкнутой системы можно представить в виде n уравнений 1-го порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, g)\frac{dx_2}{dt} = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, g)\ldots\frac{dx_n}{dt} = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, f, g)x_{10}, x_{20}, \ldots, x_30 -$$

Если количество переменным меньше 3х, то можно изменение переменных можно представить графически. Рисунок 70. Получаем фазовую траекторию.

Пример Рассмотрим построение фазовой траектории для обыкновенной линейной САУ. Пусть имеется диффур:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_2 * x(t) = 0$$
$$y = \frac{dx}{dt}$$

Введем понятие скорости и получим:

$$\begin{aligned} \tfrac{dy}{dt} &= -a_1y - a_2x \\ \tfrac{dx}{dt} &= y \end{aligned}$$

Исключим уз уравнения время:

$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2\frac{x}{y}$$

Получим уравнение $y = \phi(x)$. У этого уравнения 2 решения:

$$p_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}$$

- Рассмотрим случай мнимых корней. Тогда получим формулу эллипса. Рисунок 71. Коллебания не затухают.
- Следующий случай — вещественные корни с отрицательной вещественной частью. Рисунок 72. Коллебания затухают где-то в бесконечности.
- Вещественные корни с положительной вещественной частью. Рисунок 73. Незатухающие коллебания.
- Отричцательные вещественные корни. Рисунок 74. Затухающие коллебания.
- Положительные вещественные корни. Рисунок 75. Незатухающие коллебания.
- Вещественные корни разных знаков. Рисунок 76. Незатухающие коллебания.

Фазовые траектории — это качественная характеристика. По ней можно оценить устойчивость САУ. Если система диффуров составленна для отклонений выходной величины от установившегося значения, то для устойчивой САУ фазовая кривая будет стремиться в начало координат.

Из этих соображений было выведено **понятие устойчивости по Ляпунову**. Невозмущенное движение(установившийся процесс) называется устойчивым, если при заданной сколь угодно малой области ϵ можно найти такую область η, что при начальных условиях, расположенных внутри этой области, переходный процесс будет таким, что изображающая точка не выйдет из области ϵ при любом, сколь угодно большом, значении времени t.

14.3 Гармоническая линеаризация

Это метод приближенного решения для определения автоколебаний и устойчивости нелинейной САУ любого порядка.

$$y = F(x, px)$$
$$x = a \sin \xi$$
$$\xi = \omega t$$
$$px = a\omega \cos \xi$$

Разложим функцию в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\xi, a\omega\cos\xi)d\xi + [\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\ldots)\sin\xi d\xi]\sin\xi + [\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\ldots)\cos\xi d\xi]\cos\xi + \text{Высшие гармо}$$

Положим, что первый член ряда равен 0(те в разложении отсутствует постоянная составляющая). Преобразуем оставшееся выражение использовав замену cos и sin на x и px.

$$y = q(a,\omega)x + \frac{q'(a,\omega)}{\omega}px + \text{ВГ}$$
$$q = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(\ldots)\sin\xi d\xi$$
$$q' = \frac{1}{\pi a}\int_0^{2\pi} F(\ldots)\cos\xi d\xi$$

Основная идея в замене a и ω в некоторых диапозонах на постоянные. Таким образом кривая функции F заменяем на множество прямых(ломаную), получив линейную функцию.

14.4 Алгоритмические методы определения автоколлебаний и устойчивости в нелинейных САУ

Найдем гармонически линеаризированное уравнение для замкнутой САУ в целом. В этом случае САу разбивается на 2 части: линейную и нелинейную. Пусть известен диффур линейной части $Q(p)x_1 = -R(p)x_2$. Нелинейное звено представляет собой нелинейную функцию $x_2 = F(x_1, px_1)$. После гармонической линеаризации получаем $x_2 = [q(a,\omega) + \frac{q'(a,\omega)}{\omega}p]x_1$. Высшие гармоники можно исключить из уравнения, потому что замкнутая система, как правило, представляет собой фильтр высших гармоник.

Объеденим уравнения и получим $Q(p) + R(p)(q + \frac{q'}{\omega}p) = 0$. Если в системе имеются **автоколебания**, то $a = a_\Pi = const$ и $\omega = \omega_\Pi = const$ и $q, q' = const$. В этом случае получается обычное диффуравнение с постоянными коэфициентами, которое можно легко исследовать, воспользовавшись хорошо известными критериями устойчивости линейных САУ.

15 Цифровые САУ

Цифровые САУ предназначены для обработки цифровых сигналов. Типовая структурная схема устройства цифровой обработки показана на рисунке 100. Где **ФНЧ** — фильтр низких частот. Пример 101. Фильтр низких частот сглаживает ступеньк, так как после преобразования цифрового сигнала в аналоговый он останется ступенчатый.

При выборе количества уроней существует правило **чем больше, тем лучше**. Но опытным путем доказано, что в аналоговых сигналах присутствует огромное количество шумов. При этом при оцифровке эти шумы будут учитываться и стигнал будет сильно различаться, даже в близких разрядах. Поэтому редко делают АЦП более 10 разрядов(1024 уровня).

15.1 Спектр дискретного сигнала

Для представления спектра необходимо воспользоваться преобразованием Фурье. Это математический аппарат спектрального анализа непереодических сигналов (переодические сигналы также можно анализировать). Формула преобразования Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

где $\dot{S}(\omega)$ — спекртальная плотность сигнала. Можно найти модуль спектральной плотности — **Амплитудный спектр**, физический смысл мощность спектральной характеристики. Можно найти аргумент функции — арктангенс отношения мнимой и действительной части, это **фазовый сдвиг**. Предположим имеется сигнал:

$$S(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$$\dot{S}(\omega) = A\tau\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}$$

Рисунок 102. **Дуальность преобразования Фурье**: у прямоугольного сигнала синусоидальный спектр, а у синусоидального сигнала прямоугольный спектр. Представим дискретный сигнал в следующем виде:

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t-k)$$

Эта функция изображена на рисунке 103. Отсюда на основе преобразования Фурье получаем:

$$\dot{S}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\omega k}$$

$$\dot{S}_{\text{Д}}(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega - \frac{2\pi n}{T})$$

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_{\text{Д}}$$

Это **спектр дискретного сигнала**. Таким образом спектр дискретного сигнала будет представлять собой бесконечное количество копий спектра аналогового сигнала, сдвинутых на частоту дискретизации. Рисунок 104.