课程设计报告书

A Simple Proof of $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ and Related Identities

学　院　数学学院

专　业　数学与应用数学

学生姓名 余梓鹏

学生学号 202367400251

指导教师 孙浩

课程编号 (2023-2024-1)-040101201-01

课程学分 2.0

起始日期 2023 年 11 月 9 日

1 选题背景

对于经典问题巴塞尔问题的四种简单解法。运用三角函数的知识通过不同的思路使用多种解法解决该问题。以及将这种方法拓展到其他问题上。

2 过程论述

巴塞尔问题：

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6} \tag{1}$$

我们首先可以证明该级数收敛：

证明. 因为 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$

所以 $0<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots<2$

得证 □

2.1 法一：运用 Tannery's Theorem

在证明该问题之前, 先对之后证明会用到的 Tannery's Theorem 进行证明

定理 2.1 (Tannery's Theorem)**.** *若* $S_n=\sum_{k\le 0} f_{k(n)}$ *收敛, 且* $\lim_{n\to\infty} f_{k(n)}=f_k$ *,* $\left|f_{k(n)}\right|\le M_k$ *,* $\sum_{k=0}^{\infty} M_k\le\infty$ *，可得*

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

证明. 由于级数 M_k 收敛，故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_{(\varepsilon)}$, $k>N_{(\varepsilon)}$ 时 $\sum_{k>N_{(\varepsilon)}} M_k<\frac{\varepsilon}{3}$

因为每一项 $f_{k(n)}$ 关于 n 存在极限, 故 $\forall k$, $\exists N_{k(\varepsilon)}$, $n\ge N_{k(\varepsilon)}$ 时, 满足

$$\left|f_{k(n)}-f_k\right|<\frac{\varepsilon}{3N_{(\varepsilon)}}$$

令 $\bar{N}_{(\varepsilon)}=max\left\{N_{1(\varepsilon)},...,N_{N(\varepsilon)}(\varepsilon)\right\}$ $n>\bar{N}_{(\varepsilon)}$ 时

$$\left|S_{(n)}-\sum_{k=0}^{\infty}f_k\right| \le \sum_{k=0}^{N_{(\varepsilon)}}\left|f_{k(n)}-f_k\right|+\sum_{k>N(\varepsilon)}\left|f_{k(n)}-f_k\right|$$
$$\le \sum_{k-0}^{N_{(\varepsilon)}}\left|f_{k(n)}-f_k\right|+2\sum_{k>N_{(\varepsilon)}}M_k<\varepsilon$$

得证 □

通过该方法我们也可以将 e 的级数写法表达出来:

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k}$$

证明. $(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$ ，令 $a_k(n)=\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$

$$\lim_{n\to\infty}a_k(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!n^k}=\frac{1}{k!}$$

且 $a_k(n)\le\frac{1}{k!}$

得到

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

□

现在有了准备工作我们再重新审视对自然数倒数平方的求和, 我们从三角函数出发，根据

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi+x}{2}}\right]$$

我们可以根据 $\sin^2\frac{\pi}{2}=1$ 得到

$$1=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3}{4}\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{8}}+\frac{1}{\sin^2\frac{3}{8}\pi}+\frac{1}{\sin^2\frac{5}{8}\pi}+\frac{1}{\sin^2\frac{7}{8}\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2^{n+1}}\pi}$$

因为 $\sin\alpha = -\sin(\pi-\alpha)$ ，故

$$\frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2^{n+1}}\pi}$$

$$= \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2^{n+1}}\pi} \tag{2}$$

因为我们有

$$\lim_{N\to\infty} N\sin\frac{x}{N} = x \tag{3}$$

这个等式

令 $N = 2^n, x = \frac{2k+1}{2}\pi$

（2）可化为

$$\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi} \tag{4}$$

在（4）中，由于有（3）这个等式, 故第 k 项关于 N 存在极限

下面证明第 k 项有界，并且控制级数收敛：

证明. 因为 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$

所以第 k 项

$$kth\ term = \frac{2}{N^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi} < \frac{2}{(2k+1)^2} \tag{5}$$

