整环 Domain

讨论班

梁家浩

华南理工大学数学学院

2024.3.11

Contents

环 (Ring) 的概念和细分

环的定义

环

集合 R 上定义了两种二元运算 $+, \cdot$ 使得

- $(R, +)$ 是交换群.
- $(R, \cdot)$ 是半群.
- 满足左右分配律

$$\forall a, b, c \in R, a(b+c) = ab + ac, (b+c)a = ba + ca$$

则称 $(R, +, \cdot)$ 是一个环 (ring).

有大量环的例子

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right], \mathbb{Z}_m, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, C^k[a,b], C^\infty[a,b], \mathbb{P}^{n\times n} \ldots$
- 环上的多项式也是环 $R[x] : \mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{P}[x], \mathbb{P}[x,y], \mathbb{Z}_m[x] \ldots$

幺元 (identity)、单位 (unit)、零因子

定义

对于环 R, 定义

- $R^* := R - \{0\}$
- 单位: R^* 中的可逆元
- 单位群: 单位全体构成一个群
  $U(R) := \left\{a \in R^* | \exists a^{-1} \in R^*, aa^{-1} = a^{-1}a = 1\right\}$
- 幺元 $1 \in R$: 指 $(R, \cdot)$ 中存在的幺元。
- 零因子: 若存在
  $$a, b \in R^*, ab = 0$$
  则称 a 为左零因子, b 称为右零因子, 统称零因子。

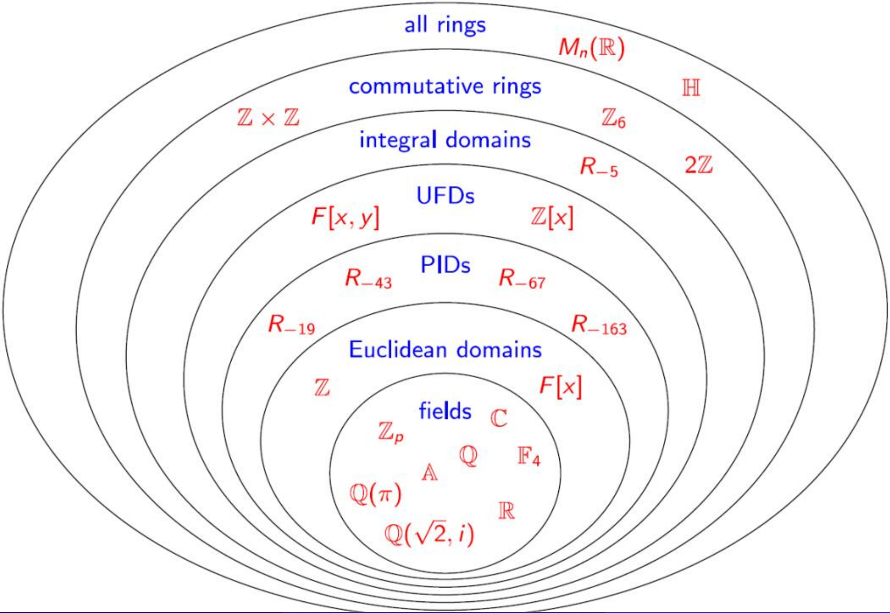
- 环 $\mathbb{Z}_4$ 存在零因子 [2].
- Gauss 整环 $\mathbb{Z}[i]$ 的单位群 $\{1, i, -1, -i\}$
- 练习: 求环 $\mathbb{Z}[\sqrt{5}], \mathbb{Z}_9$ 的单位群。

假设 R 是一个环，有以下定义

1. 若 R^* 关于乘法运算封闭 (即无零因子), 则 R 称为**无零因子环**.
2. 若 R^* 包含幺元，则称 R 是**幺环**。
3. 若 R^* 关于乘法可交换，则称 R 是**交换环 commutative ring**。
4. 若 $R^* = U(R)$，则称 R 是**除环 Division ring**。
5. 若同时满足 1.2.3 则称为**整环 domain=integral domain**(环论主要研讨的对象)。
6. 同时满足 1.2.3.4 则称为**域 field**。

	封闭	单位元	逆元	交换
幺环		●		
交换环				●
无零因子环	●			
整环	●	●		●
除环/体	●	●	●	
域	●	●	●	●

代表性的例子


all rings
$M_n(\mathbb{R})$
$\mathbb{H}$
commutative rings
$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_6$
$2\mathbb{Z}$
integral domains
R_{-5}
UFDs
$F[x, y]$
$\mathbb{Z}[x]$
PIDs
R_{-43}
R_{-67}
R_{-19}
R_{-163}
Euclidean domains
$\mathbb{Z}$
$F[x]$
fields
$\mathbb{Z}_p$
$\mathbb{C}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{F}_4$
$\mathbb{A}$
$\mathbb{Q}(\pi)$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$

素理想与极大理想

极大理想

Definition

环 A 的**极大理想**是环 A 的真理想 $\mathfrak{m}$, 使真包含其的理想必为环本身.

等价地，交换幺环 A 的极大理想是环 A 的所有真理想中极大元, 其中两个理想的序关系为 $I_1 \leq I_2 \Leftrightarrow I_1 \subset I_2$.

定理

对任意环, 其极大理想均存在.

定理

对交换幺环 A, $\mathfrak{m}$ 是极大理想当且仅当商环 $A/\mathfrak{m}$ 是域.

素理想与极大理想

Definition (素理想)

交换幺环 A 的真理想 $\mathfrak{p}$ 称为**素理想**, 对任意 $x, y \in A$, $xy \in \mathfrak{p}$, 有 $x \in \mathfrak{p}$ 或 $y \in \mathfrak{p}$ 成立.

上述定义是如下素数性质在一般交换环上的推广: 对整数 x, y 和素数 p, 如 $p \mid xy$, 有 $p \mid x$ 或 $p \mid y$ 成立. 当 A 为整数环 $\mathbb{Z}$ 时, 它的素理想即是由某个素数生成的理想或零理想.

性质

交换幺环 A 的理想 I 是素理想, 当且仅当商环 A/I 是整环.

命题

极大理想是素理想.

Thank you!