Def. 极大线性无关组

$\langle \alpha_1, \cdots, \alpha_s \rangle = \{k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_i \in K, i=1,\cdots,s\}$

当$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关时

1. 向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$的一个部分组称为这个向量组的一个极大线性无关组，如果满足：

(1) 这个部分组线性无关

(2) 从向量组的其余向量(如果有的话)中任取一个添进来，得到的新的部分组都线性相关

可以推导出 $\alpha_1, \cdots \alpha_m$ 每一个向量都可以由向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性表达

$\alpha_1, \cdots \alpha_s$ 每一个向量可用向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 线性表达

Def. 等价

两个向量组可互相表达，则两向量组等价

自反　　对称　　传递

rank = 极大线性无关组中的向量个数

Def

设 V 是有限维的，则把 V 的一个基所含向量的个数称为

V 的维数

命题1　设 $\dim V = n$　则 V 中任意 $n+1$ 个向量都线性相关

取 V 的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

则 V 中任一向量 $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$

且表达式唯一

命题2　$\dim V = n$　则 V 中任意 n 个线性无关向量都是 V 的基

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，任取 $\beta \in V$　由命题1，β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表示

$\therefore$ 是一个基

命题3　$\dim V = n$　若 V 中任意一个向量可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 表示，则

$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是一组基

设 $\beta_1, \cdots \beta_n$ 是一组基

$n = \text{rank}(\beta_1, \cdots, \beta_n) \le \text{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \le n$

极大线性无关组 $\Longleftrightarrow$ 基 （不考虑 0）

初等行变换不影响列向量的线性相关性

$s_1 \cdots$ 列向量 $\qquad\qquad$ $\delta_1 \cdots$ 列向量

$s_1x_1 + s_2x_2 + \cdots s_nx_n = 0 \longrightarrow \delta_1x_1 + \delta_2x_2 + \cdots + \delta_nx_n = 0$

有非零解 $\qquad\qquad$ 有非零解

同解

初等行变换不影响行向量组秩，不影响列秩

proof

$a_1 \cdots a_{j_1} \cdots a_{j_r} \cdots a_n \xrightarrow{\text{行变换}} b_1 \cdots b_{j_1} \cdots b_{j_r} \cdots b_n$

若 $a_{j_1} \cdots a_{j_r}$ 是基，则 $b_{j_1} \cdots b_{j_r}$ 线性无关

$a_i\, a_{j_1} \cdots a_{j_r}$ 线性相关 $\longrightarrow$ $b_i b_{j_1} \cdots b_{j_r}$ 线性相关

$\therefore$ $b_{j_1} \cdots b_{j_r}$ 是一组基

$\therefore$ 秩不变

有解 $\Leftrightarrow$ 增广矩阵的秩 = 系数矩阵的秩

求齐次方程组，将其消元

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{matrix}}^{r} & \overbrace{\begin{matrix} b_{r+1,1} & \cdots & b_{n,1} \\ b_{r+1,2} & \cdots & b_{n,2} \\ & \vdots & \\ b_{r+1,r} & \cdots & b_{n,r} \end{matrix}}^{n-r} \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 = b_{r+1,1}x_{r+1} + \cdots + b_{n,1} \cdot x_n$

$-x_2 = b_{r+1,2}x_{r+1} + \cdots + b_{n,2}x_n$

$\vdots$

$-x_r = b_{r+1,r}x_{r+1} + \cdots + b_{n,r}x_n$

x_1是 $b_{r+1,1}, \cdots b_{n,1}$ 的线性组合

$\vdots$

x_r是 $b_{r+1,r}, \cdots, b_{n,r}$ 的线性组合

令 $x_{r+1}=1$ $x_{r+2}=\cdots=x_n=0$ $\cdots$ 令 $x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_{n-1}=0$ $x_n=1$

$x_1 = -b_{r+1,1}$

$x_2 = -b_{r+1,2}$

$\vdots$

$x_r = -b_{r+1,r}$

$x_1 = -b_{n,1}$

$x_2 = -b_{n,2}$

$\vdots$

$x_r = -b_{n,r}$

若 $\gamma, \delta \in U$　　则 $\gamma - \delta \in W$

若 $\gamma \in U$ (解空间) $\eta \in W$ (零空间), 则 $\gamma + \eta \in U$

证: 解空间 = 特解 + 零空间

1. $\{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\} \subseteq U$

2. 任取 $\gamma \in U$

$\gamma - \gamma_0 \in W$

$\therefore \{\gamma_0 + \eta \mid \eta \in W\} \supseteq U$

$\therefore$ 解空间 = 特解 + 零空间

子空间的和是子空间，基是并集

$u_1 \in V'$　　$v_1 \in V''$

$k u_1 + k_2 v_1 \in V' + V''$

定理　子空间的维数公式

设 V_1, V_2 都是 V 的有限维空间

$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

proof,

$V_1 \cap V_2$ 中一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$

把它分别扩充成

V_1 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}$

V_2 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m}$

现证 $\langle \alpha_1 \cdots \alpha_m, \beta_1, \cdots, \beta_{n_1-m}, \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_2-m} \rangle$ 是 (V_1+V_2) 的基.

设 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \cdots + p_{n_1-m}\beta_{n_1-m} + \varepsilon_1\gamma_1 + \cdots + \varepsilon_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = 0$

$$\underbrace{q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}}_{V_2} = \underbrace{-k_1\alpha_1 - \cdots - k_m\alpha_m - p_1\beta_1 - \cdots - p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}}_{V_1}$$

$\therefore \in V_1 \cap V_2$

$\therefore q_1\gamma_1 + \cdots + q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m} = l_1\alpha_1 + \cdots + l_m\alpha_m$　　$\therefore$ 无关

直和

Def. 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间，若 $\forall \alpha \in V_1+V_2$，分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $(\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2)$ 是唯一的，则称 V_1、V_2 为直和

四者等价

(1) V_1+V_2 是直和

(2) V_1+V_2 中 0 的表法唯一 (即若 $\alpha_1+\alpha_2=0$，则 $\alpha_1=\alpha_2=0$)

(3) $V_1 \cap V_2 = 0$

(4) V_1 的一个基 S_1 与 V_2 的一个基 S_2 的并集 $S_1 \cup S_2$ 是 V_1+V_2 的一个基

(1) ⇒ (2) 显然

(2) ⇒ (3) 任取 $\alpha \in V_1 \cap V_2$

$$0=\underset{V_1}{\alpha}+\underset{V_2}{(-\alpha)}$$

$\therefore \alpha$ 只能为 0

$\therefore V_1 \cap V_2 = 0$

(2) ⇒ (4)

$$\overbrace{k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t}^{S_1}+\overbrace{l_1s_1+\cdots l_rs_r}^{S_r}=0$$

由(2) $k_1\gamma_1+\cdots+k_t\gamma_t=0$

$l_1s_1+\cdots l_rs_r=0$

$\therefore k_1=\cdots k_t=l_1\cdots l_r=0$

$\therefore$ 是一个基

(3) ⇒ (1) 任取 $\alpha \in V_1+V_2$ 反证法

若 $\alpha=\underset{V_1}{\alpha_1}+\underset{V_2}{\alpha_2}=\underset{V_1}{\beta_1}+\underset{V_2}{\beta_2}$

$$\underset{\in V_1}{\alpha_1-\beta_1}=\underset{\in V_2}{\beta_2-\alpha_2}$$ 故属交集

$\therefore \alpha_1-\beta_1=\beta_2-\alpha_2=0$

Def.

