$N_j(t) = B_j$ 的t级Jordan块的个数

$$= \operatorname{rank} \underline{B}_j^{t-1} + \operatorname{rank} \underline{B}_j^{t+1} - 2\operatorname{rank} \underline{B}_j^{t}$$

$$= (\dim W_j - \dim\ker \underline{B}_j^{t-1}) + (\dim W_j - \dim\ker \underline{B}_j^{t+1}) - 2(\dim W_j - \dim\ker \underline{B}^{t})$$

$$= 2\dim\ker \underline{B}^{t} - \dim\ker \underline{B}_j^{t-1} - \dim\ker \underline{B}_j^{t+1}$$

$$= 2\dim\ker(\underline{A}|_{W_j} - \lambda_j \underline{I})^{t} - \dim\ker(\underline{A}|_{W_j} - \lambda_j \underline{I})^{t-1} - \dim\ker(A|_{W_j} - \lambda_j I)^{t+1}$$

$$= 2\dim\ker(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t} - \dim\ker(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t-1} - \dim\ker(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t+1}$$

$$= 2\left[\dim V - \operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t}\right] - \left[\dim V - \operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t-1}\right] - \left[\dim V - \operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t+1}\right]$$

$$= \operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t-1} + \operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})^{t+1} - 2\operatorname{rank}(\underline{A} - \lambda_j \underline{I})$$

推论1. 域F上n级矩阵的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解成一次因式乘积，则 A 相似于一个 Jordan 形矩阵，其中主对角线上的元素是 A 的全部特征值，主对角元为 λ_j 的约当块总数 $N_j = n - \operatorname{rank}(A-\lambda_j I)$

其中主对角元为 λ_j 的 t 级 Jordan 块个数 $N_j(t) = \operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{t-1} + \operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{t+1} - 2\operatorname{rank}(A-\lambda_j I)^{t}$

这个Jordan形矩阵称为A的一个Jordan标准形，除去约当块的排列次序以外唯一

推论1. 设 $\mathcal{A}$ 是域F上n维线性空间上的线性变换，则 $\mathcal{A}$ 有Jordan标准形 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解成一次因式的乘积

$\Longrightarrow$:

$\mathcal{A}$ 有约当标准形 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_m \end{pmatrix}$

$J_t(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix}$ 的最小多项式是 $(\lambda-\lambda_j)^t$

从而 $\mathcal{A}$ 的最小多项式是一次因式乘积

主对角元为 a 的 r 级 Jordan 块 $J_r(a)$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 等于它的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda-a)^r$

证：$J_r(a)$ 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda-a)^r$

由于 $J_r(a) - aI = J_r(0)$

(引理) $[J_r(0)]^r = 0$ $\quad [J_r(0)]^s \neq 0$ $\quad s<r$ 时

因此 $(J_r(a)-aI)^r = 0$ $\quad s<r$ 时 $(J_r(a)-aI)^s \neq 0$

$\therefore m(\lambda) = (\lambda-a)^r$

推论3 $\mathcal{A}$有约当标准形 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$的特征多项式 $f(\lambda)$ 在$F[\lambda]$中可分解成一次因式乘积

$\Leftrightarrow$

域F上n级矩阵A相似于一个Jordan形矩阵

推论4 设 $A, B \in M_n(F)$ 如果它们的最小多项式(或特征多项式)在$F[x]$中可分解为一次因式的乘积

那么 $A \sim B \Leftrightarrow$ A与B有相同的Jordan标准形

证: $A \sim J_1$, $B \sim J_2$ 于是

$A \sim B \Leftrightarrow J_1 \sim J_2$

$\Leftrightarrow$ J_1与J_2看作域F上n维线性空间V上同一个线性变换$\mathcal{A}$在不同基下的矩阵

$\Leftrightarrow$ J_1与J_2都是$\mathcal{A}$的Jordan标准形

$\Leftrightarrow$ J_1与J_2除了Jordan块排列顺序外是一样的

总结：相同特征值对应的约当块数量 = 特征子空间维数

若 $\begin{pmatrix} J_1^{(1)} & \\ & J_1^{(2)} \end{pmatrix}$ 则 $t = \max\{\dim J_1^{(1)}, \dim J_1^{(2)}\}$

设 $A \in M_n(\mathbb{C})$ 证：A的最小多项式与特征多项式相等的充要条件是A的特征子空间是一维

$\Rightarrow$：显然

$\Leftarrow$：反证，若特征子空间大于一维

相同特征值 $m(\lambda)$ 中 指数为 $\max\{\dim J_1^{(1)}, \cdots, \dim J_1^{(n)}\}$

$F(\lambda)$ 中 指数为 $\dim J_1^{(1)} + \cdots + \dim J_1^{(n)}$

设 f 是域 F 上的线性空间 V 到 F 的一个线性映射，即 f 是 V 到 F 的一个映射，且满足：

$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta) \qquad \forall \alpha,\beta\in V$$

$$f(k\alpha)=kf(\alpha) \qquad \forall k\in F \quad \forall \alpha\in V$$

则 f 称为 V 上的一个线性函数

设 $\dim V=n$，V 中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

V 中任一向量 $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n$，

设 f 是 V 上的一个线性函数，则

$$f(\alpha)=x_1f(\alpha_1)+\cdots+x_nf(\alpha_n) \qquad (1)$$

把(1)式称为 f 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的表达式

任给 F 中 n 个元素 $a_1,\cdots a_n$

存在唯一的线性函数 f 使得

$$f(\alpha_i)=a_i \qquad i=1,\cdots,n$$

$$f(\alpha)=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$$

$\mathrm{Hom}(V,F)$ 称为 V 上的线性函数空间

设 $\dim V=n$ $\qquad$ $\mathrm{Hom}(V,F)$ 记成 V^* $\quad$ 称 V^* 是 V 的对偶空间

$$\dim V^*=\dim \mathrm{Hom}(V,F)=\dim V\cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\dim F}=n$$

所以 V^* 与 V 同构

V 中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 求 V^* 的一个基

F 中给定 n 个元素	V 上的线性函数
$1,0,\cdots,0$	f_1 使得 $f_1(\alpha_1)=1$，$f_1(\alpha_j)=0$，$j\neq 1$
$0,1,0,\cdots,0$	f_2 使得 $f_2(\alpha_2)=1$　$f_2(\alpha_j)=0$　$j\neq 2$
$\vdots$	$\vdots$
$0,\cdots,0,1$	f_n 使得 $f_n(\alpha_n)=1$，$f_n(\alpha_j)=0$　$j\neq n$

设 $k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0$

$$k_1f_1(\alpha_1)+k_2f_2(\alpha_1)+\cdots+k_nf_n(\alpha_1)=0$$

$$k_1f_1(\alpha_2)+k_2f_2(\alpha_2)+\cdots+k_nf_n(\alpha_2)=0$$

$$\vdots$$

$$k_1f_1(\alpha_n)+k_2f_2(\alpha_n)+\cdots+k_nf_n(\alpha_n)=0$$

$\therefore k_1=k_2=\cdots=k_n=0$

$\therefore f_1,\cdots,f_n$ 是 V^* 一组基

称作 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对偶基

$$f_i(\alpha_j)=\begin{cases}1 & j=i\\ 0 & j\neq i\end{cases} \quad (2)$$

记成 $f_i(\alpha_j)=\delta_{ij}$

$\forall$ 中任一向量 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$，则

$$f_j(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}x_i f_j(\alpha_i)=x_j$$

$$\therefore \alpha=\sum_{i=1}^{n}f_i(\alpha)\alpha_i \quad (3)$$

$\forall$ 中任一元素 $f=\sum_{j=1}^{n}k_j f_j$

则 $f(\alpha_i)=\left(\sum_{j=1}^{n}k_j f_j\right)(\alpha_i)$

$$=\sum_{j=1}^{n}k_j f_j(\alpha_i)=k_i$$

因此 $f=\sum_{j=1}^{n}f(\alpha_j)f_j \quad (4)$

定理1 设f是域F上n维线性空间V上的一个线性变换

$$(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) A$$

V的一个基 V的一个基

↓ ↓

对偶基 对偶基

$$(g_1, \cdots, g_n) = (f_1 \cdots f_n) B$$

$$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_n) A^{-1}$$

$$= (\beta_1, \cdots, \beta_n) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

