Diana Paola De la Cruz Sierra

9._ El tiempo requerido para que un individuo sea atendido en una cafetería es una v.a que tiene una distribución exponencial con una media de cuatro minutos. ¿Cúal es la probabilidad de que una persona sea atendida

a) En menos de 3 minutos?

b) En menos de 3 minutos al menos cuatro de los siguientes 6 días?

Respuesta *a)* 0.395 *b)* 0.9179

X : tiempo requerido para que un individuo sea atendido

$\mu_x = 4 min = \frac{1}{\beta} \rightarrow \beta = \frac{1}{4} = 0.25$

$X \sim exp(x ; \beta = \frac{1}{4})$

a) $P(X < 3) = 1 - e^{-\beta x} = 1 - e^{-(0.25)(3)} = \underline{0.5276}$ //

b) Y : # de días en los que es atendido un individuo en menos de 3 minutos

$Y \sim bin(y ; n = 6 \quad p = 0.5276$

$P(Y = 4) = \underline{0.2593}$ //

10._ La distribución exponencial se aplica con frecuencia a los tiempos de espera entre éxitos en un proceso de Poisson. Si el número de llamadas que se reciben por hora en un servicio de contestación telefónica es una v.a de Poisson con parámetro 6, se sabe que el tiempo, en horas, entre llamadas sucesivas tiene una distribución exponencial con parámetro $\frac{1}{6}$. ¿Cuál es la probabilidad de esperar más de 15 minutos entre cualesquiera dos llamadas sucesivas?

Respuesta 0.082

X : tiempo de espera entre llamadas

$X \sim exp(x ; \beta = 1/6)$

$P(X > 15) = 1 - F_x(15)$

$= 1 - (1 - e^{-(\frac{1}{6})(15)}) = \underline{0.08208}$ //

11._ El tiempo X, en segundos, que tarda un bibliotecario para localizar una ficha de un archivo de registros sobre libros prestados tiene una distribución exponencial con tiempo esperado de 20 segundos.

a) Calcula las probabilidades $P(X < 30)$, $P(X \leq 20)$ y $P(20 < X < 30)$.

b) ¿Para qué valor de t es $P(X < t) = 0.5$?

Respuesta *a)* 0.144 *b)* $t = -20\ell n(0.5) = 13.863$

a) X : tiempo en seg, que tarda un bibliotecario para localizar una ficha

$X \sim exp(x ; \beta = \frac{1}{20})$

$\rightarrow P(X < 30) = 0.77687$

$P(X < 20) = 0.63212$

$\rightarrow P(20 < X < 30) = 0.77687 - 0.63212 = \underline{0.14475}$ //

b) $1 - e^{-\beta x} = 0.5 \rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{20}t} = 0.5 \rightarrow 1 - 0.5 = e^{-\frac{1}{20}t} \rightarrow 0.5 = e^{-\frac{1}{20}t} \rightarrow$

$\ln(0.5) = \ln(e^{-\frac{1}{20}t}) \rightarrow \ln(0.5) = -\frac{1}{20}t \; \ln(e)^{\to 1}$

$\Rightarrow t = \underline{-20 \ln(0.5)}$ //

Scribe

12._ Un transistor tiene una distribución de tiempo de falla exponencial con tiempo medio de falla de 20,000 hrs, El transistor ha durado 20,000 hrs. En una aplicación particular. ¿Cuál es la probabilidad de que el transistor falle a las 30,000hrs?

Respuesta 0.3935

$E(X) = \frac{1}{\beta} = 20,000 \rightarrow \beta = \frac{1}{20,000}$

X: tiempo en que falla el transistor

$X \sim exp(x; \beta = \frac{1}{20,000})$

$P(X < 30,000 \mid X > 20,000) = \frac{P(20,000 < X < 30,000)}{P(X > 20,000)}$

$= \frac{F_X(30,000) - F_X(20,000)}{1 - F_X(20,000)}$

$= \frac{1 - e^{\frac{30,000}{20,000}} - (1 - e^{\frac{20,000}{30,000}})}{e^{-1}} = \frac{e^{-1} - e^{-1.5}}{e^{-1}} = \frac{0.144}{0.367} = \underline{0.3935}$

13._ Se consideran dos procesos de manufactura. El costo por unidad para el proceso *I* es *C*, en tanto que para el proceso *II* es 3*C*. Los productores de ambos procesos tienen densidades de tiempo de falla exponenciales con tasas de 1/25 fallas por hora y 1/35 fallas por hora, respectivamente, para los procesos *I* y *II*. Si un producto falla antes de 15 hrs. Debe reemplazarse a un costo de *Z* dólares. ¿Qué proceso recomiendas?