若 $V=V_1\oplus V_2$，(即 $\begin{cases} V=V_1+V_2 \\ V_1+V_2\text{是直和} \end{cases}$)

则称 V_1是V_2的一个补空间

$V_1 \quad V_2$

命题，设 $\dim V=n$，则 V的每一个子空间U都在V有一个补空间

证：U中取一个基 $\alpha_1,\cdots\alpha_m$

把它扩充为V的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\ \beta_1,\cdots\beta_n$

$$V=\langle\alpha_1\cdots\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n\rangle$$

$$=\langle\alpha_1\cdots\alpha_m\rangle+\underbrace{\langle\beta_1\cdots,\beta_n\rangle}_{W\text{的一个基}}$$

线性空间的同构

Def. 设V和V'都是数域K上的线性空间，如果V到V'有一个双射

σ，并且

$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ $\quad \forall \alpha,\beta\in V$

$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$

那么称σ是V到V'的一个同构映射 $\quad$ 记 $V\cong V'$

性质1. $\sigma(0)=0'$ $\quad$ $0'$是V'的零向量

$\Uparrow$

$\sigma(0\,0)=0\,\sigma(0)$

2. $\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$

3. $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma\alpha_1+\cdots k_s\sigma\alpha_s$

4. V中$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性相关 $\Rightarrow V'$中 $\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_s)$线性相关

$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0 \Leftrightarrow \sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=0' \Leftrightarrow k_1\sigma\alpha_1+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=0'$

5. $\alpha_1\cdots\alpha_n$是V的一个基 $\Rightarrow$ $\sigma(\alpha_1)\cdots\sigma(\alpha_n)$是$V'$的一个基

$\dim V=\dim V'$

$\dim V = \dim V' \Longrightarrow$ V与V'同构

设 $\dim V = \dim V' = n$

令 $\sigma: V \to V'$

$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$

$\because$ V中向量表法唯一，$\therefore$ σ是映射

$\sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i \longrightarrow \gamma = \sum_{i=1}^{n} c_i\gamma_i$

$\therefore$ 是满射

$\beta = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} b_i\gamma_i$

$\sigma(\alpha+\beta) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\gamma_i\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\gamma_i$

$b_i \neq a_i$ $\therefore$ 是单射

$= \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i + \sum_{i=1}^{n} b_i\gamma_i$

易得 σ是同态映射

$\therefore$ 同构

推论：一个点在原来基下坐标，与映射后的该点在映射后的基下坐标相同

$f: \quad (S \to T)$

若 $\exists g \quad (T \to S)$

$g \circ f = Id_S \Rightarrow$ f是单射

$f \circ g = Id_T \Rightarrow$ f是满射

f 可逆 $\Leftrightarrow$ f是双射

商集

集合的划分

Def. 如果集合S是它的一些非空子集的并集，其中每两个不相等的子集交集为ϕ，那么称这些子集组成的集合称为S的一个划分

Def. 设S是一个非空集合，$S\times S$的一个子集W称为S上的一个二元关系

若$(a,b)\in W$，则称a与b有W关系，记作$a\overset{W}{\sim}b$ 或 $a\sim b$

若$(a,b)\notin W$，则称a与b无W关系

Def. S上的一个二元关系$\sim$满足

1° $a\sim a$，$\forall a\in S$ （自反性）

2° 若$a\sim b$，则$b\sim a$ （对称性）

3° 若$a\sim b$ 且$b\sim c$ 则 $b\sim c$ （传递性）

则称$\sim$是S上的一个等价关系

Def. 设$\sim$是S上的一个等价关系，任给$a\in S$，令

$\overline{a}:=\{x\in S \mid x\sim a\}$

则称$\overline{a}$为a的等价类

$x\in\overline{a} \Leftrightarrow x\sim\overline{a}$　　称a为等价类的一个代表

证：两等价类交集为$\varnothing$

$\overline{a}=\overline{b} \Rightarrow a\sim b$ ∵显然

$a\sim b \Rightarrow \overline{a}=\overline{b}$

若任取 $c\in\overline{a}$

$\Downarrow$

$c\sim a$

$\Downarrow$ 传递性

$c\sim b$

$\therefore c\in\overline{b}$

$\therefore \overline{a}\subseteq\overline{b}$

同理 $\overline{a}\supseteq\overline{b}$

$\therefore \overline{a}=\overline{b}$

得证

所有等价类的集是 S 的一个划分

~~Proof~~.

考虑 $\bigcup_{a\in S}\bar{a} := \{x\in S \mid 存在 c\in S, 使得 x\in\bar{c}\} \subseteq S$

任取 $b\in S$，由于 $b\sim b$ $\therefore S\subseteq\bigcup_{a\in S}\bar{a}$

因此 $S=\bigcup_{a\in S}\bar{a}$

以及由上一页的性质　　保证

所有集合的划分都可看作等价类

$\beta \sim \alpha :\Leftrightarrow \beta - \alpha \in W$ W是V的子空间

1° 对称性 ✓

2° 自反性 ✓

3° 传递性 ✓

$\therefore \sim$是V上的一个等价关系

$\bar{\alpha} = \{\beta \in V \mid \beta \sim \alpha\}$

$= \{\beta \in V \mid \beta - \alpha \in W\}$

$= \{\beta \in V \mid \beta - \alpha = \eta, \eta \in W\}$

$= \{\alpha + \eta \mid \eta \in W\}$

$=: \alpha + W$

称为W的一个陪集 α为代表，不唯一

$V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$

是V的一个商集

$$(\alpha+W)+(\beta+W)=(\alpha+\beta)+W$$
$$\quad\| \qquad\quad \| \qquad\qquad \|$$
$$(\gamma+W)+(\delta+W)=(\gamma+\delta)+W$$

$$k(\alpha+W)=k\alpha+W$$

$\therefore$ 数乘与加法与代表选择无关

W是 V/W的零元

易验证 V/W成为数域K上的一个线性空间 称为商空间

定理1 设V是n维线性空间，W是V的一个子空间

则 $\dim V/W=\dim V-\dim W$

记W中一个基为 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 把它扩充成V的一个基 $\alpha_1\cdots\alpha_s\cdots\alpha_n$

任取一个 $\alpha+W\in V/W$

$$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$$

$$\alpha+W=(a_1\alpha_1+\cdots a_s\alpha_s+\cdots+a_n\alpha_n)+W$$

$$=a_1(\alpha_1+W)+\cdots a_n(\alpha_n+W)$$

$\because \alpha_1\cdots\alpha_s\in W \quad \therefore \alpha_1+W=W$

$=a_{s+1}(\alpha_{s+1}+W)+\cdots+a_n(\alpha_n+W)$ $\therefore$基是$(\alpha_{s+1}+W)\cdots(\alpha_n+W)$

补充： W是线性空间V的子空间，W'是W的补 即$V=W\oplus W'$

可在 W'，V/W之间规定映射η，$\forall a\in W'$ $\eta: a\to\bar{a}$

　证η是同构映射

η是满射，设 $\bar{\alpha}\in V/W$　$\alpha\in V=W\oplus W'$　$\alpha=\beta+\gamma$　$\beta\in W$　$\gamma\in W'$

$\alpha-\gamma=\beta\in W$　$\therefore\bar{\gamma}=\bar{\alpha}$　$\therefore\forall\bar{\alpha}\in V/W$　$\exists\gamma\in W'$ s.t. $\bar{\gamma}=\bar{\alpha}$

$\eta(\gamma)=\bar{\gamma}=\bar{a}$

η是单射　设$\gamma_1,\gamma_2\in W'$　$\eta(\gamma_1)=\eta(\gamma_2)$　则 $\bar{\gamma}_1=\bar{\gamma}_2$

$\therefore\gamma_1-\gamma_2\in W$　$\because\gamma_1,\gamma_2\in W'$　$\therefore\gamma_1-\gamma_2\in W'$

$\therefore\gamma_1-\gamma_2=0$

$\eta(\gamma_1+\gamma_2)=\overline{\gamma_1+\gamma_2}=\bar{\gamma}_1+\bar{\gamma}_2=\eta(\gamma_1)+\eta(\gamma_2)$

$\eta(\lambda\gamma)=\overline{\lambda\gamma}=\lambda\eta(\gamma)$

定理2　如果商空间的一个基为 $\beta_1+W, \cdots, \beta_t+W$

令 $U=\langle\beta_1, \cdots, \beta_t\rangle$

则 $V=W\oplus U$

任取 $\alpha\in V$，

$\alpha+W=(a_1\beta_1+\cdots+a_t\beta_t)+W$

$\therefore\ \alpha-\underbrace{(a_1\beta_1+\cdots+a_t\beta_t)}_{\beta\in U}\in W$

$\alpha-\beta=\eta\in W$

$\alpha=\eta+\beta\in W+U$

因此 $V\subseteq W+U$ 且 $V\supseteq W+U$

$\therefore\ V=W+U$

任取 $\gamma\in W\cap U$

$\gamma=l_1\beta_1+\cdots l_t\beta_t$

又 $\gamma\in W$ $(l_1\beta_1+\cdots l_t\beta_t)+W=W$

$W=\gamma+W=l_1(\beta_1+W)+\cdots+l_t(\beta_t+W)$

$\therefore\ l_1=\cdots l_t=0$

$\therefore\ V=W\oplus U$　　$\langle\beta_1,\cdots,\beta_t\rangle$ 是 U 的一个基

Binet-Cauchy 公式

$A=(a_{ij})_{s\times n}$ $B=(b_{ij})_{n\times s}$

i) $s>n$ $\det|AB|=0$

ii) $s\le n$ $\det|AB|=\sum\limits_{1\le v_1<\cdots<v_s} \det A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ v_1,v_2,\cdots v_s\end{pmatrix}\det B\begin{pmatrix}v_1,v_2,\cdots v_s\\ 1,2,\cdots s\end{pmatrix}$