则 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \beta_i$

又据(3)式 $\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} g_i(\alpha_j) \beta_i$

$\Big\} \; c_{ij} = g_i(\alpha_j)$

由于 $(g_1, \cdots, g_n) = (f_1, \cdots, f_n) \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$

因此 $g_i = \sum b$

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} f_j$$

据(4)式

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} g_i(\alpha_j) f_j$$

得 $b_{ji} = g_i(\alpha_j)$

于是 $b_{ji} = c_{ij}$

$$B(j;i) = A^{-1}(i;j) = (A^{-1})^T(j;i)$$

$i=1,\cdots,n \qquad j=1,\cdots,n$

$$\therefore B = (A^{-1})^T$$

$\dim V = n$

V^*的对偶空间$(V^*)^*$，记作V^{**}

把V^{**}称为V的双重对偶空间

$\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V = n$

V中取一个基$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$

V^*中关于$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$的对偶基$f_1, \cdots, f_n$

V^{**}中关于$f_1, \cdots, f_n$的对偶基记作$\alpha_1^{**}, \cdots, \alpha_n^{**}$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\text{同构映射}\sigma"] \arrow[rr, bend left, "\text{同构映射}\tau\sigma"] & V^* \arrow[r, "\text{同构映射}\tau"] & V^{**}
\end{tikzcd}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i f_i \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i^{**} =: \alpha^{**}$$

任给$f \in V^*$

$$\alpha^{**}(f) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right)(f) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i^{**}(f)$$

α^{**}是V^*上的映射

$$\overset{(4)\text{式}}{=} \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i^{**}\left(\sum_{i=1}^n f(\alpha_j) f_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n f(\alpha_j) \alpha_i^{**}(f_j)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \left(f(\alpha_i)\right) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = f(\alpha)$$

于是 V 到 V^{**} 有一个同构映射 τ_0:

$$\alpha \longmapsto \alpha^{**}, \text{其中 } \alpha^{**}(f) = f(\alpha)$$

这种不依赖于基的选择的同构映射，称为一个自然同构

可把 α 与 α^{**} 等同起来　从而可把 V 与 V^{**} 等同起来

V 可看成是 V^* 的对偶空间，因此 V 与 V^* 互为对偶空间

双线性函数

Def 1 设V是域F上的一个线性空间，V×V到F的一个映射f，如果

1° $f(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2,\beta)=k_1f(\alpha_1,\beta)+k_2f(\alpha_2,\beta)$

2° $f(\alpha,l_1\beta_1+l_2\beta_2)=l_1f(\alpha,\beta_1)+l_2(\alpha,\beta_2)$

$\forall\alpha,\beta_1,\beta_2\in V$，$\forall l_1,l_2\in F$

则称f是V上的一个双线性函数

任意给定 $\alpha\in V$

$\alpha_L(\beta):=f(\alpha,\beta)\quad\forall\beta\in V$

易验证 α_L 是V上的一个线性函数

任意给定 $\beta\in V$

$\beta_R(\alpha):=f(\alpha,\beta)\quad\forall\alpha\in V$

易验证 β_R 是V上一个线性函数

设 $\dim V=n$，V中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

V中任意向量 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$　　$\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$

记作X　　记作Y

设f是V上的一个双线性函数，则

$$f(\alpha,\beta)=f\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\alpha_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf(\alpha_i,\alpha_j) \quad (1)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_if(\alpha_i,\alpha_j)\right)y_j$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_if(\alpha_i,\alpha_1),\cdots,\sum_{i=1}^{n}x_if(\alpha_i,\alpha_n)\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}f(\alpha_1,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_1,\alpha_n)\\ f(\alpha_2,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_2,\alpha_n)\\ \vdots&&\vdots\\ f(\alpha_n,\alpha_1)&\cdots&f(\alpha_n,\alpha_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

记作A 称为f在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵

$$=X^TAY \quad (2)$$

把(1)(2)称为f在$\alpha_1,\cdots\alpha_n$下的表达式

反之，任给$A\in M_n(F)$ 令 $f(\alpha,\beta)=X'AY$

易验证，f是V上一个双线性函数

且f在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵恰为A

理由：f在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵的(i,j)元为

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=(a_{i1},\cdots,a_{ij},\cdots,a_{in})\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=a_{ij}$$

$$=A(i,j)$$

定理1. 设f是域F上n维线性空间V的双线性函数

$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C$

V的一组基 V的一组基

f在$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵A

f在$\beta_1,\cdots,\beta_n$ ______ 为B

则$B=C^TAC$

证：

$$B=\begin{pmatrix} f(\beta_1,\beta_1) & \cdots & f(\beta_1,\beta_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\beta_n,\beta_1) & \cdots & f(\beta_n,\beta_n) \end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{array}{c} \text{C的列向量}\ C_1 \quad\quad C_j \quad\quad C_n \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{则}\ \beta_j=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}=(\alpha_1\cdots\alpha_n)\,C_j$$

$$B=\begin{pmatrix} f(\beta_1,\beta_1) & \cdots & f(\beta_1,\beta_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(\beta_n,\beta_1) & \cdots & f(\beta_n,\beta_n) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1^TAC_1 & \cdots & C_1^TAC_n \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^TAC_1 & \cdots & C_n^TAC_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} C_1^T \\ \vdots \\ C_n^T \end{pmatrix}(AC_1\cdots AC_n)$$

$$=C^TAC$$

Def 2. 设 $A,B\in M_n(F)$ 若存在 域F上 的n级可逆 矩阵C使得

$B=C^TAC$

则称 A与B是 合同的, 记作 $A\simeq B$

同一个双线性函数f在V的不同的两基下的度量矩阵是合同的

命题1 设 $A,B\in M_n(F)$ 若 $A\simeq B$ 则 $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(B)$

可验证, 合同是一个等价关系

把双线性函数 f在V的一个基下的度量矩阵的秩 称为 f的矩阵秩,

记作 $\mathrm{rank}_m(f)$

命题2 设 $A,B\in M_n(F)$ 若 $A\simeq B$, 则可以 把A,B看成 域F上n维线性空间

V上的同一个 双线性函数f在V的不同基下的度量矩阵

证: 令 $f(\alpha,\beta):=X'AY$

则 f是 V上的一个双线性函数

且f在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵

恰好是A, 由于 $A\simeq B$, 因此

$B=C^TAC$, 其中 C可逆

令 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C$

据定理1, 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$下的度量矩阵是 $C^TAC=B$

Def 3. 设 f 是域 F 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数

$$\mathrm{rad}_L V := \{\alpha \in V \mid f(\alpha,\beta)=0, \ \forall \beta \in V\}$$

称为 f 在 V 中的左根，是 V 的一个子空间

$$\mathrm{rad}_R V := \{\beta \in V \mid f(\alpha,\beta)=0, \ \forall \alpha \in V\}$$

称为 f 在 V 中的右根，是 V 的一个子空间

Def 4. 若 V 上的双线性函数 f 在 V 中的左根与右根都是 0，则称 f 是非退化的 $\Leftrightarrow$ f 在 V 的一个基下的度量矩阵是满秩的

证：V 中取一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$

f 在此基下的度量矩阵为 A

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$，$\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$

$\alpha \in \mathrm{rad}_L(V) \Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=0 \quad \forall \beta \in V$

$\Leftrightarrow X^T A Y=0, \ \forall Y \in F^n$

$\Leftrightarrow X^T A \varepsilon_i=0, \quad i=1,\cdots,n$

$\Leftrightarrow X^T A(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=0$

$\Leftrightarrow X^T A I=0$

$\Leftrightarrow X^T A=0 \Leftrightarrow A^T X=0$

$\Leftrightarrow X$ 是 n 元齐次方程组 $A^T Z=0$ 的一个解

从而 $\mathrm{rad}_L V=0$

$\Leftrightarrow A^T Z=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A^T)=n$

