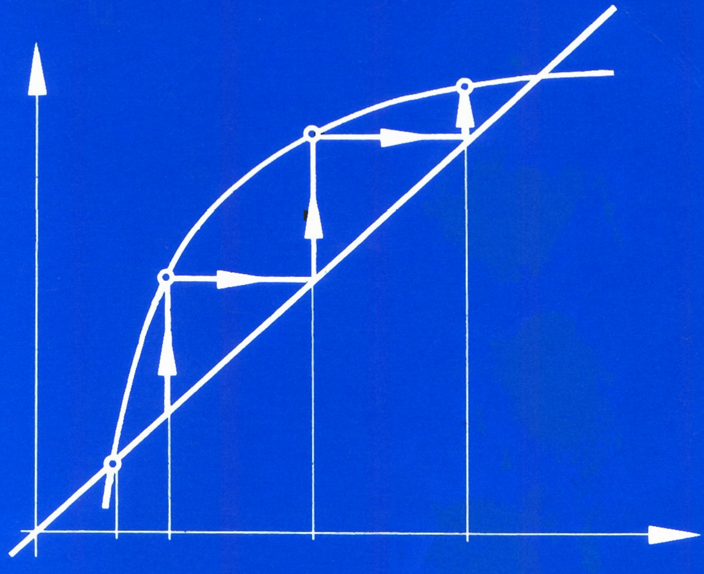
Matematika üzemgazdászoknak

ANALÍZIS

Szerkesztette
Dr. Csernyák László



Tartalomjegyzék

2. hét

3. hét

4. hét

1. HALMAZELMÉLETI ALAPFOGALMAK

1.1 Alapfogalmak

A matematikában sokszor vizsgáljuk bizonyos tulajdonságú objektumok, elemek összességét, halmazát. Ezeket a könnyebb tájékozódás érdekében általában a közös tulajdonságra utaló gyűjtőnévvel látjuk el. Ilyenek például az egyenes pontjainak a halmaza, a vállalat dolgozóinak a halmaza, az egész számok halmaza. A halmaz fogalma és az, hogy egy tárgy vagy fogalom eleme a halmaznak (benne van a halmazban), matematikai alapfogalmak, más egyszerű fogalmakkal nem definiálhatjuk őket.

Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha bármely tárgyról vagy fogalomról el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak. Ezt általában kétféleképpen érhetjük el:

a halmaz elemeit felsoroljuk,

pontosan megfogalmazzuk a halmazhoz tartozás ismérveit.

A halmazokat általában nagybetűkkel, elemeit kisbetűkkel jelöljük. Azt, hogy a eleme az A halmaznak (A-beli elem) az

$$a \in A$$

szimbólummal, míg azt, hogy a nem eleme A-nak, a következőképpen jelöljük:

$$a \notin A.$$

Valamely T tulajdonsággal rendelkező elemek halmazát a következőképpen adjuk meg:

$$A = \{a \mid a \text{ a } T \text{ tulajdonsággal rendelkezik}\}.$$

Például:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid -1 \leqq x < 4\}, \\ B &= \{k \mid k \text{ 18-nak osztója}\}, \\ C &= \{\text{a PSZF hallgatói 1987. január 1-jén}\}, \\ D &= \{x \mid x \text{ a } 2x+5 = 3x+5 \text{ egyenlet gyöke}\}. \end{aligned}$$

De nem lehet beszélni az

$$\mathrm{F} = \{\text{szép lányok}\}$$

halmazról, mert adott lány esetén előfordulhat, hogy nem dönthető el egyértelműen, hogy benne van-e a halmazban.

Példánkban $3 \in A$; $3 \in B$; $5 \notin B$. Az A halmaz elemeit nem, de a B, C, D halmazok elemeit egyszerű felsorolással is megadhatjuk. Például:

$$B = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\},$$
$$D = \{0\}.$$

Ezzel a lehetőséggel akkor is élünk, amikor csak az első néhány elem felsorolására van lehetőség és ez nem okoz félreértést. Például:

$$G = \{n \mid n \text{ pozitív egész szám}\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Minden elemet **csak egyszer** veszünk figyelembe, és a **sorrend** nem számít: $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Könnyű belátni, hogy a B halmaz minden elemét a G halmaz is tartalmazza.

DEFINÍCIÓ. *Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor az A halmazt a B halmaz* ***részhalmazának*** *nevezzük.*
Jelben: $A \subset B$.
Ha A és B elemei ugyanazok, akkor azt mondjuk, hogy $A = B$.

Azt, hogy az A halmaz nem része B-nek, az

$$A \not\subset B$$

szimbólummal jelöljük. Ha $B \subset A$ és A-nak van olyan eleme, amely nincs B-ben, akkor **valódi részhalmazról** beszélünk. A fentiekből következik, hogy minden halmaz része önmagának, de nem valódi részhalmaza.

A tartalmazás **tranzitív:**

$$\text{ha } A \subset B \quad \text{és} \quad B \subset C, \quad \text{akkor} \quad A \subset C.$$

Azt a halmazt, amelynek egyetlen eleme sincs, **üres halmaznak** nevezzük és $\emptyset$-val jelöljük. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.

Ha egy halmaznak véges sok eleme van, akkor **véges halmazról,** ellenkező esetben **végtelen halmazról** beszélünk. A fent említett halmazok közül A és G végtelen halmaz, B, C és D véges halmaz.

1.2 Műveletek halmazokkal

DEFINÍCIÓ. *Az A és a* ***B egyesítésén*** *vagy* ***unióján*** *mindazon elemek halmazát értjük, amelyek vagy A-nak, vagy B-nek* (***vagy mindkettőnek***) *elemei.*
Jelben: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\}$.

A műveletben szereplő halmazokat (A-t és B-t) az egyesítés (unió) tagjainak nevezzük.

Például, ha

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

és

$$B = \{n \mid n \text{ pozitív páros szám}\},$$

akkor

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, \ldots\}.$$

Ha $B \subset A$, akkor $A \cup B = A$.

DEFINÍCIÓ. *Az A és a B halmazok* ***közös részén*** *vagy* ***metszetén*** *azon elemek halmazát értjük, amelyek A-nak és B-nek is elemei.*
Jelben: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\}$.
Ha $A \cap B = \emptyset$, *akkor A-t és B-t egymástól idegen vagy* ***diszjunkt halmazoknak*** *mondjuk.*

A műveletben szereplő halmazokat a közös rész (metszet) tényezőinek nevezzük.

Például, ha

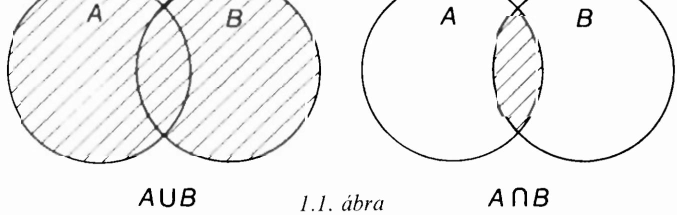
$$A = \{\text{a főiskola oroszul beszélő hallgatói}\},$$
$$B = \{\text{a főiskola angolul beszélő hallgatói}\},$$

akkor

$$A \cap B = \{\text{angolul is és oroszul is beszélő főiskolai hallgatók}\}.$$

Ha $B \subset A$, akkor $A \cap B = B$.

A halmazokat szokás egy-egy körlappal szimbolizálni, így az egyesítés és metszet művelete is szemléltethető *(1.1. ábra)*. Az ilyen ábrákat Venn-diagramoknak nevezzük.



1.1. ábra

Megjegyezzük, hogy akárhány halmaz unióját, illetve metszetét a két halmazra megadott definíciókhoz hasonlóan értelmezhetjük.

Gyakran kell beszélnünk éppen azon elemek halmazáról, amelyek nem tartoznak az adott A halmazhoz. Figyelembe kell azonban venni, hogy az A-hoz nem tartozó elemek halmaza nem eléggé körülhatárolt.

Ugyanis ha például

$$A = \{k \mid k \text{ páros szám}\},$$

akkor az A-hoz nem tartozó elemek például a páratlan számok, de nem tartoznak a halmazhoz a tanterem asztalai sem, sőt a világ minden olyan tárgya és fogalma az A halmazon kívül esik, amely nem páros szám. Ezért először egy ún. **alaphalmazt** kell definiálnunk, amelyen belül akarunk maradni. Példánkban, ha az alaphalmaz az egész számok halmaza, akkor az A-n kívül eső elemek a páratlan számok.

DEFINÍCIÓ. *Ha $A \subset H$ (H alaphalmaz), akkor az A halmaz **kiegészítő** vagy **komplementer halmazán** azt a halmazt értjük, amely H-nak A-hoz nem tartozó elemeiből áll.*
Jelben: $\bar{A} = \{x \mid x \notin A \text{ és } x \in H\}$.

Könnyen beláthatók a következő azonosságok:

$$\bar{\bar{A}} = A, \qquad \bar{\emptyset} = H, \qquad \bar{H} = \emptyset.$$

1.3 Halmazműveletek tulajdonságai

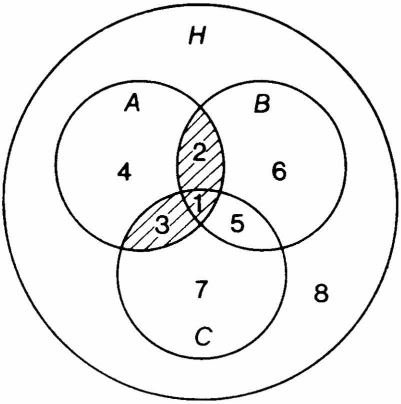
1.1. TÉTEL. *Tetszőleges A, B, $C \subset H$ halmazok esetén fennállnak az alábbi összefüggések:*

1. $A \cup A = A, \quad A \cap A = A$ *(idempotencia)*
2. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$ *(kommutativitás)*
3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(asszociativitás)*
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(disztributivitás)*
5. $A \cup \bar{A} = H \quad \bar{A} \cap A = \emptyset$
6. $A \cup H = H \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
7. $A \cup \emptyset = A \quad A \cap H = A$

Bizonyítás: Az első disztributivitás bizonyítását példaként megmutatjuk, a többi azonosság bizonyítása hasonlóan végezhető el. Legyenek A, B, C valamely részhalmazai H-nak és a a H-nak tetszés szerinti eleme. Tegyük fel a következő három kérdést:

$$a \in A?$$
$$a \in B?$$
$$a \in C?$$

Ezekre a kérdésekre 8-féle válaszkombináció adható. Például, ha mindhárom kérdésre igennel válaszolunk, az *1.2. ábrán* 1-gyel jelölt halmazban van az a. Az ábrán lévő számozásnak megfelelő válaszok a következők (I – igen, N – nem):



1.2. ábra

	1	2	3	4	5	6	7	8
$a \in A$	I	I	I	I	N	N	N	N
$a \in B$	I	I	N	N	I	I	N	N
$a \in C$	I	N	I	N	I	N	I	N

Ezek után a felírt azonosságok úgy igazolhatók, hogy megmutatjuk: az adott azonosság bal oldalán álló halmaz ugyanazokból az elemekből áll, mint a jobb oldalán álló halmaz.

	1	2	3	4	5	6	7	8
$a \in A$	I	I	I	I	N	N	N	N
$a \in B$	I	I	N	N	I	I	N	N
$a \in C$	I	N	I	N	I	N	I	N
$a \in B \cup C$	I	I	I	N	I	I	I	N
$a \in A \cap (B \cup C)$ ($a \in$ bal oldal)	I	I	I	N	N	N	N	N
$a \in A \cap B$	I	I	N	N	N	N	N	N
$a \in A \cap C$	I	N	I	N	N	N	N	N
$a \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ($a \in$ jobb oldal)	I	I	I	N	N	N	N	N

Amint látható, az 1., 2., 3. típusú elemek vannak a bal oldali és jobb oldali halmazban is (az 1.2. ábrán ezt a részt vonalkáztuk). Áttekinthetőbb a táblázat, ha csak az I (igen) válaszokat írjuk ki.

1.2. TÉTEL. *Ha A és B ugyanazon H alaphalmaz részhalmazai, akkor fennállnak a következő egyenlőségek:*

$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B} \qquad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B} \quad \textit{(de Morgan-azonosságok)},$$
$$A\cup(A\cap B) = A \qquad A\cap(A\cup B) = A \quad \textit{(beolvasztási szabályok)}.$$

Bizonyítás: Azonosságaink igazolása elvégezhető az 1.1. tétel bizonyításánál megismert módszerrel – nem részletezzük. Ugyanakkor igazolhatók az 1.1. tétel azonosságainak segítségével is. Példaként megmutatjuk a beolvasztási szabályok ily módon történő bizonyítását:

$$A\cup(A\cap B) = (A\cap H)\cup(A\cap B) = A\cap(H\cup B) = A\cap H = A,$$
$$A\cap(A\cup B) = (A\cap A)\cup(A\cap B) = A\cup(A\cap B) = A.$$

A második bizonyítás utolsó lépésénél felhasználtuk a már bizonyított első azonosságot.

DEFINÍCIÓ. *Két halmaz különbségén az*

$$A\setminus B = A\cap\bar{B}$$

halmazt értjük $\quad (A,\ B\subset H)$.

1.4 Hatványhalmaz, halmazalgebra

DEFINÍCIÓ. *Valamely A halmaz összes részhalmazainak a halmazát az A halmaz **hatványhalmazának** nevezzük.*

Például az

$$A=\{1, 2, 3\}$$

halmaz hatványhalmazában a következő halmazok vannak:

$$\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1, 2\},\ \{1, 3\},\ \{2, 3\},\ \{1, 2, 3\}.$$

DEFINÍCIÓ. *Ha egy Ω nem üres halmaz elemei halmazok, akkor Ω-t **halmazrendszernek** nevezzük. A H alaphalmaz (nem feltétlenül az összes) részhalmazaiból álló Ω halmazrendszert **halmazalgebrának** nevezzük, ha*

$$H\in\Omega,$$

$$A\in\Omega \quad \textit{és} \quad B\in\Omega \quad \textit{esetén} \quad A\cup B\in\Omega,$$

valamint $\quad \bar{A}\in\Omega.$

Például, ha $H=A=\{1, 2, 3\}$, akkor a

$$\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

halmazrendszer halmazalgebra. Könnyű látni, hogy bármely A halmaz hatványhalmaza halmazalgebra.

1.5 A valós számok halmaza

Ebben a pontban az egyértelműség, illetve az egységes jelölések érdekében áttekintjük a valós számok halmazának legfontosabb tulajdonságait.

A **természetes számok halmazát** $\mathbf{N}$-nel jelöljük:

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Néha szükségünk lesz a pozitív természetes számok halmazára:

$$\mathbf{N}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Ezekben a halmazokban értelmezhetjük az összeadás $(+)$ és a szorzás $(\cdot)$ műveletét. Ahhoz azonban, hogy az összeadás fordított (inverz) műveletét, a kivonást is elvégezhessük, ezt a halmazt ki kell bővítenünk a negatív egész számok halmazával. Az így kialakult **egész számok halmazát** $\mathbf{Z}$-vel fogjuk jelölni.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{m-n \mid m, n \in \mathbf{N}\}.$$

A szorzás inverze, az osztás érdekében további bővítésre van szükség. Nyilvánvaló, hogy éppen az egész számok hányadosát kell $\mathbf{Z}$-hez hozzávennünk. $\left(\text{Megjegyezzük, hogy az egész számok is felírhatók két egész szám hányadosaként, pl. } 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}.\right)$ Az új halmaz

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, \ n \neq 0 \right\}$$

lesz, ezt a **racionális számok halmazának,** elemeit racionális számoknak nevezzük.

1.3. TÉTEL. *Minden racionális szám felírható véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört formában. Fordítva: minden véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört benne van $\mathbf{Q}$-ban.*

Bizonyítás: Ha az $\frac{m}{n}$ $(m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0)$ törtet tizedes törtté alakítjuk (a számlálót osztjuk a nevezővel), az osztási maradék csak a $0, 1, \ldots, n-1$ számok közül lehet valamelyik, azaz maximálisan $n-1$ nullától különböző maradék lehetséges, utána már biztosan vagy 0 a maradék, vagy egy korábbi maradék ismétlődik. Így az osztás eredménye vagy véges, vagy szakaszos végtelen tizedes tört.

A tétel második részének igazolásához egy példán megmutatjuk azt a módszert, amellyel minden véges vagy szakaszos végtelen tizedes tört felírható két egész szám hányadosaként. Legyen

$$q = 2{,}521\dot{4}\dot{5}\ldots$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 10^5 q - 10^3 q &= 252\,145{,}4545\ldots - 2521{,}4545\ldots, \\ 99\,000 q &= 252\,145 - 2521 = 249\,624, \\ q &= \frac{249\,624}{99\,000}. \end{aligned}$$

1.4. TÉTEL. *Léteznek olyan valós számok, amelyek tizedes tört kifejezése végtelen, de nem szakaszos. Ezeket* ***irracionális számoknak*** *nevezzük.*

Bizonyítás helyett elég, ha utalunk arra, hogy pl. a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként, így végtelen tizedes tört alakja nem lehet szakaszos.

A racionális és irracionális számok halmazának unióját a **valós számok halmazának** nevezzük, és **R**-rel jelöljük. Bevezetjük még a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^+ &= \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x > 0\}, & \mathbf{R}^- &= \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x < 0\}, \\ \mathbf{R}_0^+ &= \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \geqq 0\}, & \mathbf{R}_0^- &= \{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \leqq 0\}. \end{aligned}$$

Az elmondottakat a következőképpen foglalhatjuk össze:

negatív egész számok halmaza | 0 | pozitív egész számok halmaza

természetes számok halmaza, **N**

egész számok halmaza, **Z** | törtek halmaza*

racionális számok halmaza, **Q** | irracionális számok halmaza

valós számok halmaza, **R**

* Itt törtek halmazán a $\mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ halmazt értjük.

A valós számhalmaz az ún. számegyenessel modellezhető. Egy egyenesen vegyünk fel egy O kezdőpontot és egy tőle különböző P_1 pontot. Az $\overline{OP_1}$ távolságot válasszuk egységnek, és az OP_1 irányt pozitívnak. Ekkor az egyenes bármely P pontjához rendelhető egy és csakis egy a valós szám az

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OP_1}} = a$$

egyenlőség alapján, ha P az O pontnak az a előjelének megfelelő oldalán van. Fordítva: ezzel az eljárással minden a valós számhoz rendelhető az egyenesnek egy és csakis egy pontja. Úgy is mondhatnánk, hogy a valós számok $\mathbf{R}$ halmazának elemeihez kölcsönösen egyértelmű módon rendeltük hozzá az egyenes pontjait. Ezért gyakran valós számok helyett a számegyenes pontjairól beszélünk.

1.6 A valós számok axiómái

Soroljuk fel a valós számok halmazának alapvető tulajdonságai (axiómái) közül azokat, amelyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

A1. A valós számok **testet** alkotnak, ami azt jelenti, hogy

a) definiáltunk benne két műveletet, az összeadást és a szorzást;

b) mindkét művelet kommutatív és asszociatív:

$$a+b = b+a, \qquad a \cdot b = b \cdot a; \qquad (a+b)+c = a+(b+c), \qquad (ab)c = a(bc);$$

c) a műveletek követik a disztributív törvényt:

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c;$$

d) van a halmazban zérus (0) és egység elem (1), amelyekre

$$a+0 = a, \qquad a \cdot 1 = a, \qquad \text{ha} \qquad a \in \mathbf{R};$$

e) minden $a \in \mathbf{R}$ esetén az $a+x = 0$, és az $a \cdot x = 1$ $(a \neq 0)$ egyenletnek van megoldása.

(Ezek a tulajdonságai már $\mathbf{Q}$-nak is megvannak: a $\mathbf{Q}$ halmaz is testet alkot.)

A2. A valós számok halmaza rendezett halmaz, azaz értelmezhetünk benne egy ún. rendezési relációt (jele: $<$ vagy $>$). Az $a>0$, ill. $a<0$ azt jelenti, hogy a pozitív, ill. negatív; $b>a$ pedig azt, hogy $b-a > 0$. A reláció rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) ha $a, b \in \mathbf{R}$, akkor az $a=b$, $a<b$, $a>b$ állítások közül egy és csak egy teljesül;

b) ha $a<b$, akkor $a+c<b+c$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$;

c) ha $a>0$, $b>0$, akkor $ab>0$; ha $a>0$ és $b<0$, akkor $ab<0$ $(a, b \in \mathbf{R})$.

DEFINÍCIÓ. *Ha $a \in \mathbf{R}$, akkor az*

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha} \quad a \geqq 0 \\ -a, & \text{ha} \quad a < 0 \end{cases}$$

*számot az a szám **abszolút értékének** nevezzük, ahol a $\geqq$ jel azt jelenti, hogy $>$ vagy $=$.*

1.5. TÉTEL. *Ha $a, b \in \mathbf{R}$, akkor*

a) $|ab| = |a| \cdot |b|$

b) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$

c) $|a+b| \leqq |a| + |b|$

d) $||a| - |b|| \leqq |a-b|$.

A bizonyítás könnyen elvégezhető, nem kell mást tenni, mint végigpróbálni az összes előjelkombinációt – nem részletezzük.

A3. Minden valós számhoz található olyan természetes szám, amely nála nagyobb.

Mielőtt a 4. axiómát kimondanánk, be kell vezetnünk néhány fogalmat.

DEFINÍCIÓ. *Az $A \subset \mathbf{R}$ halmaz (vagyis **számhalmaz**) **felülről korlátos,** ha létezik olyan k valós szám, hogy minden $a \in A$ esetén*

$$a \leqq k.$$

*A k-t az A halmaz **felső korlátjának** nevezzük.*

*Az A számhalmaz **alulról korlátos,** ha létezik olyan h valós szám, hogy minden $a \in A$ esetén*

$$a \geqq h.$$

*A h-t az A halmaz **alsó korlátjának** nevezzük. Ha egy halmaz alulról is, felülről is korlátos, röviden **korlátosnak** mondjuk.*

Például az

$$A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\},$$
$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\} \tag{1.1.}$$

halmazok közül A alulról korlátos, B korlátos halmaz. A-nak egy alsó korlátja: 0,5; B-nek egy felső korlátja a 2, de felső korlátja a 10, 15, 351 is.

A fentiekből azonnal következik, hogy ha k A-nak felső korlátja, akkor felső korlátja minden

$$k' > k$$

szám is. Lényeges megállapítás, hogy egy *felülről korlátos halmaz felső korlátjainak a halmaza végtelen halmaz*. Ugyanez áll az alsó korlátok halmazára is: valamely A halmaz alsó korlátjainak a halmaza vagy üres (A nem korlátos alulról), vagy végtelen halmaz. Véges A számhalmaznak mindig van legkisebb és legnagyobb eleme (ezeket min A-val, ill. max A-val jelöljük). Végtelen halmaz esetén ez általában akkor sem igaz, ha a halmaz korlátos. Az (1.1.) alatti A halmaznak nincs legnagyobb eleme (nem is korlátos felülről), de a B halmaz alulról korlátos, és nincs legkisebb eleme. Ezért érdekes a valós számok halmazának következő alaptulajdonsága:

A4. Ha az $A \subset \mathbf{R}$ számhalmaz felülről (alulról) korlátos, akkor a felső korlátok (alsó korlátok) halmazának van legkisebb (legnagyobb) eleme. Ezt az elemet az A halmaz **felső (alsó) határának** vagy latinul supremumának (infimumának) nevezzük.
Jele: sup A; (inf A).

1.1. példa. Az (1.1.) alatti A halmaz alsó határa 2, ez egyben az A halmaz legkisebb eleme (inf $A = \min A = 2$). A B halmaz felső határa 1, ez egyben a B halmaz legnagyobb eleme (sup $B = \max B = 1$). Mint már megjegyeztük, min B nem létezik, megmutatjuk, hogy a B halmaznak 0 az alsó határa (inf $B = 0$). Az, hogy a 0 alsó korlát, nyilvánvaló, hiszen a B minden eleme pozitív szám. Egyetlen, 0-nál nagyobb szám sem lehet azonban alsó korlátja a B-nek. Jelöljön ugyanis ε egy tetszőleges, nullánál nagyobb számot. Ekkor B-nek biztosan van ε-nál kisebb eleme, hiszen minden olyan $\frac{1}{n} \in B$ kisebb lesz ε-nál, amelyre $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ilyen n pedig biztosan van az **A3.** axióma alapján.

1.2. példa. Legyen

$$C = \left\{ \frac{n-1}{n} \,\middle|\, n \in N^+ \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \right\}.$$

A C halmaz korlátos, elemei nem negatívok, és egynél kisebbek. Nyilvánvaló, hogy inf $C = \min C = 0$. Megmutatjuk, hogy a legkisebb felső korlát 1 (mivel az 1 nem eleme C-nek, max C nem létezik). Válasszunk egy tetszőleges, 1-nél kisebb számot, legyen ez $1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Állításunk igazolásához azt kell belátnunk, hogy C-nek van olyan $\frac{n_0 - 1}{n_0}$ eleme, amelyre

$$\frac{n_0 - 1}{n_0} > 1 - \varepsilon, \tag{1.2.}$$

azaz $1 - \varepsilon$ már nem felső korlát. Az (1.2.) átírható az

$$1 - \frac{1}{n_0} > 1 - \varepsilon$$

alakba, amely akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Az előző példában láttuk, hogy ilyen $n_0 \in \mathbf{N}^+$ létezik.