构造：

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -AB \\ I_n & B \end{vmatrix}$$

由分块, Laplace,

$$=(-1)^{ns}|AB|$$

即 $|AB|=(-1)^{s+ns}\begin{vmatrix} A & 0 \\ I_n & B \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & O \\
\vdots & \vdots & & & \\
a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} & \\
1 & 0 & \cdots & 0 & \\
\vdots & & & & B \\
0 & 0 & \cdots & 1 &
\end{vmatrix}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} s \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$ $\underbrace{\qquad}_{s}$

由 Laplace，取前s行

即 $A\begin{pmatrix}1,2,\cdots s\\ v_1,v_2,\cdots v_s\end{pmatrix}$

取前n行与剩余

$$\begin{vmatrix} T & B \end{vmatrix}$$

提单位矩阵中一部分，故可变换

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
0\cdots & 0\cdots & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & 0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & B \\
0 & 1 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 1 &
\end{array}\right)$$

由 Laplace

注：我们选T中只选有1的行，而行中的1所对应的列恰好是A中未被选择的列，而B中应选T中没选的行，所以A中所选的列与B中所选行对应（下标一样）即可共用连加号

可得

$$\det|AB|=\sum_{1\le v_1<\cdots<v_s\le n} A\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ v_1,v_2,\cdots v_s\end{pmatrix}\cdot B\begin{pmatrix}v_1,v_2,\cdots v_s\\ 1,2,\cdots s\end{pmatrix}$$

推广：设 $A\in F^{p\times q}$，$B\in F^{q\times s}$，并记 $C=AB$，则矩阵 C 的 r 阶子式

$$C\begin{pmatrix} i_1, i_2 \cdots i_r \\ j_1, j_2 \cdots j_r \end{pmatrix} = \begin{cases} 0 & , r>q \\ \sum\limits_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le q} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ k_1 k_2 \cdots k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \cdots k_r \\ j_1 & j_2 \cdots j_r \end{pmatrix} & , r\le q \end{cases}$$

应用：证明 Cauchy 不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

proof. 取 $2\times n$ 实矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 & \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i \\ \sum\limits_{i=1}^n a_ib_i & \sum\limits_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}$$

$$\det AA^T = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$$

由 Binet-Cauchy 公式

$$\det AA^T = \sum_{1\le i<j\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{pmatrix} A^T\begin{pmatrix} i & j \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \sum_{1\le i<j\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i & j \end{pmatrix}^2 \geq 0$$

∴ ______

一元多项式

Def. 设K是一个数域，x是一个符号，形如下述的表达式

$a_nx^n+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_1x_1+a_0$ (1)

其中 $n\in\mathbb{N}$，$a_n,\cdots a_0\in K$，称它们为系数

如果满足："两个这种形式的表达式相等当仅仅当它们含有完全相同的项（除去系数为0的项外）"称这种表达式是数域K上的一个一元多项式，x称为不定元

系数全为0，称为0多项式

$K[x]:=\{$数域K上一元多项式$\}$

规定：加法 $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{m}b_ix^i:=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$

乘法 $\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right):=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_ib_jx^{i+j}$

$$=\sum_{s=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)x^s$$

从而有数量乘法 $k\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{n}(ka_i)x^i$

易证 对加法和数乘封闭 $\therefore$ 是个线性空间

$K[x]$是无限维的线性空间。

环 ring

集合R中有两个运算

1° $(a+b)+c=a+(b+c)$

2° $a+b=b+a$

3° R中有一元素，记作0

$0+a=a+0=a$

称为零元

4° 对于 $a\in R$ 存在 $b\in R$

s.t. $a+b=b+a=0$

称b是a的负元 记作$-a$

5° $(ab)c=a(bc)$

6° $a(b+c)=ab+ac$

$(b+c)a=ba+ca$

若R的乘法还满足交换律，

称为交换环

若R有元素e具有下列性质

$ea=ae=a$ $\forall a\in R$

称e为环R的单位元

若环R到环R'有一个双射

$\sigma(a+b) = \sigma(a)+\sigma(b) \quad \forall a,b \in R$

$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$

则称R与R'同构

若e是R的单位元 则 $\sigma(e)$是R'的单位元

证：任取R'的元素a'，由于σ是满射，因此存在$a \in R$，使得$a' = \sigma(a)$

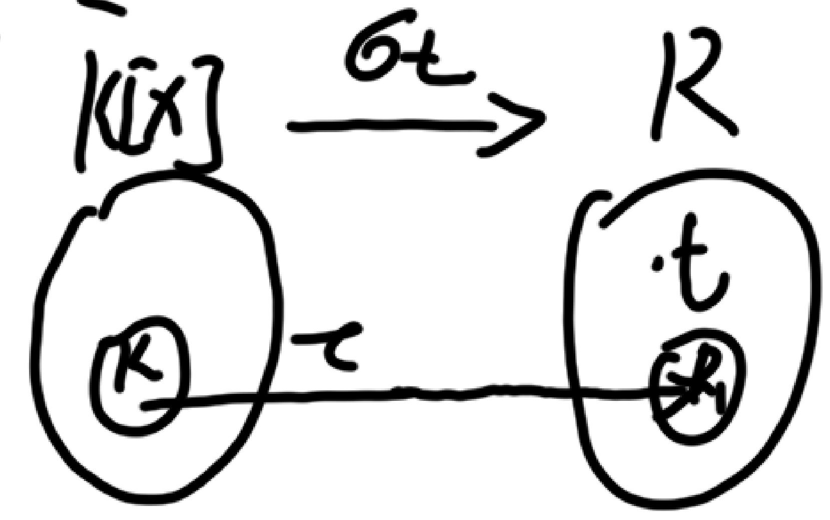
从而 $\sigma(e)a' = \sigma(e)\sigma(a) = \sigma(ea) = \sigma(a) = a'$

同理 $a'\sigma(e) = a'$

因此$\sigma(e)$是R'的单位元

定理 1. 一元多项式环的通用性质

设K是一个数域，R是一个有单位元$1'$的交换环，且K到R的一个子环R_1（含$1'$）有一个同构映射τ，任给 $t\in R$，令



$$\sigma_t:\ K[x] \longrightarrow R$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} \underset{\substack{\uparrow\\ R_1}}{\tau(a_i)}\ \underset{\substack{\uparrow\\ R}}{t^i} =: f(t)$$

则σ_t是$K[x]$到R的一个映射　$\sigma_t(x)=t$　且σ_t保持加法、乘法运算

即若　$f(x)+g(x)=h(x)$，　$f(x)g(x)=p(x)$

则　$f(t)+g(t)=h(t)$　　$\underline{\underline{f(t)g(t)=p(t)}}$　需用到交换环

称σ_t是x用t代入

Proof. 由于$f(x)$表法唯一　τ是K到R_1的映射

因此σ_t是$K[x]$到R的一个映射

$$\sigma_t(x)=\sigma_t(1x)=\tau(1)t=1't=t$$

易验证 σ_t保持加法、乘法运算

*：x是不定元，可代任何式子

环R的一个非空子集R_1是子环 $\Longleftrightarrow$ 从$a,b \in R_1$ 可推出 $a-b,\ ab \in R_1$

$\Rightarrow$: $-b \in R_1$

$a+(-b) \in R_1$

易

$\Leftarrow$: 有 $c \in R_1$

$0 = c-c \in R_1$

任给 $b \in R_1 \Rightarrow -b = 0-b \in R_1$

任给 $a,b \in R_1$

$\Downarrow$

$-b \in R_1$

$\Downarrow$

$a+b = a-(-b) \in R_1$, $ab \in R_1$

易验证 R_1 成为一个环.