$\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$

同理 $\mathrm{rad}_R V=0 \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$

Def 1. 域F上线性空间V上的双线性函数

如果 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$，$\forall\alpha,\beta\in V$，那么称f是对称的

如果 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$ $\forall\alpha,\beta\in V$，那么称f是斜对称（反对称）的

$\dim V=n$ f在V的一个基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵为A

f是对称的 $\Leftrightarrow f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$ $\forall\alpha,\beta\in V$

$$\Leftrightarrow \underset{A(i,j)}{\underset{\shortparallel}{f(\alpha_i,\alpha_j)}}=\underset{A(j,i)}{\underset{\shortparallel}{f(\alpha_j,\alpha_i)}} \quad i,j=1,\cdots,n$$

$\Leftrightarrow$ A是对称矩阵

同理，f是斜对称的 $\Leftrightarrow$ A是斜对称矩阵

定理1　设f是特征不为2的域F上n维线性空间V上的一个对称双线性函数，则V中存在一个基，使得f在此基下的度量矩阵是对角矩阵

证：对线性空间的维数n作数学归纳法：

$n=1$时 $V=\langle\alpha\rangle$　$(f(\alpha))$ 是对角矩阵，从而命题为真

假设对于 $n-1$ 维线性空间，命题为真

现在来看n维线性空间V上的对称双线性函数f

若 $f=0$，则命题为真，下面设 $f\neq 0$

我们断言：当F的特征不为2时，存在 $\alpha_1\neq 0$ 使得 $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$

理由：假如 $\forall\alpha\in V$，都有 $f(\alpha,\alpha)=0$

则 $\forall\alpha,\beta\in V$，有

$$0=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+2f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)=2f(\alpha,\beta)$$

由于域F的特征值不为2，因此从上式得

$f(\alpha,\beta)=0$　　从而 $f=0$ 矛盾

因此存在 $\alpha_1\neq 0$ 使得 $f(\alpha_1,\alpha_1)\neq 0$

把 α_1 扩充成V的一个基 $\alpha_1,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$

令 $\tilde{\beta}_i=\beta_i-\dfrac{f(\beta_i,\alpha_1)}{f(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1$　　$i=1,\cdots,n-1$　　由替换定理，$\alpha_1,\tilde{\beta}_1,\cdots,\tilde{\beta}_{n-1}$ 是一组基

则 $f(\alpha_1,\tilde{\beta}_i)=f(\alpha_1,\beta_i)-\dfrac{f(\beta_i,\alpha_1)}{f(\alpha_1,\alpha_1)}f(\alpha_1,\alpha_1)=0$

令 $W=\langle \beta_1,\cdots,\beta_{n-1}\rangle$

则 $V=\langle\alpha_1\rangle \oplus W$

$f|W$ 是 W 上一个对称的线性函数

用归纳假设，W 中存在一个基 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$

使 $f|W$ 在该基下的矩阵是对角矩阵

$$\begin{pmatrix} f(\eta_1,\eta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\eta_{n-1},\eta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

从 (2) (3) 得 $f(\alpha_1,\eta_i)=0 \quad i=1,\cdots,n-1$

于是 f 在 V 的基 $\alpha_1,\eta_1,\cdots,\eta_{n-1}$ 下的度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_1,\alpha_1) & & & 0 \\ & f(\eta_1,\eta_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(\eta_{n-1},\eta_{n-1}) \end{pmatrix}$$

推论 1. 特征不为 2 的域 F 上 n 级对称矩阵 A 一定合同于一个对角矩阵

Def 1. 实数域上的线性空间V上的对称双线性函数 f
如果满足：$\forall \alpha \in V$，有 $f(\alpha,\alpha) \geq 0$，等号成立 $\Leftrightarrow \alpha = 0$
那么称 f 是正定的

命题1. n 维实线性空间V上的对称双线性函数 f 是正定的
$\Leftrightarrow$ 在V的一个基下的度量矩阵满足

A 是对称矩阵 且 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ $X \neq 0$ $X^T A X > 0$

Def 2. n 级实对称矩阵 A 若满足：

$\forall X \in \mathbb{R}^n$ $X \neq 0$ 有 $X^T A X > 0$

则称 A 是正定（对称）矩阵

Def 3. 实线性空间V上的一个正定的对称的双线性函数 f
称为V上的一个内积 把 $f(\alpha,\beta)$ 简记为 (α,β)，把 f 记为 $(\ ,\ )$
若实线性空间V指定了一个内积，则称V是一个实内积空间，
有限维实内积空间称为 Euclid 空间

例1. $\mathbb{R}^n$中 任给 $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $Y\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

令 $(X,Y) := x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n = X'Y$，则 $(\ ,\ )$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一个双线性函数，且在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下度量矩阵为 I，从而 $(\ ,\ )$ 对称，且 $\forall X\in\mathbb{R}^n$，$X\neq 0$，有 $(X,X)>0$

因此 $(\ ,\ )$ 正定，从而是内积 称为标准内积

Def 4. V中向量的长度 $|\alpha| := \sqrt{(\alpha,\alpha)}$
（或记成 $\|\alpha\|$）

$|k\alpha| = \sqrt{(k\alpha,k\alpha)} = \sqrt{k^2(\alpha,\alpha)} = |k||\alpha|$

$\forall k\in\mathbb{R}$，$\forall\alpha\in V$

$|\alpha|=1$，则称 α 是一个单位向量

$\alpha\neq 0$，则 $\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ 是一个单位向量

几何空间V中，$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

定理1. Cauchy - Schwarz 不等式

$\forall \alpha,\beta\in V$, 有 $|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha|\,|\beta|$ 等号成立 $\Longleftrightarrow$ α,β 线性相关

证: 情形1 α,β 线性相关 $\alpha=0$ 或 $\beta=k\alpha$

$(0,\beta)=(00,\beta)=0=|0|\,|\beta|$

$|(\alpha,\beta)|=|(\alpha,k\alpha)|=|k|\,|\alpha|^2=|\alpha|\,|\beta|$

α,β 线性无关 $\forall t\in\mathbb{R}$ $\beta\neq t\alpha$ $\beta-t\alpha\neq 0$

$$0<(t\alpha-\beta,\ t\alpha-\beta)=(t\alpha,t\alpha)+(\beta,\beta)-(t\alpha,\beta)-(\beta,t\alpha)$$

$$=t^2|\alpha|^2-2t(\alpha,\beta)+|\beta|^2 \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

$$\therefore\ \left(-2(\alpha,\beta)\right)^2-4|\alpha|^2|\beta|^2<0$$

即 $|(\alpha,\beta)|<|\alpha|\,|\beta|$

Def 5. 设 $\alpha\neq0$ $\beta\neq0$ 则 α 与 β 夹角

$$\langle\alpha,\beta\rangle:=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha|\,|\beta|}$$

于是 $0 \le \langle \alpha, \beta \rangle \le \pi$

$\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = 0$

<u>Def</u> 6. 若 $(\alpha, \beta) = 0$ 则称 α, β 正交

<u>Def</u> 7 $\vec{\alpha}$, 与 $\vec{\beta}$ 的距离 $d(\alpha, \beta) := |\alpha - \beta|$

易验证 $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$

$d(\alpha, \beta) \ge 0$ 等号成立 $\Leftrightarrow \alpha = \beta$ (正定性)

$d(\alpha, \gamma) \le d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$ (三角不等式)

$$
\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (\alpha+\beta, \alpha+\beta) \\
&= |\alpha|^2 + 2(\alpha, \beta) + |\beta|^2 \\
&\le |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 \\
&= (|\alpha| + |\beta|)^2
\end{aligned}
$$

$\therefore |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|$

Schmidt正交化

定理1. 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是实内积空间V中一个线性无关的向量组

令 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

$\vdots$

$$\beta_s=\alpha_s-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)}{(\beta_j,\beta_j)}\beta_j$$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_j$ 是两两正交的非零向量组