1.7 Halmazok Descartes-féle szorzata. Koordináta-rendszer

Tekintsük az

$$A = \{1, 3, 5\}, \qquad B = \{6, 8\} \tag{1.3a}$$

halmazokat. E halmazok elemeiből ún. **rendezett párokat** képezhetünk:

$$C = \{(1, 6), (1, 8), (3, 6), (3, 8), (5, 6), (5, 8)\}. \tag{1.3b}$$

Itt olyan számpárokat írtunk fel, amelyeknek első **komponense** az A halmaznak, második komponense a B halmaznak eleme. Egy rendezett pár megadásakor pontosan meg kell mondani, hogy mi a pár első komponense, és mi a második.

DEFINÍCIÓ. *Legyen A és B két nem üres halmaz. Az A és B elemeiből készíthető rendezett párok az olyan (a, b) alakú szimbólumok, ahol a pár első tagja (komponense) A-nak, a második tagja B-nek eleme, és $(a, b) = (c, d)$ pontosan akkor, ha $a = c$ és $b = d$. Ha $A, B \subset \mathbf{R}$, akkor rendezett* ***számpárokról*** *(vagy röviden számpárokról) beszélünk.*
Az A és B halmazok elemeiből készíthető rendezett párok halmazát A és B Descartes-féle szorzatának nevezzük.
Jelben:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Az A a szorzat első, B a második tényezője. Fenti példánkban [(1.3*a*), (1.3*b*)]

$$A \times B = C.$$

Az elmondottakból következik, hogy a Descartes-féle szorzat képzése általában nem kommutatív művelet. Beszélhetünk egy halmaz önmagával való Descartes-féle szorzatáról, például

$$B \times B = B^2 = \{(6, 6), (6, 8), (8, 6), (8, 8)\}.$$

Hasonlóan képezhetjük kettőnél több halmaz Descartes-féle szorzatát.

DEFINÍCIÓ. *Legyenek $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ nem üres számhalmazok. Ezek elemeiből készíthető rendezett szám n-eseknek az*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

szimbólumokat nevezzük, ahol $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.
Az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok Descartes-féle szorzata az

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

halmaz.
Speciálisan

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^n$$

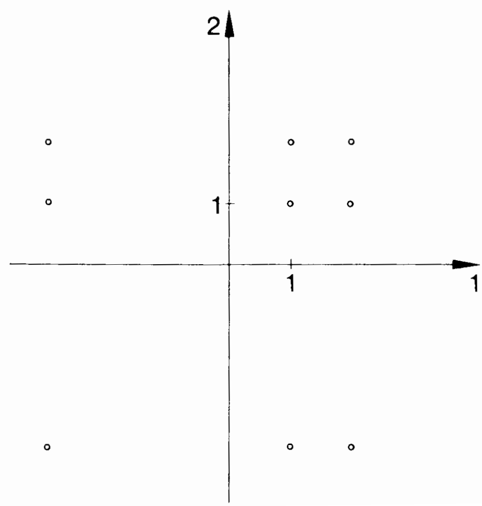
az összes szám n-esek halmaza.

A valós számokat úgy szemléltettük, hogy a valós számok halmaza és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítettünk. Hasonló lehetőségünk van számpárok esetén is: egy derékszögű koordináta-rendszer segítségével például a sík pontjai és az $\mathbf{R}^2$ halmaz elemei között kölcsönösen egyértelmű leképezés létesíthető.

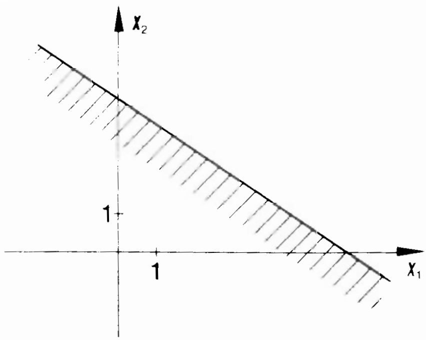
1.3. példa. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben $\mathbf{R}^2$ alábbi részhalmazait:

a) A^2, ahol $A = \{1, -3, 2\}$,
b) $\{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + 3x_2 \leqq 12\}$,
c) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

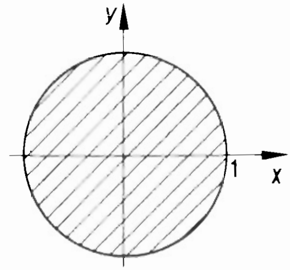
A megoldást az *1.3a, b, c ábra* mutatja.



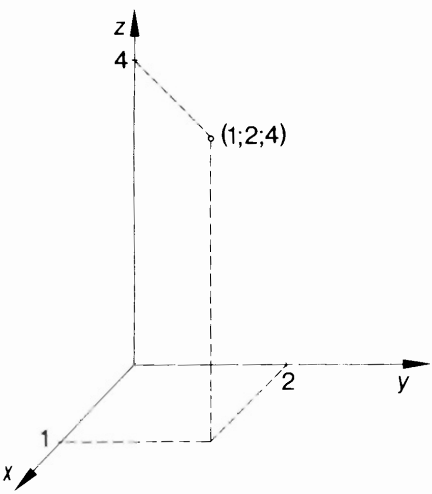
1.3a ábra



1.3b ábra



1.3c ábra



1.4. ábra

Hasonlóan létesíthető kölcsönösen egyértelmű leképezés a tér pontjai és az $\mathbf{R}^3$ halmaz elemei között. Az *1.4. ábra* az $(1, 2, 4)$ számhármasnak megfelelő pontot mutatja. A fentiek miatt beszélünk $\mathbf{R}^2$, illetve $\mathbf{R}^3$ pontjairól, illetve $\mathbf{R}^2$-t kétdimenziós, $\mathbf{R}^3$-t háromdimenziós térnek is nevezzük. (Itt a dimenzió és a tér fogalmára nem térünk ki.)
Az

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

szám n-est **vektornak** is szokás nevezni (vastag betűvel jelezzük, hogy nem egyetlen valós számról van szó).

1.8 Intervallum, távolság, környezet

Legyen $a<b$ két valós szám. Vezessük be az $\mathbf{R}$ bizonyos speciális részhalmazainak, az intervallumoknak és a környezetnek a fogalmát, illetve a megfelelő jelöléseket:

$[a, b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$ zárt intervallum;
$]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$ nyílt intervallum;
$]a, b] = \{x \mid a < x \leqq b\}$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum;
$[a, b[= \{x \mid a \leqq x < b\}$ balról zárt, jobbról nyílt intervallum.

Ha az intervallum nem véges, akkor az

$$\begin{aligned}
[a, \infty[&= \{x \mid a \leqq x\}, \\
]a, \infty[&= \{x \mid a < x\}, \\
]-\infty, a] &= \{x \mid x \leqq a\}, \\
]-\infty, a[&= \{x \mid x < a\}, \\
]-\infty, \infty[&= \mathbf{R}
\end{aligned}$$

jelöléseket használjuk.

Az $a < b$ valós számok távolságán a számegyenes a és b pontjainak a távolságát vagy más szóval az $[a, b]$ intervallum hosszát célszerű érteni:

$$\varrho(a, b) = b - a = |a - b|.$$

A számsík $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ pontjainak (vektorainak) távolságát már középiskolában is a

$$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

számként definiáltuk. Ezt általánosíthatjuk:

DEFINÍCIÓ. *Az*

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

és

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

$\mathbf{R}^n$*-beli pontok* ***távolságán*** *a*

$$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

számot értjük.

Az így definiált távolság az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

a) $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \geqq 0$;
$\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ (vagyis $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$)
b) $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varrho(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ (szimmetria)
c) $\varrho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqq \varrho(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \varrho(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ (háromszög-egyenlőtlenség)

Az *a)* és a *b)* tulajdonság a definícióból azonnal következik, a *c)* tulajdonság $n = 1, 2, 3$ esetén ismert (egy háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál). Háromnál nagyobb n-ekre nem bizonyítjuk.

DEFINÍCIÓ. *Valamely* $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ *pontnak* $\delta > 0$ *sugarú* ***környezetén*** $\mathbf{R}^n$ *azon* $\mathbf{x}$ *pontjainak halmazát értjük, amelyek* $\mathbf{a}$*-tól való távolsága kisebb* δ*-nál, azaz*

$$K_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \mid \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n\}.$$

(Ha nem okoz félreértést, röviden K_δ-t vagy K-t írunk.)

Egy dimenzióban (a számegyenesen) $K_\delta(a)$ azt a 2δ hosszúságú nyílt intervallumot jelenti, amelynek felezőpontja a, azaz

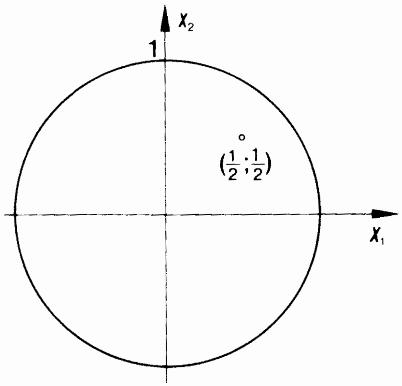
$$K_\delta(a) =]a-\delta,\ a+\delta[= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

$\mathbf{R}^2$-ben $K_\delta(\mathbf{a})$ egy $\mathbf{a}$ középpontú, δ sugarú kör belseje, $\mathbf{R}^3$-ban $\mathbf{a}$ középpontú, δ sugarú gömb belseje. Azt, hogy általában mit értünk egy halmaz belső pontján a következőképpen határozhatjuk meg:

DEFINÍCIÓ. *Valamely $H \subset \mathbf{R}$ halmaznak „a" **belső pontja,** ha a-nak van olyan környezete, amely része H-nak. Az „a" a H-nak **határpontja,** ha bármely környezetében H-nak is, H komplementerének is van pontja. (Itt H komplementere az **R** alaphalmazra vonatkozik.)*

Például az $I =]-1, 1[$ intervallumnak az $\frac{1}{2}$ belső pontja, mert például az $\frac{1}{4}$ sugarú környezete benne van I-ben;

$$K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right) = \left]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right[\subset I.$$



1.5. ábra

A -1 és az 1 pont határpontja I-nek.

Megjegyezzük, hogy a belső pont, illetve határpont definíciója $n > 1$ dimenzióban is teljesen hasonló. Például $n = 2$ esetén

$$H = \{\mathbf{x} \mid \varrho(\mathbf{0}, \mathbf{x}) < 1\}$$

halmaz azokat a pontokat tartalmazza, melyeknek az origótól való távolsága kisebb 1-nél. Ennek a halmaznak az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pont belső pontja. Ugyanakkor az origó közepű, egységsugarú körvonal minden pontja határpont *(1.5. ábra)*.

A fenti példában az $I =]-1, 1[$ nyílt intervallum minden pontja belső pont volt. A $[-1, 1]$ zárt intervallumnak nem minden pontja belső pont (hiszen a -1 és az 1 határpontok), viszont mindkét határpont a halmazhoz tartozik. Ezen intervallum nyílt, illetve zárt jelzője egy általánosabb fogalom speciális eseteként adódik.

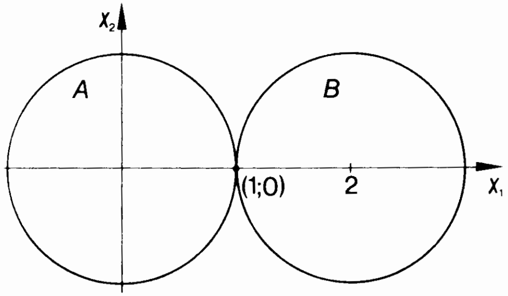
DEFINÍCIÓ. *Ha egy $H \subset \mathbf{R}$ halmaz minden pontja belső pont, akkor **nyílt halmaznak,** ha minden határpontját tartalmazza, **zárt halmaznak** nevezzük.*

Ez a definíció is változatlanul átvihető egynél nagyobb dimenziójú terekre.

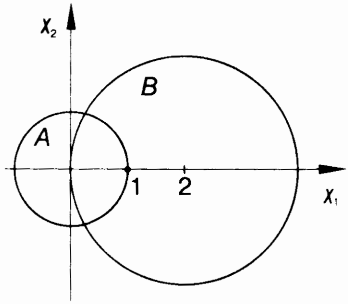
1.4. példa. Legyen $A = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leqq 1\}$. Az alábbi esetekben $A \cap B$ mikor üres, mikor nyílt vagy zárt halmaz?

a) $B = \{(x_1, x_2) | (x_1 - 2)^2 + x_2^2 < 1\}$;
b) $B = \{(x_1, x_2) | (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leqq 1\}$;
c) $B = \{(x_1, x_2) | (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \leqq 4\}$;
d) $B = \{(x_1, x_2) | (x_1 - 2)^2 + x_2^2 < 4\}$.

Az *a)* esetben $A \cap B = \emptyset$, hiszen az $(1, 0) \notin B$ *(1.6a ábra)*.
A *b)* esetben $A \cap B = \{(1, 0)\}$, azaz egyetlen pontból áll, így zárt halmaz, hiszen az egyetlen pontból álló halmaz tartalmazza „minden" határpontját. A példa *c)* részében a közös résznek csak olyan határpontjai vannak, amelyek mindkét halmaznak elemei, így a közös résznek is *(1.6b ábra)*, ezért zárt. A *d)* részben $A \cap B$ se nem nyílt, se nem zárt, ugyanis pl. az $(1, 0) \in A \cap B$ nem belső pont (tehát $A \cap B$ nem nyílt), ugyanakkor pl. a $(0, 0)$ határpont nincs $A \cap B$-ben (tehát $A \cap B$ nem zárt).



1.6a ábra



1.6b ábra

Az ilyen jellegű feladatok megoldását segíti az

1.6. TÉTEL. *Akárhány zárt halmaz közös része zárt, és akárhány nyílt halmaz egyesítése nyílt.*

Nem bizonyítjuk.

Említettük, hogy a $\sqrt{2}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként (irracionális). Az $r = 1{,}414\,213\,56$ racionális szám tizedesjegyei rendre megegyeznek $\sqrt{2}$ első nyolc tizedesjegyével. Így

$$\sqrt{2} - r < 10^{-8}.$$

Bármilyen nagy is n, létezik olyan r racionális szám, hogy

$$|\sqrt{2} - r| < 10^{-n}.$$

Erre a célra megfelel például az az r racionális szám, amely n tizedesjegyet tartalmaz és ezek azonosak $\sqrt{2}$ első n tizedesjegyével. Hasonló mondható el bármely irracionális számról: ha α tetszőleges irracionális szám, és K az α-nak valamely környezete, akkor van olyan r racionális szám, amely K-ban van. Ebből az következik, hogy bármely $]a, b[$ nem üres intervallumban van racionális szám. Ezt a tulajdonságot mondja ki a következő tétel:

1.7. TÉTEL. *A racionális számok a számegyenesen mindenütt sűrűn helyezkednek el.*

1.9 Halmazok számossága

Véges halmazokról könnyen el lehet dönteni, hogy melyik halmaznak van több eleme, egyszerűen megszámláljuk mindkét halmaz elemeit. Végtelen halmazok esetén ez az út nem járható: megszámlálással nem dönthetjük el, hogy páros vagy páratlan pozitív egész szám van-e több, vagyis hogy az

$$A = \{2, 4, 6, \dots\}$$
$$B = \{1, 3, 5, \dots\}$$

halmazok közül melyiknek több az eleme, melyiknek nagyobb a **számossága.** Véges halmazok esetén sem feltétlenül a megszámlálás az egyetlen lehetséges mód. Például, ha egy óvodás csoportról meg akarjuk tudni, hogy kisfiú vagy kislány van-e több (a fiúk vagy a lányok halmaza nagyobb számosságú-e), nem szükséges számlálni, hanem megkérjük őket, hogy minden kisfiú válasszon magának egy kislányt, akinek megfogja a kezét. Vagyis megpróbáljuk a két halmaz elemeit kölcsönösen egyértelmű módon egymáshoz rendelni (a halmazok elemeiből párokat alakítani). Ha lesz olyan kisfiú, akinek nincs párja, és már minden lánynak fogja egy fiú a kezét, akkor fiú van több; ha kislány marad pár nélkül, ők vannak többen. Ha sikerül a párképzés maradéktalanul, akkor egyenlő számosságúak. Ezt a módszert általánosíthatjuk:

DEFINÍCIÓ. *Két halmazról, A-ról és B-ről akkor mondjuk, hogy ugyanannyi elemük van, vagy* ***egyenlő számosságúak*** *(ekvivalensek), ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés létesíthető.*

A példaként említett páros, ill. páratlan számok A és B halmaza ekvivalens, hiszen az

$$1 \leftrightarrow 2; \quad 3 \leftrightarrow 4; \quad 5 \leftrightarrow 6; \quad \dots$$

hozzárendelés a két halmaz között kölcsönösen egyértelmű, azaz ugyanannyi páratlan szám van, mint páros.

Természetesen az ekvivalencia nem jelent egyenlőséget, hiszen a két halmaznak példánkban sem ugyanazok az elemei.

A végtelen halmazok nem mindig a véges halmazoknál megszokott módon viselkednek. Így lehet egy végtelen halmaz azonos számosságú saját valódi részhalmazával.

Például kölcsönösen egyértelmű az

$$1 \leftrightarrow 2; \quad 2 \leftrightarrow 4; \quad 3 \leftrightarrow 6; \quad \ldots; \quad n \leftrightarrow 2n; \quad \ldots$$

megfeleltetés a pozitív egész számok $\mathbf{N}^+$ halmaza és a pozitív páros számok halmaza között, azaz ugyanannyi pozitív egész van, mint amennyi pozitív páros (pedig a páratlanokat elhagytuk).

Amikor egy véges halmaz elemeit megszámláljuk, akkor minden eleméhez egy pozitív számot rendelünk.

Ha például a

$$C = \{a, b, c, d, e\}$$

halmaz elemeit megszámláljuk, akkor az

$$a \leftrightarrow 1; \quad b \leftrightarrow 2; \quad c \leftrightarrow 3; \quad d \leftrightarrow 4; \quad e \leftrightarrow 5$$

megfeleltetést végezzük, azaz C és az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazok között létesítünk leképezést, róluk állapítjuk meg, hogy azonos számosságúak. Ennek megfelelően általában:

DEFINÍCIÓ. *Ha valamely végtelen halmaz* $\mathbf{N}^+$*-szal azonos számosságú, akkor* ***megszámlálhatónak*** *nevezzük.*

A fentiek alapján a páros számok halmaza – és így a páratlan számok halmaza is – megszámlálható.

1.5. példa. A pozitív racionális számok halmaza megszámlálható. Ugyanis az

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \ldots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \ldots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \ldots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \ldots
\end{array}$$

végtelen táblázat minden racionális számot (két egész szám hányadosaként felírható számot) tartalmaz. Sőt mindegyik többször is előfordul, például $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots$. Haladjunk a nyilak irányába, átlépve azokat, amelyek már szerepeltek, a többieket pedig sorszámozzuk meg 1-től kezdve.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \longrightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \longrightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \cdots \\[2ex]
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \cdots \\[1ex]
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\[1ex]
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \cdots \\[2ex]
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & & \cdots \\[1ex]
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\[1ex]
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & & \cdots
\end{array}$$

Így az

$$\frac{1}{1}\leftrightarrow 1;\ \frac{1}{2}\leftrightarrow 2;\ \frac{2}{1}\leftrightarrow 3;\ \frac{3}{1}\leftrightarrow 4;\ \frac{1}{3}\leftrightarrow 5;\ \cdots$$

kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesítettük a pozitív racionális számok $\mathbf{Q}^+$ halmaza és a pozitív egész számok $\mathbf{N}^+$ halmaza között: *a pozitív racionális számok halmaza megszámlálható.* Ez azt jelenti, hogy ha a számegyenes pozitív felén az egész számoknak megfelelő pontokhoz hozzávesszük a mindenütt sűrű közönséges törteknek megfelelő pontokat, azok számossága nem változik.

Az eddigi példánkban minden halmaz vagy véges, vagy megszámlálhatóan végtelen volt. Kérdés, van-e olyan halmaz, amely nem megszámlálható, azaz több elemből áll, mint $\mathbf{N}^+$.

1.8. TÉTEL. *A valós számok halmaza nem megszámlálható.*

Bizonyítás:

Elegendő azt megmutatni, hogy a 0 és 1 közé eső valós számok halmaza nem megszámlálható. Ha megszámlálható lenne, akkor mindegyikhez kölcsönösen egyértelmű módon rendelhető lenne egy pozitív egész szám, és így felírhatnánk őket olyan sorrendben, ahogy a nekik megfelelő természetes számok követik egymást:

$$\begin{aligned} a_1 &\leftrightarrow 1 \\ a_2 &\leftrightarrow 2 \\ a_3 &\leftrightarrow 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Itt csak azokat az $a_1, a_2, \ldots$ számokat vegyük, amelyek tizedes tört kifejezése végtelen (már ezek halmaza sem megszámlálható). Megmutatjuk, hogy biztosan van olyan 0 és 1 közötti végtelen tizedes tört, amely nincs köztük, vagyis amelyikhez biztosan nem rendeltünk pozitív egész számot (a párképzésnél fennmaradt).

Ilyen például az a

$$b = 0{,}b_1 b_2 b_3 \ldots$$

végtelen tizedes tört, amelynek jegyeire

$$b_i \neq a_{ii}; \qquad b_i \neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

összefüggés fennáll. Ekkor ugyanis

$$\begin{aligned} b_1 \neq a_{11} &\Rightarrow b \neq a_1, \\ b_2 \neq a_{22} &\Rightarrow b \neq a_2, \\ b_3 \neq a_{33} &\Rightarrow b \neq a_3. \\ &\vdots \end{aligned}$$

2. VALÓS FÜGGVÉNYEK

2.1 Függvényfogalom

A matematikában, a közgazdaságtanban, sőt a mindennapi életben is gyakran rendeljük egyik halmaz elemeihez egy másik halmaz elemeit. Például

- amikor téglalapok területét definiáljuk, akkor az adott sík minden téglalapjához egy valós számot rendelünk (a területét);
- egy vendéglő étlapján az ott kapható ételek halmazának minden eleméhez egy valós számot rendelünk, az adott étel árát;
- kölcsönösen egyértelmű a hozzárendelés a világ fővárosainak és államainak halmaza között.

Természetesen nincs kizárva, hogy a hozzárendelés során egy halmazon belül maradunk: a valós számok négyzetének definiálásakor minden valós számhoz valós számot (a négyzetét) rendeljük hozzá.

Ha a valós számok valamely nem üres X részhalmazának elemeihez (minden $x \in X$ valós számhoz) *egy* valós számot rendelünk – jelölje ezt $f(x)$ – akkor azt mondjuk, hogy az X számhalmazon egy f függvényt adtunk meg. Például az

$$X = \{1, 2, 3\}$$

halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá annak négyzetét, azaz legyen

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 9.$$

Itt f az X halmazon definiált függvény.

Ha számhalmazok helyett tetszőleges halmazokat tekintünk, akkor a függvény legáltalánosabb fogalmát adhatjuk meg.

Legyen A és B nem üres halmaz (nem feltétlenül különbözőek). Egy A halmazon értelmezett B halmazbeli értékeket felvevő f **függvényt** akkor tekintünk adottnak, ha az A halmaz minden eleméhez a B halmaz pontosan *egy* elemét rendeljük. Ezt szokás az A halmaznak B-be történő (egyértékű) leképezésének is nevezni.

Néhány elnevezés és jelölés:

A az f függvény **értelmezési tartománya.**

B a **képhalmaz.**

Az $a \in A$-hoz rendelt B-beli elem jele $f(a)$, és (az a helyen vett) **függvényértéknek** nevezzük.

Az $f(A) = \{b \mid b = f(a),\ a \in A\}$ halmaz az f **értékkészlete** ($f(A) \subset B$).
Az f függvény megadásakor szokásos jelöléseket a bevezető példánk segítségével mutatjuk meg:

a) $f: f(x) = x^2,$	$x \in X = \{1, 2, 3\}$
vagy egyszerűen: $f(x) = x^2,$	$x \in X;$
b) $f: x \mapsto x^2,$	$x \in X;$
c) $f: x \in X,$	$f(x) = x^2;$
d) $f: x \in X,$	$x \mapsto x^2;$
e) $f: X \mapsto Y,$	$x \mapsto x^2;$
f) $f: X \mapsto Y,$	$f(x) = x^2.$

Itt az Y a valós számok részhalmaza, amely tartalmazza az $f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$ számokat,

$$\{1, 4, 9\} \subset Y \subset \mathbf{R}.$$

Mi legtöbbször az *a)*, illetve a *b)* alatti jelöléseket fogjuk használni.

Valamely f függvény értelmezési tartományát gyakran D_f-fel, és ekkor értékkészletét $f(D_f)$-fel jelöljük. Példánkban

$$D_f = \{1, 2, 3\}, \qquad f(D_f) = \{1, 4, 9\}.$$

A függvények jelölésére az f betűn kívül más betűt is alkalmazhatunk ($g, h, \ldots, F, G, \ldots$).

DEFINÍCIÓ. *Az f és g függvények akkor egyenlőek, ha*

$$D_f = D_g$$

és

$$f(x) = g(x) \text{ minden } x \in D_f \text{ esetén,}$$

vagyis ha ugyanaz az értelmezési tartományuk és az értelmezési tartomány minden eleméhez azonos függvényérték tartozik.