Def 1. 设R是一个有单位元 $1(\neq 0)$ 的环，对于 $a\in R$，如果有 $b\in R$

使得 $ab=ba=1$

那么称 a 是可逆元，把 b 称为 a 的逆元，记作 a^{-1}

Def 2. 若F是有单位元 $1(\neq 0)$ 的交换环 并且每一个非零元都是可逆元，则称 F是一个域 (Field)

例 $\mathbb{Z}_4$ 不是域 $\because$ $\bar{2}\cdot\bar{2}=\bar{0}$ 且 $\bar{2}$ 非零元 无逆元

定理 1. 若p是素数，则 $\mathbb{Z}_p$ 是一个域

证：$\mathbb{Z}_p$ 是有单位元 $\bar{1}$ 的交换环

任取一个非零元 $\bar{a}$，其中 $0<a<p$

于是 $(a,p)=1$

存在 $u,v\in\mathbb{Z}$，使得 $up+va=1$

在 $\mathbb{Z}_p$ 中 $\bar{1}=\overline{up+va}=\overline{up}+\overline{va}=\bar{v}\bar{a}$

$\therefore$ $\bar{a}$ 是可逆元 从而 $\mathbb{Z}_p$ 是域

可证 若 m 是合数，则 $\mathbb{Z}_m$ 不是域

$\mathbb{Z}_p$ 中， $p\bar{1} := \underbrace{\bar{1}+\bar{1}+\cdots+\bar{1}}_{p个} = \bar{p} = \bar{0}$

$0<l<p$ 时 $l\bar{1} = \bar{l} \neq 0$

数域 K，$\forall n \in \mathbb{N}^*$ 有 $n1 = \underbrace{1+\cdots+1}_{n个} \neq 0$

任一域 F，单位元为 e

情形1 $\forall m \in \mathbb{N}^*$ 有 $ne \neq 0$

情形2 存在 $n \in \mathbb{N}^*$ 有 $ne = 0$

设 n 是使得 $ne=0$ 成立的最小素数

n 是素数

证明：

假如 n 不是素数

$n_i e \neq 0 \quad i=1,2$

$n = n_1 n_2$

$(n_1 e)(n_2 e)$

$= n_1 [e(n_2 e)]$

$= n_1 [n_2 (ee)]$

$= (n_1 n_2) e$

$= ne$

$= 0$

$(n_1 e)^{-1} [(n_1 e)(n_2 e)] = (n_1 e)^{-1} 0$

于是 $n_2 e = 0$

矛盾

线性映射

保持加法 数乘

定理1, 设V和V'都是域F上的一个线性空间,且 $\dim V=n$

V中取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

V'中任取n个向量 $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ (可以相同)

令 $\underline{A}: V \to V'$

$$\alpha=\sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i\gamma_i$$

是 $V \to V'$的线性映射 (易证)

$\mathrm{Hom}(V,V') := \{V$到$V'$线性变换$\}$

在 $\mathrm{Hom}(V,V')$中，

$(\underline{A}+\underline{B})\alpha := \underline{A}\alpha + \underline{B}\alpha \quad , \forall \alpha \in V$

任取$\alpha, \beta \in V$

$(\underline{A}+\underline{B})(\alpha+\beta) = \underline{A}(\alpha+\beta)+\underline{B}(\alpha+\beta)$

$= \underline{A}\alpha + \underline{A}\beta + \underline{B}\alpha + \underline{B}\beta$

$= (\underline{A}+\underline{B})\alpha + (\underline{A}+\underline{B})\beta$

类似 $(\underline{A}+\underline{B})k\alpha = k\underline{A}\alpha + k\underline{B}\alpha$

因此 $(\underline{A}+\underline{B})$是线性映射

规定数乘：

$(k\underline{A})\alpha := k(\underline{A}\alpha)$

类似验证，保持加法，数乘

零元是零映射 $\underline{O}(\alpha) = 0'$

$\underline{A}$的负元 $\quad (-\underline{A})\alpha = -\underline{A}\alpha$

$\therefore \mathrm{Hom}(V,V')$是一个线性空间

线性映射乘法满足结合律

$\mathrm{Hom}(V,V)$是环

线性映射的核

Def. 设 $\underline{A}$ 是域 F 上线性空间 V 到 V' 的一个线性映射，则 V 的子集

$\mathrm{Ker}\,\underline{A} := \{\alpha \in V \mid \underline{A}\alpha = 0'\}$ 称为 V 的核

性质1. $\mathrm{Ker}\,\underline{A}$ 是 V 的一个子空间

证：由于 $\underline{A}(0) = 0'$，因此 $0 \in \mathrm{Ker}\,\underline{A}$

任取 $\alpha, \beta \in \mathrm{Ker}\,\underline{A}$，则 $\underline{A}\alpha = 0'$，$\underline{A}\beta = 0'$

$\underline{A}(\alpha+\beta) = 0$ $\quad\therefore \alpha+\beta \in \mathrm{Ker}\,\underline{A}$

同理 $k\alpha \in \mathrm{Ker}\,\underline{A}$ $\quad \forall k \in F$

性质2，$\underline{A}$是单射 $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{Ker}\underline{A}=0$　　　　即 核是零子空间

$\Rightarrow$ 任取 $\alpha\in\operatorname{Ker}\underline{A}$，则 $\underline{A}\alpha=0'=\underline{A}(0)$

$\underline{A}$是单射 $\Downarrow$

$\alpha=0$

$\Leftarrow$ 设 $\operatorname{Ker}\underline{A}=0$

设 $\alpha_1,\alpha_2\in V$ 且 $\underline{A}\alpha_1=\underline{A}\alpha_2$

$\underline{A}(\alpha_1-\alpha_2)=\underline{A}\alpha_1-\underline{A}\alpha_2=0$

$\alpha_1-\alpha_2\in\operatorname{Ker}A$　　$\alpha_1-\alpha_2=0$

$\therefore\alpha_1=\alpha_2$

从而A是单射

定理1. 设$\underline{A}$是域F上的线性空间，V到V'的一个线性映射，则

$V/\mathrm{Ker}\underline{A} \cong \mathrm{Im}\underline{A}$

~~proof~~. 记 $W=\mathrm{Ker}A$

$$\sigma: V/W \longrightarrow \mathrm{Im}\underline{A}$$
$$\alpha+W \longmapsto \underline{A}\alpha$$

$$\alpha+W=\beta+W \Leftrightarrow \alpha-\beta \in W=\mathrm{ker}A$$
$$\Leftrightarrow \underline{A}(\alpha-\beta)=0'$$
$$\Leftrightarrow \underline{A}\alpha=\underline{A}\beta$$

$\Rightarrow$: $\Leftarrow$:

因此 σ是映射，且 σ是单射

对应像唯一

从而σ是双射

$$\sigma[(\alpha+W)+(\beta+W)]=\sigma[(\alpha+\beta)+W]$$
$$=\underline{A}(\alpha+\beta)$$
$$=\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta$$
$$=\sigma(\alpha+W)+\sigma(\beta+W)$$

$$\dim V=\dim(\mathrm{Ker}\underline{A})+\dim(\mathrm{Im}\underline{A})$$

同理，$\sigma[k(\alpha+W)]=k\sigma(\alpha+W)$

因此，σ是 $V/\mathrm{Ker}\underline{A}$ 到 $\mathrm{Im}\underline{A}$ 的同构映射

推论：设 $A \in Hom(V, V')$

且 $\dim V = \dim V'$ **

则 A 是单射

$\Updownarrow$

$\ker A = 0 \iff \dim \mathrm{Im} A = \dim V = \dim V'$

$\iff \mathrm{Im} A = V'$ $\because \mathrm{Im} A$ 是子空间

$\iff A$ 是满射

$A = S^{-1} B S$

则 A 与 B 秩相同

$\downarrow$

S^{-1}, S 可逆，可看作初等行变换

且迹相同

$tr(AB) = tr(BA)$

定理1 设$\underline{A} \in Hom(V,V)$，$\lambda_1, \lambda_2$是$\underline{A}$的不同特征值，$V_{\lambda_1}$中$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性无关，$V_{\lambda_2}$中$\beta_1, \cdots, \beta_r$线性无关，则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_r$仍然线性无关

证：

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_r\beta_r=0$ (1)

则 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_2\beta_1+\cdots+l_r\lambda_2\beta_r=0$ (2)

又有 $k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_s\lambda_1\alpha_s+l_1\lambda_1\beta_1+\cdots+l_r\lambda_1\beta_r=0$ (3)

(2)−(3)得

$l_1(\lambda_2-\lambda_1)\beta_1+\cdots+l_r(\lambda_2-\lambda_1)\beta_r=0$ (4)

于是，$l_1(\lambda_2-\lambda_1)=0, \cdots, l_r(\lambda_2-\lambda_1)=0$

由于$\lambda_2 \neq \lambda_1$

$\therefore l_1=0 \cdots l_r=0$

代入(1)