且与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 等价

数归纳法证

推论2　n维 Euclid 空间一定有标准正交基

Euclid空间V，有唯一的内积，这个内积在V的一个基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下的度量矩阵A称为基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) X$，$\beta = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) Y$　有 $(\alpha, \beta) = X' A Y$

性质1.　标准正交基下度量矩阵为 I

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (\alpha, \eta_i) \eta_i \longrightarrow \text{Fourier展开}$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i$$

$$(\alpha, \eta_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i, \eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i (\eta_i, \eta_j) = x_j$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (\alpha, \eta_i) \eta_i$$

Def 1. n级实矩阵A如果满足

$$A^TA=I$$

那么称A是一个正交矩阵

命题2. n级实矩阵A是正交矩阵

$\Leftrightarrow$ $A^TA=I$

$\Leftrightarrow$ A可逆，$A^{-1}=A^T$

$\Leftrightarrow$ $AA^T=I$

性质 1. 若A、B是正交矩阵 AB也是

2. 若A是正交矩阵 A^{-1}也是

3. 若A是正交矩阵 $\det A=\pm 1$

$\Downarrow$

$A^TA=I$ $|A^T||A|=1$ $|A|^2=1$

Def 2. 设 S 是实内积空间 V 的一个非空子集

$$S^{\perp} := \{\alpha\in V \mid (\alpha,\beta)=0,\ \forall \beta\in S\}$$

称为 S 的正交补

易验证 $S^{\perp}$ 是实内积空间 V 的一个子空间

定理3. 设 U 是实内积空间 V 的一个有限维子空间，则

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

证: 先证 $V=U+U^{\perp}$

任取 $\alpha\in V$, $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$　$\alpha_1\in U$　$\alpha_2\in U^{\perp}$

U 中取一个标准正交基 $\eta_1,\cdots,\eta_m$

$$\alpha_1\in U \Leftrightarrow \alpha_1=\sum_{i=1}^{m}\underset{\text{待定}}{k_i}\eta_i$$

$$\alpha_2=\alpha-\alpha_1\in U^{\perp} \Leftrightarrow (\alpha-\alpha_1,\eta_i)=0 \quad i=1,\cdots,m$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\eta_i)=(\alpha_1,\eta_i)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\eta_i)=\left(\sum_{j=1}^{m}k_j\eta_j,\eta_i\right)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\eta_i)=\sum_{j=1}^{m}k_j(\eta_j,\eta_i)=k_i$$

则 $\alpha_1=\sum_{i=1}^{m}(\alpha,\eta_i)\eta_i$　且 $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$

再证 $U\cap U^{\perp}=0$

任取 $\gamma\in U\cap U^{\perp}$，则 $(\underset{U}{\gamma},\underset{U^{\perp}}{\gamma})=0$

$\therefore \gamma=0$

得证

若 $V=U\oplus U^{\perp}$ 则 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1\in U$，$\alpha_2\in U^{\perp}$ 有平行于 $U^{\perp}$ 在 U 上的投影 P_U $P_U(\alpha)=\alpha_1$ 称 P_U 是 V 在 U 上的正交投影

(把 α_1 称为 α 在正交投影 P_U 下的像) 把 α_1 称为 α 在 U 上的正交投影

α_1 是 α 在 U 上的正交投影

$\Leftrightarrow \alpha-\alpha_1\in U^{\perp}$

定理4. 若 $V=U\oplus U^{\perp}$，则 $\forall \alpha\in V$，$\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上的正交投影

$\Leftrightarrow \quad d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\gamma)\ ,\ \forall \gamma\in U$

$\Rightarrow$：设 $\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上的正交投影，则 $\alpha-\alpha_1\in U^{\perp}$

$\forall \gamma\in U,\quad \alpha_1-\gamma\in U$

$$[d(\alpha,\gamma)]^2=|\alpha-\gamma|^2=|\overbrace{\alpha-\alpha_1}^{U^{\perp}}+\overbrace{\alpha_1-\gamma}^{U}|^2$$

勾股定理

$$=|\alpha-\alpha_1|^2+|\alpha_1-\gamma|^2\geqslant|\alpha-\alpha_1|^2=[d(\alpha,\alpha_1)]^2$$

$$d(\alpha,\gamma)\geqslant d(\alpha,\alpha_1)$$

$\Leftarrow$：设 $d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\gamma)\quad \forall\gamma\in U$

设 δ 是 α 在 U 上的正交投影

据刚证必要性，$d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\alpha_1)$

又据已知 $d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\delta)$

$\therefore d(\alpha,\delta)=d(\alpha,\alpha_1)$

$$|\alpha-\alpha_1|^2=|\underbrace{\alpha-\delta}_{U^{\perp}}+\underbrace{\delta-\alpha_1}_{U}|^2=|\alpha-\delta|^2+|\delta-\alpha_1|^2$$

$$=|\alpha-\alpha_1|^2+|\delta-\alpha_1|^2$$

$\therefore |\delta-\alpha_1|^2=0 \qquad \therefore \delta=\alpha_1$

Def 2. 设实内积空间V的一个子空间为U，如果对$\alpha\in V$，存在$\delta\in U$，使得 $d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\gamma)$，$\forall\gamma\in U$

称δ是α在U上的最佳逼近元

当U是有限维，则$V=U\oplus U^{\perp}$

从而$\forall\alpha\in V$，有唯一U上的正交投影α_1

据定理4，α_1就是α在U上的最佳逼近元

同构

Def 3. 设V与V'都是实内积空间，如果V到V'有一个双射σ，且

$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$

$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，$\forall k\in\mathbb{R}$，$\alpha\in V$ 线性同构

$(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$ 保距同构

那么，称σ是实内积空间V到V'的一个同构映射

此时称 …… V与V'是同构的，记作 $V\cong V'$

保距同构σ把V的一个标准正交基映成V'的一个标准正交基

定理5 两个Euclid空间同构

$\Leftrightarrow$ 它们有相同的维数

Def 1. 设$\underline{A}$是实内积空间V上的一个变换

如果$\underline{A}$是满射，且满足：

$(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in V$

则称$\underline{A}$是正交变换

性质：设$\underline{A}$是实内积空间V上的正交变换，则

(1) $|\underline{A}\alpha| = |\alpha| \quad , \forall \alpha \in V$

(2) $\langle \underline{A}\alpha, \underline{A}\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in V$ 且 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

证：$\cos\langle \underline{A}\alpha, \underline{A}\beta \rangle = \dfrac{(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta)}{|\underline{A}\alpha|\,|\underline{A}\beta|} = \dfrac{(\alpha, \beta)}{|\alpha|\,|\beta|} = \cos\langle \alpha, \beta \rangle$

(3) $\underline{A}\alpha \perp \underline{A}\beta \Leftrightarrow \alpha \perp \beta \quad \forall \alpha, \beta \in V$

(4) $\underline{A}$ 一定是线性变换　　　　　　※：没用满射条件

证： 利用 $|\alpha|^2=(\alpha,\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

$$|\underline{A}(\alpha+\beta)-(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta)|^2=(\underline{A}(\alpha+\beta)-(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta),\ \underline{A}(\alpha+\beta)-(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta))$$

$$=|\underline{A}(\alpha+\beta)|^2-(\underline{A}(\alpha+\beta),\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta)-(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta,\underline{A}(\alpha+\beta))+(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta,\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta)$$

$$=|\alpha+\beta|^2-(\underline{A}(\alpha+\beta),\underline{A}\alpha)-(\underline{A}(\alpha+\beta),\underline{A}\beta)-(\underline{A}\alpha,\underline{A}(\alpha+\beta))+|\underline{A}\alpha|^2+2(\underline{A}\alpha,\underline{A}\beta)+|\underline{A}\beta|^2$$

$$=|\alpha+\beta|^2-(\alpha+\beta,\alpha)-(\alpha+\beta,\beta)-(\alpha,\alpha+\beta)-(\beta,\alpha+\beta)+|\alpha|^2+|\beta|^2+2(\alpha,\beta)$$

$$=0$$

同理 $\underline{A}k\alpha=k\underline{A}\alpha$

(5) $\underline{A}$是单射，从而$\underline{A}$是双射（从而可逆） ※：只用了线性变换这一条件

证： 引理：线性映射是单射 $\Leftrightarrow$ $\ker = 0$

$\alpha \in \ker \underline{A} \Leftrightarrow \underline{A}\alpha = 0 \Rightarrow |\underline{A}\alpha| = 0 \Rightarrow |\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