Az

$$f:\ f(x) = x^2, \qquad x \in \mathbf{N},$$
$$g:\ g(x) = x^2, \qquad x \in]-1, 1[$$

és a

$$h:\ h(x) = x^2, \qquad x \in [0, 1[$$

függvények mindegyikénél az értelmezési tartomány elemeihez azoknak négyzetét rendeljük. Definíciónk szerint ezek a függvények mégsem egyenlőek egymással, mivel mindegyiknek más az értelmezési tartománya. Felhívjuk az olvasó figyelmét arra, hogy a g és h függvények értékkészlete is azonos,

$$g(D_g) = h(D_h) = [0, 1[.$$

2.2 Valós függvények

A továbbiakban – hasonlóan a középiskolához – legtöbbször olyan függvényekkel foglalkozunk, amelyeknek értelmezési tartománya a valós számok halmaza vagy annak valamely részhalmaza és a függvényértékek is valós számok.

DEFINÍCIÓ. *Valós értékű függvénynek, röviden* ***valós függvénynek*** *olyan függvényt nevezünk, amelynek értékkészlete része a valós számok halmazának (a függvényértékek valós számok).*
A szokásos jelöléssel: az

$$f\colon X \to Y \text{ függvény valós, ha } Y \subset \mathbf{R}.$$

A fentiek alapján pl. bármely ártáblázat valós függvény.

DEFINÍCIÓ. *Ha az f valós függvénynek az értelmezési tartománya is a valós számhalmaz egy részhalmaza, akkor* ***valós-valós függvényről*** *vagy* ***egyváltozós valós függvényről*** *beszélünk.*

Megjegyezzük, hogy valós függvényen gyakran a valós-valós függvényeket értik.

Valós-valós függvény például az

$$f\colon f(x) = \frac{1}{x^2-9}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$$

függvény. Ennek a függvénynek az értelmezési tartományába beletartozik minden olyan x valós szám, amelyre az adott

$$\frac{1}{x^2-9}$$

képlet alapján az $f(x)$ függvényérték kiszámítható. Az értelmezési tartományból a valós számok közül csak a 3 és a -3 hiányzik, ugyanis ekkor a függvényérték kiszámításához 0-val kellene osztani. Azt mondjuk, hogy ennek az f függvénynek az értelmezési tartománya a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmaza. Az ilyen esetekben – ha nem okoz félreértést – az egyváltozós függvények megadásakor gyakran elhagyjuk az értelmezési tartományt, és csak azt az utasítást (algoritmust) adjuk meg, amellyel az értelmezési tartomány bármely x eleméhez tartozó $f(x)$ függvényérték meghatározható. Így valójában az értelmezési tartomány is adott, anélkül, hogy odaírnánk. Ebben azért is célszerű megállapodni, mert néha nehézkes megadni a kizárandó értékeket.

Például már a

$$g: g(x)=\frac{1}{x^3+2x-1}$$

aránylag egyszerű függvény esetében sem könnyű megadni azokat a valós számokat, ahol a nevező nulla.

Az egyváltozós valós függvényeket – ha mást nem mondunk, ezentúl függvényeken mindig ezeket értjük – kétdimenziós koordináta-rendszerben szemléltethetjük.

DEFINÍCIÓ. *A kétdimenziós koordináta-rendszerben az*

$$(x, f(x)), \qquad x\in D_f$$

pontok halmazát az f függvény ***grafikonjának (ábrájának, görbéjének, gráfjának)*** *nevezzük.*

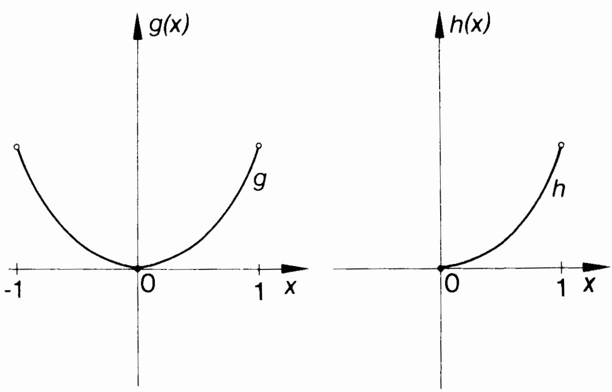
A *2.1. ábrán* az előző pontban említett

$$g(x)=x^2, \qquad x\in\,]-1, 1[$$

és

$$h(x)=x^2, \qquad x\in[0, 1]$$

függvények grafikonját láthatjuk. A grafikonon kis körök jelzik, hogy az intervallum adott végpontja nincs az értelmezési tartományban. Ha ki akarjuk emelni, hogy az intervallum végpontja az értelmezési tartományhoz tartozik, ott kissé megvastagítjuk a grafikont.



2.1. ábra

2.3 A középiskolából ismert elemi függvények

Az ismeretek felelevenítése és a későbbiekben is használt jelöléseink bemutatása végett felírunk néhány ismert elemi függvényt értelmezési tartományukkal, értékkészletükkel, és vázoljuk grafikonjukat.

1. Hatványfüggvény:

$$f_n\colon f_n(x)=x^n, \qquad D_{f_n}=\mathbf{R}, \qquad n = 1, 2, 3.$$

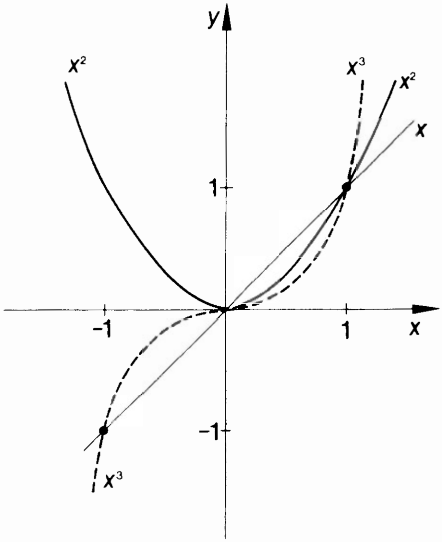
Az értékkészletek:

$$f_1(D_{f_1})=f_3(D_{f_3})=\mathbf{R}, \qquad f_2(D_{f_2})=\mathbf{R}_0^+.$$

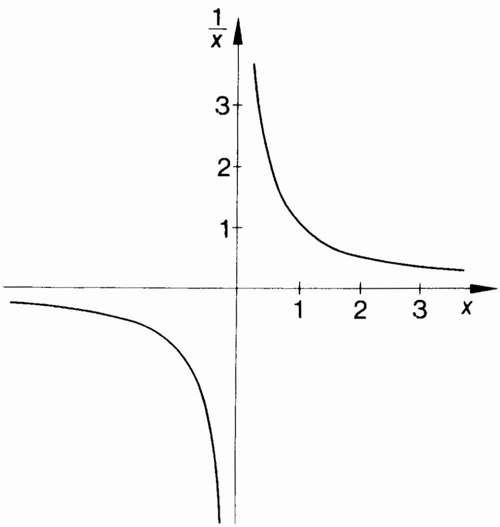
2. $f\colon f(x) = \dfrac{1}{x}, \qquad D_f=\mathbf{R}\setminus\{0\}.$

Az értékkészlet:

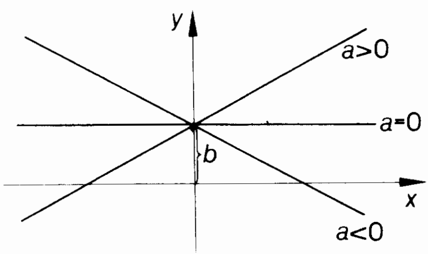
$$f(D_f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}=D_f.$$



2.2. ábra



2.3. ábra



3. Lineáris függvény:

$$f\colon f(x) = ax+b, \qquad D_f=\mathbf{R},$$
$$f(D_f)=\mathbf{R}.$$

Az $a=0$ esetben **konstans függvényről** beszélünk. Ekkor $f(D_f)=\{b\}$.

2.4. ábra

4. *Exponenciális függvény:*

$$\exp_a:\ \exp_a(x) = a^x, \qquad a>0, \qquad x\in \mathbf{R}.$$

Az értékkészlet:

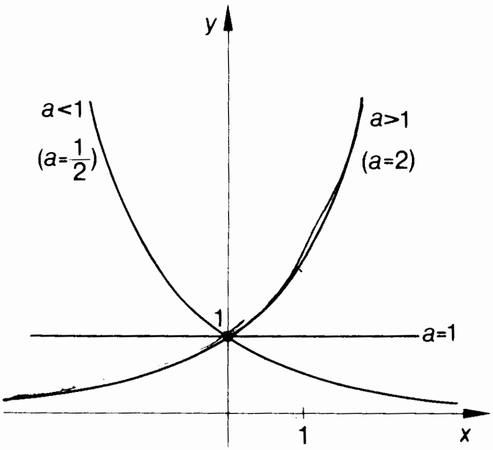
$$\exp_a(\mathbf{R})=\mathbf{R}^+ \qquad (\text{ha } a=1, \text{ akkor } \{1\}).$$

5. *Logaritmusfüggvény:*

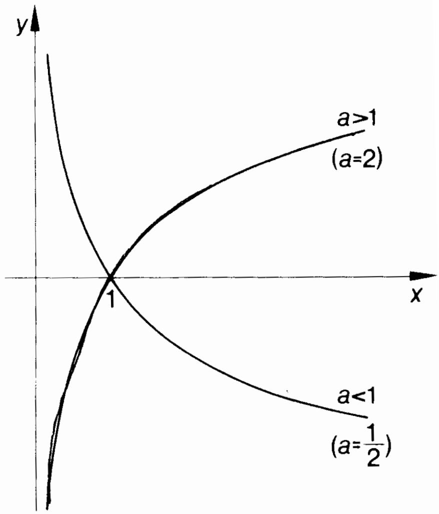
$$\log_a:\ x\mapsto \log_a(x) \quad a>0, \qquad a\neq 1, \qquad x\in \mathbf{R}^+.$$

Az értékkészlet:

$$\log_a(\mathbf{R}^+)=\mathbf{R}.$$



2.5. ábra



2.6. ábra

6. *Trigonometrikus függvények:*

$$\sin:\ x\mapsto \sin(x), \qquad x\in\mathbf{R},$$
$$\cos:\ x\mapsto \cos(x), \qquad x\in\mathbf{R}.$$

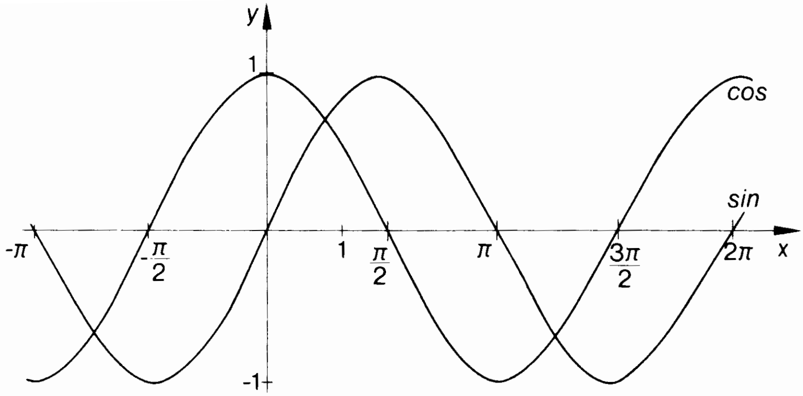
Az értékkészletük:

$$\sin(\mathbf{R}) = \cos(\mathbf{R}) = [-1, 1].$$

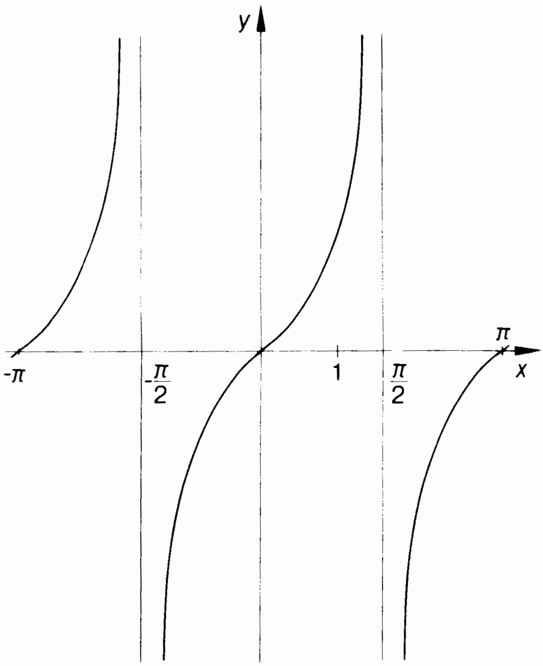
A *2.7. ábrán* az y tengelyen az egységet kétszer akkorának választottuk, mint az x tengelyen.

$$\mathrm{tg}:\ x\mapsto \mathrm{tg}(x), \qquad x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}.$$

Az értékkészlet: $\mathbf{R}$.

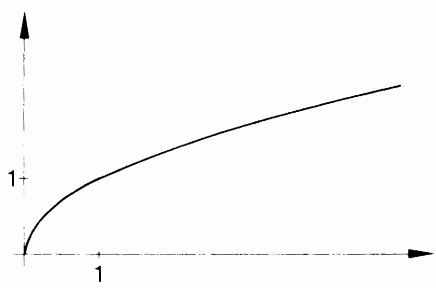


2.7. ábra



Megjegyezzük, hogy – ha nem okoz félreértést – az *5.* és *6.* alatt definiált függvényeknél a zárójelet elhagyhatjuk ($\log_2 x$, $\sin x$ stb).

2.8. ábra



7. Négyzetgyökfüggvény:

$$x \mapsto \sqrt{x}, \qquad x \geqq 0.$$

Az értékkészlet: $\mathbf{R}_0^+$

2.9. ábra

2.4 Szakaszonként lineáris függvények

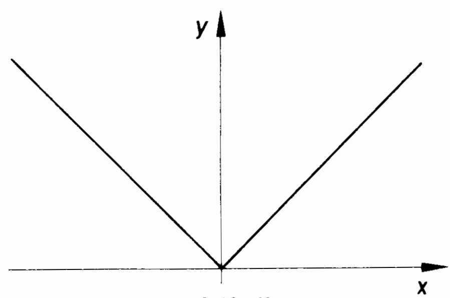
Ebben a pontban három gyakran használt olyan függvényt ismerünk meg, amelyeket minden valós számra (az egész számegyenesen) értelmezünk, és az értelmezési tartományt felbonthatjuk olyan részintervallumokra, ahol a függvény grafikonja egyenes.

DEFINÍCIÓ. *Az*

$$\text{abs}:\ \text{abs}\,(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

függvényt **abszolútérték-függvénynek** *nevezzük.*

A definícióból azonnal következik, hogy grafikonja a számegyenes pozitív felén az $x \mapsto x$ függvény grafikonjával, a számegyenes negatív felén az $x \mapsto -x$ függvény grafikonjával azonos *(2.10. ábra)*. Így az értelmezési tartomány $]-\infty, 0]$ és a $[0, \infty]$ részintervallumain lineáris.
Az értékkészlete: $\text{abs}\,(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_0^+$.



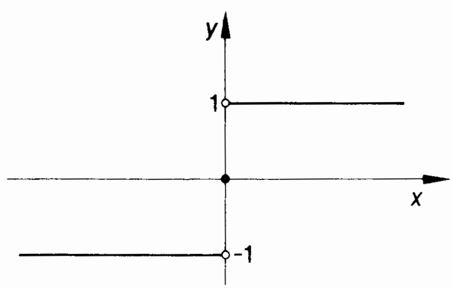
2.10. ábra

DEFINÍCIÓ. *A*

$$\text{sgn}:\ \text{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad x > 0 \\ 0, & ha \quad x = 0 \\ -1, & ha \quad x < 0 \end{cases}$$

függvényt **szignumfüggvénynek** *nevezzük.*

Az értelmezési tartomány $]-\infty, 0[$ és $]0, \infty[$ részintervallumain a grafikonja egy-egy az x tengellyel párhuzamos félegyenes *(2.11. ábra)*.
A függvény értékkészlete a $\{-1, 0, 1\}$ háromelemű halmaz.



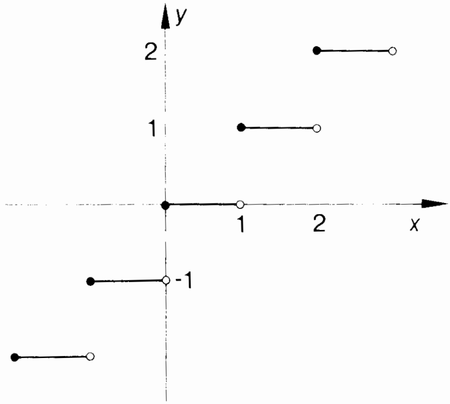
2.11. ábra

Tekintsük például a 7,8 valós számot, amely felírható egy egész szám (7) és egy valódi tört (0,8) összegeként. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a 7,8 szám egészrésze 7.

DEFINÍCIÓ. *Valamely x valós szám* **egészrészén** *azt az n egész számot értjük, amelyre $n \leqq x < n + 1$, jele:* $[x]$.

Az $f: f(x) = [x], \quad x \in \mathbf{R}$

függvényt ***egészrész-függvénynek*** *(entier-függvénynek) nevezzük.*



A definíció alapján

$[7{,}8] = [7{,}2] = 7$, $[-1{,}3] = [-1{,}8] = -2$.

Az f függvény minden $[n, n+1[$, $(n \in \mathbf{Z})$ intervallumban állandó *(2.12. ábra)*. Az értékkészlete: $f(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}$.

2.12. ábra

2.5 Korlátosság, szélsőérték, monotonitás. Páros és páratlan függvények

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt az $X \subset D_f$ halmazon* ***felülről korlátosnak, alulról korlátosnak,*** *illetve* ***korlátosnak*** *mondjuk, ha az $f(X)$ halmaz (a függvényértékek halmaza) felülről korlátos, alulról korlátos, illetve korlátos. Korlátosság esetén az $f(X)$ halmaz felső (alsó) határát az f függvény X halmazra vonatkozó felső (alsó) határának nevezzük.*

Az eddig tárgyalt függvények közül az

$$x \mapsto x^2 \quad \text{és az} \quad \exp_a \quad (a \neq 1)$$

függvények alulról korlátosak, de felülről nem. Mindkét függvény legnagyobb alsó korlátja (alsó határa) 0. A sin függvény alulról is és felülről is korlátos, alsó határa -1, felső határa 1. A függvény alsó határának, illetve felső határának a jelölésére az 1.6 pontban halmazokra bevezetett jelölések megfelelőit használjuk:

f alsó határa az $X \subset D_f$ halmazon: $\inf\limits_X f(x)$ (infimum),

f felső határa az $X \subset D_f$ halmazon: $\sup\limits_X f(x)$ (supremum).

Ha $X = D_f$, akkor az X elhagyható. Ennek megfelelően:

$$\inf 2^x = 0, \qquad \inf_{[0,1]} 2^x = 1, \qquad \sup_{[0,1]} 2^x = 2.$$

A fenti példákból is látszik, hogy az alsó, illetve felső határ nem feltétlenül szerepel a függvényértékek között. Például az

$$x \mapsto 2^x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény sehol nem veszi fel a 0 értéket. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ennek a függvénynek az értelmezési tartományában felvett értékei között nincs legkisebb. Ugyanakkor az

$$f\colon\ f(x) = x^2 \quad (x \in \mathbf{R}) \qquad \text{és} \qquad g\colon\ g(x) = 2^x \quad (x \in [0, 1]) \tag{2.1.}$$

függvényeknek van legkisebb függvényértéke: $f(0) = 0$ és $g(0) = 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$f(x) > f(0), \qquad \text{és} \qquad g(x) > g(0), \qquad \text{ha} \qquad x \neq 0.$$

DEFINÍCIÓ. *Legyen f tetszőleges függvény, és H része f értelmezési tartományának. Azt mondjuk, hogy $a \in H$ az f-nek H-ra nézve* ***(szigorú) abszolút maximumhelye (minimumhelye),*** *ha minden $x \in H$ $(x \neq a)$ esetén*

$$f(x) < f(a) \qquad (f(x) > f(a)).$$

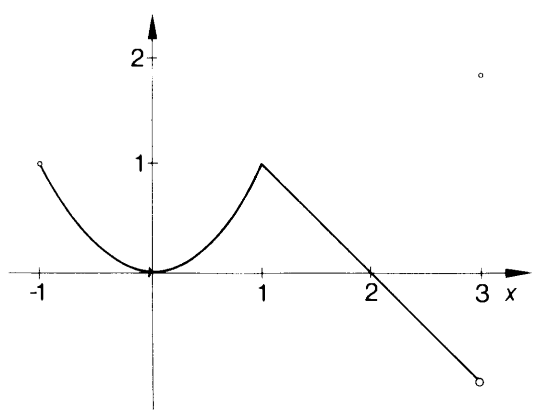
Ha az egyenlőséget megengedjük, akkor ***tágabb értelemben vett abszolút maximumhelyről (minimumhelyről)*** *beszélünk. A maximumhely és minimumhely közös neve* ***szélsőértékhely.*** *Ha mást nem mondunk, H alatt az értelmezési tartományt értjük.*

A (2.1.) alatti függvényeknek a 0 szigorú abszolút minimumhelye. Az egész számegyenesen értelmezett $\exp_2$ függvénynek viszont sem minimumhelye, sem maximumhelye nincs (lásd *2.5. ábra*). A cos függvénynek a $k \cdot 2\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek tágabb értelemben vett abszolút maximumhelyei ($\cos(k \cdot 2\pi) = 1$), a $(2k+1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek tágabb értelemben vett abszolút minimumhelyei (ezeken a helyeken a függvényértékek -1-gyel egyenlőek). Ha a cos függvény grafikonjára nézünk (lásd *2.7. ábra*), látható, hogy a 0-ban felvett függvényérték például a $[-\pi, \pi]$ intervallumban a legnagyobb. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy a 0 hely a $[-\pi, \pi]$ intervallumra nézve a cos függvénynek szigorú abszolút maximumhelye.

Az

$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} x^2 & -1 < x \leqq 1 \\ 2 - x & 1 < x < 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases} \tag{2.2.}$$

függvényt a *2.13. ábrán* vázoltuk.



2.13. ábra

Az f abszolút maximumhelye 3, abszolút minimumhelye nincs. A 0-hely az f-nek nem abszolút minimumhelye az egész értelmezési tartományra nézve, de abszolút minimumhelye például a $[-0{,}5; 0{,}5]$ intervallumra nézve. Az ilyen helyi (lokális) viselkedésre vonatkozik a következő definíció.

DEFINÍCIÓ. *Az $a \in D_f$ az f függvénynek* ***lokális maximumhelye (minimumhelye),*** *ha a-nak van olyan K környezete, hogy f-nek az „a" a $K \cap D_f$ halmazra nézve abszolút maximumhelye (minimumhelye).*

Megjegyezzük, hogy definíciónk mind a szűkebb, mind a tágabb értelemben vett szélsőérték fogalmára vonatkoztatható.

E definíció és a fentiek alapján a (2.2.) alatti függvénynek *(2.13. ábra)* az $x=0$ lokális minimumhelye, az $x=1$ a függvény lokális maximumhelye. Az $x=0$ és az $x=1$ szigorú értelemben vett lokális szélsőértékhelye a függvénynek.

DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy az f függvény a $X \subset D_f$ halmazon (szigorúan)* ***monoton növekedő,*** *ha $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$; (szigorúan)* ***monoton fogyó*** *vagy csökkenő, ha $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.*

Ha a függvényértékek között az egyenlőséget megengedjük, akkor tágabb értelemben vett monoton növekedésről, illetve csökkenésről beszélünk.

A (2.2.) alatti függvény a $]-1, 0]$ és az $[1, 3]$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő, a $[0, 1]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő. Az $\exp_a$ és $\log_a$ függvények $a > 1$ esetén az egész értelmezési tartományban monoton növekedőek, $0 < a < 1$ esetén monoton csökkenőek.

A későbbiekben, amikor függvényeket különböző szempontokból vizsgálunk, a vizsgált függvény esetleges szimmetriatulajdonsága megkönnyíti a feladat megoldását.

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt* ***páros függvénynek*** *mondjuk, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = f(x)$; f* ***páratlan függvény,*** *ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ és $f(-x) = -f(x)$.*

Páros függvény például az $x \mapsto x^2$, a cos és az $f(x) = 1$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény. Páratlan függvények: sin, tg, $x \mapsto x$. A definícióból azonnal következik, hogy derékszögű Descartes-féle koordináta-rendszerben a páros függvény grafikonja az y tengelyre, a páratlan függvény grafikonja az origóra szimmetrikus. (Felhívjuk a figyelmet arra, hogy csak olyan függvény lehet páros, illetve páratlan, amelyiknek értelmezési tartománya az origóra szimmetrikus.)