$k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$ 从而 $k_1=\cdots k_s=0$

因此 $\alpha_1\cdots\alpha_s, \beta_1, \cdots\beta_r$线性无关

可由数学归纳法得到推论：设$\underline{A} \in Hom(V,V)$ $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$是$\underline{A}$的不同特征值 V_{λ_i}中 $\alpha_{i1}\cdots\alpha_{ir_i}$线性无关，则

$\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1r_1} \cdots \alpha_{s1} \cdots \alpha_{sr_s}$ 仍线性无关

定义 设$\underline{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，如果V中有一基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$使得$\underline{A}$在此基的矩阵为对角矩阵 那么称$\underline{A}$可对角化

n维线性空间V上的线性变换$\underline{A}$可对角化

$\Leftrightarrow$ V中有一基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$使得

$$\underline{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

即 $\underline{A}\alpha_i=\lambda_i\alpha_i \quad i=1,\cdots,n$

$\Leftrightarrow$ V中有由$\underline{A}$的特征向量组成的一个基

$\Leftrightarrow$ $\underline{A}$有n个线性无关的特征向量

Def. 设$\underline{A}$是域F上线性空间V上的一个线性变换，W是V的一个子空间，如果从$\alpha\in W$可推出$\underline{A}\alpha\in W$，那么称W是$\underline{A}$的一个不变子空间

0，V都是$\underline{A}$的不变子空间，称作平凡子空间

命题1. $\underline{A}$的特征子空间，$Ker\underline{A}$，$Im\underline{A}$都是$\underline{A}$的不变子空间

证：$\alpha\in Ker\underline{A} \Rightarrow \underline{A}\alpha=0\in Ker\underline{A}$

$\underline{A}\eta\in Im\underline{A} \Rightarrow \underline{A}(\underline{A}\eta)\in Im\underline{A}$

命题2. 设$\underline{A}$、$\underline{B}\in Hom(V,V)$，若$\underline{A}\underline{B}=\underline{B}\underline{A}$

则$Ker\underline{B}$，$Im\underline{B}$，$\underline{B}$的特征子空间 是$\underline{A}$的不变子空间

$\delta\in Ker\underline{B} \Rightarrow \underline{B}\delta=0 \Rightarrow \underline{B}(\underline{A}\delta)=\underline{A}(\underline{B}\delta)=\underline{A}0=0 \Rightarrow \underline{A}\delta\in Ker\underline{B}$

$\underline{B}\beta\in Im\underline{B} \Rightarrow \underline{A}(\underline{B}\beta)=\underline{B}(\underline{A}\beta)\in Im\underline{B}$

V_{μ_1}是$\underline{B}$的一个特征子空间 $\gamma\in V_{\mu_1} \Rightarrow \underline{B}\gamma=\mu_1\gamma \Rightarrow \underline{B}(\underline{A}\gamma)=\underline{A}(\underline{B}\gamma)=\underline{A}(\mu_1\gamma)$

$=\mu_1(\underline{A}\gamma)$

$\therefore \underline{A}\gamma\in V_{\mu_1}$

命题3. $\underline{A}$的不变子空间的交与和仍是不变子空间

设$\underline{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换

$\underline{A}(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots\alpha_{sr_s})$ → V的一基

$$=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s})\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s\end{pmatrix}$$

A_i是r_i级矩阵，$i=1,\cdots,s$

$\Longleftrightarrow$ $W_1=\langle\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1}\rangle,\cdots,W_s=\langle\alpha_{s1},\cdots,\alpha_{sr_s}\rangle$

是$\underline{A}$的非平凡不变子空间，且

$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$

$(\underline{A}|W_1)(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1})=(\alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1})A_1$

Q: 如何寻找 $\underline{A}$ 的非平凡子空间? $\longrightarrow$ 由性质2, 可交换的变换的不变子空间

设 $\underline{A}$ 是域F上线性空间V上的一个线性变换, 下述表达式 　　$\underline{A}$ 与 $\underline{A}$ 运可交换

$$b_m\underline{A}^m + \cdots + b_1\underline{A} + b_0\underline{I}$$ 称为线性变换 $\underline{A}$ 的一个多项式

$F[\underline{A}] := \{\underline{A}$ 的多项式$\}$

易验证 $F[\underline{A}]$ 对减法和乘法封闭, 因此 $F[\underline{A}]$ 是 $Hom(V,V)$ 的子环

有单位元 $\underline{I}$, 是交换环

$F\underline{I} = \{k\underline{I} \mid k\in F\} = \{\underline{k} \mid k\in F\}$ 　$F\underline{I}$ 是 $F[\underline{A}]$ 的一个子环, 有单位元 $\underline{I}$

$$\tau: F \longrightarrow F\underline{I}$$
$$k \longrightarrow k\underline{I}$$

易验证是环同构映射

根据域F上一元多项式环 $F[x]$ 的通用性质, x 可以用 $F[\underline{A}]$ 的任一元素代入

保持加法和乘法运算

$F[\underline{A}] := \{\underline{A}$ 的多项式$\} \subseteq Hom(V,V)$

定理2. 设 $\mathcal{A}$ 是域 F 上线性空间 V 上的一个线性变换，在 $F[x]$ 中，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$

且 $(f_1(x),f_2(x))=1$，则 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

证：先证 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \supseteq \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

$\because f(x)=f_1(x)f_2(x)$

$f(\mathcal{A})=f_1(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})$

$\alpha_1 \in \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \Rightarrow f_2(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\alpha = f_2(\mathcal{A})0 = 0 \Rightarrow f(\mathcal{A})\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$ $\quad \therefore \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$

同理，$\operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ker} f(\mathcal{A})$

因此 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \supseteq \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

再证 $\operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

任取

$\alpha \in \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \Rightarrow f(\mathcal{A})\alpha = 0$

$\because (f_1(x), f_2(x)) = 1$ 因此存在 $u(x), v(x) \in F[x]$

使得 $u(x)f_1(x) + v(x)f_2(x) = 1$

x用 $\mathcal{A}$ 代入，得 $u(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A}) = \mathcal{I}$ (1)

于是 $\alpha = \mathcal{I}\alpha = \underbrace{u(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\alpha}_{记\alpha_2} + \underbrace{v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})\alpha}_{记\alpha_1} = \alpha_2 + \alpha_1$

由于 $f_1(\mathcal{A})\alpha_1 = f_1(\mathcal{A})v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})\alpha = v(\mathcal{A})f(\mathcal{A})\alpha = 0$

$\therefore \alpha_1 \in \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A})$ $\quad$ 同理 $\alpha_2 \in \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

$\therefore \operatorname{Ker} f(\mathcal{A}) \subseteq \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

再证 $\operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A}) = 0$： $\quad$ 取 $\beta \in \operatorname{Ker} f_1(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} f_2(\mathcal{A})$

$\beta = \mathcal{I}\beta = u(\mathcal{A})f_1(\mathcal{A})\beta + v(\mathcal{A})f_2(\mathcal{A})\beta = 0$

$\therefore \beta = 0$

推论1：设$\underline{A}$是域F上线性空间V上的一个线性变换

在$F[x]$中，$f(x)=f_1(x)\cdots f_s(x)$ 且 $f_1(x),\cdots,f_s(x)$两两互素

则 $\ker f(\underline{A})=\ker f_1(\underline{A})\oplus\cdots\oplus\ker f_s(\underline{A})$

$\ker\underline{0}=V$

定义：设$\underline{A}\in Hom(V,V)$，$f(x)\in F[x]$，如果$f(\underline{A})=\underline{0}$，那么称$f(x)$是域F上$\underline{A}$的一个零化多项式

定义：设$A\in M_n(F)$　$f(x)\in F[x]$　如果$f(A)=0$，那么称$f(x)$为A的一个零化多项式

设$\underline{A}\in Hom(V,V)$　$\dim V=n$　$\underline{A}$在V下一个矩阵是A

$f(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$ 是$\underline{A}$的一个零化多项式$\Leftrightarrow f(x)$是A的一个零化多项式

$\Updownarrow$

$\underline{0}=f(\underline{A})=b_m\underline{A}^m+\cdots+b_1\underline{A}+b_0\underline{I}\Leftrightarrow 0=b_mA^m+\cdots+b_1A+b_0I=f(A)$

Hamilton-Cayley 定理　设 $A\in M_n(F)$

则 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 A 的一个零化多项式

Hamilton-Cayley

设 $\underline{A} \in Hom(V,V)$, $\dim V = n$

则 $\underline{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 是 $\underline{A}$ 的一个零化多项式