因此 $\ker \underline{A} = 0$ 从而$\underline{A}$是单射

(6) $d(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = d(\alpha, \beta)$

命题1 实内积空间V上的线性变换$\underline{A}$是正交变换 $\Leftrightarrow$ $\underline{A}$是V到自身的保距同构

命题2 正交变换的逆变换也是正交变换

两个正交变换乘积也是正交变换

命题3. Euclid 空间V上的变换$\underline{A}$如果满足

$(\underline{A}\alpha,\underline{A}\beta)=(\alpha,\beta)$ $\alpha,\beta\in V$ 那么$\underline{A}$一定是V上一正交变换

证：因为有(4) $\underline{A}$是线性变换 又由(5) $\underline{A}$是单射

有限维线性空间上的线性变换是单射，则一定是满射

从而$\underline{A}$是V上的正交变换

命题4. 设$\underline{A}$是n维 Euclid 空间V上的线性变换，则下列命题是等价的

(1) $\underline{A}$是正交变换

$\Updownarrow$命题1

(2) $\underline{A}$把V的标准正交基映成标准正交基

(3) $\underline{A}$在V的任一标准正交基$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的矩阵A是正交矩阵

证：

(2)⇒(3)

$$\underline{A}(\eta_1,\cdots\eta_n)=\underbrace{(\eta_1,\cdots,\eta_n)}_{V\text{的正交基}}A$$

$$\|$$

$$\underbrace{(\underline{A}\eta_1,\cdots,\underline{A}\eta_n)}_{\text{也是}V\text{的正交基}}$$

$\therefore$ A是正交矩阵

(3) ⇒ (1)

设 $\underline{A}$ 在 V 的标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵为 A

设 $\alpha = (\eta_1, \cdots, \eta_n)X$，$\beta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)Y$

则 $\underline{A}\alpha = (\eta_1, \cdots, \eta_n)AX$，$\underline{A}\beta = (\eta_1, \cdots, \eta_n)AY$

从而 $(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (AX)^T(AY) = X^TA^TAY \overset{(3)}{=} X^TY = X^TY = (\alpha, \beta)$

因此 $\underline{A}$ 是正交变换

定理2. 设 $\underline{A}$ 是 n 维 Euclid 空间 V 上的正交变换，则 V 中存在一个标准正交基，使得 $\underline{A}$ 在此基下的矩阵为下述的分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & & & \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\theta_m & -\sin\theta_m & & & \\ & & & \sin\theta_m & \cos\theta_m & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ & & & & & & \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$$

Def 1. 设 $\underline{A}$ 是实内积空间 V 上的一个变换

如果 A 满足：$(\underline{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\underline{A}\beta)$，$\forall\alpha,\beta\in V$

那么称 A 是 V 上的一个对称变换

命题 1　实内积空间 V 上的对称变换 $\underline{A}$ 一定是线性变换

证：利用 $(\alpha,\gamma)=(\beta,\gamma)$，$\forall\gamma\in V$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta,\gamma)=0 \quad \forall\gamma\in V$

$\Rightarrow (\alpha-\beta,\alpha-\beta)=0$

$\Rightarrow \alpha-\beta=0$

$\Rightarrow \alpha=\beta$

任取 $\alpha,\beta\in V$　对一切 $\gamma\in V$

$$(\underline{A}(\alpha+\beta),\gamma)=(\alpha+\beta,\underline{A}\gamma)=(\alpha,\underline{A}\gamma)+(\beta,\underline{A}\gamma)$$

$$=(\underline{A}\alpha,\gamma)+(\underline{A}\beta,\gamma)$$

$$=(\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta,\gamma)$$

$\therefore\ \underline{A}(\alpha+\beta)=\underline{A}\alpha+\underline{A}\beta$

类似可证 $\underline{A}k\alpha=k\underline{A}\alpha$

命题2 n维 Euclid 空间 V 上的线性变换 $\underline{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow$ $\underline{A}$ 在 V 的一个标准正交基 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 下的矩阵 A 是对称矩阵

证：设 $\underline{A}(\eta_1, \cdots, \eta_n) = (\eta_1, \cdots, \eta_n)A = (\eta_1, \cdots, \eta_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} &\underline{A}\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\eta_j \\ \text{又有}\ &\underline{A}\eta_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\underline{A}\eta_j, \eta_i)\eta_i}_{\text{Fourier展开}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow a_{ij} = (\underline{A}\eta_j, \eta_i) \quad 1 \le i, j \le n$$

于是 $\underline{A}$ 是对称变换 $\Longleftrightarrow (\underline{A}\alpha, \beta) = (\alpha, \underline{A}\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in V$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{(\underline{A}\eta_j, \eta_i)}_{=a_{ij}} = (\eta_j, \underline{A}\eta_i) = (A\eta_j, \eta_i) = a_{ji}$$

命题3. n级实对称矩阵A的特征多项式$f(\lambda)$的复根都是实数

证：任取$f(\lambda)$的一个复根λ_0，把A看成复数域上的矩阵

于是λ_0是复矩阵A的一个特征值 从而存在$\alpha \in \mathbb{C}^n$且$\alpha \neq 0$，使得

$$A\alpha = \lambda_0 \alpha \qquad (1)$$

两边取共轭复数，$A\bar{\alpha} = \bar{\lambda}_0 \bar{\alpha} \xRightarrow{\text{左乘}\alpha^T} \alpha^T A \bar{\alpha} = \bar{\lambda}_0 \alpha^T \bar{\alpha}$

由于A是实矩阵

(1)式两边取共轭，由于A是对称矩阵 $\alpha^T A = \lambda_0 \alpha^T \xRightarrow{\text{右乘}\bar{\alpha}} \alpha^T A \bar{\alpha} = \lambda_0 \alpha^T \bar{\alpha}$

$\therefore \bar{\lambda}_0 = \lambda_0$

命题4. n级实对称矩阵A的属于不同特征值的特征向量一定是正交的

4'. n维Euclidean空间V上的对称变换A的属于不同特征值的特征向量是正交的

证：设λ_1, λ_2是A的不同特征值，ξ_i是A的属于λ_i的一个特征向量，i=1,2

$$\lambda_1(\xi_1, \xi_2) = (\lambda_1\xi_1, \xi_2) = (A\xi_1, \xi_2)$$
$$= (\xi_1, A\xi_2) = (\xi_1, \lambda_2\xi_2) = \lambda_2(\xi_1, \xi_2)$$

于是 $(\lambda_1 - \lambda_2)(\xi_1, \xi_2) = 0$

由于$\lambda_1 \neq \lambda_2$ 因此 $(\xi_1, \xi_2) = 0$

$AX_1 = \lambda_1 X_1$
$AX_2 = \lambda_2 X_2$

$\lambda_1 X_1^T X_2$
$= X_1^T A^T X_2$
$= X_1^T A X_2$
$= \lambda_2 X_1^T X_2$
$\therefore X_1^T X_2 = 0$

命题5，设 $\underline{A}$ 是实内积空间 V 上的一个对称变换，如果 W 是 $\underline{A}$ 的一个不变子空间，那么 $W^{\perp}$ 也是 $\underline{A}$ 的不变子空间

证：任取 $\beta \in W^{\perp}$，$\forall \alpha \in W$

$$(\underline{A}\beta, \alpha) = (\underset{W^{\perp}}{\beta}, \underset{W}{\underline{A}\alpha}) = 0$$