2.6 Függvénytranszformációk

2.1. TÉTEL. *Legyen az f függvény grafikonja egy Descartes-féle koordinátarendszerben ismert.*

a) *Az $f+c$, vagyis az*

$$x \mapsto f(x)+c, \qquad x \in D_f$$

függvény görbéje az f görbének y tengely irányú eltolásával nyerhető, az eltolás nagysága $|c|$ egység, iránya c előjelének megfelelő.

b) *A cf, vagyis az*

$$x \mapsto cf(x), \qquad x \in D_f, \qquad c>0$$

függvény grafikonja az f grafikonjának y tengely irányú c-szeres nyújtásával kapható (az x tengely helyben marad).

c) *A $-f$, vagyis az*

$$x \mapsto -f(x), \qquad x \in D_f$$

függvény grafikonja az f grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe.

d) *Az*

$$x \mapsto f(x+a), \qquad (x+a) \in D_f$$

függvény ábrája az f függvény ábrájának x tengely irányú eltolásával adódik. Az eltolás mértéke $|a|$ egység, $a>0$ esetén csökkenő x értékek irányában („balra"), $a<0$ esetén az eltolás iránya ezzel ellentétes.

e) *Az*

$$x \mapsto f(a \cdot x), \qquad a \cdot x \in D_F$$

függvény grafikonját az f grafikonjának x tengely irányú a-szoros zsugorításával ($a>1$), illetve $\frac{1}{a}$-szoros nyújtásával ($0<a<1$) kapjuk (az y tengely helyben marad).

f) *Az*

$$x \mapsto f(-x) \qquad -x \in D_f$$

függvény grafikonja az f grafikonjának az y tengelyre vonatkozó tükörképe.

2.1. példa. Vázoljuk az

$$\text{a) } f\colon\ f(x) = x^2-4x+5,$$

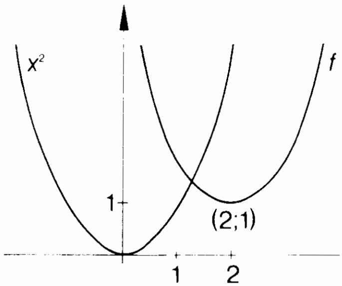
$$\text{b) } g\colon\ g(x) = 3\sin(2x+\pi)+1$$

függvényeket.

a) Először alakítsuk teljes négyzetté $f(x)$-et:

$$f(x) = (x-2)^2+1.$$

A 2.1. tétel d) része szerint az $x \mapsto x^2$ függvény grafikonját 2-vel jobbra kell tolni, és a tétel a) pontja szerint 1 egységgel felfelé *(2.14. ábra)*.



2.14. ábra

b) a g függvény grafikonját a sin függvény grafikonjának 2.1. tétel szerinti transzformációival kaphatjuk:

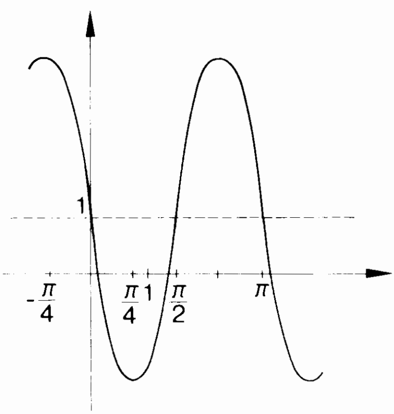
az y tengely irányában 3-szorosára kell nyújtani;

az x tengely irányában 2-szeres zsugorítást hajtunk végre.

1 egységgel az y tengely pozitív irányába eltoljuk; ahhoz, hogy az x tengely irányában történő eltolás mértékét megkapjuk, alakítsuk át kissé $g(x)$-et:

$$3\sin(2x+\pi)+1 = 3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1.$$

Most már a tétel d) pontjának megfelelően látszik, hogy $\frac{\pi}{2}$ egységgel kell balra tolni.



2.15. ábra

Megjegyezzük, hogy az eltolást mindig a nyújtás, illetve a zsugorítás után végezzük el. A g grafikonja a *2.15. ábrán* látható.

A trigonometrikus összefüggések alapján is meggyőződhetünk róla, de a 2.7. ábra is mutatja, hogy

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

2.7 Műveletek valós függvényekkel

Már középiskolai tanulmányainkban is előfordult, hogy alapműveletek segítségével függvényekből újabb függvényeket állítottunk elő. Például a tg függvény a sin és cos függvények hányadosa (kivéve azokat a helyeket, ahol a nevezőben lévő cos függvény a 0 értéket veszi fel).

DEFINÍCIÓ: *Legyenek f és g valós függvények.*

a) *f és g összege az a h függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_f \cap D_g$, és*

$$h(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in D_f \cap D_g.$$

Jelben: $h = f + g$.

b) *f és g szorzata az a h függvény, amelynek értelmezési tartománya $D_f \cap D_g$, és*

$$h(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad x \in D_f \cap D_g.$$

Jelben: $h = f \cdot g$.

c) *f és g hányadosának azt a h függvényt nevezzük, amelynek értelmezési tartománya*

$$D_h = D_f \cap D_g \setminus \{x : g(x) = 0\},$$

és

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in D_h.$$

2.2. példa. Vázoljuk a

$$h\colon\ h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

függvény grafikonját.

Mivel

$$h(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = h(x),$$

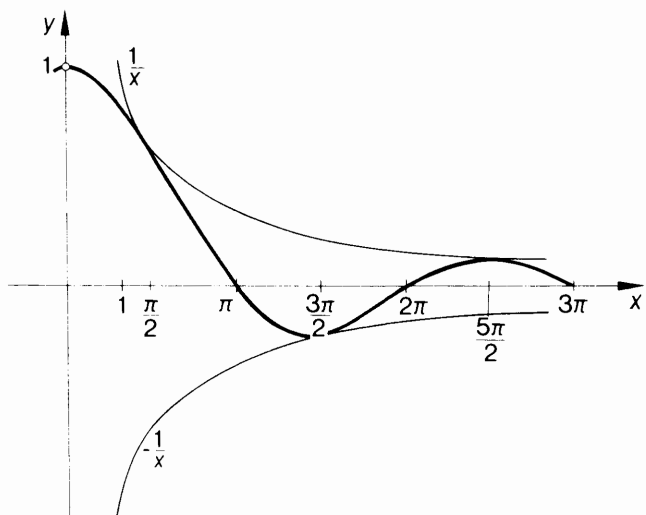
a h páros függvény. (Általában is igaz, hogy két páratlan függvény szorzata és hányadosa páros.) Így a szimmetria miatt elegendő az értelmezési tartomány pozitív felével foglalkozni. A h függvényt két függvény szorzatának is felfoghatjuk:

$$h(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin x.$$

Mivel $|\sin x| \leqq 1$, a

$$|h(x)| \leqq \left|\frac{1}{x}\right|, \quad \text{azaz} \quad -\frac{1}{x} \leqq h(x) \leqq \frac{1}{x}, \qquad x>0. \tag{2.3.}$$

A *2.16. ábrán* vázoltuk az $x \mapsto \frac{1}{x}$ és $x \mapsto -\frac{1}{x}$ $(x>0)$ függvények görbéit. A (2.3.) miatt a h grafikonja ezek között halad, közös pontjuk ott lesz, ahol a sin függvény értéke 1, illetve -1. Ezek a helyek: $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, illetve $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ $(k \in \mathbf{N})$. A h függvény ugyanott metszi az x tengelyt, ahol a sin függvény, vagyis a $k\pi$ pontokban. Ezek után már nem nehéz vázolni a h görbéjét. Nehézséggel csak akkor találkozunk, ha közeledünk az origóhoz. Ekkor a h számlálójában és nevezőjében lévő függvények mindegyike a nullához közeledik. Kérdés, hogyan viselkedik a hányadosuk. Ezzel a kérdéssel bővebben a 4.1 pontban foglalkozunk, most csak annyit jegyzünk meg, hogy a 0 hely közelében h grafikonja az 1 és a cos függvény grafikonja között halad.



2.16. ábra

2.8 Racionális egész függvény

DEFINÍCIÓ. *Legyen n nemnegatív egész szám, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ legyenek valós számok. Az*

$$f\colon f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \qquad x \in \mathbf{R}$$

függvényt ***racionális egész függvénynek*** *vagy* ***polinomnak*** *mondjuk.*
Az a_i $(i = 0, \ldots, n)$ számok a polinom együtthatói.
Ha $a_n \neq 0$, ***n-edfokú*** *polinomról, egyébként* ***legfeljebb n-edfokú*** *polinomról beszélünk.*

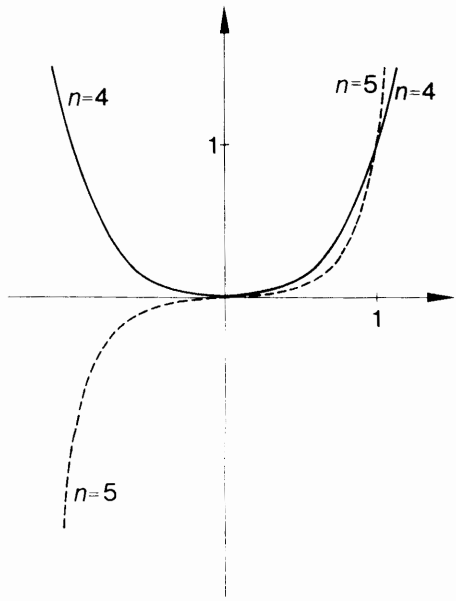
A középiskolában részletesen az $n \leqq 2$ esetekkel foglalkoztunk. A 2.1. példa a) részében egy másodfokú polinom szerepelt.

A későbbiek szempontjából is kulcsszerepük van a hatványfüggvényeknek:

$$f_n\colon f_n(x) = x^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.4.}$$

Itt a 2.3 pontban elmondottakhoz csak annyit teszünk hozzá, hogy páros n-ekre az f_n az f_2-höz, páratlan n-ekre f_n az f_3-hoz hasonlóan viselkedik. Az f_4 és f_5 grafikonja a *2.17. ábrán* látható.

Minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $f_n(0) = 0$. Ha $n > 1$, akkor f_n görbéjének az x tengely érintője. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy páratlan n esetén a görbe nem marad az érintő egyenesének ugyanazon oldalán (átmetszi az érintőjét). Úgy is fogalmazhatunk, hogy páratlan n esetén az f_n a 0-ban előjelet vált (negatívból átmegy pozitívba), páros n esetén nem vált előjelet.



2.17. ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban* ***előjelet vált,*** *ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $[a-\delta; a+\delta] \subset D_f$ és minden*

$$x_1 \in [a-\delta, a[, \qquad \textit{valamint} \qquad x_2 \in]a, a+\delta]$$

esetén

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0.$$

Előjelváltás esetén, ha $f(x_1)<0$ ($f(x_2)>0$), akkor azt mondjuk, hogy f az a pontban negatívból pozitívba megy át, ellenkező esetben pozitívból negatívba.

DEFINÍCIÓ. *Ha $a \in D_f$ és $f(a) = 0$, akkor a az f függvény zérushelye.*

A fentiek szerint a (2.4.) alatti f_n függvények zérushelye a 0 pont. Középiskolából ismert, hogy az

$$x \mapsto a_1x+a_0$$

elsőfokú polinomnak egy zérushelye van, az

$$x \mapsto a_2x^2+a_1x+a_0$$

másodfokú polinomnak legfeljebb két zérushelye lehet. Hasonló állítást fogalmazhatunk meg 2-nél nagyobb n-ekre is.

2.2. TÉTEL. *Egy n-edfokú polinomnak ($n \geqq 1$) legfeljebb n számú zérushelye lehet.*

(Nem bizonyítjuk.)

2.3. példa. *a)* Mint arról könnyen meggyőződhetünk, az

$$f\colon\ f(x) = x^2-5x+6$$

polinomnak a zérushelyei az $x_1=2$ és az $x_2=3$. Felírhatjuk az ún. gyöktényezős alakot:

$$f(x) = (x-2)(x-3).$$

b) Egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy az

$$f(x) = x^3-5x^2+7x-3$$

polinomnak az 1 zérushelye ($f(1) = 0$). A jobb oldali szorzás elvégzésével igazolható, hogy

$$f(x) = x^3-5x^2+7x-3 = (x-1)(x^2-4x+3).$$

2.3. TÉTEL. *Ha a az f n-edfokú polinomnak zérushelye, akkor f mindig felírható a következő alakban:*

$$f(x) = (x-a)g(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

ahol $g(x)$ $(n-1)$-edfokú polinom. Itt az $(x-a)$ szorzót ***gyöktényezőnek*** *nevezzük.*

Bizonyítás:

Felhasználjuk a következő azonosságot:

$$a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}), \qquad (n \in \mathbf{N}^+). \qquad (2.5.)$$

Ha a az $f(x)$ zérushelye ($f(a)=0$), akkor

$$f(x) = f(x)-f(a) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 - (a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots + a_1 a + a_0) =$$
$$= a_n(x^n - a^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_1(x-a).$$

A (2.5.) azonosság alapján itt minden tagból kiemelhető $(x-a)$; a megmaradt rész $(n-1)$-edfokú. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A számelméletből átvett kifejezéssel mondhatjuk, hogy $f(x)$ mindig „osztható" az $(x-a)$ gyöktényezővel. Sőt magát az osztást is ugyanúgy végezhetjük, mint a valós számok körében. Ennek bemutatására nézzük a 2.3. példa b) részét:

$$\begin{array}{l}
(x^3-5x^2+7x-3):(x-1) = x^2-4x+3 \\
\underline{x^3-x^2} \\
\quad -4x^2+7x \\
\quad \underline{-4x^2+4x} \\
\qquad\qquad 3x-3 \\
\qquad\qquad \underline{3x-3} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Ez – a 2.3. tétel jelölését használva – azt jelenti, hogy $g(x) = x^2-4x+3$. Megoldva az $x^2-4x+3 = 0$ egyenletet, megkapjuk g zérushelyeit: 1 és 3. Vagyis $g(x) = (x-1)(x-3)$, és így

$$f(x) = x^3-5x^2+7x-3 = (x-1)(x^2-4x+3) = (x-1)(x-1)(x-3) = = (x-1)^2(x-3). \tag{2.6}$$

DEFINÍCIÓ. *Ha az f n-edfokú polinom*

$$f(x) = (x-a)^k g(x) \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

alakban írható fel (ahol g $(n-k)$-adfokú polinom), és $g(a) \neq 0$, akkor az „a" az f-nek ***k-szoros zérushelye.***

A definíció és (2.6.) azonosság alapján f-nek az 1 kétszeres, a 3 egyszeres zérushelye.

E pont elején szóltunk arról, hogy a hatványfüggvények páratlan n esetén zérushelyüknél előjelet váltanak, páros n esetén nem váltanak előjelet. Ez a következőképpen általánosítható:

2.4. TÉTEL. *Legyen „a" k-szoros zérushelye az f polinomnak. Ha k páratlan, akkor f előjelet vált az a-ban; ha k páros, akkor f nem vált előjelet az a-ban; $k \geqq 2$ esetén f grafikonja érinti az x tengelyt.*

Bizonyítás:

A feltevés szerint

$$f(x) = (x-a)^k g(x), \qquad \text{ahol} \qquad g(a) \neq 0. \tag{2.7.}$$

A 4. fejezetben látni fogjuk, hogy egy g polinom csak akkor válthat egy a pontban előjelet, ha $g(a)=0$. Azaz g-nek nem lehet a-ban előjelváltása. mivel $g(a)\neq 0$. Az $x \mapsto (x-a)^k$ függvény viszont ugyanúgy viselkedik az a pontban, mint az $f_k(x) = x^k$ hatványfüggvény az origóban. Az f_k – mint láttuk – csak páratlan k esetén váltott előjelet. Ezzel állításunk előjelváltásra vonatkozó részének bizonyítását befejeztük. Az érintésre vonatkozó részt nem bizonyítjuk, mivel még az érintés fogalmát sem tisztáztuk.

Megjegyzés: Tudjuk, hogy az f_2 függvények páratlan k esetén az origóban negatívból pozitívba mennek át, így a $-f_k$ pozitívból negatívba megy át. Ebből és (2.7.)-ből következik, hogy f előjelváltásának típusát $g(a)$ előjele dönti el:

$$\begin{array}{lll} \text{Ha} & g(a)>0, & - \to +, \\ \text{ha} & g(a)<0, & + \to -. \end{array} \tag{2.8.}$$

A fentiek illusztrálására nézzünk két példát!

2.4. példa. Vázoljuk az

$$f\colon\ f(x) = x^3-5x^2+7x-3$$

függvény grafikonját.

Láttuk (l. (2.6.) azonosságot), hogy

$$f(x) = x^3-5x^2+7x-3 = (x-1)^2\,(x-3).$$

Az 1 kétszeres zérushelye a függvénynek, ezért grafikonja itt úgy érinti az x tengelyt, hogy nem vált előjelet (2.4. tétel). Az

$$x \mapsto (x-1)^2$$

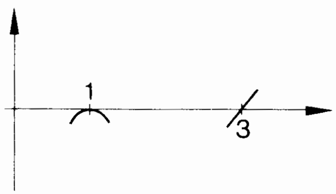
függvény grafikonja „felülről” érinti az x tengelyt, de az f függvényben van még egy tényező, $(x-3)$, amely az 1 pontban negatív (-2), ezért az f grafikonja „alulról” érinti az x tengelyt *(2.18a ábra)*.

A 3 az f-nek egyszeres zérushelye, f grafikonja metszi az x tengelyt (f előjelet vált).

Az

$$x \mapsto x-3$$

függvény a 3-ban negatívból megy át pozitívba. Mivel az $(x-1)^2$ tényező negatív nem lehet, az f ugyanígy viselkedik *(2.18a ábra)*.

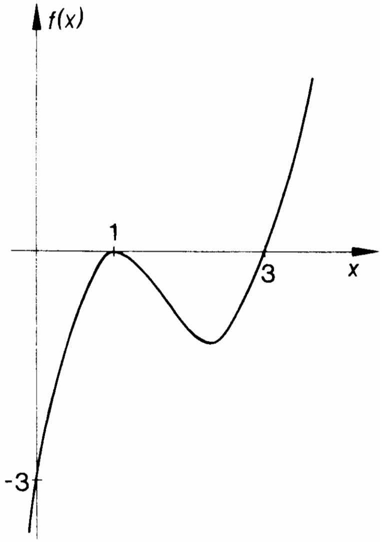


2.18a ábra

Az f grafikonjának vázolásához még észre kell vennünk, hogy

$$f(x) = x^3-5x^2+7x-3 = x^3\left(1-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right), \qquad x\neq 0.$$

Ebből azonnal látszik, hogy nagy abszolút értékű x esetén a zárójelben lévő tényező közel 1, azaz ilyen x-ekre f úgy viselkedik, mint az $f_3(x) = x^3$ hatványfüggvény. További támpontot jelenthet, hogy $f(0) = -3$. Ezek után már nem nehéz f grafikonját vázolni *(2.18b ábra)*. Az f függvénynek az 1-ben helyi maximuma van. Az [1, 3] intervallum belsejében helyi minimuma van; hogy pontosan hol, annak meghatározására a 6. fejezetben ismerünk meg módszereket.



2.18b ábra

Egy grafikon vázolásakor az is gondot okozhat, hogy bizonyos intervallumokon a görbe alulról homorú (konkáv), míg más intervallumokon alulról domború (konvex).

Például a *2.18b ábrán* lévő grafikon valahol az [1, 2] intervallumban megy át konkávból konvexbe. E fogalmak pontos definícióját, valamint a vizsgálat módját függvényeknek egy elég nagy halmazára szintén a 6. fejezetben fogjuk látni.

2.5. példa. Vázoljuk az

$$f\colon\ f(x) = x^4+5x^3+6x^2-4x-8$$

függvény grafikonját.

Próbálgatással könnyű megtalálni az 1 zérushelyet: $f(1) = 0$. Osszuk el a polinomot $(x-1)$-gyel, a hányados

$$g(x) = x^3+6x^2+12+8 = (x+2)^3.$$

Így

$$f(x) = (x-1)(x+2)^3,$$

azaz f-nek két zérushelye van:

az 1 egyszeres,

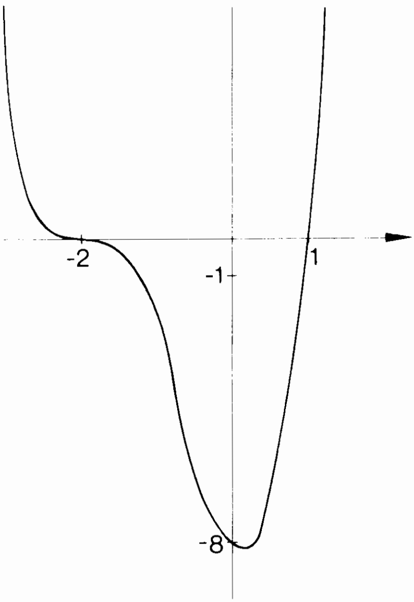
a -2 háromszoros

zérushely. Mindkét zérushelyen előjelet vált a függvény (a -2-ben úgy, hogy érinti az x tengelyt). Mivel az $(x+2)^3$ értéke pozitív, ha $x=1$, az 1 helyen az előjel negatívból pozitívba vált át (l. (2.8.)). Ugyanakkor a -2 helyen az $x-1$ értéke negatív, így itt a függvény pozitívból negatívba megy át.

Mivel

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8 = x^4\left(1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^4}\right) \qquad (x\neq 0),$$

nagy abszolút értékű x-ekre úgy viselkedik az f, mint az f_4. Ezek után grafikonját könnyen vázolhatjuk *(2.19. ábra)*.



2.19. *ábra*

Megjegyezzük, hogy szándékosan használjuk a „vázoljuk” kifejezést, mivel itt nem a pontos grafikon megrajzolásáról van szó, csupán főbb jellemzőinek figyelembevételéről. A gyakorlatban is legtöbbször csak a függvény jellege (monotonitás, előjel, korlátosság, szélsőérték stb.) a kérdéses, a függvény pontos menetének ismeretére nincs szükség.

Ugyancsak gyakori feladat a polinomok helyettesítési értékeinek kiszámítása. A helyettesítési érték kiszámítása könnyebben algoritmizálható az ún. *Horner-féle elrendezéssel:*

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 =$$
$$= ((\ldots(a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_2)x+a_1)x+a_0.$$

A 2.5. példában szereplő f polinom Horner-féle elrendezése:

$$x^4+5x^3+6x^2-4x-8 = (((x+5)x+6)x-4)x-8.$$

Befejezésként egy speciális polinom értékének becslésével foglalkozunk.

2.5. TÉTEL.

$$(1+x)^n \geqq 1+nx \qquad (x>-1, \qquad n\in\mathbf{N}).$$

(Bernoulli-egyenlőtlenség.)

Bizonyítás:

Legyen $0 \leqq x$, ekkor felhasználva a (2.5.) alatti azonosságot,

$$\begin{aligned}(1+x)^n - 1^n &= x[(1+x)^{n-1} + (1+x)^{n-2} + \ldots + (1+x) + 1] \geqq \\ &\geqq x[\quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \ldots + \quad 1 \quad + 1] = \\ &= xn.\end{aligned}$$

Ebből

$$(1+x)^n \geqq 1 + xn.$$

Ha $-1 < x < 0$, akkor ugyancsak a (2.5) azonosságból

$$\begin{aligned}1^n - (1+x)^n &= -x[1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{n-1}] \leqq \\ &\leqq -x[1 \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \ldots + \quad 1 \quad] = \\ &= -xn,\end{aligned}$$

azaz

$$1 - (1+x)^n \leqq -xn.$$

Innen átrendezéssel adódik állításunk.

2.9 Racionális törtfüggvény

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt racionális törtfüggvénynek nevezzük, ha két polinom hányadosa:*

$$f\colon f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} \qquad (b_m \neq 0, \qquad m \geqq 1).$$

Ha $n < m$, ***valódi törtfüggvényről*** *beszélünk.*

A racionális törtfüggvényt minden olyan pontban értelmezzük, ahol a nevező nem nulla. A nevezőben lévő polinom zérushelyei nem tartoznak az értelmezési tartományhoz. A függvény jellegének vizsgálatához mégis célszerű ezeket is számon tartani.

DEFINÍCIÓ: a) *Az „a" szám az f racionális törtfüggvénynek* ***k-szoros zérushelye,*** *ha „a" a számlálónak k-szoros zérushelye és a nevezőnek nem zérushelye.*

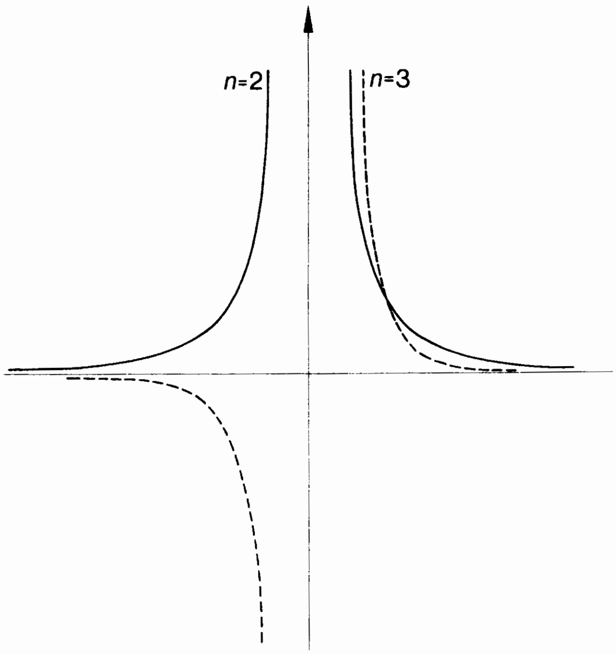
b) *Az „a" számot az f racionális törtfüggvény* ***k-szoros pólushelyének*** *nevezzük, ha „a" a nevezőnek k-szoros zérushelye és a számlálónak nem zérushelye. (Ekkor a nem tartozik az értelmezési tartományhoz.)*

c) *Ha az „a" szám az f racionális törtfüggvény számlálójának és nevezőjének is zérushelye, akkor a az f-nek* ***hézagpontja****. (A hézagpont nem tartozik az értelmezési tartományhoz.)*

A legegyszerűbb törtfüggvények az

$$x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n} \qquad (n \in \mathbf{N}^+, \qquad x \neq 0)$$

negatív kitevős hatványfüggvények. Az $n=2$ és $n=3$ eseteket a *2.20. ábra* szemlélteti (az $n=1$ eset a *2.3. ábrán* látható).