在 $F[\lambda]$ 中, $f(\lambda) = p_1^{r_1}(\lambda) \cdots p_s^{r_s}(\lambda)$

其中 $p_1(\lambda), \cdots, p_s(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的不可约多项式, 据推论得

$$V = \operatorname{Ker} f(\underline{A}) = \operatorname{Ker} p_1^{r_1}(\underline{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_s^{r_s}(\lambda)$$

如果在 $F[\lambda]$ 中 $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$, 其中 $p_1(\lambda), \cdots, p_s(\lambda)$ 是域 F 上两两不等的首一不可约多项式, 得

$$V = \operatorname{Ker} f(\underline{A}) = \operatorname{Ker} p_1^{r_1}(\underline{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_s^{r_s}(\underline{A})$$ 两两不等

如果在 $F[\lambda]$ 中, $f(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$ 其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s \in F$

那么 $V = \operatorname{Ker} f(\underline{A}) = \operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_1 \underline{I})^{r_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_s \underline{I})^{r_s}$

把 $\operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_j \underline{I})^{r_j}$ 称为 $\underline{A}$ 的根子空间

conclusion: V 可分为若干个不变子空间的直和, 以这些不变子空间的基为 V 的基

$\underline{A}$ 对应矩阵为分块对角矩阵

设 $\underline{A}$ 是域 F 上 n 维线性空间上的一个线性变换，在 $\underline{A}$ 的所有非零零化多项式中，次数最低且首项系数为 1，称为 $\underline{A}$ 的最小多项式

命题 1　$\underline{A}$ 的最小多项式唯一

命题 2　设 $m(\lambda)$ 是 $\underline{A}$ 的最小多项式，则 $m(\lambda)|g(\lambda) \Longleftrightarrow g(\lambda)$ 是 $\underline{A}$ 的一个零化多项式

$\Rightarrow$:　$g(\lambda)=h(\lambda)m(\lambda) \Rightarrow g(\underline{A})=h(\underline{A})m(\underline{A})=h(\underline{A})\underline{0}=\underline{0}$

$\Leftarrow$:　$g(\lambda)=h(\lambda)m(\lambda)+r(\lambda)$

$\deg r(\lambda)<\deg m(\lambda)$　　$m(\lambda)=c_0+c_1\lambda+\cdots+c_{r-1}\lambda^{r-1}+c_r\lambda^r$

若 $r(\lambda)\neq 0$　　则 λ 用 $\underline{A}$ 代入

$\underset{\overset{\Vert}{0}}{g(\underline{A})}=h(\underline{A})m(\underline{A})+r(\underline{A})=r(\underline{A})$

于是 $r(\underline{A})$ 也是 $\underline{A}$ 的一个零化多项式

矛盾

$\therefore r(\lambda)=0$

从而 $m(\lambda)|g(\lambda)$

命题 3.　$\underline{A}$ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 与最小多项式 $m(\lambda)$ 在域 F 中有相同的根（重数可不同）

$m(\lambda)|f(\lambda)$　　$\therefore m(\lambda)$ 每个根都是 $f(\lambda)$ 的根

反之　任取 $f(\lambda)$ 在 F 中的一个根 λ_0　　从而 λ_0 是 $\underline{A}$ 的一个特征值　于是 $\xi\in V$ 且 $\xi\neq 0$　$\underline{A}\xi=\lambda_0\xi$

$\underline{0}=\underline{0}\xi=m(\underline{A})\xi=(c_0\underline{I}+c_1\underline{A}+\cdots+\underline{A}^r)\xi=c_0\xi+c_1\lambda_0\xi+\cdots+\lambda_0^r\xi=(c_0+c_1\lambda_0+\cdots+\lambda_0^r)\xi$

$=m(\lambda_0)\xi$　　$\because \xi\neq 0$　$\therefore m(\lambda_0)=0$

$\underline{A}$在V的一个基下的矩阵是A

则$\underline{A}$与它的矩阵A有相同的最小多项式

相似矩阵有相同最小多项式

定理1 设$\underline{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，设$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$

$\underline{A}|W_j$的最小多项式为$m_j(\lambda)$ $j=1,\cdots,s$ $\alpha_j\in W_j$

W_j上的线性变换

则$\underline{A}$的最小多项式$m(\lambda)$为$[m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)]$ 首1最小公倍式

证：任取$\underline{A}$的一个非零的零化多项式$q(\lambda)$，则$q(\underline{A})=0$

$q(\underline{A}|W_j)\alpha_j=q(\underline{A})\alpha_j=\underline{0}\alpha_j=0$ $(\underline{A}|W_j)\alpha_j=\underline{A}\alpha_j$

于是$q(\underline{A}|W_j)=\underline{0}$，从而$q(\lambda)$是$\underline{A}|W_j$的一个零化多项式

因此$m_j(\lambda)|q(\lambda)$ $j=1,2,\cdots,s$

于是$q(\lambda)$是$m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$的公倍式

即$\{A$的非零的零化多项式$\}\subseteq\{m_1(\lambda),\cdots,m_s(\lambda)$的非零的公倍式$\}$

再证：{A的非零零化多项式} $\supseteq$ {$m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的公倍式}

任取 $m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的一个非零的公倍式 $k(\lambda)$

则 $k(\lambda) = h_j(\lambda) m_j(\lambda)$　　$j=1,\cdots,s$

任取 $\alpha \in V$　　$\alpha = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j$　　$\alpha_j \in W_j$ → 利用 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$

$$k(A)\alpha = k(A)\left(\sum_{j=1}^{s} \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{s} k(A|W_j)\alpha_j = \sum_{j=1}^{s} h_j(A|W_j)\, m_j(A|W_j)\alpha_j = 0$$

综上 A的非零零化多项式 = $m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)$ 的公倍式

推论3　设域F上n维矩阵A为

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$$　且 A_j 的最小多项式为 $m_j(\lambda)$，$j=1,\cdots,s$　则A的最小多项式为 $[m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$

证：设V是域F上的n维线性空间，则有唯一线性变换 A 在V的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的矩阵为

A，于是 $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$

且 A_j 是 $A|W_j$ 在 W_j 上某基下的矩阵，于是 $A|W_j$ 的最小多项式为 $m_j(\lambda)$　　$j=1,\cdots,s$

从而 A 的最小多项式 $m(\lambda) = [m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$

A的最小多项式 $m(\lambda) = [m_1(\lambda), \cdots, m_s(\lambda)]$

Def. 若有 $l \in \mathbb{N}^*$，使得 $\underline{A}^l=0$，则称 $\underline{A}$ 是幂零变换，使 $A^l=0$ 成立的最小正整数 l 称为 $\underline{A}$ 的幂零指数

命题4. 设 $\underline{A}$ 是幂零指数为 l 的幂零变换，则 $\underline{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)=\lambda^l$

证：$A^l=0 \Rightarrow \lambda^l$ 是 $\underline{A}$ 的一个零化多项式，当 $0<t<l$ 时，$A^t \neq 0 \Rightarrow A^t$ 不是 $\underline{A}$ 的零化多项式　　因此 $m(\lambda)=\lambda^l$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\underline{A}$ 的所有不同的特征值，则 $\underline{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中能分解成不同一次因式乘积

$\alpha_j \in V_{\lambda_j} \Leftrightarrow \underline{A}\alpha_j = \lambda_j\alpha_j \Leftrightarrow \underline{A}\alpha_j - \lambda_j \underline{I}\alpha_j = 0 \Leftrightarrow (\underline{A}-\lambda_j\underline{I})\alpha_j = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_j \in \operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

因此 $V_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})$

即 $[\underline{A}|V_{\lambda_j} - \lambda_j(\underline{I}|V_{\lambda_j})]\alpha_j = 0$

$\underline{A}|V_{\lambda_j} - \lambda_j(\underline{I}|V_{\lambda_j}) = \underline{0}$

于是 $\lambda-\lambda_j = 0$ 是 $\underline{A}|V_{\lambda_j}$ 的一个零化多项式，因此 $\underline{A}|V_{\lambda_j}$ 的最小多项式为 $\lambda-\lambda_j$

可对角化 $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

$\Leftrightarrow m(\lambda) = [\lambda-\lambda_1,\cdots,\lambda-\lambda_s]$

$= (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

$\Leftarrow$：

$m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_s)$

又 $\operatorname{Ker} m(\underline{A}) = \operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\underline{A}-\lambda_s\underline{I})$