故第 k 项有界

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{k^2}$$

因为（1）收敛，故 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{(2k+1)^2}$ 收敛

□

所以 Tannery's Theorem 可用于（4）

对（4）我们将 N→ ∞ 再用第 k 项关于 N 的极限，即可得到：

$$1=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

即我们得到奇数的倒数平方和为 $\frac{\pi^2}{8}$ 又因为我们已知偶数倒数平方和是自然数倒数平方和的 $\frac{1}{4}$ 故自然数倒数平方和是奇数倒数平方和的 $\frac{4}{3}$ 即 $\frac{\pi^2}{6}$

2.2 法二：夹逼性

事实上 Tannery's Theorem 也可避免被使用：

由不等式

$$\sin^{-2}x>x^{-2}>\cot^2x=\sin^{-2}x-1 \tag{6}$$

进行以下证明

证明. 因为

$$1=\frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2^{n+1}}\pi}$$

令 $2^n=N$, 则

$$1=\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi}$$

将 $x=\frac{2k+1}{2N}\pi$ 代入, 以及上文给出的不等式（6），有

$$\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi}>\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{4N^2}{\pi^2(2k+1)^2}>\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi}-1\right)$$

进而

$$\begin{aligned}1=\frac{2}{N^2}\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{\sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi}&>\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}\\&>\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\frac{2}{N^2sin^2\frac{2k+1}{2N}\pi}-\frac{1}{N}=1-\frac{1}{N}\end{aligned}$$

当 $N \to +\infty$ 时，由极限的夹逼性可得

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

即我们也可得到自然数倒数的平方和 □

2.3 法三：另外一种夹逼

事实上，存在两个等式

$$\sum_{k=1}^{N} \cot^2 \frac{k\pi}{2N+1} = \frac{N(2N-1)}{3} \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2N+1}} = \frac{2N(N+1)}{3} \tag{8}$$

通过这两个极限和（6）我们可以轻松得到奇数倒数的平方和

然而如何求出（7）式呢，由于一共有 N 项，我们可以将其每一项当作一个 N 次多项式的根，其和即为 N 次多项式所有根的和

我们首先先证明 de Moivre 公式

定理 2.2. *de Moivre 公式*

$$\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$$

证明. 一个复数可表示为 $z = a + bi$

在复平面中可用参数方程表示：$z = \rho(\cos\varphi) + i\sin\varphi$

φ 为向量与 x 轴正半轴夹角，ρ 为模长

现在我们考虑任意两个复数 z_1, z_2 的乘法运算

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1) + i\sin\varphi_1$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2) + i\sin\varphi_2$$

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

即，两个复数相乘后所得的向量，其模长为两向量模长之积，与 x 轴正半轴夹角为两角之和，模长为 1 时即，deMoivre 公式 □

注：也可用欧拉公式证明

定理 2.3. n 次多项式方程的韦达定理：

对一个 n 次多项式方程，所有根之和为（n-1）次项系数与 n 次项系数之比的相反数，所有根之积为常数项与 n 次项系数之比再乘以 $(-1)^n$

由数学归纳法可以轻松得到证明

有了准备工作，下面我们来证明 (7)

证明. 由 deMoivre 公式

$$\begin{aligned}\cos nx + i\sin nx &= (\cos x + i\sin x)^n \\ &= \cos^n\theta + \binom{n}{1} i\cos^{n-1}\cdot\sin\theta + \dots\end{aligned}$$

所以等式两边实部虚部一定各自相等，我们比较虚部

$$\sin n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\cdot\sin\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta\cdot\sin^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta\cdot\sin^5\theta + \dots$$

取 $n = 2m+1$

$$\theta = \frac{\pi}{2m+1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \dots, \frac{m\pi}{2m+1}$$