所以 $\underline{A}\beta \in W^{\perp}$

定理1 设 $\underline{A}$ 是 n 维 Euclidean 空间 V 上的一个对称变换，则 V 中存在一个标准正交基，使得 $\underline{A}$ 在此基下的矩阵是对角矩阵

证：数学归纳法，

$n=1$ 时，显然成立

假设维数为 $n-1$ 时命题为真

现在来看 n 维 Euclidean 空间 V 上的对称变换 $\underline{A}$，据命题3

$\underline{A}$ 有特征值，取 $\underline{A}$ 的一个特征值 λ_1

设 η_1 为 $\underline{A}$ 属于 λ_1 的一个单位特征向量，则

$V = \langle \eta_1 \rangle \oplus \langle \eta_1 \rangle^{\perp}$

由于 $\langle \eta_1 \rangle$ 是 $\underline{A}$ 的不变子空间

$\therefore \langle \eta_1 \rangle^{\perp}$ 也是 $\underline{A}$ 的不变子空间

$\underline{A}|\langle \eta_1 \rangle^{\perp}$ 是 $\langle \eta_1 \rangle^{\perp}$ 的对称变换

据归纳假设 $\underline{A}|\langle \eta_1 \rangle^{\perp}$ 在 $\langle \eta_1 \rangle^{\perp}$ 中存在一个标准正交基 $\eta_2, \cdots, \eta_n$ 下有对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 是 V 的一个标准正交基

$\underline{A}$ 在此基下矩阵是 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

推论1. 设A是n级实对称矩阵，则存在一个n级正交矩阵T

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称A正交相似于对角矩阵

酉空间

Def 1. 复线性空间 V 上的一个二元函数 $(\ ,\ )$

(即 $V\times V$ 到 $\mathbb{C}$ 的一个映射) 满足:

1° $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$ $\forall \alpha,\beta\in V$ (Hermite 性)

2° $(\alpha+\gamma,\beta)=(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)$ $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$ (对第一个变量是线性的)

3° $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in V$ $\forall k\in\mathbb{C}$

4° $(\alpha,\alpha)\geq 0$ 等号成立当且仅当 $\alpha=0$ (正定性)

那么称 $(\ ,\ )$ 是 V 上一个内积,

若复线性空间 V 上指定了一个内积, 则称 V 是一个 酉空间

$$(\alpha,\beta+\delta)=\overline{(\beta+\delta,\alpha)}=\overline{(\beta,\alpha)}+\overline{(\delta,\alpha)}=(\alpha,\beta)+(\alpha,\delta)$$

$$(\alpha,k\beta)=\overline{(k\beta,\alpha)}=\overline{k(\beta,\alpha)}=\overline{k}(\alpha,\beta)$$

称 $(\ ,\ )$ 对第二个变量是半线性的

设 V 是一个酉空间, 则 α 的长度 $|\alpha|:=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$

易证 $|k\alpha|=|k||\alpha|$

定理1. 在酉空间V中，$\forall \alpha,\beta\in V$ 有 $|(\alpha,\beta)|\le|\alpha|\,|\beta|$

等号成立 $\Leftrightarrow$ α,β 线性相关

证、情形1. α,β 线性相关，易证

$|(\alpha,\beta)|=|\alpha|\,|\beta|$

情形2 α,β 线性无关

$\forall t\in\mathbb{C}$，有 $\alpha+t\beta\neq 0$

$0<(\alpha+t\beta,\alpha+t\beta)$

$=|\alpha|^2+\bar{t}(\alpha,\beta)+t\overline{(\alpha,\beta)}+t\bar{t}|\beta|^2$

取 $t=-\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\beta|^2}$，代入上式

$$0<|\alpha|^2-\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2}-\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2}+\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2}=|\alpha|^2-\frac{|(\alpha,\beta)|^2}{|\beta|^2}$$

Def 2. 在酉空间V中，若 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$

则 $\langle\alpha,\beta\rangle:=\arccos\dfrac{|(\alpha,\beta)|}{|\alpha|\,|\beta|}$

不难 $0\le\langle\alpha,\beta\rangle\le\dfrac{\pi}{2}$

酉空间V中：

$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$ （三角不等式）

若α与β正交，则 $|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$

Def 3. 在酉空间V中，$\forall\alpha,\beta\in V$ $d(\alpha,\beta):=|\alpha-\beta|$

(一) n维酉空间的标准正交基

设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个标准正交基

$\alpha=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X \qquad \beta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y$

则 $(\alpha,\beta)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\eta_j\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\overline{y_j}(\eta_i,\eta_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

$$=Y^*X$$

$\alpha=\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i,\eta_i)\eta_i \qquad \alpha$ 的 Fourier 展开

定理3、设 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是 n 维酉空间 V 中的一个标准正交基 令

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)P=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$P=(P_1 \cdots P_j \cdots P_n)$

则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V 的标准正交基

$\Longleftrightarrow P^*P=I$

证. $\beta_j=(\eta_1\cdots\eta_n)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{nj}\end{pmatrix}=(\eta_1\cdots\eta_n)P_j \quad j=1,\cdots,n$

$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V 的标准正交基

$\Longleftrightarrow (\beta_i,\beta_j)=\delta_{ij} \quad 1\le i,j\le n$

$\Longleftrightarrow P_j^*P_i=\delta_{ij}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} P_1^* \\ \vdots \\ P_n^* \end{pmatrix}(P_1\cdots P_n)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow P^*P=I$

Def 5 n级复矩阵 A 如果满足

$A^*A=I$ （其中 $A^*=\overline{A}^T$）

那么称 A 是一个 n 级酉矩阵

A 是 n 级酉矩阵

$\Leftrightarrow A^*A=I \Leftrightarrow A$ 可逆 $A^{-1}=A^*$

$\Leftrightarrow AA^*=I$

1=) 正交补

定理4 设 U 是酉空间 V 中的一个有限维子空间，则

$V=U\oplus U^\perp$

若 $V=U\oplus U^\perp$ 则平行于 $U^\perp$ 在 U 上的投影 P_U 称为 V 在 U 上的正交投影

设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ $\alpha_1\in U$ $\alpha_2\in U^\perp$

把 α_1 称为 α 在 U 上的正交投影

$\alpha_1\in U$ 是 α 在 U 上的正交投影 $\Leftrightarrow \alpha-\alpha_1\in U^\perp \Leftrightarrow d(\alpha,\alpha_1)\le d(\alpha,\gamma)$ $\forall\gamma\in U$

Def 6. 酉空间 V 的一个子空间 U，对于 $\alpha\in V$，如果存在 $\delta\in U$，使得

$d(\alpha,\delta)\le d(\alpha,\gamma)$ $\forall\gamma\in U$

那么称 δ 是 α 在 U 上的最佳逼近元

若 U 有限维，则 $\forall\alpha\in V$，α 在 U 上都有最佳逼近元，它就是 α 在 U 上的正交投影

Def 7. 设V是实内积空间，若V中每一个 Cauchy 序列都在V中有极限，则称V是一个 Hilbert 空间

定理5. 设V是一个Hilbert空间，若U是V的一个闭子空间，则V中任一向量α在U上都有最佳逼近元，从而

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

证：《泛函分析》

定理6. 两个有限维酉空间同构 $\Leftrightarrow$ 它们的维数相同

酉变换

Def 1. 酉空间V上的一个变换$\underline{A}$如果是满射，且满足

$$(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in V$$

那么称$\underline{A}$是V上的一个酉变换

命题一：酉空间V上的变换$\underline{A}$是酉变换

$\Leftrightarrow$ $\underline{A}$是V到自身的一个同构映射

命题2：n维酉空间V上的变换$\underline{A}$

如果满足 $(\underline{A}\alpha, \underline{A}\beta) = (\alpha, \beta) \quad \forall \alpha, \beta \in V$

那么$\underline{A}$是V上的一个酉变换

命题3. n维酉空间V上的酉变换$\underline{A}$的特征值的模等于1

证：设λ_0是$\underline{A}$的一个特征值

ξ是$\underline{A}$的属于λ_0的一个特征向量

则 $(\underline{A}\xi, \underline{A}\xi) = (\lambda_0\xi, \lambda_0\xi) = \lambda_0\overline{\lambda_0}(\xi, \xi)$