$= V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$

推论4：幂零指数 $l>1$ 的幂零变换不可对角化

幂等变换一定可以对角化　：$\underline{A}^2=\underline{A}$　$\underline{A}(\underline{A}-\underline{I})=0$　$\underline{\lambda(\lambda-1)=0}$

是零化多项式

现探讨不可对角化的线性变换如何有最简形式

设$\underline{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，设$\underline{A}$的最小多项式$m(\lambda)$

在$F[\lambda]$中可分解为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$是域F中两两不等的元素

则 $V=\underbrace{\ker(\underline{A}-\lambda_1\underline{I})^{l_1}}\oplus\cdots\oplus\underbrace{\ker(\underline{A}-\lambda_s\underline{I})^{l_s}}$

即 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_s$

求$\underline{A}|W_j$的最小多项式$m_j(\lambda)=?$

任给$\alpha_j\in W_j$ $(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I})^{l_j}\alpha_j=(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{l_j}\alpha_j=0$

$W_j=\ker(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{l_j}$

于是 $(\underline{A}|W_j-\lambda_j\underline{I})^{l_j}=\underline{0}$

从而 $(\underline{A}-\lambda_j\underline{I})^{l_j}$是$\underline{A}|W_j$的一个零化多项式

因此$\underline{A}|W_j$的最小多项式$m_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_j)^{t_j}$ $t_j\leq l_j$

$$m(\lambda)=[(\lambda-\lambda_1)^{t_1},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{t_s}]$$
$$=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s}$$

根据因式分解唯一性 $t_j=l_j$

设 $A|_{W_j}$ 在 W_j 的一个基下的矩阵是 A_j

令 $B_j = A|_{W_j} - \lambda_j I$

则 $B_j^{l_j} = (A|_{W_j} - \lambda_j I)^{l_j} = 0$

当 $0 < t_j < l_j$ 时，$B_j^{t_j} \neq 0 \longrightarrow (\_\_)^{l_j}$ 是最小多项式

因此 B_j 是 W_j 上的幂零变换，其幂零指数为 l_j

B_j 在 W_j 的上述基的矩阵是 $A_j - \lambda_j I$

思路：让 A_j 最简单，故让幂零变换 B_j 最简单

幂零变换的Jordan标准形

设$\underline{B}$是域F上r维线性空间W上的一个幂零变换，其幂零指数为l

则$\underline{B}^{l}=\underline{0}$，$\underline{B}^{l-1}\neq\underline{0}$

于是存在$\xi\in W$，且$\xi\neq 0$，使得

$$\underline{B}^{l-1}\xi\neq 0,\ \underline{B}^{l}\xi=0$$

据P235，例8得（引理）

$\underline{B}^{l-1}\xi,\ \underline{B}^{l-2}\xi,\ \cdots,\ \underline{B}\xi,\ \xi$ 线性无关

从而幂零指数 $\leq \dim W=r$

$K_0\xi+K_1\underline{B}\xi+\cdots+K_{m-1}\underline{B}^{m-1}\xi=0$

乘$\underline{B}^{m-1}$，得 $K_0\underline{B}^{m-1}\xi+K_1\underline{B}^{m}\xi+\cdots+K_{m-1}B^{2m-2}\xi=0$

$\because \underline{B}^{m}\xi=0$ $\therefore s\geq m$时 $\underline{B}^{s}\xi=0$

$\therefore K_0B^{m-1}\xi=0$ $K_0=0$

以此类推 $K_0=K_1=\cdots=K_{m-1}=0$

$\underbrace{\langle \underline{B}^{l-1}\xi,\ \underline{B}^{l-2}\xi,\ \cdots,\ \underline{B}\xi,\ \xi\rangle}$

$\therefore$ 是$\underline{B}$的不变子空间

$\because \underline{B}^{l-1}\xi\cdot\underline{B}=\underline{B}^{l}\xi=0$ $\in$子空间

$\underline{B}\langle\cdots\cdots\rangle=\langle\cdots\rangle\left(\quad\right)$

$\because \underline{B}$作用在$\underline{B}^{l-1}\xi$上为零向量，故第一列为0

$\underline{B}$作用在$\underline{B}^{l-2}\xi$上为$\underline{B}^{l-1}\xi$ $\therefore$第二列第一排为1

⋮

$\underline{B}$在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def 1. 域F上t级矩阵 $J_t(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & & 0 \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a \end{pmatrix}$

称为主对角元为a的一个t级Jordan块

Def 2. 由若干个Jordan块组成的分块对角矩阵称为一个Jordan形矩阵

Def 3. $\mathbf{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，若$\alpha \in V$，使得
$\alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{t-1}\alpha$ 线性无关　且 $\mathbf{A}^t\alpha \in \langle \alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{t-1}\alpha \rangle$
那么称 $\langle \alpha, \mathbf{A}\alpha, \cdots, \mathbf{A}^{t-1}\alpha \rangle$ 是一个$\mathbf{A}$循环子空间

$\therefore \langle \mathbf{B}^{l-1}\xi, \cdots, \xi \rangle$ 是$\mathbf{B}$的一个循环子空间

$\mathbf{B}$在基 $\mathbf{B}^{l-1}\xi, \cdots, \xi$下的矩阵是一个 $J_l(0)$

定理1. 设$\mathbf{B}$是域F上r维线性空间W上的一个幂零变换，其幂零指数为l
则W可分解为$\dim W_0$个$\mathbf{B}$强循环子空间直和，W_0是$\mathbf{B}$的属于特征值0的特征子空间

对线性空间的维数r作第二数学归纳法，

$r=1$时，$W=\langle\alpha\rangle$ 此时 $l=1$，于是 $\mathbf{B}=\mathbf{0}$　　因此是一个强循环子空间

假设对于维数小于r的空间命题为真，现看r维空间上幂零变换$\mathbf{B}$，其幂零指数为l

若$l=1$，则$\mathbf{B}^l=\mathbf{0}$，此时取一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 则$W=\langle\alpha_1\rangle \oplus \cdots \oplus \langle\alpha_n\rangle$　$\because \mathbf{B}\alpha_j = 0$ 因此$\langle\alpha_j\rangle$是$\mathbf{B}$强循环子空间

下面设 $l>1$，此时 $\underline{B}\neq\underline{0}$，幂零变换 $\underline{B}$ 有特征值 0，对于 $\underline{B}$ 的属于特征值 0 的特征子空间不是零子空间，即 $W_0\neq 0$

$1\le \dim W/W_0=\dim W-\dim W_0<\dim W=r$

由于 $\underline{B}\neq\underline{0}$，则此 $W_0\neq W$

（故我们在商空间上寻找一个幂零变换）

注：为何归纳法在此处不能直接用于将 W 拆成两个直和的子空间上：因为 l 可能大于这两个空间的维数

$\tilde{\underline{B}}: \quad W/W_0 \longrightarrow W/W_0$

$$\begin{array}{ccc} \alpha+W_0 & \longmapsto & \underline{B}\alpha+W_0 \\ \shortparallel & & \\ \beta+W_0 & & \underline{B}\beta+W_0 \end{array}$$

现我们确定 有唯一对应 的像：

$\alpha-\beta\in W_0 \rightarrow \underline{B}(\alpha-\beta)\in W_0$

$\because W_0$ 是特征子空间，即不变子空间

因此 $\tilde{\underline{B}}$ 是 W/W_0 上的一个变换

易于验证 $\tilde{\underline{B}}$ 保持加法和纯量乘法

从而 $\tilde{\underline{B}}$ 是 W/W_0 上的一个线性变换

$\forall\, \alpha+W_0\in W/W_0$

$\tilde{\underline{B}}^l(\alpha+W_0)=\underline{B}^l\alpha+W=\underline{0}\alpha+W_0=W_0$

因此 $\tilde{\underline{B}}$ 是 W/W_0 上的幂零变换

对 W/W_0 用归纳假设得 $W/W_0=\langle\tilde{\underline{B}}^{t_1-1}(\xi_1+W_0),\cdots,\xi_1+W_0\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\tilde{\underline{B}}^{t_s-1}(\xi_s+W_0),\cdots,\xi_s+W_0\rangle$

都是 $\tilde{\underline{B}}$ 的强循环子空间

故 W/W_0 的一基为 $\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+W_0,\cdots,\xi_1+W_0,\cdots,\underline{B}^{t_s-1}\xi_s+W_0,\cdots,\xi_s+W_0$

令 $U=\langle \underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s-1}\xi_s,\cdots,\xi_s\rangle$

则 $W=W_0\oplus U$ （商空间一节）

$\underline{B}^{t_j}\xi_j+W_0=\tilde{\underline{B}}^{t_j}(\xi_j+W_0)=W_0$ 于是 $\underline{B}^{t_j}\xi_j\in W_0$