则 $\sin(2m+1)\theta = 0$，且 $\sin\theta \neq 0$ 所以我们可以将上式等号两侧同时除以 $\sin^n\theta$

对 $\theta = \frac{\pi}{2m=1}, \frac{2\pi}{2m+1}, \dots, \frac{m\pi}{2m+1}$ 有

$$\binom{2m+1}{1}\cot^{2m}\theta - \binom{2m+1}{3}\cot^{2m-2}\theta + \dots + (-1)^m\binom{2m+1}{2m+1} = 0$$

即关于 $\cot^2\theta$ 的 m 次方程，有 m 个不同的跟，即 θ

由韦达定理

$$\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{3}}{\binom{2m+1}{1}} = \frac{m(2m-1)}{3}$$

得证 $\square$

现在我们已知（7），因为

$$\cot^2\frac{k\pi}{2N+1}=\sin^{-2}\frac{k\pi}{2N+1}-1$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\sin^{-2}\frac{k\pi}{2N+1}&=N+\frac{N(2N-1)}{3}\\&=\frac{2N(N+1)}{3}\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=1}^{N}\sin^{-2}\frac{k\pi}{2N+1}>\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{2N+1}{k\pi}\right)^2>\sum_{k=1}^{N}\cot^2\frac{k\pi}{2N+1}$$

$$\frac{N(2N-1)}{3}<\sum_{K=1}^{N}\left(\frac{2N+1}{k\pi}\right)^2<\frac{2N(N+1)}{3}$$

$$\frac{2N^2-N}{6(2N^2+2N+\frac{1}{2})}<\sum_{K=1}^{N}\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2<\frac{2N^2+2N}{6(2N^2+2N+\frac{1}{2})}$$

令 $N\to\infty$，由极限的夹逼性

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2=\frac{\pi^2}{6}$$

也可得到自然数倒数的平方和

2.4 该思想在 Gregory-Leibniz Series 上的应用

$Gregory-Leibniz\ Series:$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots=\frac{\pi}{4}\tag{9}$$

可以运用以上思想来轻松的证明，我们通过

$$\cot x=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\tan\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[\cot\frac{x}{2}-\cot\left(\frac{\pi-x}{2}\right)\right]\tag{10}$$

得到

$$
\begin{aligned}
1 = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}&\left[\cot\frac{\pi}{8} - \cot\frac{3\pi}{8}\right] \\
=&\frac{1}{4}\left[\cot\frac{\pi}{16} - cot\frac{7\pi}{16} - \cot\frac{3\pi}{16} + \cot\frac{5\pi}{16}\right] = \dots \\
=&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\cot\frac{(2k+1)\pi}{4N} \\
&(N = 2^n)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

令 $N \to \infty$ 并运用

$$\frac{1}{N}\cot\frac{x}{N} \to \frac{1}{x}$$

我们可以得到

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{12}$$

这个级数并不完全收敛，即每一项的绝对值的和并不收敛，以下为证

证明.

$$S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$
\begin{aligned}
S_{2^n} - S_{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} \\
&> \frac{2^n - 2^{n-1}}{2^{n+1}-1} = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}-1} > \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

所以不收敛 □

但是 Tannery's Theorem 仍然可以使用，如果将相邻两项相加满足收敛, 将（11）中相邻两项相加，运用 $\cot\alpha - \cot\beta = \sin(\beta-\alpha)/\sin\alpha\sin\beta$ 得到

$$\frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{4N} - \frac{(2k+3)\pi}{4N}\right]}{N^2\sin\frac{2k+1}{4N}\pi \cdot \sin\frac{2k+3}{4N}\pi}$$

当 $N \to \infty$ 时，该式小于 $\frac{\pi}{2N(2k+1)(2k+3)}$，可得到一个收敛的控制级数，所以 Tannery's Theorem 可用，即可以得到（12），从而证明问题

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

2.5 法四:Fourier 级数

定理 2.4. *Fourier 级数*

若 $f(x)$ 定义域为 $[-\pi,\pi]$ 则可被表示为

$$f(x)=a_0+b_1\sin x+a_1\cos x+b_2 sin2x+a_2\cos 2x+\cdots$$

我们通过查阅资料，了解到该问题也可以转化为 Fourier 级数解决：

证明. 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}-x,\ -\pi<x<0\\ x,\ 0\le x\le\pi\end{cases}$$

