拓扑 Topology II

拓扑学讨论 Topology talking

梁家浩

华南理工大学数学学院

2023.1.16 晚. 线上 20:00-21:30

Contents

1 同胚

2 拓扑的构造
- 商拓扑
- 拓扑基
- 度量诱导的拓扑
- 乘积拓扑

3 拓扑比较

同胚

同胚的概念

Definition (同胚与拓扑变换)

设 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间，若映射 $f:X\to Y$ 满足

- f 可逆。
- f,f^{-1} 都连续。

则称 f 是一个同胚（Homemorphism)。特别地 $X=Y$ 则称 f 为拓扑变换。

Definition (同胚的)

若两个拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X),(Y,\mathcal{T}_Y)$ 存在同胚 $f:X\to Y$，则称这两个拓扑空间是同胚的（Homeomorphic)。记为 $(X,\mathcal{T}_X)\cong(Y,\mathcal{T}_Y)$

同胚的性质和意义

Theorem (同胚的性质)

同胚的复合映射也是同胚，同胚的逆映射也是同胚。并且给定一个拓扑空间，所有的拓扑变换在映射复合运算下构成一个群。

- 例 1：标准拓扑下，$\mathbb{R}$ 与任意开区间 (a, b) 是同胚的。
- 例 1：标准拓扑下，$\mathbb{R}$ 与 (a, ∞) 是同胚的。

同胚的性质和意义

Definition (拓扑性质)

在拓扑变换下保持不变的性质称为拓扑性质。

- 集合的开闭
- 连通性、紧性、道路连通性
- （流形）欧拉示性数、亏格
- .....

拓扑的构造

商拓扑

Definition (自然投射)

集合 X 上定义了等价关系，则诱导了一个自然投射

$$\pi : X \to X/\sim, \pi(a) = [a]$$

Definition (商拓扑)

给定一个拓扑空间 $(X, \mathcal{T}_X)$ 以及等价关系 $\sim$，则诱导了一个商集上的拓扑

$$\mathcal{T}_{X/\sim} := \left\{ U \subseteq X/\sim \middle| \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X \right\}$$

例如：$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim$ 的拓扑，其中等价关系是 $x \sim y$ 当且仅当 $x - y \in \mathbb{Z}$

问题：$\mathbb{R}^n$ 标准拓扑是什么？

- 第一种方法：定义广义开区间。
- 第二种方法：度量诱导
- 第三种方法：乘积拓扑

拓扑基的概念

Definition (拓扑基 Topological Basis)

若 X 的子集族 $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ 满足

- $\forall x \in X$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$
- 若 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 且 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ 则有

$$\forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$$

则称集合 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个**拓扑基**

- $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{$所有的开球$\}$ 是拓扑基。
- $\mathcal{B} = \{\{x\} | x \in X\}$ 也是拓扑基

生成的拓扑

Theorem (由拓扑基生成的拓扑)

设 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个拓扑基，定义它的生成的集族

$$\bar{\mathcal{B}} := \{U | U\text{是若干}\mathcal{B}\text{中集合的并集}\}$$

那么 $\bar{\mathcal{B}}$ 是 X 的一个拓扑，且是包含 $\mathcal{B}$ 的最小拓扑。

度量拓扑

引理

设 (X,d) 为度量空间，则 $\mathcal{B}=\{$所有的开球$\}$ 是拓扑基。

Definition (度量拓扑)

设 (X,d) 为度量空间，则由 $\mathcal{B}=\{$所有的开球$\}$ 生成的拓扑称为由度量诱导 (induce) 的拓扑。

$\mathbb{E}^n$ 空间

定义 $(\mathbb{R}^n,d)=\mathbb{E}^n$，其中 d 是欧氏度量，称为 n 维欧氏空间 (**Euclidean space**)，也表示标准拓扑空间。

度量拓扑

- 例 1：离散度量诱导的拓扑的离散拓扑。
- 例 2：由 $\mathbb{R}^n$ 上的欧氏度量诱导的拓扑是标准拓扑。

性质

设 $\mathcal{T}$ 是度量空间 X 中由度量诱导的拓扑，则对于 $U \subset X$ 有

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U$$

拓扑基

引理

设 $(X, \mathcal{T}_X)$ 与 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ 是两个拓扑空间，则子集族

$$\mathcal{B} = \{U \times V | U \in \mathcal{T}_X, V \in \mathcal{T}_Y\}$$

是集合 $X \times Y$ 的一个拓扑基。由此拓扑基生成的拓扑称为乘积拓扑。

证明关键：

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

例子

设 O 是原点，定义单位开球体

$$\mathrm{Int}D^n := \{x \in \mathbb{E}^n : d(x, O) \leqslant 1\}$$

存在同胚

$$f(x) = \frac{x}{1 - d(x, O)}$$

从而

$$\mathrm{Int}D^n \cong E^n$$

练习

1. 求证以下拓扑空间同胚 (默认是标准拓扑和子空间拓扑)
   - 平面挖洞
   $$\mathbb{E}^2 - \{(0,0)\}$$
   - 圆柱面
   $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1\}$$
   - 单叶双曲面
   $$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$
2. 求证:
   $$\mathcal{B} := \{(-\infty, a) \,|a \in \mathbb{Q}\}$$
   是 $\mathbb{R}$ 的拓扑基，并求由此生成的拓扑。

拓扑比较

拓扑的比较

Definition

给定集合 X 上的不同拓扑 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$，若

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$$

那么称 $\mathcal{T}_1$ 比 $\mathcal{T}_2$ 粗糙 (coarser)，$\mathcal{T}_2$ 比 $\mathcal{T}_1$ 精细 (finer)。

拓扑比较方法

Theorem (拓扑更精细的充要条件)

给定集合 X 上的不同拓扑 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$，设 $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ 分别是拓扑 $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ 的拓扑基，那么下面条件等价

- $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$
- $\forall x \in X,$ 若$x \in B \in \mathcal{B},$ 则$\exists B' \in \mathcal{B}',$ 使得$x \in B' \subseteq B$

Thank you!