$\underline{B}^{t_j+1}\xi_j=\underline{B}(\underbrace{\underline{B}^{t_j}\xi_j}_{\Downarrow W_0\ \text{特征子空间}})=0(\underline{B}^{t}\xi_j)=0$ $j=1,\cdots,s$

设 $k_1\underline{B}^{t_1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s}\xi_s=0$

即 $\underline{B}(k_1\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s-1}\xi_s)=0$

从而 $k_1\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+\cdots+k_s\underline{B}^{t_s-1}\xi_s\in W_0$

于是 $k_1(\underline{B}^{t_1-1}\xi_1+W_0)+\cdots+k_s(\underline{B}^{t_s-1}\xi_s+W_0)=W_0$

$\because$ 是一组基 W/W_0

$\therefore k_1=\cdots=k_s=0$

把它扩充成 W_0 的一基 $\underline{B}^{t_1}\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s}\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_q$

于是 $W=\langle\underline{B}^{t_1}\xi_1,\cdots,\underline{B}^{t_s}\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_q\rangle\oplus\langle\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\underline{B}^{t_s-1}\xi_s\cdots\xi_s\rangle$

$=\langle\eta_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\eta_q\rangle\oplus\underbrace{\langle\underline{B}^{t_1}\xi_1,\underline{B}^{t_1-1}\xi_1,\cdots,\xi_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle\underline{B}^{t_s}\xi_s,\cdots,\xi_s\rangle}_{\text{前提强循环子空间}}$

$\because \eta_j \in W_0$

$\therefore \underline{B}\eta_j = 0$

因此 η_j 是 $\underline{B}$ 的强循环子空间

$q+s = \dim W_0$

$\therefore$ 命题为真

定理2. 设 $\underline{B}$ 是域 F 上 r 维线性空间 W 上的幂零变换，幂零指数为 l，则在 W 中有一组基使得 $\underline{B}$ 在此基下的矩阵 B 是一个 Jordan 型矩阵，且 Jordan 块的总数为 $\dim W_0 = \dim Ker(\underline{B} - 0\underline{I}) = \dim W - rank\,\underline{B}$，其中每个 Jordan 块的主对角元为 0，且其级数 $t \le l$

t 级 Jordan 块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t) = rank\,B^{t-1} + rank\,B^{t+1} - 2rank\,B^{t}$$

$$= rank\,\underline{B}^{t-1} + rank\,\underline{B}^{t+1} - 2rank\,\underline{B}^{t}$$

这个 Jordan 型矩阵称为 $\underline{B}$ 的一个 Jordan 标准型

幂零变换 $\underline{B}$ 的 Jordan 标准型除了 Jordan 的排列次序外是唯一的

$\operatorname{rank} J_{t(0)} = t-1 \quad \cdots \quad \operatorname{rank} J_{t(0)}^{t-1} = 1$ $\quad J_{t(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad [J_{t(0)}]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank} J_{t(0)}^{t} = 0$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_n \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank} B^0 = N(1)\cdot 1 + N(2)\cdot 2 + N(3)\cdot 3 + \cdots + N(l)\cdot l \quad (1)$

$\operatorname{rank} B = \quad N(2)\cdot 1 + N(3)\cdot 2 + \cdots + N(l)\cdot(l-1) \quad (2)$

$\operatorname{rank} B^2 = \quad N(3)\cdot 1 + \cdots + N(l)\cdot(l-2) \quad (3)$

$(1)+(3)-2\cdot(2)$ 得 $\quad \operatorname{rank} B^0 + \operatorname{rank} B^2 - 2\operatorname{rank} B = N(1)$

$2 \le t < l$ 时

$\operatorname{rank} B^{t-1} = N(t)\cdot 1 + N(t+1)2 + \cdots + N(l)[l-(t-1)] \quad (7)$

$\operatorname{rank} B^{t} = \quad N(t+1)\cdot 1 + \cdots + N(l)(l-t) \quad (8)$

$\operatorname{rank} B^{t+1} = \quad N(t+2)\cdot 1 + \cdots + N(l)[l-(t+1)] \quad (9)$

$(7)+(9)-2(8)$ 得 $\quad \operatorname{rank} B^{t-1} + \operatorname{rank} B^{t+1} - 2\operatorname{rank} B^{t} = N(t)$

$t=l$ 时 $\quad \operatorname{rank} B^{l-1} = N(l)$

推论1　设B是域F上r级幂零矩阵，其幂零指数为l，则B相似于一个Jordan型矩阵，Jordan块的总数为 $r-\operatorname{rank}B$

每一个Jordan块主对角元为0，其级数 $t\le l$，t级Jordan块的个数

$N(t)=\operatorname{rank}B^{t-1}+\operatorname{rank}B^{t+1}-2\operatorname{rank}B^{t}$

线性变换的Jordan标准形

定理1. 设$\mathcal{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，如果$\mathcal{A}$的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中的标准分解式为 $m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$

$\because$ $m(\lambda)$ 与特征多项式同解

$\therefore$ $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 所有不同特征值

且 $V=\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_1 I)^{l_1}\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda_s I)^{l_s}$

$\lambda_1, \cdots \lambda_s$ 是 A 的所有不同的特征值，且 $V = \mathrm{Ker}(A-\lambda_1 I)^{l_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_s I)^{l_s}$

$= W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$

令 $B_j = A|W_j - \lambda_j I$，则 B_j 是 W_j 上幂零变换，其幂零指数为 l_j，W_j 取个基，使得 B_j 在此基下的矩阵 B_j 是一个 Jordan 型矩阵，设 $A|W_j$ 在 W_j 的这个基下的矩阵为 A_j，则 $B_j = A_j - \lambda_j I$ 从而 $A_j = B_j + \lambda_j I$

于是 A_j 是主对角元为 λ_j 的 Jordan 型矩阵

因此 A 在 W_1 的基，$\cdots$，W_s 的基合起来的矩阵 A 是一个 Jordan 形矩阵

定理1. 设$\underline{A}$是域F上n维线性空间V上的一个线性变换，如果$\underline{A}$的最小多项式$m(\lambda)$在$F[\lambda]$中的标准分解式为

$$m(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{t_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{t_s} \qquad (1)$$

则V中有一个基使得$\underline{A}$在此基下的矩阵为一个Jordan型矩阵，其主对角线上是$\underline{A}$的全部特征值

主对角元为λ_j的Jordan块的总数N_j为

$$N_j = n-\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j I)$$

主对角元为λ_j的t级Jordan约当块数量为

$$N_j(t)=\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j I)^{t-1}+\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j I)^{t+1}-2\operatorname{rank}(\underline{A}-\lambda_j I)^{t}$$

证：

$N_j = \dim(\ker B_j) = \dim \ker(A|W_j - \lambda_j I)$ (3)

猜想：$\forall n \in N^*$ 有 $\ker(A|W_j - \lambda_j I)^m = \ker(A - \lambda_j I)^m$ (4)

$\alpha \in \ker(A|W_j - \lambda_j I)^m \Leftrightarrow \alpha \in W_j$ 且 $(A|W_j - \lambda_j I)\alpha = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \in W_j$ 且 $(A - \lambda_j I)\alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha \in \ker(A - \lambda_j I)^m$

$\Leftarrow$：

情形1：$m \le l_j$ 时

$\alpha \in \ker(A - \lambda_j I)^m$

$\Leftrightarrow (A - \lambda_j I)^m \alpha = 0$

$\Rightarrow (A - \lambda_j I)^{l_j} \alpha = 0$

$\Rightarrow \alpha \in \ker(A - \lambda_j I)^{l_j} = W_j$

$m > l_j$ 时

令 $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_j)^m \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$

显然 $m(\lambda) | g(\lambda)$

$\therefore g(A)$ 是零多项式

$V = \ker(A - \lambda_1 I)^{l_1} \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_j I)^m \oplus \cdots \oplus (A - \lambda_s I)^{l_s}$

$= W_1 \oplus \cdots \oplus \ker(A - \lambda_j I)^m \oplus \cdots \oplus W_s$

易得 $\ker(A - \lambda_j I)^m$ 与 $\ker(A - \lambda_j I)^{l_j}$ 相等

$W_j = \ker(A - \lambda_j I)^{l_j} = \ker(A - \lambda_j I)^m$

从而 $\alpha \in \ker(A - \lambda_j I)^m \Rightarrow \alpha \in W_j$