展开得到:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos{(2n-1)x}}{(2n-1)^2}(-\pi\le x\le\pi)$$

令 $x=0$ 得到

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

□

我个人认为这一展开非常巧妙，利用 Fourier 级数的性质：

$$a_n=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nx\,dx}$$

$$b_n=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin nx\,dx}$$

因为 $f(x)$ 为偶函数，而 $\sin nx$ 为奇函数，故 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$ 为 0，则 b_n 为 0，当 n 为偶数时 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0$ 此处牵涉到积分运算，我们这里不再进一步深入，最终我们可以得到 $f(x)$

我们还想分享欧拉的第一个证明方法：

证明. 将 $\sin x$ 泰勒展开：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

易得 $\sin(m\pi) = 0$, $m \in \mathbb{Z}$

令 $p(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - + \cdots$

可以看出 $p(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, p(0) = 1$

因为 $p(x) = \frac{\sin x}{x}, x \neq 0, p(0) = 1$ ，所以 p(x) 零点除了 0 以外与 $\sin x$ 完全相同

即 $p(m\pi) = 0, m \in \mathbb{Z} m \neq 0, p(0) = 1$

所以 p(x) 可以表示成线性因子的乘积：

$$\begin{aligned} p(x) &= A(1 - \frac{x}{\pi})(1 + \frac{x}{\pi})(1 - \frac{x}{2\pi})(1 + \frac{x}{2\pi})(1 - \frac{x}{3\pi})(1 + \frac{x}{3\pi}) \cdots \\ &= A(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \cdots \end{aligned}$$

因为 $\frac{\sin x}{x}$ 的常数项是 1，p(x) 常数项是 A，所以 A=1

$$p(x) == A(1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}) \cdots$$

我们只看 p(x) 中 x^2 的系数：

$$p(x) = 1 - (\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{p\pi^2} + \cdots)x^2 \cdots$$

与 $\sin x$ 的泰勒展开式中 x^2 的系数比较，

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{p\pi^2} + \cdots$$

即可以得到

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

□

欧拉的第一个证法那里存在不严密呢？事实上欧拉没有证明那个无穷积收敛，直到 100 多年后德国数学家 Weierstrass 得到了他的著名的 Weierstrass 分解定理（Weierstrass factorization theorem）才说明了这个证法的严谨性。然而证明 Weierstrass 分解定理的过程不胜其烦，我们在此篇幅有限就不继续拓展了。

3 结果分析

我一共采取了五种方法进行证明，此处我主要对运用 Fourier 的方法进行分析，此处我们运用 Fourier 级数的性质构造出一个函数的 Fourier 展开式为我们所想要的数列，我们同时知道，函数的基不止 Fourier basis，故展开有多种方式，例如

$$Legendre\ basis : 1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x, \ldots$$

$$Chebyshev\ basis : 1, x, 2x^2 - 1, 4x^3 - 3x, \ldots$$

是否有些其他的数列问题可以像巴塞尔问题一样构造函数，将函数转化为这些基的级数表达式从而求解呢，这个问题还待我进一步发掘。

4 课程设计总结

本文一共通过四种方法对巴塞尔问题进行证明，这四种证明都运用了数学中重要的构造的思想，将问题转化，化复杂为简单，尤其是法三的转化为多项式的根和法四的用函数的基表示给我留下了深刻的印象。通过这个级数我们可以看到有理数与无理数之间可以由级数搭建起桥梁。通过运用三角函数的展开和不等关系以及一系列极限的运用解决了巴塞尔问题和 Leibniz Series。我们意识到当解决求级数问题时，可以利用三角函数的和差化积和倍角公式将一个数用三角函数表示，进而拆分成级数的形式从而解决问题。我们还看到 Fourier 级数在解决该问题上的强大作用，同时也给我留下了问题，待我以后研究。

教 师 评 语	教师签名： 日期：
成 绩 评 定	
备 注	