拓扑性质

——可分性

闫少昀

2024 年 1 月 16 日

稠密子集 & 可数

定义 1

设 $(\mathcal{X}, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，A 是 $\mathcal{X}$ 的一个非空子集，如果对于任意的非空开集 $U \in \mathscr{T}$，满足 $A \cap U \neq \varnothing$，则称 A 为 $\mathcal{X}$ 的稠密子集.

例如，有理数在实数中稠密.

定义 2

可数 $=$ 有限 $+$ 无限可数，换言之有限集是可数集，能与正整数建立一一对应关系的无限集也是可数集.

例如，有限点集都是可数集，有理数集、自然数集是可数集，实数集、复数集不是可数集.

例题

例子 1

证明：设集合 $\mathcal{X} = \{a, b, c\}, \mathscr{T} = \{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \mathcal{X}\}$，$\mathcal{X}$ 的一个子集 $A = \{a, c\}$ 是 $\mathcal{X}$ 的稠密子集.

证明.

证明的方法是验证 A 与 $\mathcal{X}$ 中的每一个非空开集作交集，如下：

$$A \cap \{a\} = \{a\} \neq \varnothing$$
$$A \cap \{a, b\} = \{a\} \neq \varnothing$$
$$A \cap \mathcal{X} = A \neq \varnothing$$

可见，子集 A 与每一个非空开集的交都不是空集，因此 A 确实是 $\mathcal{X}$ 的稠密子集. $\square$

练习

(1) 验证在 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑，有理数为该拓扑空间的稠密子集.

(2) 证明：$\mathcal{X}$ 的非空子集 A 为 $\mathcal{X}$ 的稠密子集，当且仅当 $\overline{A}=\mathcal{X}$.

定义 3

存在可数稠密子集的拓扑空间被称为可分空间，否则称为不可分空间；如果一个拓扑空间是可分空间，我们就称这个拓扑空间具有可分性.

需要强调的是

(1) 存在

(2) 可数稠密子集

例如，一维欧式空间 $\mathbb{E}^1$ 是可分空间，因为存在可数稠密子集 $\mathbb{Q}$. 同理，n 维欧式空间 $\mathbb{E}^n$ 也是可分空间.

例题

例子 2

验证一维欧式空间 $\mathbb{E}^1$ 是可分空间.

我们通常所谓的一维欧式空间，往往默认就是 $\mathbb{R}$ 上的标准拓扑.

- 存在可数子集 $\mathbb{Q}$
- 说明 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{E}^1$ 中每一个非空开集的交不空.

第一点是显然成立的，因此我们需要说明的就是后者.

例题

证明.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}\text{与开区间的交不空}\\
\Rightarrow&\text{由于任何开区间}(a,b)\text{中都有无穷多个有理数}\\
\Rightarrow&\text{开区间与}\mathbb{Q}\text{交不空}\\
\Rightarrow&\mathbb{Q}\text{是}\mathbb{E}^1\text{的可数稠密子集}\\
\Rightarrow&\mathbb{E}^1\text{是可分空间}
\end{aligned}$$

□

我们再来看另外一个例子

例子 3

包含着不可数多个点的离散空间是不可分空间.

这个问题的要点在于，我们只需要转化为说明 $\mathcal{X}$ 中任何一个可数子集 A 都不是稠密子集，即可.
由于在离散空间中，任何子集都是既开又闭的，因此只有 $A = \overline{A}$；而因为 A 又是一个可数集，因此 $\overline{A}$ 也是一个可数集，但是 $\mathcal{X}$ 本身是一个不可数集，可数集又必然不可能等于不可数集，因此我们就证明了这个问题.

可商的

我们来说明一些重要的性质：

定理 1

可分性是满的连续映射下不变的性质.

定理 2

可分性是拓扑不变的性质.

定理 3

可分性是可商的.

不可遗传的

讨论完可分性是可商的之后，我们讨论可分性是否为可遗传的.

定理 4

可分性是不可遗传的.

什么是可遗传的呢？如果集合 $\mathcal{X}$ 上有某种性质 P，那么在拓扑空间 $\mathcal{X}$ 的子空间上也具有性质 P，则称性质 P 是可遗传的.

不可遗传的

我们先来构造一个不可分空间:
设 $(\mathscr{X}, \mathscr{T})$ 是一个不可分空间, ∞ 是任意一个不属于 $\mathscr{X}$ 的元素,
令 $\mathscr{X}^* = \mathscr{X} \cup \{\infty\}$ 以及 $\mathscr{T}^* = \{A \cup \{\infty\} | A \in \mathscr{T}\} \cup \{\varnothing\}$
我们要说明的就是, $\mathscr{X}^*$ 是一个可分空间.

- 首先说明 $\mathscr{X}^*$ 是一个拓扑空间
- 然后找到一个可数稠密子集, 实际上就是 $\{\infty\}$
- 最后 $\mathscr{X}$ 显然就是 $\mathscr{X} \cup \mathscr{X}^*$ 的子空间

按照如上三步我们就能证明出来——可分性是不可遗传的.

可乘的

最后一个定理与乘积空间有关，我们要说明的是

定理 5

可分性是可乘的.

Thanks