2.20. ábra

Láthatjuk, hogy páros n esetén a negatív kitevős hatványfüggvény a pólushelyen nem vált előjelet, páratlan n esetén előjelet vált. Ez a megállapítás általánosítható:

2.6. TÉTEL. *Legyen az „a" szám az f racionális törtfüggvénynek k-szoros pólushelye, ekkor van a-nak olyan K környezete, amelyre $x_1, x_2 \in K$, $x_1 < a < x_2$ esetén*

$$f(x_1) \cdot f(x_2) > 0, \quad \text{ha} \quad k \text{ páros},$$
$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0, \quad \text{ha} \quad k \text{ páratlan}.$$

Röviden: páros k esetén f a-ban nem vált előjelet, páratlan k esetén előjelet vált.
(Nem bizonyítjuk.)

2.6. példa. Vázoljuk az

$$f\colon\ f(x) = \frac{2x^2-2}{(x-2)^2}$$

függvény grafikonját.
Mivel

$$f(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-2)^2},$$

az f-nek az

$$\begin{array}{rl} 1 & \text{egyszeres zérushelye,} \\ -1 & \text{egyszeres zérushelye,} \\ 2 & \text{kétszeres pólushelye.} \end{array}$$

Az

$$x \mapsto \frac{1}{(x-2)^2}$$

függvény ugyanúgy viselkedik a 2 kis környezetében, mint az $x \mapsto x^{-2}$ 0 környezetében. Az f-ben azonban ezt a függvényt szorozzuk a $g(x) = 2(x-1)(x+1)$ függvénnyel. Kérdés, hogy g milyen előjelű 2-ben. Mivel $g(2) = 6 > 0$, f a 2 kis környezetében hasonlóan viselkedik, mint az $x \mapsto x^{-2}$ függvény a 0 kis környezetében *(2.21a ábra)*.

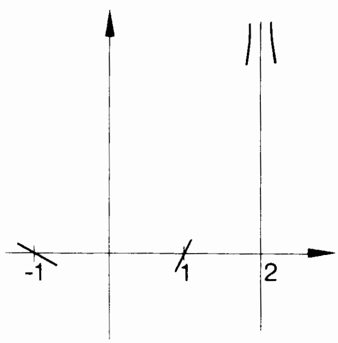
A zérushelyek egyszeresek, így f grafikonja metszi az x tengelyt. Az $(x-1)$ szorzója,

$$\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$$

az $x = 1$-ben pozitív, így itt az f negatívból pozitívba vált; az $(x+1)$ szorzója,

$$\frac{2(x-1)}{(x-2)^2}$$

az $x = -1$-ben negatív, így itt az f pozitívból negatívba vált előjelet *(2.21a ábra)*.

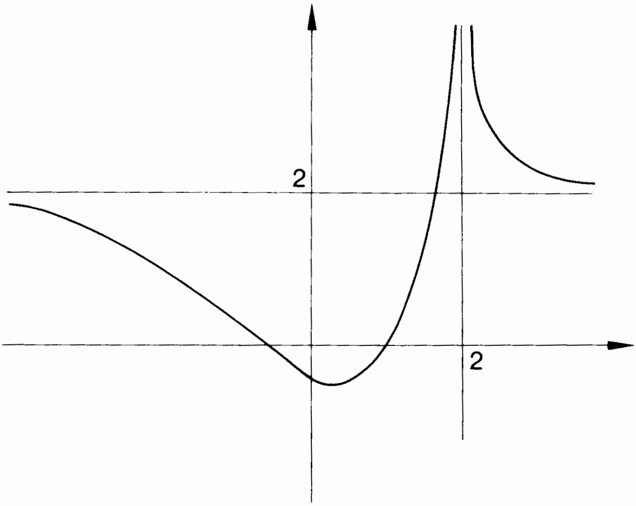


2.21a ábra

Osszuk el $f(x)$ számlálóját és nevezőjét x^2-tel:

$$f(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-4x+4} = \frac{2-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}} \quad (x \neq 0).$$

Ebből azonnal látszik, hogy nagy abszolút értékű x-ekre a függvényérték egyre közelebb van 2-höz. Ezért célszerű az $y=2$ egyenest is meghúzni. Ezután a grafikont már nem nehéz vázolni *(2.21b ábra)*.



2.21b ábra

2.7. példa. Vázoljuk az

$$f\colon\ f(x) = \frac{(x^2+2)(x-2)(x+1)x}{x^2(x+1)(x-1)}$$

függvény grafikonját.

Ebben a példában a számlálót és a nevezőt szorzattá alakítottuk, ismerve a zérushelyeket. Mint látjuk, van egy tényező, amely nem első fokú és nem is ilyen kifejezés hatványa (x^2+2). Ezt már nem tudjuk szorzattá alakítani, mivel nincs valós zérushelye.

Az f függvény zérushelye: 2 (egyszeres),
pólushelye: 1 (egyszeres),
hézagpont: 0 és -1.

Az $f(x)$ számlálóját és nevezőjét oszthatjuk (egyszerűsíthetünk) x-szel és $(x+1)$-gyel (ez nem jelenti az f értelmezési tartományának kiterjesztését):

$$f(x) = \frac{(x^2+2)(x-2)}{x(x-1)} = (x^2+2)(x-2)\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1} \qquad (x \neq 0,\ 1,\ -1) \quad (2.9.)$$

a) Az $x=2$ helyen az

$$(x^2+2)\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$$

függvényérték pozitív (3), azért f ezen a zérushelyen negatívból pozitívba vált előjelet *(2.22. ábra)*.

b) Az $x=1$ helyen az $\frac{1}{x-1}$ (2.9.)-beli szorzója, az

$$(x^2+2)(x-2)\frac{1}{x}$$

függvényérték negatív (-3), ezért f úgy viselkedik az 1 környezetében, mint az

$$x \mapsto \frac{-3}{x}$$

függvény a 0 környezetében *(2.22. ábra)*.

c) A 0 hézagpontja a függvénynek, de (2.9.)-ből látjuk, hogy a 0 környezetében f úgy viselkedik, mintha egyszeres póIushelye lenne. (2.9.)-ben az $\frac{1}{x}$ szorzója, az

$$(x^2+2)(x-2)\frac{1}{x-1}$$

függvényérték a 0 helyen pozitív (4), ezért hasonló a helyzet, mint az 1 helyen.

Az f számlálója harmadfokú, a nevezője másodfokú polinom:

$$f(x)\frac{(x^2+2)(x-2)}{x(x-1)} = \frac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2-x} \qquad (x \neq 0,\ 1,\ -1).$$

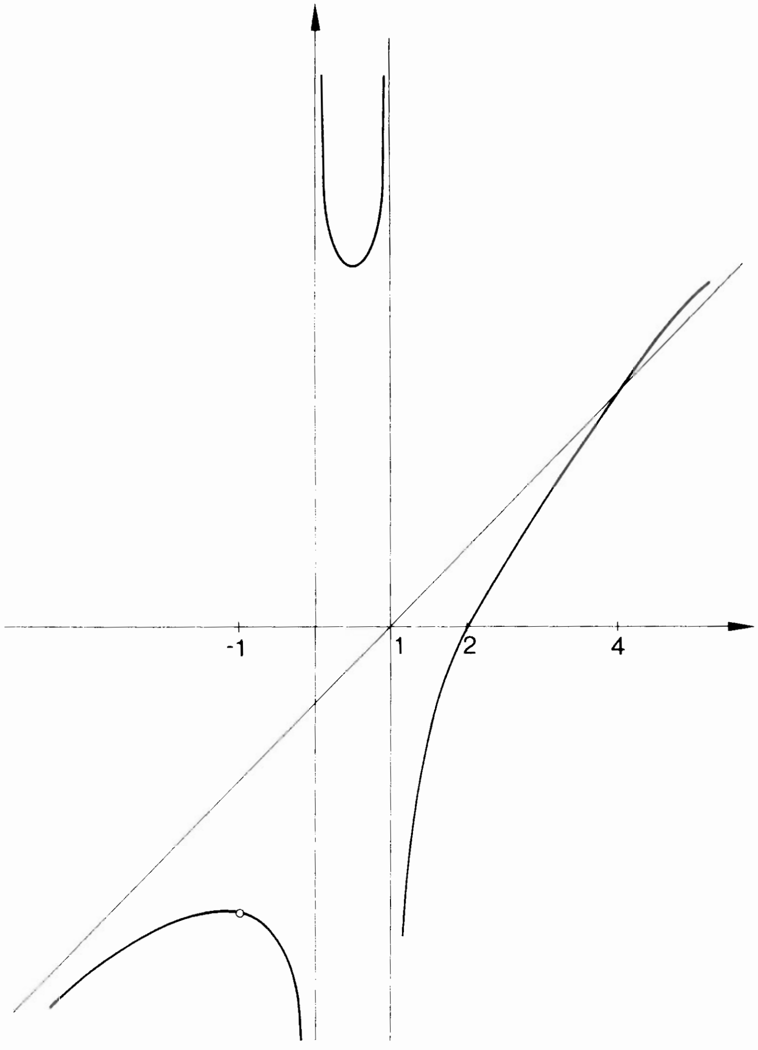
Ha a számlálót elosztjuk a nevezővel, a hányados $x-1$, a maradék $x-4$, így

$$f(x) = x-1+\frac{x-4}{x^2-x}. \qquad (2.10)$$

Ebből látszik, hogy nagy abszolút értékű x-eknél $f(x)$ keveset különbözik $(x-1)$-től, azaz f grafikonja közeledik az $y = x-1$ egyenletű egyeneshez. Az f grafikonja (2.10.) alapján ott metszi az $y = x-1$ egyenest, ahol

$$\frac{x-4}{x^2-x} = 0,$$

azaz a 4 helyen.
A grafikonon kis körrel jeleztük, hogy a -1 nem tartozik f értelmezési tartományához.



2.22. ábra

2.10 Összetett függvény, inverz függvény

DEFINÍCIÓ. *Az f és g függvény* ***összetételén*** *azt a h függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya minden olyan $x \in D_g$ hely, ahol $g(x) \in D_f$ és*

$$h(x) = f(g(x)).$$

Más jelöléssel: $h = f \circ g$.
Az f-et külső, a g-t belső függvénynek nevezzük.

2.8. példa. Írjuk fel az

$$a)\ f\colon\ f(x) = \sin x, \qquad g\colon\ g(x) = x^2+2x,$$
$$b)\ f\colon\ f(x) = \sin x, \qquad g\colon\ g(x) = \log_2 x$$

függvények összetételét.
a) Az adott függvények segítségével két összetett függvény adható meg:

$$h_1 = f \circ g, \quad \text{azaz} \quad h_1(x) = f(g(x)) = \sin(x^2+2x),$$

$$h_2 = g \circ f, \quad \text{azaz} \quad h_2(x) = g(f(x)) = (\sin x)^2 + 2\sin x.$$

A h_1-nél a sin a külső függvény, a g a belső függvény, a h_2-nél a polinom (g) a külső függvény, a sin pedig a belső függvény. Nyilvánvaló, hogy a két összetett függvény nem egyenlő egymással.

Ha az f és g függvények által létesített leképezés képlettel adott, akkor az összetételt formálisan úgy végezzük, hogy a külső függvény független változója (x) helyett beírjuk a belső függvényhez tartozó formulát.

b) $h_1\colon\ h_1(x) = f(g(x)) = \sin(\log_2 x)$.

Az értelmezési tartomány $D_{h_1} = D_{\lg} =]0, \infty[$, az értékkészlet $h_1(D_h) = [-1, 1]$, azaz a sin (külső) függvény értékkészlete.

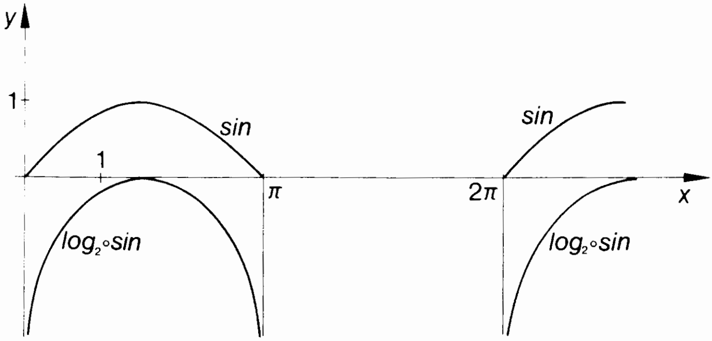
A második összetétel megadásánál már problémát jelent, hogy a sin függvény értékkészlete, $[-1, 1]$ nem része a $\log_2$ függvény értelmezési tartományának. A $\sin x$-nek csak akkor lehet a logaritmusát venni, ha pozitív.

$$\sin x > 0, \quad \text{ha} \quad x \in]2k\pi, (2k+1)\pi[\quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Ez azt jelenti, hogy a

$$h_2\colon\ h_2(x) = \log_2(\sin x)$$

függvény értelmezési tartománya a $]2k\pi, (2k+1)\pi[$ $(k \in \mathbf{Z})$ halmaz. A függvény grafikonját a *2.23. ábrán* vázoltuk.



2.23. ábra

A fenti példa *b)* részében a h_2 konstruálásakor a sin függvény értelmezési tartományának leszűkítésére volt szükségünk.

DEFINÍCIÓ. *Legyen H része az f függvény értelmezési tartományának. Az*

$$f|_H\colon\ f|_H(x) = f(x) \qquad (x \in H)$$

függvényt az f függvény ***H-ra való leszűkítésének*** *nevezzük.*

A definíció értelmében

$$\sin|_{[0,\pi]}$$

az a függvény, amelynek értelmezési tartománya a $[0, \pi]$ részintervallum, és itt a sin függvénnyel azonos értékeket vesz fel.

A 2.3 pontban vázolt $f(x)=x^3$ függvény az értelmezési tartományon (**R**-en) szigorúan monoton növekedő. Ebből következik, hogy különböző valós számokhoz különböző függvényértékek tartoznak:

$$\text{ha } x_1 \neq x_2, \qquad \text{akkor } x_1^3 \neq x_2^3, \qquad \text{azaz } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Úgy is mondhatjuk, hogy az f a valós számok halmazát kölcsönösen egyértelmű módon képezi le a valós számok halmazára. Ekkor definiálhatunk egy másik, f^{-1}-gyel jelölt függvényt, amely éppen a fenti leképezés fordítottját hajtja végre:

$$f(2) = 8, \qquad f^{-1}(8) = 2;$$

$$f(3) = 27, \qquad f^{-1}(27) = 3.$$

Látható, hogy az f^{-1} függvény minden számhoz annak köbgyökét rendeli:

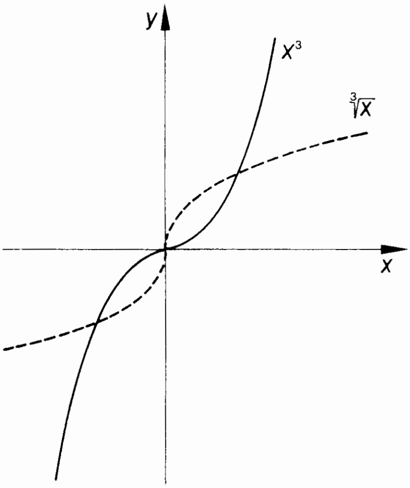
$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$

DEFINÍCIÓ *Legyen f olyan függvény, amely az értelmezési tartomány és értékkészlet elemei között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést létesít.*

*Ekkor f **inverz függvényének** azt az f^{-1} függvényt nevezzük, amelynek értelmezési tartománya $f(D_f)$ és*

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad x \in D_f.$$

A definíció alapján az f és f^{-1} függvényeknél az értelmezési tartomány és az értékkészlet szerepet cserél, ez azt jelenti, hogy e függvények ábrázolása esetén a tengelyek szerepe is cserélődik. Az x és y tengely szerepcseréje a koordináta-rendszer $y=x$ egyenesre vonatkozó tükröződését jelenti. Ezek után nem nehéz belátni, hogy az f és f^{-1} grafikonjai egymás tükörképei, és a tükröződés tengelye az $y=x$ egyenes. A *2.24. ábrán* az $f(x)=x^3$ függvény és inverze, az $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény grafikonját vázoltuk.



2.24. ábra

A g: $g(x) = x^2$ függvénynek nincs inverze, mivel az értelmezési tartomány és az értékkészlet elemei között nem kölcsönösen egyértelmű a g által létesített hozzárendelés: pl. a 2-höz és -2-höz ugyanaz a függvényérték (4) tartozik. De a g függvény $[0, \infty[$ intervallumra való leszűkítésének, a

$$g|_{[0,\infty[}$$

függvénynek már van inverze, hiszen ez a függvény szigorúan monoton, így eleget tesz a definíció feltételeinek. Az inverz az

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

függvény.

Általában az

$$x \mapsto x^n \qquad (n \in \mathbf{N}^+, \quad n \text{ páratlan}, \qquad x \in \mathbf{R})$$

függvényeknek van inverzük:

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Ha n pozitív páros szám, akkor az $x \mapsto x^n$ hatványfüggvény nem monoton az egész számegyenesen, de monoton növekedő nemnegatív x-ekre. Tehát az ilyen hatványfüggvény

$$x \mapsto x^n \qquad (n \in \mathbf{N}^+, \quad n \text{ páros}, \qquad 0 \leqq x < \infty)$$

leszűkítésének van inverze:

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \qquad x \geqq 0.$$

Hasonló mondható el negatív egész kitevők esetén. Az

$$x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (n \in \mathbf{N}^+, \qquad n \text{ páratlan})$$

függvény nem monoton az egész számegyenesen, de az általa létesített leképezés kölcsönösen egyértelmű. Inverze:

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}.$$

Páros n esetén ennek is létezik az inverze, ha a függvényt a nemnegatív valós számok halmazára szűkítjük le.

Legyenek p és q egész számok, amelyeknek nincs közös osztójuk (relatív prímek). Az

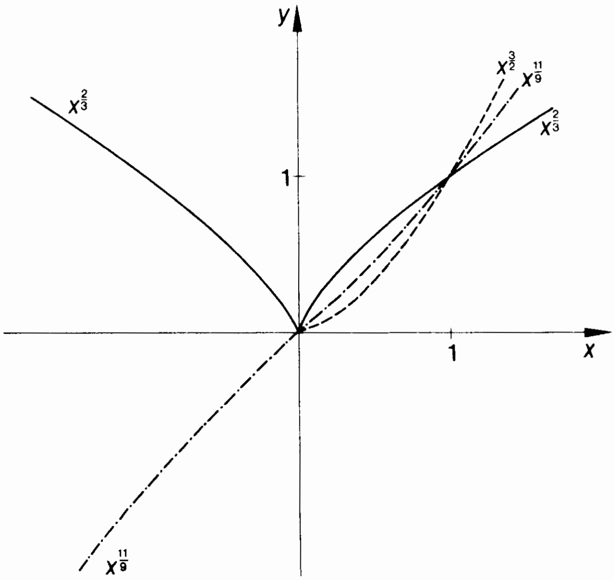
$$x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$$

függvényt **törtkitevős hatványfüggvénynek** nevezzük, amelynek értelmezési tartománya:

$\mathbf{R}$,	ha q páratlan,	$\frac{p}{q} > 0$,
$\mathbf{R} \setminus \{0\}$,	ha q páratlan,	$\frac{p}{q} \leqq 0$,
$\mathbf{R}_0^+$,	ha q páros,	$\frac{p}{q} > 0$,
$\mathbf{R}^+$,	ha q páros,	$\frac{p}{q} \leqq 0$.

Néhány törtkitevős hatványfüggvény grafikonját a *2.25. ábrán* vázoltuk. Az ábráról is látható, hogy páros p esetében (ekkor q biztosan páratlan) páros függvényről van szó. Ha p és q páratlan, akkor a törtkitevős hatványfüggvény páratlan. A p páratlan, q páros esetben a függvény páros vagy páratlan voltáról nem beszélhetünk, mivel csak nemnegatív valós számokra értelmezhető.

Ha $x > 1$, akkor a $\frac{p}{q} > 1$ kitevő esetén a függvény görbéje az $y = x$ egyenes felett van, és alulról domború (konvex); $\frac{p}{q} < 1$ kitevő esetén az $y=x$ egyenes alatt van a grafikon, és konkáv. A $]0, 1[$ intervallumon fordítva viselkedik.



2.25. ábra

2.11 Többváltozós függvények

Amikor egy órabéres dolgozó munkabérét számoljuk, a

$$\text{munkabér} = \text{ledolgozott órák} \times \text{órabér}$$
$$z = x \cdot y$$

képlet alapján, akkor valójában két valós számhoz, a ledolgozott órák számához és az órabérhez egy valós számot, a munkabért rendeljük. Tehát egy rendezett számpárhoz rendelünk egyetlen valós számot. Pl.

$$(150, 30) \mapsto 4500.$$

A probléma természetéből következik, hogy az órák száma, x és az órabér, y pozitív, azaz $x, y \in \mathbf{R}^+$, tehát

$$(x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ = (\mathbf{R}^+)^2.$$

Így az

$$f\colon\ (x, y) \mapsto xy,$$

vagy más jelöléssel az

$$f\colon\ f(x, y) = xy$$

függvény értelmezési tartománya az $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, és értékkészlete a pozitív valós számok halmaza. Úgy is mondhatjuk, hogy a munkabér két változó (az órák száma és az órabér) függvénye, tehát f egy kétváltozós függvény.

A közgazdasági gyakorlatban sokszor előfordulnak a két- vagy többváltozós függvények. Például egy termék önköltsége függ az anyagköltségtől, bértől stb.

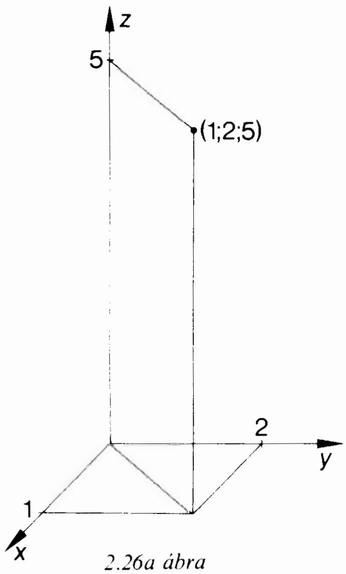
DEFINÍCIÓ. *Ha egy valós értékű függvény értelmezési tartománya része az* $\mathbf{R}^n$ *halmaznak, akkor* ***többváltozós*** *vagy pontosabban* ***n változós valós függvényről*** *beszélünk.*

Mi a továbbiakban elsősorban kétváltozós függvényekkel foglalkozunk, de amit elmondunk, az könnyen általánosítható többváltozós függvényekre.

Először vizsgáljuk az

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

függvényt. Azt, hogy f például az



2.26a ábra

$$(1, 2) \mapsto 5$$

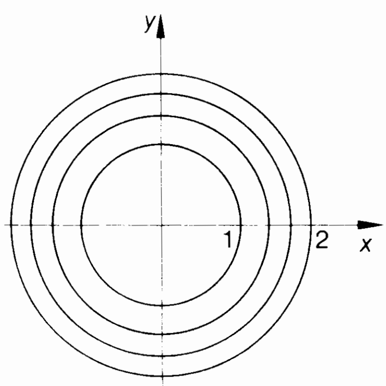
hozzárendelést létesíti, egy háromdimenziós koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk (*2.26a ábra*). Így bármely (x, y) ponthoz tartozik egy $(x, y, f(x, y))$ koordinátájú pont a térben. Ezek a pontok valamilyen felületet alkotnak az (x, y) sík felett. Még azt is meg tudjuk mondani, hogy a $(0, 0, 0)$ pont a felületnek és az (x, y) síknak közös pontja, hiszen

$$f(0, 0) = 0.$$

A felület ábrázolása, sőt gyakran az elképzelése is nehézségekbe ütközik. Ugyanazt az utat fogjuk követni, mint a térképészek az ún. szintvonalas ábrázolásnál.

Keressük meg az (x, y) sík azon pontjait, amelyekre

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 1,$$



2.26b ábra

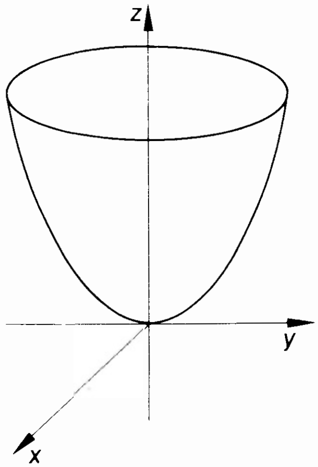
vagyis amelyekhez tartozó pontok a felületen az (x, y) sík felett egységnyi magasságban vannak. Ezek a pontok az origó középpontú egységsugarú körön vannak. Ez azt jelenti, hogy ha az f függvény grafikonját (amely egy felület) az (x, y) síkkal párhuzamosan, attól egységnyi távolságra egy síkkal metsszük, a metszet egy egységsugarú kör lesz. Hasonlóan adhatók meg a 2, 3, 4, ... magasságú szintvonalak is, amelyek szintén körök *(2.26b ábra)*, és a sugaraik rendre $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, ... Ezekről a szintvonalakról a felületnek két lényeges tulajdonsága állapítható meg:

- a felület a z függőleges tengely körüli forgásszimmetriával rendelkezik;
- növelve az origótól való távolságot, a szintvonalak egyre sűrűsödnek, ami azt jelenti, hogy a felület egyre meredekebb.