$\quad\ \ \| $

$(\xi, \xi) \quad \therefore |\lambda_0|^2 = 1$

$|\lambda_0| = 1$

命题4. 设$\underline{A}$是酉空间V上的一个酉变换，若W是V的一个有限维子空间且W是$\underline{A}$的一个不变子空间，则$W^{\perp}$也是$\underline{A}$的一个不变子空间

证：任取$\beta \in W^{\perp}$ 由已知得

$\underline{A}|W$是W上的一个线性变换

由于$\underline{A}$是V到自身的单射，又由于W有限维，因此$\underline{A}|W$是满射

任给$\alpha \in W$，从而存在$\gamma \in W$使得$\underline{A}\gamma = \alpha$

于是 $(\underline{A}\beta, \alpha) = (\underline{A}\beta, \underline{A}\gamma) = (\beta, \gamma) = 0$

从而$W^{\perp}$是$\underline{A}$的不变子空间

定理1. 设$\underline{A}$是n维酉空间V上的一个酉变换，则V中存在一个标准正交基，使得$\underline{A}$在此基下的矩阵是对角矩阵

推论1. n级酉矩阵一定相似于一个对角矩阵

证：对酉空间的维数作数学归纳法，

$n=1$时，命题显然成立

假设维数为$n=m-1$时，命题为真

~~来~~看m维酉空间V上的酉变换A

取$\underline{A}$的一个特征值λ_1，设η_1是A的属于λ_1的一个单位特征向量，则

$$V=\langle\eta_1\rangle\oplus\langle\eta_1\rangle^{\perp}$$

由于$\langle\eta_1\rangle$是$\underline{A}$的不变子空间

因此$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$也是……

从而$\underline{A}|\langle\eta_1\rangle^{\perp}$是$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$上的一个酉变换

据归纳假设$\langle\eta_1\rangle^{\perp}$存在一个标准正交基，

$\eta_2,\cdots,\eta_n$ 使得$\underline{A}|\langle\eta_1\rangle^{\perp}$在此基下矩阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

从而A在$\eta_1,\cdots,\eta_n$下的矩阵为 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$

Hermite 变换

Def 1. 酉空间V上的一个变换$\mathcal{A}$如果满足 $(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$

$\forall \alpha,\beta\in V$ 那么称$\mathcal{A}$是V上的一个Hermite变换

命题2. n维酉空间V上的线性变换$\mathcal{A}$是Hermite变换 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$在V的一个标准正交基下的矩阵A满足 $A^*=A$

此时称A是一个Hermite矩阵

命题3. n维酉空间V上的Hermite变换$\mathcal{A}$的特征值一定是实数

证:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}\xi,\xi)=(\lambda_0\xi,\xi)=\lambda_0(\xi,\xi)\\
&\quad\parallel\\
&(\xi,\mathcal{A}\xi)=(\xi,\lambda_0\xi)=\overline{\lambda_0}(\xi,\xi)
\end{aligned}
$$

$\therefore \lambda_0=\overline{\lambda_0}$

命题4. 设$\mathcal{A}$是酉空间V上的一个酉变换, 若W是V的一个有限维子空间 且W是$\mathcal{A}$的一个不变子空间, 则$W^{\perp}$也是$\mathcal{A}$的一个不变子空间

定理1. 设$\mathcal{A}$是n维酉空间V上的一个酉变换，则V中存在一个标准正交基，使得$\mathcal{A}$在此基下的矩阵是对角矩阵

推论1. n级酉矩阵一定酉相似于一个对角矩阵

设f是域F上n维线性空间V上的一个对称双线性函数，f在V的一个基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量矩阵为A

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)X$，$\beta=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Y$

则 $f(\alpha,\beta)=X^TAY=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$

从而 $f(\alpha,\alpha)=X^TAX=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

称为一个二次函数

n元多项式环的概念和通用性质

Def 1 设F是一个域，$x_1,\cdots,x_n$是n个符号，形如下述的表达式：

$$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}a_{i_1i_2\cdots i_n}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n},\quad(1)$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_n\in\mathbb{N}$，$a_{i_1\cdots i_n}\in F$，称为系数，且只有有限个系数不为0，如果满足：两个这种形式的表达式相等当且仅当它们含有完全相同的项（除去系数为0的项以外），那么称这种表达式是域F上的一个n元多项式，此时称$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个无关不定元

$F[x_1,\cdots,x_n]:=\{$域F上n元多项式$\}$

规定：加法，乘法，

易验证 $F[x_1,\cdots,x_n]$ 成为一个有单位元的交换环，称为域F上n元多项式环

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1,\cdots,i_n}\, x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$$

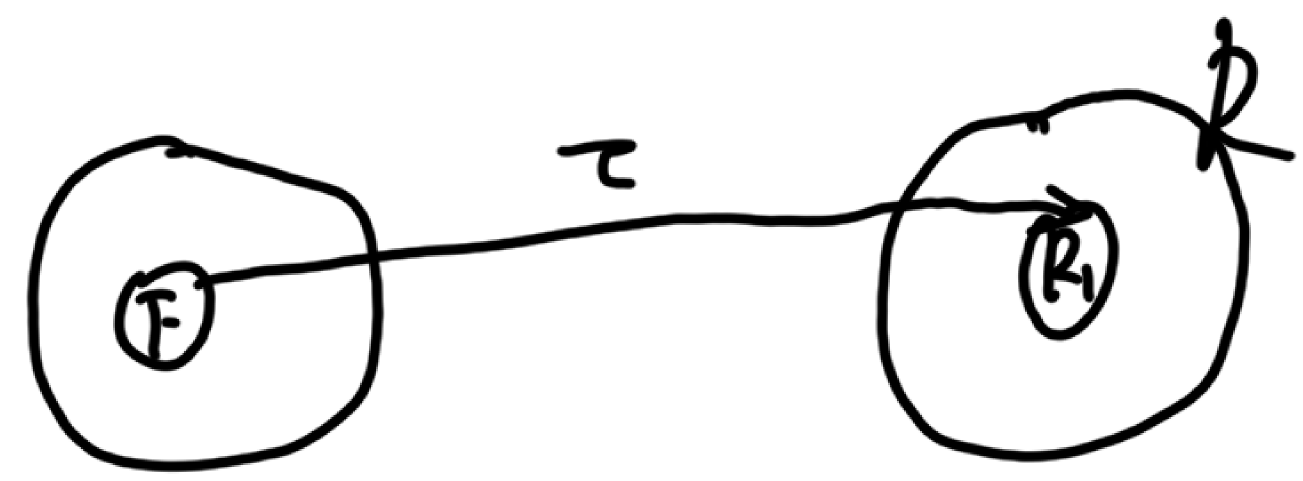
Def 2. 若$f(x_1,\cdots,x_n)$的每个系数不为0的单项式的次数都等于m，则称$f(x_1,\cdots,x_n)$为m次齐次多项式

定理1. (n元多项式环的通用性质) 设F是一个域，R是一个有单位元的交换环，且域F到R的一个子环R_1(含有R的单位元)有一个同构映射τ，任给$t_1,\cdots,t_n\in R$，令

$$\sigma_{t_1,\cdots,t_n}: F[x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow R$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_n} a_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\longmapsto \sum_{i_1,\cdots,i_n}\tau(a_{i_1\cdots i_n})\, t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}$$

则$\sigma_{t_1\cdots t_n}$是$F[x_1,\cdots,x_n]$到R的一个映射，使得



$\sigma_{t_1\cdots t_n}(x_i)=t_i$，$i=1,\cdots,n$

且$\sigma_{t_1,\cdots,t_n}$保持加法和乘法运算，把映射$\sigma_{t_1\cdots t_n}$称为$x_1,\cdots,x_n$分别用$t_1,\cdots,t_n$代入