Respuesta Recomendar el proceso I si $Z < 19.417C$

$C_I = \begin{cases} C & X > 15 \\ C + Z & X < 15 \end{cases} \qquad C_{II} = \begin{cases} 3C & X > 15 \\ 3C + Z & X < 15 \end{cases}$

$E(C_I) = C\,P(X > 15) + (C + Z)\,P(X < 15)$

$= Ce^{-15/25} + (C + Z)(1 - e^{-\frac{15}{25}})$

$= C + Z(1 - e^{-\frac{15}{25}}) = C + 0.451\,Z$

$E(C_{II}) = 3C\,P(X > 15) + (3C + Z)\,P(X < 15)$

$= 3Ce^{-\frac{15}{35}} + (3C + Z)(1 - e^{-15/35}) =$

$= 3Ce^{-3/7} + 3C + Z - 3Ce^{-\frac{3}{7}} - Ze^{-\frac{3}{7}} = 3C + Z(1 - e^{-\frac{3}{7}}) =$

$= 3C + 0.348\,Z$

Si $E(C_I) < E(C_{II})$

$C + 0.451\,Z < 3C + 0.348\,Z$

$(0.451 - 0.348)Z < 2C$

$0.103\,Z < 2C$

Si $Z < 19.42$ se recomienda el proceso I

\$300 → fabricación
\$400 → venta
\$150 → reemplazo tubo

14._ Un fabricante de un monitor de televisión comercial garantiza el cinescopio o tubo de imagen por un año (8679 hrs). Los monitores se utilizan en terminales de aeropuerto para programas de vuelo, y están encendidos en uso continuo. La vida media de los tubos es de 20,000 hrs. y siguen una densidad de tiempo exponencial. El costo de fabricación, venta y entrega para el fabricante es de \$300 y el monitor se vende en el mercado en \$400. Cuesta \$150 reemplazar el tubo fallado, incluyendo materiales y mano de obra. El fabricante no tiene obligación de sustituir el tubo si ya ha habido una primera sustitución. ¿Cuál es la utilidad esperada del fabricante?

Respuesta 47.19

X : tiempo transcurrido hasta la falla

$X \sim \exp\left(x;\ \beta = \frac{1}{20{,}000}\right)$

$U(X)$ → utilidad en función del tiempo transcurrido hasta la falla

$$U(X) = \begin{cases} 100 = 400 - 300 & x > 8679 \\ -50 = 400 - 300 - 150 & x < 8679 \end{cases}$$

$$E(U(X)) = 100\,P(x > 8679) - 50\,P(x < 8679)$$
$$= 100\,(1 - F_X(8679)) - 50\,F_X(8679) =$$
$$= 100 - 100\,F_X(8679) - 50\,F_X(8679)$$
$$= 100 - F_X(8679)(100 + 50)^{150}$$
$$= 100 - 52.809 = \underline{47.19}$$

15._ El tiempo Y que tarda en realizarse cierta tarea clave en la construcción de una casa es una v.a que tiene una distribución exponencial con una media de 10 hrs. El costo C para completar esa tarea está relacionado con el cuadrado del tiempo que tarda en completarse mediante la fórmula $C = 100 + 40Y + 3Y^2$. Encuentra el valor esperado de C.

Respuesta 1100

Y : tiempo que tarda en realizarse cierta tarea

$Y \sim \exp\left(x;\ \beta = \frac{1}{10}\right)$

$\mu_Y = E(Y) = 10$ hrs

$C = 100 + 40Y + 3Y^2$

$$E(C) = 100 + 40\,E(Y) + 3\,E(Y^2) = 100 + 40 \cdot \frac{1}{\beta} + 3 \cdot \frac{2}{\beta^2} =$$
$$= 100 + 40(10) + 3(200) = \underline{1100}$$

16._ Si la v. a $X \sim \exp(x;\ \beta)$, encuentra la expresión para el n-ésimo momento al origen.

Respuesta $\dfrac{n!}{\beta^n}$

la f.d.p. $= f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ y su f.g.m $\varphi_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t} = \beta(\beta - t)^{-1}$

$$\varphi'_X(t=0) = \beta(\beta - t)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\beta}$$
$$\varphi''_X(t=0) = (2)\beta(\beta - t)^{-3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\beta^2}$$
$$\varphi'''_X(t=0) = (2)(3)\beta(\beta - t)^{-4}\Big|_{t=0} = \frac{(2)(3)}{\beta^3}$$
$$\varphi^{(iv)}_X(t=0) = (2)(3)(4)\beta(\beta - t)^{-5}\Big|_{t=0} = \frac{(2)(3)(4)}{\beta^4}$$

Siguiendo de la misma manera se tiene que:

$$\varphi^{(k)}_X(t=0) = \frac{k!}{\beta^k}$$

17._ Se encontró que los intervalos de tiempo transcurridos entre dos accidentes de aviación, en el caso de todos los accidentes con víctimas ocurridos en vuelos de pasajeros en el interior de Estados Unidos entre 1949 y 1961, tienen aproximadamente una distribución exponencial con media de 44 días.

a) Si uno de los accidentes ocurrió el 1 de julio, ¿Cuál es la probabilidad de que otro accidente ocurra en el mismo mes?

b) Cuál es la varianza de los intervalos de tiempo entre dos accidentes para los años mencionados?

Respuesta *a)* 0.4943 ***b)***1936

a) X : tiempo transcurrido hasta el 2do accidente

$X \sim \exp(x;\ \beta = 1/44)$

$P(X < 30) = F_X(30) = 1 - e^{-(\frac{1}{44})(30)} = \underline{0.4943}$

b) $V(X) = \sigma^2 = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\frac{1}{44})^2} = (44)^2 = \underline{1936}$