Pontosabb képet alkothatunk, ha függőleges metszetet is képezünk. Azok a pontok, amelyeknek első (x) koordinátája nulla, az (y, z) síkban vannak. Ennek alapján az

$$f(0, y) = 0^2 + y^2 = y^2 \qquad (y \in \mathbf{R})$$

egyváltozós függvény grafikonja – amely normál parabola – a felületnek azokból a pontjaiból áll, amelyek x koordinátája nulla [az (y, z) síkban vannak]. Tehát, ha az f-hez tartozó felületet az (y, z) síkkal metsszük, a metszet egy normál parabola *(2.26c ábra)*. Így a felületünk nem más, mint a z tengely körül megforgatott normál parabola.



2.26c ábra

A fenti példában úgy kaptuk egy metszetét a felületnek, hogy az egyik változót állandónak (nevezetesen az x-et nullának) választottuk. Hasonló eljárást mindig követhetünk. Könnyű belátni, hogy állandó a esetén az

$$x = a$$

az (y, z) síkkal párhuzamos α sík egyenlete *(2.27. ábra)*, az

$$y = b$$

pedig az (x, z) síkkal párhuzamos β sík egyenlete. Így valamely

$$f\colon (x, y) \mapsto f(x, y) \qquad (0 \leqq x \leqq A, \qquad 0 \leqq y \leqq B)$$

függvény esetén az

$$(a, y, f(a, y)) \qquad (0 \leqq y \leqq B)$$

pontok az α síkban vannak, az

$$(x, b, f(x, b)) \qquad (0 \leqq x \leqq A)$$

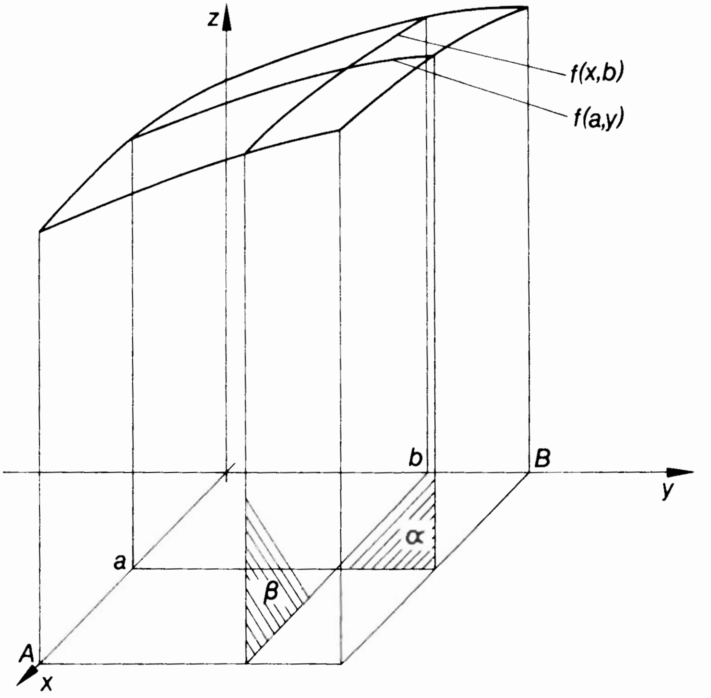
pontok pedig a β síkban. Következésképpen az α, illetve β sík metszetei az f függvény grafikonjával (a felülettel) nem mások, mint az

$$y \mapsto f(a, y) \qquad (0 \leqq y \leqq B),$$

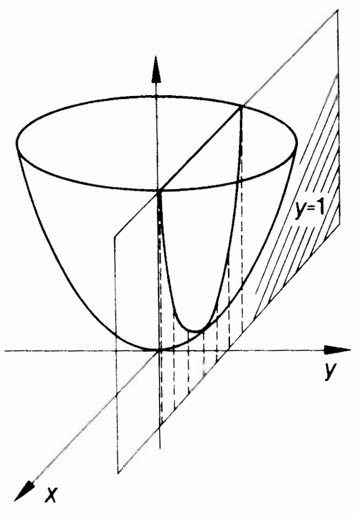
illetve az

$$x \mapsto f(x, b) \qquad (0 \leqq x \leqq A)$$

függvények grafikonjai.



2.27. ábra



Például az

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \qquad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvény esetén, ha $y = 1$, akkor az

$$f(x, 1) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

egyváltozós függvényt kapjuk, amelynek grafikonja a *2.28. ábrán* látható.

2.28. ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen f kétváltozós függvény és $(a, b) \in D_f$.* Az

$$f_1: f_1(x) = f(x, b), \qquad (x, b) \in D_f$$

egyváltozós függvény grafikonját az (a, b) ponton átmenő x változóhoz tartozó ***szintvonalnak*** *nevezzük. Hasonlóan definiálható a másik szintvonal, az*

$$f_2: f_2(y) = f(a, y), \qquad (a, y) \in D_f$$

függvény és grafikonja.

Megjegyezzük, hogy szintvonalaknak nevezzük az

$$f(x, y) = \text{const}$$

egyenletű görbéket is, amelyek az (x, y) síkkal párhuzamos síkmetszetek.

2.8. példa. Vizsgáljuk meg, milyen felület a grafikonja az

$$f: f(x, y) = xy$$

függvénynek (leszűkítése bevezető példánk volt).

a) Az (x, y) síkkal párhuzamos síkmetszeteket (szintvonalakat) vizsgálva az $f(x, y) = xy = 0$ egyenletből $x = 0$ vagy $y = 0$ adódik: az (x, y) sík a tengelyeket metszi ki a felületből.

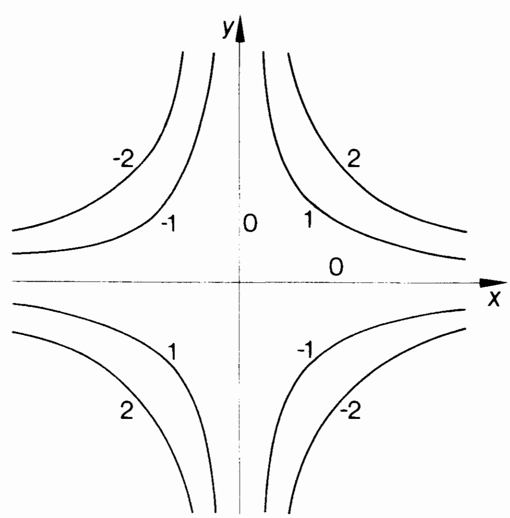
Ha $xy = 1$, akkor $y = \dfrac{1}{x}$;

ha $xy = 2$, akkor $y = \dfrac{2}{x}$;

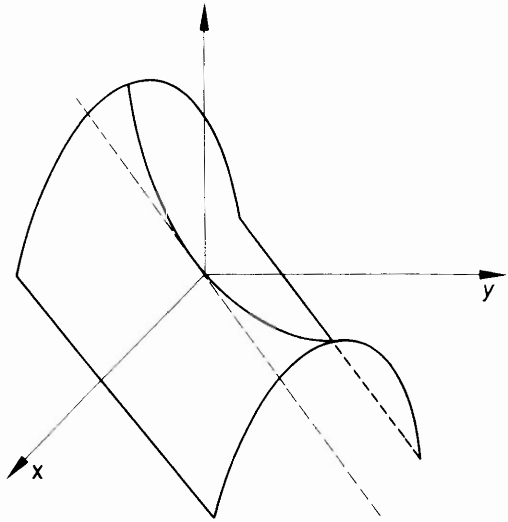
ha $xy = -1$, akkor $y = \dfrac{-1}{x}$;

ha $xy = -2$, akkor $y = \dfrac{-2}{x}$.

A szintvonalakat a *2.29. ábrán* vázoltuk.



2.29. ábra



b) Messük a felületet az $y=x$ síkkal. Ha $y=x$, akkor az $f(x,x)=x^2$ parabolát kapjuk.

Ha az $y=-x$ síkkal metsszük, akkor az $f(x,-x)=-x^2$ parabolát kapjuk. Ennek alapján már el lehet képzelni a felületet, amely egy nyereghez hasonlít *(2.30. ábra)*.

2.30. ábra

3. SZÁMSOROZATOK ÉS SOROK

3.1 A sorozat fogalma és megadási módjai

Ebben a fejezetben egy speciális függvénytípussal, a sorozattal foglalkozunk. Az analízisnek igen fontos fogalma a határérték, ezt legkönnyebben a sorozatok segítségével érthetjük meg.

DEFINÍCIÓ. ***Sorozaton*** *olyan függvényt értünk, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza vagy a természetes számok halmaza.* ***Számsorozatnak*** *nevezzük a sorozatot, ha a függvényértékek valós számok. Ha „a" sorozat, akkor $a(n)$-et, vagyis a-nak az n helyen fölvett helyettesítési értékét a sorozat n-edik tagjának nevezzük és a_n-nel jelöljük, n-et pedig e tag indexének mondjuk. Magát a sorozatot többnyire (a_n)-nel jelöljük.*

A függvények egyenlőségének fogalmából következik, hogy valamely (a_n) és (b_n) sorozat akkor és csak akkor egyenlő, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlőek:

$$a_n = b_n \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$

3.1. példa. Az $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ sorozat első négy és a századik tagja a következő:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{9}, \quad a_4 = \frac{1}{16}, \quad a_{100} = \frac{1}{10\,000}.$$

3.2. példa. Az $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ sorozat első négy és a tizedik tagja a következő:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{3}{4}, \quad a_{10} = \frac{9}{10}.$$

3.3. példa. A $\left((-1)^n\right)$ sorozat első néhány tagja:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1.$$

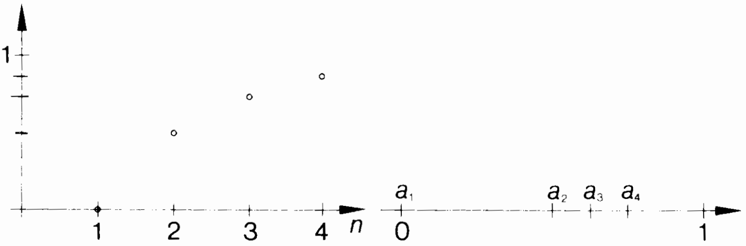
3.4. példa. Bemutatunk egy példát a sorozat **rekurzív** módon való megadására. Ez azt jelenti, hogy megadjuk a sorozat első vagy első néhány tagját, s a további tagok meghatározásához felhasználjuk az alacsonyabb indexű tagokat.

$$b_1=1, \quad b_2=2, \quad b_n = b_{n-2}+b_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}^+ \setminus \{1, 2\}.$$

A sorozat néhány további tagja:

$$\begin{aligned} b_3 &= b_1+b_2 = 1+2 = 3, \\ b_4 &= b_2+b_3 = 2+3 = 5, \\ b_5 &= 3+5 = 8, \\ b_6 &= 13, \\ b_7 &= 21. \end{aligned}$$

A sorozatokat kétféle módon lehet szemléltetni. Vagy a függvények ábrázolásakor tanultak szerint koordináta-rendszerben szemléltetjük a sorozat grafikonját, illetve annak egy részét, vagy pedig a számegyenesen megjelöljük a sorozat tagjait. Bemutatjuk az $\left(\frac{n-1}{n}\right)$ szemléltetését mindkét módon *(3.1. ábra)*.



3.1. ábra

3.2 A sorozatok tulajdonságai

DEFINÍCIÓ. *Az (a_n) számsorozatot (szigorúan)* ***monoton növekedőnek*** *(illetve* ***csökkenőnek****) mondjuk, ha minden n indexre*

$$a_n < a_{n+1} \qquad (ill.\ a_n > a_{n+1}).$$

Ha egyenlőség is fennállhat, akkor ***tágabb értelemben vett monotonitásról*** *beszélünk.*

Megjegyzés: Ez a fogalom a függvények monotonitásával azonos fogalom, de itt elegendő a szomszédos tagok nagyságát összehasonlítani, függvények esetén általában nincs is szomszédos függvényérték.

DEFINÍCIÓ. *Az (a_n) számsorozat* **korlátos (felülről, alulról),** *ha tagjainak halmaza korlátos számhalmaz (felülről, alulról).*

Ha egy sorozat monoton növekedő, akkor alulról biztosan korlátos, és alsó határa az első tagja. Hasonlóképpen egy monoton csökkenő sorozat felülről korlátos, és felső határa az első tagja. (Ez egyben a minimum, illetve a maximum is.)

Az előző pontban szereplő példák közül az $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sorozat monoton csökkenő és korlátos. Mivel a sorozatnak nincs 1-nél nagyobb tagja, a felső határ az első tag $\left(\text{ez egyben a max}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$. Mivel minden tagja pozitív, a 0 és bármely negatív szám alsó korlát. Megmutatjuk, hogy 0 a legnagyobb alsó korlát, az alsó határ. Ehhez elég belátni, hogy bármely $\varepsilon>0$ szám már nem lehet alsó korlát. Az

$$\varepsilon < \frac{1}{n^2}$$

egyenlőtlenségből az

$$n < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

egyenlőtlenség következne, amely csak véges sok pozitív egész számra áll fenn. Ez azt is jelenti, hogy 0-nak ε sugarú környezetébe a sorozat végtelen sok tagja beleesik és csak véges sok marad kívül.

A $((-1)^n)$ sorozat nem monoton, de korlátos.

3.5. példa. Vizsgáljuk meg, hogy az

$$\left(\frac{n^2+4n+5}{(n+2)(n+3)}\right)$$

sorozat monoton-e, korlátos-e.

Ha kiszámítjuk a sorozat első néhány tagját, az a sejtésünk, hogy a sorozat monoton növekedő, hiszen pl.

$$a_1=\frac{10}{12},\qquad a_2=\frac{17}{20},\qquad \text{és}\qquad \frac{17}{20}>\frac{10}{12}.$$

Ebből azonban még nem következik, hogy bármely n-re $a_{n+1}>a_n$. Ezért képezzük az $n+1$-edik és az n-edik tag különbségét:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2+4(n+1)+5}{(n+3)(n+4)}-\frac{n^2+4n+5}{(n+2)(n+3)}=$$
$$=\frac{n}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Bármely pozitív egész n esetén a tört számlálója és nevezője pozitív, így a tört is pozitív, tehát

$$a_{n+1} - a_n > 0,$$

vagyis

$$a_{n+1} > a_n \quad \text{bármely} \quad n \in \mathbf{N}^+ \text{ esetén},$$

és ez azt jelenti, hogy a sorozat monoton növekedő.

A sorozat alsó határa az első tagja, ezért a korlátosság megállapításához csak azt kell megvizsgálni, hogy felülről korlátos-e a sorozat. Átalakítjuk a tört nevezőjét:

$$a_n = \frac{n^2+4n+5}{n^2+5n+6}.$$

Erről már belátható, hogy a számláló kisebb, mint a nevező, hiszen

$$4n+5 < 5n+6, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbf{N}^+,$$

vagyis a tört értéke kisebb, mint 1, tehát a sorozat felülről is korlátos. Annak bizonyítása, hogy 1 a legkisebb felső korlát, kissé több számolást igényel. Ezt nem részletezzük, de megmutatjuk, hogy a 0,9 nem lehet felső korlát.

Ha a 0,9 felső korlát lenne, akkor minden $n \in \mathbf{N}^+$-ra fenn kellene állnia az

$$\frac{n^2+4n+5}{n^2+5n+6} < 0{,}9$$

egyenlőtlenségnek. Ebből

$$n^2+4n+5 < 0{,}9n^2+4{,}5n+5{,}4.$$

Rendezve és 10-zel végigszorozva,

$$n^2-5n-4 < 0$$

adódik. Mivel az

$$n^2-5n-4 = 0$$

egyenletnek a gyökei (1 tizedes pontossággal) $-0{,}7$ és $5{,}7$, a fenti egyenlőtlenség csak az $n = 1, 2, 3, 4, 5$ értékekre teljesül. Ez azt is jelenti, hogy az első 5 tag kivételével a sorozat minden tagja a $]0{,}9; 1[$ intervallumban van, vagy ami ugyanaz, az 5 első tag kivételével a sorozat minden tagja beleesik a $K_{0,1}(1)$ környezetbe (az 1 szám 0,1 sugarú környezetébe).

3.3 Konvergens számsorozatok

Láttuk az előző pontban, hogy az $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sorozat monoton csökkenő és korlátos, alsó határa 0. A sorozat azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy 0 bármely $\varepsilon>0$ környezetén kívülre a sorozatnak legföljebb véges sok tagja esik. A monotonitásból következik, hogy ha a sorozat valamelyik tagja benne van a 0 adott környezetében, akkor ettől az indextől kezdve már minden tag benne van ebben a környezetben. Ebből a szempontból ennél a sorozatnál a 0-nak kitüntetett szerepe van.

Más sorozatnál is találhatunk ilyen tulajdonságú számot (amely nem feltétlenül 0), és az sem szükséges, hogy a sorozat monoton legyen.

DEFINÍCIÓ *Azt mondjuk, hogy valamely (a_n) számsorozat* ***határértéke*** *az A valós szám, ha fennáll a következő: minden egyes $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $n_0\in\mathbf{N}^+$, hogy bármely*

$$n\in\mathbf{N}^+,\qquad n>n_0$$

esetén teljesül az

$$|a_n-A|<\varepsilon$$

egyenlőtlenség.

A definícióban szereplő ε pozitív számot hibakorlátnak, az n_0 pozitív egész számot pedig az ε-hoz tartozó **küszöbindexnek** nevezzük. Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor **konvergensnek** mondjuk, ha nincs, akkor **divergensnek.** Azt a tényt, hogy az (a_n) sorozat határértéke az A valós szám, a következőképpen jelöljük:

$$\lim a_n = A,$$

és így olvassuk: „limesz a_n”.

Használjuk még az

$$a_n\to A$$

jelölést is (ezt így olvassuk: a_n „tart” vagy „konvergál” A-hoz).

A bevezetőben, illetve az előző pontban láttuk, hogy 0-nak bármely $\varepsilon>0$ sugarú környezetéből az $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sorozatnak csak véges sok tagja marad ki, így a definíció szerint

$$\lim\frac{1}{n^2}=0.$$

Legyen az ε hibakorlát pl. 0,01. Határozzuk meg a hozzá tartozó küszöbindexet. Felírjuk a határérték definíciójában szereplő egyenlőtlenséget:

$$\left|\frac{1}{n^2}-0\right| < 0{,}01,$$

azaz

$$\frac{1}{n^2} < 0{,}01,$$

ebből azt kapjuk, hogy

$$n > 10.$$

Tehát egy küszöbindex: 10. Világos azonban, hogy küszöbindex a 11, 12 stb. is. Vagyis az első tíz tag a határérték 0,01 sugarú környezetén kívül van (a tizedik éppen a környezet határán), a többi már e környezeten belül. Általában is igaz, hogy a határértéknek bármely környezetén kívül a sorozatnak legföljebb véges sok tagja lehet.

A 3.3. példában szereplő $((-1)^n)$ sorozat nem konvergens, nincs határértéke. Legyen ugyanis $\varepsilon < 1$, és A tetszőleges valós szám. Ekkor bármely két egymást követő tag közül legalább az egyiknek az A-tól való eltérése nagyobb az ε számnál.

Felvetődik az a kérdés, hogy lehet-e egy sorozatnak két vagy több határértéke.

3.1. TÉTEL. *Egy sorozatnak legföljebb egy határértéke lehet.*

Bizonyítás:

Tételezzük fel, hogy állításunkkal ellentétben két határértéke van a sorozatnak: A és B. Válasszuk meg az $\varepsilon > 0$ számot úgy, hogy az A és B ε sugarú környezetének ne legyen közös eleme.

Mivel A a sorozatnak határértéke, tehát létezik olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, hogy bármely $n > n_1$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

Hasonlóképpen, mivel B határérték, azért létezik olyan $n_2 \in \mathbf{N}^+$, hogy bármely $n > n_2$ esetén

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

Legyen n_0 a nagyobbik az n_1 és n_2 közül ($n_0 = \max(n_1, n_2)$). Nyilvánvaló, hogy bármely $n > n_0$ természetes számra fennáll mind a két egyenlőtlenség:

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

$$|a_n - B| < \varepsilon.$$

Azt kaptuk, hogy ugyanaz az a_n eleme az A szám ε sugarú környezetének is, meg a B szám ε sugarú környezetének is, holott a két környezetnek nincs közös eleme. Ellentmondásra jutottunk, tehát feltételezésünk hibás volt, azaz állításunkat igazoltuk.

3.2. TÉTEL. *Minden konvergens sorozat korlátos.*

Bizonyítás:

Legyen $\lim a_n = A$. Vegyük az A-nak pl. az 1 sugarú környezetét. A sorozat tagjainak halmaza két részre bontható:

$$B_1 = \{a_n \mid a_n \in]A-1, A+1[\}, \qquad B_2 = \{a_n \mid a_n \notin]A-1, A+1[\}.$$

A B_2 halmaz véges vagy üres, így korlátos. A B_1 halmaz a definíciója alapján korlátos. Ezért korlátos a $B_1 \cup B_2$ halmaz, vagyis a sorozat elemeinek halmaza is.

Megjegyzés: A tétel nem fordítható meg, azaz ha egy sorozat korlátos, abból még nem következik, hogy konvergens (pl.: $((-1)^n)$). Ha a korlátosságot kiegészítjük a monotonitással, akkor már adódik a konvergencia.

3.3. TÉTEL. *Minden tágabb értelemben monoton korlátos sorozat konvergens.*

Bizonyítás:

Legyen (a_n) monoton növekedő sorozat, és jelöljük A-val a sorozat tagjai halmazának felső határát. A felső határ értelmezéséből következik, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az $A-\varepsilon$ már nem lehet felső korlát, így a sorozatnak van olyan a_{n_0} tagja, amelyre

$$A-\varepsilon < a_{n_0}.$$

A sorozat monoton növekedő, tehát ha $n > n_0$, akkor

$$A-\varepsilon < a_{n_0} \leqq a_n \leqq A,$$

s ebből következik, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \qquad n > n_0,$$

vagyis a sorozat konvergens, és $\lim a_n = A$.

Monoton csökkenő sorozatra a tétel hasonlóan igazolható.

A bizonyításból azonnal látszik, hogy monoton korlátos sorozat a megfelelő határához konvergál. Ebben az esetben az egyik határ azonos a határértékkel.

Az utóbbi tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy korlátos sorozatok esetén a konvergencia elégséges feltétele a monotonitás. A feltétel azonban nem szükséges, van olyan konvergens sorozat, amely nem monoton (lásd: 3.8. példa).

Most bemutatunk néhány sorozatot.

3.6. példa. Ha egy sorozat minden tagja egyenlő egymással, vagyis $c_n = C$, ahol C rögzített valós szám, akkor $\lim c_n = C$. Ugyanis bármely $\varepsilon > 0$ számra teljesül minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén, hogy

$$|c_n - C| = 0 < \varepsilon.$$

3.7. példa. Az

$$a_n = \frac{n^2+3}{n^2+1}, \qquad n \in \mathbf{N}^+$$

sorozat monoton csökkenő, ugyanis

$$\frac{n^2+3}{n^2+1} > \frac{(n+1)^2+3}{(n+1)^2+1} = \frac{n^2+2n+4}{n^2+2n+2}.$$

Ennek fennállását pedig a nevezők szorzatával végigszorozva láthatjuk be:

$$n^4 + 2n^3 + 5n^2 + 6n + 6 > n^4 + 2n^3 + 5n^2 + 2n + 4,$$

ebből

$$4n + 2 > 0.$$

A sorozat alulról korlátos, mivel minden tagja pozitív (pl.: a 0 alsó korlát). A 3.3. tétel szerint monoton, korlátos lévén, a sorozat konvergens. A 0 nem lehet a legnagyobb alsó korlát (és így a határérték), mivel a sorozat tagjainak számlálója nagyobb, mint a nevezője, ezért egyetlen tag sem lehet 1-nél kisebb. Bebizonyítjuk, hogy

$$\lim a_n = 1.$$

Ehhez elegendő megmutatni, hogy bármely $\varepsilon > 0$ esetén valamely tagtól kezdve

$$\left| \frac{n^2+3}{n^2+1} - 1 \right| = \frac{n^2+3}{n^2+1} - 1 < \varepsilon,$$

$$\frac{n^2+3-n^2-1}{n^2+1} < \varepsilon,$$

$$2 < \varepsilon n^2 + \varepsilon,$$

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} < n^2.$$

Bármilyen kicsi is ε (azaz bármilyen nagy is az egyenlőtlenség bal oldala), bizonyos n-től kezdve n^2 nagyobb nála. Például $\varepsilon = 0{,}001$ esetén

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} = 1999.$$

Mivel $\sqrt{1999}=44{,}7$, az első 44 tag kivételével minden tag 1-nek 0,001 sugarú környezetében van.

3.8. példa. A (q^n) sorozat $q \in]-1, 1[$ esetén konvergens, és határértéke 0.