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX \quad (1)$$ 其中$a_{ij}=a_{ji}$，$\therefore A$是对称矩阵

称为域F上的一个n元二次型

(1)式的矩阵A称为二次型X^TAX的矩阵，且唯一

$f(x_1,\cdots,x_n)=X^TAX$

$x_1,\cdots,x_n$ 分别用 $c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n$ 代入

从(2)式得 $g(x_1,\cdots,x_n)=f(c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n)$

$$=(c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n)A\begin{pmatrix}c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n\\ \vdots\\ c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n\end{pmatrix}$$

$$=(CX)^TA\begin{array}{cc} C & X\\ \begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ &\vdots&\\ c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\end{array}$$

$$=X^TC^TACX$$

由于 $(C^TAC)^T=C^TAC$

从而 $g(x_1,\cdots,x_n)=X^TC^TACX$ 是一个n元二次型

$g(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵是 C^TAC

Def 2 $x_1,\cdots,x_n$ 分别用 $c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n,\cdots,c_{n1}x_1+\cdots+c_{nn}x_n$ 代入

简称为 X 用 CX 代入，其中 $C=\begin{pmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nn}\end{pmatrix}$

若 C 是可逆矩阵，称 X 用 CX 代入是一个非退化的线性替换

注：可模上记作 $X=CY$，其中 $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

Def 3. 域F上两个n元二次型 X^TAX 和 X^TBX，如果存在一个非退化的线性替换：X用CX代入，使得 X^TAX 变成 X^TBX，称这两个二次型等价，可验证满足 自反 对称、传递 是等价关系，

命题1. 域F上n元二次型 $X^TAX \cong X^TBX \iff A \simeq B$

$$\Updownarrow \qquad\qquad B = C^TAC$$

$$\Updownarrow$$

证：

X用CX代入，X^TAX 变成 $X^TBX \iff X^TBX = X^T(C^TAC)X$

定理1. 特征不为2的域F上的n元二次型 X^TAX 一定等价于一个只含平方项的二次型：$d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$ 称为 X^TAX 的一个标准形，X^TAX 的任一标准形中系数不为0的平方项的个数 = rank A

证：根据 特征不为2的域F上任一n级对称矩阵A一定合同于一个对角矩阵，因此 $A \simeq \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ 从而其中系数不为0的平方项个数等于 $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

定理2. 标准形可写作 $\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$ 其中 $\lambda_1,\cdots\lambda_n$ 是A的全部特征值

证：由于A是实对称矩阵，因此存在一个正交矩阵T，使得 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

……

实二次型的规范型

n元实二次型 X^TAX，设 $\mathrm{rank}(A)=r$

$$X^TAX \overset{X用CY代入}{\cong} d_1x_1^2+\cdots+d_px_p^2-d_{p+1}x_{p+1}^2-\cdots-d_rx_r^2$$

其中 $d_i>0$，$i=1,2,\cdots,p,p+1,\cdots,r$

接着 x_i 用 $\frac{1}{\sqrt{d_i}}x_i$ 代入，$i=1,\cdots,p,p+1,\cdots,r$

$$X^TAX \cong x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$$

称为 X^TAX 的规范形

（系数只有 $\pm1, 0$ 的标准形）

定理1.（惯性定理）n元实二次型 X^TAX 的规范形是唯一的

证：$X^TAX \simeq x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$ (1)

$X^TAX \simeq x_1^2+\cdots+x_q^2-x_{q+1}^2-\cdots-x_r^2$ (2)

要证 $q=p$，则 X^TAX 的规范形唯一

$$D_1=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&-1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&-1&\\&&&&&&0\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}p\text{个}\\ \}r-p\text{个}\end{matrix}\quad D_2=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&1&&&&\\&&&-1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&-1&\\&&&&&&0\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\}q\text{个}\\ \}r-q\text{个}\end{matrix}$$

由(1)(2)得，$D_1\simeq D_2$，于是 D_1 与 D_2 可看成 n维实线性空间V上同一个对称、双线性函数

f 在V的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 和基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的度量矩阵

令 $V_1=\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_p\rangle$ $V_2=\langle\beta_{q+1}\cdots\beta_n\rangle$

任取 $\alpha\in V_1\cap V_2$ 于是 $\alpha=\sum_{i=1}^{p}a_i\alpha_i$ $\alpha=\sum_{j=q+1}^{n}b_j\beta_j$

$$f(\alpha,\alpha)=(a_1,\cdots,a_p,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}1&&&&&0\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\0&&&&&-1\\&&&&&&0\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_p\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=a_1^2+\cdots+a_p^2$$

$$f(\alpha,\alpha)=(0,\cdots,0,b_{q+1},\cdots,b_n)\begin{pmatrix}1&&&0\\&\ddots&&\\&&-1&\\0&&&\ddots\\&&&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ b_{q+1}\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=-b_{q+1}^2-\cdots-b_r^2$$

从而 $a_1^2+\cdots+a_p^2=-b_q^2-\cdots-b_r^2$

$\therefore a_1=\cdots=a_p=b_q=\cdots=b_r=0$

$\therefore \alpha=V_1\cap V_2=0$

$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)\leq\dim V$

$p+(n-q)\leq n \Rightarrow p\leq q$

由于(1)，(2)地位对称

$\therefore p\geq q$

$\therefore p=q$

Def 1. n元实二次型 X^TAX 的规范形中系数为 $+1$ 的平方项个数 p 称为 X^TAX 的正惯性指数，…… -1 …… $r-p$ 称为……负……

$p-(r-p)=2p-r$ 称为 X^TAX 的符号差

两个n元实二次型 $X^TAX \simeq X^TBX \Leftrightarrow$ 它们有相同的规范型

$\Leftrightarrow$ 它们有相同的秩和相同的正惯性指数

两个对称矩阵 $A \simeq B \Leftrightarrow$ 有相同规范型

$\Leftrightarrow$ 相同秩、正惯性指数

正定二次型

Def 1. n元实二次型 X^TAX 如果 $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$ 都有 $\alpha^T A \alpha > 0$

那么称 X^TAX 是一个正定二次型

定理1. n元实二次型 X^TAX，下列命题等价

(1) X^TAX 是正定的

(2) X^TAX 的规范型为 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$

(3) X^TAX 的任一个标准型中平方项的系数全大于0

(4) 正惯性指数为 n

证：(1) ⟹ (2)　设 X^TAX 正定

$$X^TAX \cong X^TC^TACX = x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_r^2$$

假如 $p<n$　则 x_n^2 的系数为 -1 或 0

取 $\alpha = C\varepsilon_n$，则

$\alpha^TA\alpha = \varepsilon_n^TC^TAC\varepsilon_n = -1$ 或 0

矛盾　$\therefore p=n$

(3) ⟹ (1)

设 $X^TAX \cong X^T(C^TAC)X = d_1x_1^2+\cdots+d_nx_n^2$

其中 $d_i > 0$　$i=1,\cdots,n$

任取 $\alpha \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$　令 $\beta = C^{-1}\alpha$，则 $\beta \neq 0$，$\alpha = C\beta$

于是 $\alpha^TA\alpha = (C\beta)^TA(C\beta) = \beta^T(C^TAC)\beta = (b_1 \cdots b_n)\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} > 0$

n级实对称矩阵A是正定矩阵

$:\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha \neq 0$ 都有 $\alpha^T A \alpha > 0$

$\Leftrightarrow$ n元实二次型 X^TAX 是正定的

定理2. n级实对称矩阵A是正定矩阵

$\Leftrightarrow$ $A \simeq I$

$\Leftrightarrow$ A的合同标准形中主对角元全大于0

$\Leftrightarrow$ A特征值全大于0

A正定 $\Leftrightarrow$ $A \simeq \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i > 0$

$\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i > 0 \Leftrightarrow |d_1| > 0$, $\begin{vmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{vmatrix} > 0$, $\cdots$, $\begin{vmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{vmatrix} > 0$

顺序主子式

定理3. n级实对称矩阵是正定的 $\Leftrightarrow$ A的所有顺序主子式全大于0