Legyen először $q \in]0, 1[$. Ekkor mindig található olyan pozitív h szám, hogy

$$q = \frac{1}{1+h}$$

teljesül. Alkalmazzuk most a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget:

$$q^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqq \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz megválasztható egy n_0 pozitív egész szám úgy, hogy fennálljon az

$$n_0 > \frac{1}{h\varepsilon}$$

egyenlőtlenség. Ekkor minden $n > n_0$ pozitív egész szám esetén

$$n > \frac{1}{h\varepsilon},$$

vagyis

$$|q^n - 0| = q^n < \frac{1}{nh} < \varepsilon.$$

A $q=0$ esetben az állítás nyilvánvaló, ha pedig $q \in]-1, 0[$, akkor könnyen visszavezethető az előző esetre:

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n,$$

és itt már $|q| \in]0, 1[$.

Így például

$$\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0,$$

tehát a $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ sorozat konvergens.

Megjegyezzük, hogy $q=1$ esetén is konvergens a sorozat, ekkor a határértéke 1, de mint láttuk, $q=-1$ esetén divergens, azaz minden $q \in]-1, 1]$ esetén konvergens a (q^n) sorozat.

3.9. példa. Az (n^2) sorozat divergens, mert nem korlátos.

3.10. példa. A $\left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)$ sorozat korlátos ugyan, de divergens. A sorozat tagjai:

$$1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1 \ldots .$$

Legyen ugyanis $\varepsilon < \frac{1}{2}$ és A tetszőleges valós szám. Ekkor bármely két egymást követő tag közül legalább az egyik nincs benne az A szám ε sugarú környezetében, tehát A nem lehet a sorozatnak határértéke.

Az analízisben fontos szerepe van az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozatnak és e sorozat határértékének. A sorozat vizsgálata nem egyszerű: monotonitását, korlátosságát is csak egyedi eljárással, szellemes „fogással" lehet bebizonyítani. Határértéke viszont irracionális szám.

3.4. TÉTEL. a) *Az* $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ *sorozat konvergens (határértékét e-vel jelöljük).*

b) $\lim\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a \quad (a \in \mathbf{R}).$

Bizonyítás:

Csak a tétel a) részét bizonyítjuk. A bizonyításhoz felhasználunk egy egyenlőtlenséget. Az alábbi azonosságból indulunk ki: bármely a és b valós szám és $n \in \mathbf{N}^+$ esetén

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\,(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n).$$

Legyen most $a > 0$, $b > 0$ és $a > b$. Ha a szorzat második tényezőjében b-t mindenütt a-val helyettesítjük, akkor a szorzat értéke növekedik, így fennáll az

$$a^{n+1} - b^{n+1} < (a-b)\,(n+1)a^n \qquad (3.1.)$$

egyenlőtlenség.

Először igazoljuk, hogy a sorozat monoton növekedő.

Legyen

$$a = 1+\frac{1}{n} \quad \text{és} \quad b = 1+\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}^+.$$

Fennáll az, hogy $a > 0$, $b > 0$ és $a > b$, tehát alkalmazzuk a (3.1.) egyenlőtlenséget:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \frac{1}{n(n+1)}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pozitív számmal:

$$1+\frac{1}{n}-\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1}{n}.$$

Mindkét oldalból kivonunk $\frac{1}{n}$-et, átrendezzük az egyenlőtlenséget, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

azaz

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

bármely $n\in\mathbf{N}^+$ esetén, tehát a sorozat monoton növekedő.

Abból a tényből, hogy a sorozat növekedő, következik, hogy alulról korlátos, alsó határa az első tagja: 2. Most igazoljuk, hogy felülről is korlátos.

Legyen

$$a=1+\frac{1}{2n} \quad \text{és} \quad b=1, \quad \text{ahol} \quad n\in\mathbf{N}^+.$$

Most is igaz, hogy $a>0$, $b>0$ és $a>b$, tehát alkalmazhatjuk a (3.1.) egyenlőtlenséget:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1}-1<\frac{1}{2n}(n+1)\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk az $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ pozitív számmal:

$$1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Mindkét oldalból kivonunk $\frac{1}{2n}$-et, átrendezzük az egyenlőtlenséget, így azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} > \frac{1}{2}.$$

Vesszük mindkét oldal reciprokát (mindkét oldal pozitív, tehát megfordul az egyenlőtlenség iránya):

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 2,$$

majd az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emeljük (mindkét oldal pozitív):

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$$

bármely $n \in \mathbf{N}^+$ esetén.

Eredményünk azt jelenti, hogy a sorozat minden páros indexű tagja kisebb, mint 4. Mivel a sorozat monoton növekedő, azért a páratlan indexű tagjai is feltétlenül kisebbek, mint 4, tehát a sorozat felülről is korlátos, egy felső korlátja 4:

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

Mivel a sorozat monoton és korlátos, azért a 3.3 tétel alapján konvergens. Ezzel tételünk a) részét bebizonyítottuk.

A 3.4. tételbeli megállapodásunk szerint

$$e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Mivel a sorozat első tagja 2, monoton növekedő, és egy felső korlátja 4, azért

$$2 < e \leqq 4,$$

tehát az e számról egyelőre csak annyi információnk van, hogy a 2 és a 4 közé eső valós szám. Ha a sorozat tagjait egymás után kiszámítjuk, akkor a monotonitás miatt egyre jobban megközelítjük a határértékét. Például 4 tizedes pontossággal $a_{10} = 2{,}5937$, $a_{100} = 2{,}7048$, $a_{1000} = 2{,}7169$ a sorozat ezen tagjainak értéke. A négy alapművelettel pontosan sohasem kapjuk meg az értékét, mert – be lehet bizonyítani – az e irracionális szám: végtelen nem szakaszos tizedes tört. Az e-t Euler-féle számnak nevezik, és értéke tíz jegyre:

$$2{,}718\,281\,828.$$

Az e számmal még gyakran fogunk találkozni a továbbiakban. Vizsgálni fogjuk az e alapú exponenciális függvényt, az

$$\exp\colon x \mapsto e^x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

függvényt, továbbá annak inverzét, az e alapú logaritmusfüggvényt:

$$x \mapsto \log_e x, \qquad x \in \mathbf{R}^+.$$

Az e alapú logaritmust **természetes logaritmusnak** nevezzük, és az $\log_e x$ szimbólum helyett többnyire az $\ln x$ (olvasd: logaritmus naturális) szimbólumot használjuk.

3.4 Műveletek konvergens sorozatokkal

A 3.7. példabeli sorozat vizsgálatakor láthattuk, hogy a sorozat monotonitásának bebizonyítása után még probléma maradt a határérték számszerű meghatározása. Ezt könnyítik meg az alábbi tételek.

Értelmeztük a függvények közötti műveleteket. Ezeket a definíciókat alkalmazzuk a számsorozatra mint speciális függvényre. Az így kapott sorozatok konvergenciájára következtethetünk az eredeti sorozatok tulajdonságai alapján.

3.5. TÉTEL. *Ha* $\lim a_n = 0$ *és* (b_n) *korlátos sorozat, akkor* $\lim (a_n b_n) = 0$.

Bizonyítás:

A (b_n) sorozat korlátos, ezért létezik olyan $K > 0$ szám, hogy

$$|b_n| < K \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$

Adjuk meg ezután tetszőlegesen az $\varepsilon > 0$ számot, majd osszuk el K-val. Az (a_n) sorozat határértéke 0, ezért az $\frac{\varepsilon}{K} > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}^+$, hogy, ha $n > n_0$, akkor

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ebből következik, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy az $(a_n b_n)$ sorozat tagjai n_0-tól kezdve 0-nak ε sugarú környezetében vannak, így a sorozat határértéke 0.

3.6. TÉTEL. *Ha az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatok konvergensek, továbbá* $\lim a_n = A$ *és* $\lim b_n = B$, *akkor*

a) *a* (ca_n) *sorozat bármely* $c \in \mathbf{R}$ *esetén,*
az $(a_n + b_n)$ *sorozat,*
az $(a_n b_n)$ *sorozat és*
$b_n \neq 0$, $B \neq 0$ *esetén az* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *sorozat is konvergens, és*

b) $\lim (ca_n) = cA$,
$\lim (a_n + b_n) = A + B$,
$\lim (a_n b_n) = A \cdot B$

és

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Bizonyítás:

Tételünk négy sorozat konvergenciájára és határértékére vonatkozó állítása közül az első hármat bizonyítjuk.

I. Egy valós szám és egy konvergens sorozat szorzata

Mivel $\lim a_n = A$, ezért $\lim (a_n - A) = 0$. Elegendő megmutatni, hogy

$$\lim (ca_n - cA) = 0.$$

Alkalmazhatjuk a 3.5. tételt:

$$\lim (ca_n - cA) = \lim ((a_n - A) \cdot c) = 0.$$

II. Két konvergens sorozat összege

A tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, ill. $n_2 \in \mathbf{N}^+$ küszöbindex, hogy

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad n > n_1,$$

és

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha} \quad n > n_2,$$

mivel $a_n \to A$ és $b_n \to B$.

Legyen n_0 a nagyobbik az n_1 és n_2 közül. Ekkor bármely $n > n_0$ pozitív egész számra fennáll mind a két egyenlőtlenség. Összeadjuk a két egyenlőtlenséget:

$$|a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon.$$

A két szám összegének abszolút értékére vonatkozó

$$|x+y| \leqq |x| + |y|$$

tulajdonság alapján

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n-B)| \leqq |a_n-A| + |b_n-B| < \varepsilon,$$

ha $n>n_0$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim (a_n+b_n) = A+B$.

III. Két konvergens sorozat szorzata

Képezzük az (a_nb_n-AB) sorozatot. Egyszerű számolással kapjuk a következő összefüggést:

$$a_nb_n-AB = a_nb_n-Ab_n+Ab_n-AB = b_n(a_n-A)+A(b_n-B). \qquad (3.2.)$$

Kiszámítjuk az (a_nb_n-AB) sorozat határértékét. Mivel $\lim a_n=A$ és $\lim b_n=B$, azért $\lim (a_n-A) = 0$ és $\lim (b_n-B) = 0$. A (3.2.) egyenlőség jobb oldalának első tagja egy korlátos és egy 0-hoz tartó sorozat szorzata, a második tagja egy állandó és egy 0-hoz tartó sorozat szorzata. Alkalmazhatjuk a 3.5. tételt:

$$\lim (b_n(a_n-A)) = 0, \qquad \lim (A(b_n-B)) = 0.$$

A II. szerint a két sorozat összegének a határértéke is 0, így

$$\lim (a_nb_n-AB) = 0.$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\lim (a_nb_n) = AB.$$

Két konvergens sorozat hányadosára vonatkozó állítás bizonyítására nem térünk ki.

Tételünk azt fejezi ki, hogy konvergens sorozatok esetében bizonyos műveletek és a határérték képzésének a sorrendje felcserélhető, így pl. két sorozat összegének a határértékét úgy is ki lehet számítani, hogy a két sorozat határértékét összeadjuk.

Bemutatunk néhány példát e tétel alkalmazására.

3.11. példa. A $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ sorozat határértéke 0. Ugyanis e sorozat egy korlátos sorozat, a $((-1)^n)$ és egy 0-hoz tartó sorozat, az $\left(\frac{1}{n}\right)$ szorzata.

3.12. példa. Az $\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2^n} + 3\right)$ sorozat három konvergens sorozat összege.

Az első tagja az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat szorzata önmagával, határértéke 0. A második tag, $\left(-\frac{1}{2^n}\right) = \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ szintén 0-hoz tart (3.8. példa). A harmadik tag (állandó sorozat) határértéke 3. Tehát a sorozat határértéke a három határérték összege, vagyis 3.

3.13. példa. Az $(a_n) = \left(\frac{3n^2-2n+1}{4n^2+2}\right)$ sorozat határértékének megállapításához osszuk el a számlálót is és a nevezőt is a legmagasabb fokú taggal, n^2-tel:

$$a_n = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{2}{n^2}}.$$

A $\left(-\frac{2}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\left(\frac{2}{n^2}\right)$ sorozat mindegyike konvergens és határértéke 0, tehát a számláló határértéke 3, a nevező határértéke 4, így

$$\lim \frac{3n^2-2n+1}{4n^2+2} = \frac{3}{4}.$$

3.7. TÉTEL. *Legyen (a_n), (b_n) és (c_n) olyan számsorozat, amelyre*

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n,$$

és tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) sorozat konvergens és ugyanaz a határértékük:

$$\lim a_n = \lim b_n = A.$$

Ekkor a (c_n) sorozat is konvergens és

$$\lim c_n = A.$$

Bizonyítás:

A tetszőlegesen választott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, illetve $n_2 \in \mathbf{N}^+$ küszöbindex, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_1$$

és

$$|b_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > n_2.$$

Legyen n_0 a nagyobbik az n_1 és n_2 közül. Ekkor bármely $n > n_0$ pozitív egész számra fennáll mind a két egyenlőtlenség, vagyis a_n is, b_n is benne van az A szám ε sugarú környezetében. Mivel

$$a_n \leqq c_n \leqq b_n,$$

azért $n > n_0$ esetén c_n is benne van az A szám ε sugarú környezetében, vagyis

$$|c_n - A| < \varepsilon.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\lim c_n = A.$$

3.5 Tágabb értelemben vett határérték

Amint láttuk, konvergens sorozatnak nevezzük az olyan sorozatot, amelynek van határértéke. Ez azt jelenti, hogy egy bizonyos tulajdonság a sorozatnak a küszöbindexnél minden nagyobb indexű tagjára fennáll. Most tekintsünk két divergens sorozatot, az (n^2) és a $((-1)^n \cdot n)$ sorozatokat.

Az első sorozatnál tapasztalható valami szabályosság a tagok elhelyezkedésére vonatkozólag. Ugyanis akármilyen nagy számot veszünk, pl. 10^6-t, akkor az 1001. tagtól kezdve minden tag nagyobb, mint 10^6. Tehát itt is van egy bizonyos tulajdonság, amely a küszöbindexnél nagyobb indexű tagokra teljesül. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a sorozat a plusz végtelenhez tart, más szóval: a sorozatnak létezik tágabb értelemben vett határértéke.

A másik divergens sorozatról ezt nem mondhatjuk el: a sorozat páros indexű tagjai egyre nagyobb pozitív számok, páratlan indexű tagjai egyre nagyobb abszolút értékű negatív számok: $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$.

DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy egy (a_n) számsorozat* ***tágabb értelemben vett határértéke*** *plusz (mínusz) végtelen, ha minden $P \in \mathbf{R}^+$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}^+$ küszöbszám, hogy $n > n_0$ esetén*

$$a_n > P \qquad (a_n < -P).$$

Jelölés:

$$\lim a_n = +\infty \qquad (\lim a_n = -\infty)$$

vagy

$$a_n \to +\infty \qquad (a_n \to -\infty).$$

Az (a_n)-et ***tágabb értelemben konvergens*** *számsorozatnak nevezzük.*

Ha egy sorozat a plusz végtelenhez tart, akkor a sorozatnak a tetszőlegesen választott P pozitív számnál nagyobb tagja végtelen sok van, a $]-\infty, P]$ intervallumba legföljebb véges sok tag esik. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben a sorozat alulról korlátos, felülről azonban nem.

Láttuk (3.3. tétel), hogy ha egy sorozat monoton és korlátos, akkor konvergens. Ha viszont egy sorozat monoton és nem korlátos, akkor van tágabb értelemben vett határértéke. Így tehát minden monoton számsorozat vagy konvergens, vagy tágabb értelemben konvergens.

3.14. példa. A (2^n) sorozat monoton növekedő és tágabb értelemben vett határértéke plusz végtelen. Ugyanis bármilyen $P \in \mathbf{R}^+$ szám esetén van olyan n_0, hogy $P < 2^{n_0}$ (ekkor minden $n > n_0$ egész számra $2^n > P$).

3.15. példa. Az $(a_n) = ((-1)^n - n)$ sorozat nem monoton, de határértéke mínusz végtelen. Bármely $P \in \mathbf{R}^+$ számra, ha $n_0 \geqq P+1$, akkor minden $n > n_0$ esetén

$$a_n = (-1)^n - n < -P.$$

3.8. TÉTEL. *Legyen* $q \in \mathbf{R}$, *akkor*

$$\lim q^n = \begin{cases} +\infty, & ha \quad q > 1, \\ 1, & ha \quad q = 1, \\ 0, & ha \quad -1 < q < 1, \\ \textit{tágabb értelemben sincs határérték,} & ha \quad q \leqq -1. \end{cases}$$

Bizonyítás:

I. Ha $q > 1$, akkor mindig található olyan pozitív h szám, hogy

$$q = 1 + h$$

teljesül. Alkalmazzuk a Bernoulli-féle egyenlőtlenséget:

$$q^n \geqq 1 + nh.$$

És itt a jobb oldal akármilyen nagy lehet, azaz a bal oldal is.

II. Ha pedig $q < -1$, akkor a sorozat alulról sem korlátos, felülről sem korlátos, így se $+\infty$, se $-\infty$ nem lehet a határértéke (tágabb értelemben sem konvergens). A $q \in [-1, 1]$ esetet a 3.8. példában tárgyaltuk.

Mint láttuk, két konvergens sorozat összegének, szorzatának, illetve hányadosának határértéke a megfelelő határértékek összege, szorzata, illetve hányadosa. Bizonyos esetekben két sorozat összegének, szorzatának, illetve hányadosának határértékét akkor is meg tudjuk határozni, ha az egyik vagy mindkét sorozat tágabb értelemben konvergens. Egy ilyen esetet tartalmaz a következő tétel.

3.9. TÉTEL. *Ha* (a_n) *korlátos számsorozat és* $\lim b_n = +\infty$, *akkor*

a) $b_n \neq 0$ *esetén* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$,

b) $a_n > 0$ *esetén* $\lim \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.

Bizonyítás:

a) Az (a_n) sorozat korlátos, így létezik olyan $M \in \mathbf{R}^+$ szám, hogy $|a_n| < M$ $(n \in \mathbf{N}^+)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen választott szám. Mivel $\lim b_n = +\infty$, azért az $\frac{M}{\varepsilon}$ számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}^+$, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$|b_n| > \frac{M}{\varepsilon}.$$

A két egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = |a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

ez pedig azt jelenti, hogy az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat határértéke 0.

b) Az (a_n) csupa pozitív tagú sorozat korlátos, így létezik olyan $M \in \mathbf{R}^+$ szám, hogy $a_n < M$, azaz $\frac{1}{a_n} > \frac{1}{M}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$. Legyen P tetszőleges pozitív szám. Mivel $\lim b_n = +\infty$, azért a PM számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbf{N}^+$, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$b_n > PM.$$

A két egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\frac{b_n}{a_n} = b_n \frac{1}{a_n} > PM \frac{1}{M} = P.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a $\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ sorozat határértéke plusz végtelen.

Tekintsük az

$$\left(\frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0}\right)$$

alakú számsorozatokat. (Természetesen a nevező minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén 0-tól különböző szám; ha valamely n-re 0 adódna – ilyen véges sok lehet –, azt a tagot elhagyjuk.) Az ilyen sorozatok határértékére vonatkozik a következő tétel.

3.10. TÉTEL. *Legyen k és l pozitív egész szám, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_l$ valós szám, $a_k \neq 0$, $b_l \neq 0$. Ekkor*

$$\lim \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k < l, \\ \dfrac{a_k}{b_k}, & \text{ha} \quad k = l, \\ +\infty, & \text{ha} \quad k > l \quad \textit{és} \quad \dfrac{a_k}{b_l} > 0, \\ -\infty, & \text{ha} \quad k > l \quad \textit{és} \quad \dfrac{a_k}{b_l} < 0. \end{cases}$$

Bizonyítás:

Sorozatunkat átalakítjuk úgy, hogy a számlálóban kiemelünk n^k-t, a nevezőben n^l-t:

$$\frac{n^k\left(a_k + \dfrac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \dfrac{a_1}{n^{k-1}} + \dfrac{a_0}{n^k}\right)}{n^l\left(b_l + \dfrac{b_{l-1}}{n} + \ldots + \dfrac{b_1}{n^{l-1}} + \dfrac{b_0}{n^l}\right)} = n^{k-l} \frac{a_k + \dfrac{a_{k-1}}{n} + \ldots + \dfrac{a_1}{n^{k-1}} + \dfrac{a_0}{n^k}}{b_l + \dfrac{b_{l-1}}{n} + \ldots + \dfrac{b_1}{n^{l-1}} + \dfrac{b_0}{n^l}}.$$

A jobb oldal második tényezőjeként szereplő tört nyilvánvalóan konvergens, és határértéke $\frac{a_k}{b_l}$ (hiszen a számláló és nevező többi tagja egy-egy 0-hoz tartó sorozat). Ha $k < l$, akkor $\lim n^{k-l} = 0$, így a vizsgált sorozat határértéke is 0. Ha $k = l$, akkor $\lim n^{k-l} = \lim 1 = 1$, így a vizsgált sorozat határértéke egyenlő a második tényező határértékével, azaz $\frac{a_k}{b_l}$. Végül ha $k > l$, akkor $\lim n^{k-l} = +\infty$, így a vizsgált sorozat egy plusz végtelenhez tartó és egy konvergens sorozat szorzata. Ha a konvergens sorozat határértéke, $\frac{a_k}{b_l}$ pozitív, a szorzat plusz végtelenhez tart, ha negatív, akkor a szorzat mínusz végtelenhez tart.

Tételünk azt fejezi ki, hogy a határérték megállapításakor mind a számlálóból, mind a nevezőből csak a legmagasabb fokú tagot kell figyelembe venni: k és l nagyságbeli viszonyától, illetve $\frac{a_k}{b_l}$ előjelétől függ a határérték. Tételünk szemléltetésére bemutatunk néhány konkrét sorozatot.

3.16. példa.

a)
$$\lim \frac{n+2}{3n^3+36n-5} = 0.$$

b)
$$\lim \frac{n^3+2n-1}{3n^3+36n-5} = \frac{1}{3}.$$

c)
$$\lim \frac{2n^4+n+2}{3n^3+36n-5} = +\infty.$$

d)
$$\lim \frac{-n^5+2n^4+2}{3n^3+36n-5} = -\infty.$$

3.6 Végtelen sorok

Legyen $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$. Ebből a számsorozatból kiindulva egy újabb sorozatot képezünk az alábbi előírás szerint:

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1+\frac{1}{2}, \quad s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \ldots, \quad s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}, \ldots$$

Ezt az (s_n) sorozatot az (a_n) sorozatból képezett sornak nevezzük.

DEFINÍCIÓ. ***Végtelen*** *(numerikus)* ***sor*** *a* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ *vagy az*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$$

szimbólummal jelölt fogalom, ahol az a_n*-ek valós számok,* a_n *a sor n-edik tagja,*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+\ldots+a_n \qquad (n \in \mathbf{N}^+)$$

a sor n-edik részletösszege.

A számsorozatra megismert tulajdonságok (monotonitás, korlátosság, konvergencia) megfogalmazhatók a végtelen sorra is. Megadjuk a konvergencia definícióját.

DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ *végtelen sor konvergens és összege az A valós szám, ha az* (s_n) *sorozat konvergens és határértéke A. Jelölés:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A.$$

3.17. példa. Az (n^2) sorozatból képezett végtelen sor így írható fel: $\sum n^2 = 1+4+9+16+\dots$. Ez divergens, mivel a részletösszegek sorozata: $(1+4+9+16+\dots+n^2)$ felülről nem korlátos.

A $((-1)^n)$ sorozatból képezett végtelen sor így írható fel: $\sum(-1)^n = -1+1-1+1\dots$. Ez szintén divergens, mivel az $s_1 = -1$, $s_2 = -1+1 = 0$, $s_3 = -1+1-1 = -1$, $s_4 = 0$, $s_5 = -1, \dots$ sorozatnak nincs határértéke.

Most bemutatunk egy konvergens végtelen sort. Az (aq^{n-1}) mértani sorozatból képezett **végtelen mértani sor** konvergens, ha kvóciensének abszolút értéke 1-nél kisebb.

3.11. TÉTEL. *Legyen „a" valós szám és* $q \in]-1, 1[$. *Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Bizonyítás:

Felírjuk a végtelen sor n-edik részletösszegét, és alkalmazzuk a mértani sorozat összegképletét:

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a\frac{q^n-1}{q-1} = a\frac{q^n}{q-1} + \frac{a}{1-q}.$$

Ha $q \in]-1, 1[$, akkor $\lim q^n = 0$ (3.8. tétel).
Így

$$\lim s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Mivel az (s_n) sorozat határértékét nevezzük a végtelen sor összegének, azért

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Ha $q \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, akkor a végtelen sor divergens.

Láttuk, hogy a (q^n) és így a fenti konvergens sor tagjaiból képezett (aq^{n-1}) sorozat határértéke 0 ($q \in]-1, 1[$). Ez nemcsak ebben az esetben igaz. Általában a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciájának egyik szükséges feltétele az, hogy

$\lim a_n = 0$. Azonban ez a feltétel nem elegendő: vagyis, ha $\lim a_n = 0$, abból nem következik, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens. Így pl. $\lim \frac{1}{n} = 0$, és az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozatból képezett végtelen sor divergens. Ezt mutatjuk be a következő példán.

3.18. példa. A $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ sor (harmonikus sor) divergens. Ezt a következőképpen lehet belátni. Vegyük a 2^k indexű részletösszeget, és zárójelezzük a következőképpen:

$$s_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right).$$

Könnyen belátható, hogy a zárójelbe tett tagok összege mindegyik esetben nagyobb $\frac{1}{2}$-nél:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Tekintsük az utolsó zárójelben lévő tagokat. Az összeg tagjainak száma 2^{k-1}, és mindegyik tag nagyobb, mint $\frac{1}{2^k}$ (kivéve az utolsót). Így

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k} > 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}.$$

$$s_{2^k} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} > \frac{k}{2}.$$

Az (s_n) sorozat nem korlátos, tehát nem konvergens.

A konvergencia megállapítására léteznek bizonyos kritériumok. Ezek közül – bizonyítás nélkül – bemutatunk egyet.

3.12. TÉTEL. *Legyen (a_n) számsorozat. Ha létezik olyan $q \in]0, 1[$ valós szám, amelyre teljesül, hogy*

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q \qquad (n \in \mathbf{N}^+),$$

akkor a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens.

Megjegyezzük, hogy ezen kritérium alapján csak a konvergencia tényét tudjuk megállapítani, az összegről azonban nem tudunk semmit.

3.19. példa. A $\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$ végtelen sor konvergens. Képezzük az $n+1$-edik és n-edik tag hányadosát:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$

E hányados maximális értéke $\frac{1}{2}$, így tetszőleges

$$\frac{1}{2} < q < 1$$

valós számra teljesül, hogy

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q.$$

DEFINÍCIÓ. *A* $\sum a_n$ *végtelen sort* ***abszolút konvergensnek*** *mondjuk, ha a tagok abszolút értékéből képezett* $\sum |a_n|$ *sor konvergens. Azokat a konvergens sorokat, amelyek nem abszolút konvergensek,* ***feltételesen konvergens soroknak*** *nevezzük.*

Könnyen be lehet látni, hogy minden abszolút konvergens sor egyben konvergens is, tehát a konvergens sorok két csoportra bonthatók: a feltételesen konvergens sorok és az abszolút konvergens sorok csoportjára.

Legyen $q \in]-1, 0[$. Ekkor a $\sum q^{n-1}$ végtelen sor abszolút konvergens, mert a sor tagjainak abszolút értékéből képezett sor, vagyis a $\sum |q|^{n-1}$ sor, ahol $|q| \in]0, 1[$ is konvergens *(3.8. példa)*.

A $\sum q^n$ sor speciális esete az ún. hatványsornak.

DEFINÍCIÓ. *Legyen* (c_n) *egy számsorozat és* c_0 *egy valós szám.* ***Hatványsornak*** *nevezzük azt a végtelen sort, amelynek n-edik részletösszege így írható fel:*

$$s_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

A (c_n) *sorozat tagjait a hatványsor együtthatóinak nevezzük.*

Megjegyzés: Hatványsornak nevezzük azt a végtelen sort is, amelynek n-edik részletösszege:

$$s_n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n,$$

ahol a rögzített valós szám. Történetesen, ha $a=0$, akkor a definícióbeli alakot kapjuk.

A végtelen mértani sor csak $-1 < q < 1$ esetén volt konvergens. Előfordulhat, hogy a hatványsor is csak bizonyos x értékekre konvergens. Például a 3.12. tétel segítségével könnyen eldönthető, hogy a

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

sor $x=0{,}5$ esetén (sőt minden $|x|<1$ számra) konvergens, de pl. $x=1$ esetén a 3.18. példában tárgyalt divergens sort kapjuk.

4. FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKE, FOLYTONOSSÁG

4.1 Függvények határértéke a végesben

Ebben a fejezetben értelmezzük a függvények határértékét, majd a matematikában és a gyakorlati alkalmazásban fontos szerepet játszó folytonos függvényekkel foglalkozunk.

Valamely f függvény értelmezési tartományában vegyünk fel egy x_1, x_2 ..., x_n, ... sorozatot, akkor ezzel képezhetünk egy másik sorozatot is, az

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

függvényértékek sorozatát.

4.1. példa. Legyen

$$f\colon f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3} \quad \text{és} \quad x_n = n \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ekkor

$$f(x_1) = f(1) = \frac{2}{5}, f(x_2) = f(2) = \frac{5}{7},$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{10}{9}, \ldots .$$

Legyen az a valós szám valamely környezetében az f függvény értelmezve. A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogy ha az f értelmezési tartományában a-hoz konvergáló sorozatokat adunk meg, a függvényértékek sorozatai konvergensek-e. Kissé pontatlanul fogalmazva: hogyan viselkednek a függvényértékek, ha az értelmezési tartományban közeledünk a-hoz.

Tekintsük az

$$f\colon f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$$

függvényt és az értelmezési tartományának a 0 pontját. Az értelmezési tartomány nullától különböző pontjaiból lehet olyan sorozatokat konstruálni, amelyek a 0-hoz konvergálnak. Például ilyen az

$$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbf{N}^+)$$

sorozat is. Tekintsük az (x_n) sorozat pontjaiban felvett függvényértékeket:

$$f(x_1) = f(1) = \frac{2}{5}, \qquad f(x_2) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16}, \ \ldots,$$
$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+n^2}{2n+3n^2}, \ \ldots .$$

Így egy újabb sorozatot kapunk, amelyről könnyű belátni, hogy konvergens, és

$$\lim f(x_n) = \frac{1}{3}.$$

Azt sem nehéz megmutatni, hogy bármilyen, nullához konvergáló (x_n) sorozatot választunk, az

$$\big(f(x_n)\big) = \left(\frac{x_n^2+1}{2x_n+3}\right)$$

sorozat mindig konvergens, és határértéke mindig $\frac{1}{3}$.

Ezt így is írhatjuk:

$$\lim_{x_n \to 0} f(x_n) = \frac{1}{3}.$$

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény a valamely környezetében (esetleg a-t kivéve) értelmezve. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a helyen a* ***határértéke*** *az $A \in \mathbf{R}$ szám, ha minden olyan (x_n) számsorozat esetén, amelyre*

$$\lim x_n = a \qquad (x_n \in D_f \setminus \{a\}),$$

igaz, hogy

$$\lim f(x_n) = A.$$

A határérték jele: $\lim\limits_{a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vagy $\lim\limits_{x=a} f(x)$. *Ha minden olyan* (x_n) *számsorozat esetén, amelyre*

$$\lim x_n = a \qquad (x_n \in D_f,\ x_n > a),$$

igaz, hogy

$$\lim f(x_n) = A,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik a ***jobb oldali határértéke,*** *és ez A-val egyenlő (ekkor az $\{x \leqq a \mid x \in D_f\}$ halmaz lehet üres is)*
A jobb oldali határérték jele:

$$\lim_{a+0} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x), \quad \text{vagy} \quad \lim_{x = a+0} f(x).$$

Hasonlóan definiálható a $\lim\limits_{a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ ***bal oldali határérték*** *is.*

Definíciónk a függvény határértékének meghatározását visszavezeti a sorozatok határértékének meghatározására. Először veszünk egy (x_n) sorozatot, amelynek tagjai az értelmezési tartomány elemei (kivéve az a helyet), határértéke pedig az a. Ez a sorozat meghatároz egy másik sorozatot, amelynek n-edik tagja a függvény helyettesítési értéke az x_n helyen. Ha az értelmezési tartomány elemeiből képezett, bármely a határértékű, a-tól különböző sorozat esetén a függvényértékek sorozata mindig ugyanahhoz a számhoz tart, akkor azt mondjuk, hogy a-ban van a függvénynek határértéke. Egy feladat megoldásakor tehát nem elegendő az értelmezési tartomány elemeiből egyetlen konkrét sorozatot fölvenni, hanem a határérték létezéséhez be kell látni, hogy bármely a határértékű, a-tól különböző sorozat esetén a függvényértékek sorozata konvergens. Itt jegyezzük meg, hogy ha minden $x_n \in D_f$, $x_n \to a$ esetén $f(x_n) \to A$, akkor igaz, hogy $\lim\limits_{a} f(x) = A$. Fordítva: ha egyetlen (x_n) $(x_n \to a, x_n \neq a)$ sorozat esetén az $(f(x_n))$ sorozatnak nincs határértéke, akkor a függvénynek sincs határértéke, vagy ha az értelmezési tartomány elemeiből képezett két megfelelő sorozat esetén a függvényértékek sorozatának más a határértéke, akkor a függvénynek nincs határértéke. Bevezető példánkban f határértéke a 0-ban $\frac{1}{3}$.

Bemutatunk még néhány példát.

4.2. példa. Határozzuk meg az $f: f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ függvény határértékét a 3 helyen.

A 3 nem eleme, de környezete része az értelmezési tartománynak, így képezhetünk olyan sorozatot, amelynek határértéke 3. A függvény értékét felírhatjuk az alábbi módon:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = x+3, \qquad x \neq 3.$$

Legyen $x_n \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$ és $\lim x_n = 3$. Ekkor a függvényértékek sorozata

$$(f(x_n)) = (x_n + 3)$$

konvergens, és

$$\lim f(x_n) = \lim (x_n + 3) = \lim x_n + 3 = 6,$$

tehát a függvény határértéke az $x = 3$ helyen 6, azaz

$$\lim_{3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

4.3. példa. Létezik-e, és ha igen, mennyi $\lim\limits_{2} x^2$?

Legyen (x_n) tetszés szerinti olyan számsorozat, amelynek határértéke 2:

$$\lim x_n = 2.$$

Ekkor a függvényértékek sorozata $(x_n^2) = (x_n)(x_n)$. Ennek határértéke a konvergens sorozatok szorzatának határértékére vonatkozó 3.6. tétel alapján:

$$\lim x_n^2 = \lim x_n \cdot \lim x_n = 4,$$

tehát a függvény határértéke az $x = 2$ helyen 4:

$$\lim_{2} x^2 = 4.$$

4.4 példa. Az $f : f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ függvénynek a 0 helyen nincs határértéke.

Vegyünk ugyanis egy 0 határértékű sorozatot az értelmezési tartomány elemeiből, pl.: $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$. A függvényértékek sorozata: $(f(x_n)) = (n^2)$. Ez a sorozat nem korlátos, így divergens, tehát a függvénynek sincs határértéke.

4.5. példa. Legyen

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Keressük a függvény határértékét a 0 pontban.

Legyen az értelmezési tartomány elemeiből képezett 0 határértékű sorozat:

$$(x_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Ekkor a függvényértékek sorozata

$$(\operatorname{sgn}(x_n)) = ((-1)^n),$$

azaz minden páros indexű tagja 1, minden páratlan indexű tagja pedig -1. A függvényértékek sorozata nem konvergens, tehát a függvénynek nincs határértéke a 0 pontban.

Létezik azonban jobb oldali és bal oldali határértéke.

Legyen (x_n) tetszőleges sorozat, amelynek tagjai pozitívak és határértéke 0. Ekkor a függvényértékek sorozatának minden tagja 1, így a jobb oldali határérték:

$$\lim_{0+0} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

Ha pedig a sorozat tagjai negatívak és határértéke 0, akkor a függvényértékek sorozatának minden tagja, így határértéke is -1, tehát a bal oldali határérték -1:

$$\lim_{0-0} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

4.6. példa: Az $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ függvénynek a 0 helyen sem jobb oldali, sem bal oldali határértéke nincs.

Először igazoljuk, hogy nincs jobb oldali határértéke.

Fölveszünk két olyan sorozatot, amelynek minden tagja pozitív és a határértéke 0. Az első sorozat legyen

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right).$$

A függvényértékek sorozata:

$$\left(\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) = \left(\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (1).$$

A függvényértékek sorozatának határértéke: 1.

A másik sorozat legyen

$$(b_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}\right).$$

A függvényértékek sorozata:

$$\left(\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)\right) = (\sin 2n\pi) = (0).$$

A függvényértékek sorozatának határértéke: 0.

A függvényértékek sorozatának határértéke az egyik esetben 1, a másik esetben 0. Nem teljesül az az előírás, hogy minden 0-hoz tartó pozitív számokból álló számsorozat esetén a függvényértékek sorozatának ugyanaz a határértéke, tehát a függvénynek nincs jobb oldali határértéke.

Hasonló módon lehet belátni, hogy a függvénynek bal oldali határértéke sincs a 0 pontban, így természetesen határértéke sem lehet ott.

Az előzőekben a függvény határértékét sorozatok határértékére vezettük vissza. Így a sorozatok határértékére vonatkozó tételek átfogalmazhatók a függvények határértékére. Itt is áll, hogy a határérték képzésének és bizonyos műveletek elvégzésének sorrendje fölcserélhető.

3.1. TÉTEL. a) *Legyen f és g két függvény, és létezzék f-nek és g-nek határértéke az „a" pontban. Ekkor a két függvény összegének és szorzatának is létezik a határértéke, és fennállnak a*

$$\lim_{a} \left(f(x)+g(x)\right) = \lim_{a} f(x)+\lim_{a} g(x)$$

$$\lim_{a} \left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{a} f(x)\cdot\lim_{a} g(x)$$

összefüggések.

Ha a fenti feltételen kívül igaz még, hogy $\lim_{a} g(x) \neq 0$, *akkor az f és g függvény hányadosának is létezik határértéke, és fennáll a*

$$\lim_{a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{a} f(x)}{\lim_{a} g(x)}$$

egyenlőség.

b) *Legyen f és g két függvény, és létezzék g-nek határértéke az a pontban:*

$$\lim_{a} g(x) = B,$$

de legyen a-nak olyan $K(a)\subset D_g$ környezete, hogy $g(x)\neq B$, ha $x\in K(a)\setminus\{a\}$.

Tegyük fel továbbá, hogy létezik f-nek határértéke a B pontban. Ekkor az $f\circ g$ összetett függvénynek is van határértéke az a pontban, és

$$\lim_{a} f\left(g(x)\right) = \lim_{B} f(x).$$

Bizonyítás:

A tétel a) része a hányados kivételével egyszerű következménye a sorozatokra vonatkozó 3.6. tételnek. A hányadosra vonatkozó részt nem bizonyítjuk.

A tétel b) részét a következőképpen láthatjuk be:

Legyen (x_n) tetszés szerinti olyan számsorozat, amelyre

$$\lim x_n = a, \qquad x_n \in D_g \setminus \{a\}.$$

Mivel a g függvény határértéke az a pontban B, ezért

$$\lim g(x_n) = B.$$

Tudjuk továbbá, hogy az f függvénynek létezik határértéke a B pontban. Ezért

$$\lim_{a} f(g(x)) = \lim_{x_n \to a} f(g(x_n)) = \lim_{B} f(x).$$

A 4.3. példában láttuk, hogy a függvény határértéke megegyezett a függvény helyettesítési értékével az adott pontban. Ez nem véletlen egyezés. Több olyan függvény is van, amelynek határértéke értelmezési tartományának minden pontjában egyenlő az illető pontbeli helyettesítési értékével. Erre vonatkozik a következő tétel.

4.2. TÉTEL. *Az*

$$\begin{array}{ll} x \mapsto c & \quad (c \in \mathbf{R},\ \textit{konstans}) \\ x \mapsto x & \\ x \mapsto \sin x & \\ x \mapsto e^x & \\ x \mapsto \ln x & \end{array}$$

függvények értelmezési tartományának minden a pontjában létezik határértéke, és megegyezik az a helyen felvett függvényértékkel.

Bizonyítás:

Állításunkat az első négy függvényre bizonyítjuk.

a) Legyen $f_1 : f_1(x) = c$ $(x \in \mathbf{R})$, ahol $c \in \mathbf{R}$ rögzített konstans. A $\lim\limits_{a} f_1(x)$ meghatározásához kiindulunk egy olyan tetszőleges (x_n) számsorozatból, amelynek határértéke a: $\lim x_n = a$. Ekkor a függvényértékek sorozatának, $(f_1(x_n))$-nek minden tagja c, ezért határértéke is c, tehát

$$\lim_{a} f_1(x) = c,$$

azaz megegyezik a függvényértékkel. Ez az összefüggés igaz az értelmezési tartomány minden a pontjára.

b) Legyen $f_2 : f_2(x) = x, x \in \mathbf{R}$. Az a tetszőleges pontban keressük a függvény határértékét. Fölveszünk egy tetszés szerinti (x_n) számsorozatot, amelynek határértéke a: $\lim x_n = a$. Ekkor a függvényértékek sorozata, $(f_2(x_n)) = (x_n)$, tehát ugyanazt a sorozatot kapjuk, és így a határértéke a:

$$\lim_a f_2(x) = a.$$

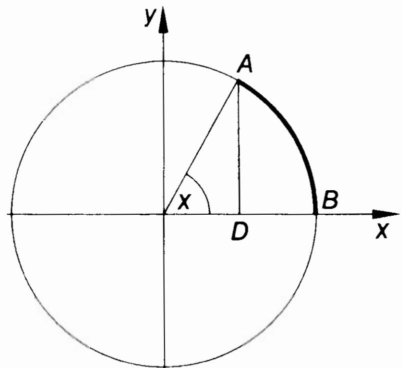
Megkaptuk, hogy a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel.

c) A *4.1. ábráról* azonnal leolvasható, hogy minden $x > 0$-ra

$$AD < \widehat{AB},$$

vagyis ha az x szöget radiánban mérjük ($\widehat{AB} = x$), akkor $\sin x < x$. Ennek alapján már könnyű belátni, hogy minden valós x-re

$$|\sin x| \leqq |x|. \qquad (4.1.)$$



4.1. ábra

Legyen a egy valós szám és (x_n) tetszőleges a-hoz tartó sorozat.

Felhasználva a

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

trigonometrikus összefüggést és (4.1.) egyenlőtlenséget,

$$|\sin x_n - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x_n - a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + a}{2} \right| < 2 \frac{|x_n - a|}{2} \left| \cos \frac{x_n + a}{2} \right|.$$

Mivel

$$\left| \cos \frac{x_n + a}{2} \right| \leqq 1,$$

$$|\sin x_n - \sin a| < |x_n - a|.$$

Így, ha $x_n \to a$, vagyis $(x_n - a) \to 0$, akkor

$$(\sin x_n - \sin a) \to 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy minden $x_n \to a$ sorozat esetén

$$\lim \sin x_n = \sin a,$$

azaz

$$\lim_a \sin x = \sin a.$$

d) A Bernoulli-egyenlőtlenség (2.5. tétel) alapján bármely $x > -1$-re

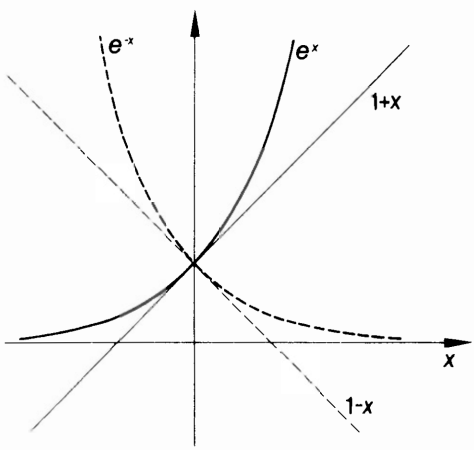
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqq 1+x, \qquad n \in \mathbf{N}^+. \tag{4.2.}$$

Mivel a 3.4. tétel szerint

$$\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

ezért (4.2.) miatt

$$e^x \geqq 1+x, \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{4.3.}$$



4.2. ábra

[Az $x \leqq -1$ esetén (4.3.) bal oldalán pozitív, jobb oldalán pedig nulla vagy negatív szám áll – így nyilvánvalóan igaz az egyenlőtlenség.] A (4.3.) geometriailag azt jelenti, hogy az exp függvény grafikonja az $y = 1+x$ egyenes felett van. Az $x=0$ abszcisszájú pontjuk közös *(4.2. ábra)*.

Írjunk (4.3.)-ban x helyett $-x$-et (tükrözzük az ábrát az y tengelyre), az egyenlőtlenség érvényes marad:

$$e^{-x} \geqq 1-x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Ebből és (4.3.)-ból adódik, hogy

$$1+x \leqq e^x \leqq \frac{1}{1-x}, \qquad x<1. \tag{4.4.}$$

Legyen először $a=0$ és (x_n) 0-hoz tartó tetszés szerinti sorozat. Elég nagy n-re $x_n<1$, így (4.4.) alapján

$$1+x_n \leqq e^{x_n} \leqq \frac{1}{1-x_n}.$$

Ha $x_n \to 0$, akkor

$$(1+x_n) \to 1 \qquad \text{és} \qquad \frac{1}{1-x_n} \to 1,$$

tehát $e^{x_n} \to 1$, azaz

$$\lim_0 e^x = 1. \tag{4.5.}$$

Ha a tetszés szerinti valós szám és (x_n) a-hoz konvergáló sorozat, akkor $(x_n - a) \to 0$, és így (4.5.) miatt

$$\lim (e^{x_n} - e^a) = e^a \lim (e^{x_n - a} - 1) = e^a \cdot 0 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy minden a-hoz tartó (x_n) sorozatra

$$\lim e^{x_n} = e^a,$$

vagy ami ugyanaz,

$$\lim_a e^x = e^a.$$

Ebből a tételből – felhasználva a 4.1. tételt – nagyon fontos, a gyakorlatban sokszor felhasznált állítás következik.

Következmény: a polinomok,
a racionális törtfüggvények,
a cos $\left[\text{mivel } \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$, a tg, a ctg függvények,
az $x \mapsto a^x$ és
az $x \mapsto \log_a x$ függvények
esetében az értelmezési tartomány minden pontjában létezik a függvénynek határértéke, és ez megegyezik az ezen a helyen felvett függvényértékkel.

Megjegyzés: Ha a felsorolt függvényeket leszűkítjük úgy, hogy értelmezési tartományukból kivonunk véges sok pontot, akkor egy ilyen pontban is a határérték az eredeti függvény helyettesítési értéke abban a pontban.

4.7. példa.
a) $\lim\limits_2 (3x+6) = 12$, mivel az $x \mapsto 3x+6$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény polinom, azért a 2 helyen határértéke megegyezik a függvényértékkel, és $3 \cdot 2 + 6 = 12$.
b) $\lim\limits_3 (x^2+3x+9) = 27$, mivel az $x \mapsto x^2+3x+9$ függvény helyettesítési értéke a 3 helyen 27-tel egyenlő.
c) $\lim\limits_a (x^2+ax+a^2) = 3a^2$ bármely $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén.

4.8. példa. Az $x \mapsto \sqrt{x}$ függvénynek az értelmezési tartománya minden a pontjában létezik határértéke, és ez megegyezik az a helyen felvett függvényértékkel. (A 0 helyen jobb oldali határértéke van.)

Ennek belátásához felveszünk egy tetszés szerinti, de pozitív tagú számsorozatot, amelynek határértéke a: $\lim x_n = a$.

Ha $a = 0$, akkor $x_n \to 0$, és így minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan n_0 küszöbszám, amelyre

$$0 < x_n < \varepsilon^2 \qquad (n > n_0),$$

vagyis
$$\sqrt{x_n} < \varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Ez pedig azt jelenti, hogy

$$\lim_{x_n \to 0+0} \sqrt{x_n} = 0,$$

és nullában ennyi a függvényérték is (a 0-ban nyilvánvalóan csak jobb oldali határértékről beszélhetünk).

Ha $a > 0$, akkor van olyan $k > 0$ szám, hogy

$$x_n > k, \qquad n > n_0.$$

azaz

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{a} > \sqrt{k} + \sqrt{a}.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right)$$

sorozat korlátos.

Mivel

$$(\sqrt{x_n} - \sqrt{a}) = \left([x_n - a] \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \right),$$

és a jobb oldalon egy nullához tartó és egy korlátos sorozat szorzata van, a 3.5. tétel szerint a szorzat nullához tart, így

$$\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{a}.$$

A függvény határértékének definíciója alapján ebből következik, hogy

$$\lim_{a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Megjegyezzük, hogy nemcsak a négyzetgyökfüggvényre, hanem általában minden $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$ alakú függvényre bármely $n \in \mathbf{N}^+$ esetén igaz, hogy az értelmezési tartomány bármely belső pontjában a függvény határértéke megegyezik a függvényértékkel.

4.9. példa. *a)* $\lim\limits_{1} \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1} = \dfrac{1}{2}$, mivel az $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$ $(x \in \mathbf{R}^+)$ függvény helyettesítési értéke az 1 helyen $\dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{a} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ bármely pozitív a szám esetén.

A most következő példákban olyan pontban keressük a függvény határértékét, amely nem eleme az értelmezési tartományának.

4.10. példa. Legyen

$$f\colon\ f(x)=\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12},\qquad x\in\mathbf{R}\setminus\{3,4\}.$$

A számlálót és nevezőt szorzattá alakíthatjuk:

$$\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}=\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x-3)}=\frac{x+1}{x-3},\qquad x\in\mathbf{R}\setminus\{3,4\}$$

(azaz a 4 az f-nek hézagpontja).

Legyen (x_n) olyan tetszőleges számsorozat, amelynek tagjai között sem a 3, sem a 4 nem fordul elő, és

$$\lim x_n=4.$$

Ekkor

$$\lim f(x_n)=\lim\frac{(x_n-4)(x_n+1)}{(x_n-4)(x_n-3)}=\lim\frac{x_n+1}{x_n-3}=5.$$

Azaz

$$\lim_{4} f(x)=5.$$

A fenti eredményt úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$g\colon\ g(x)=\frac{x+1}{x-3}\qquad (x\neq 3)$$

függvénynek a határértéke a 4 pontban a függvényérték:

$$\lim_{4} g(x)=g(4)=5.$$

De a 4 pont kivételével mindenütt

$$f(x)=g(x),$$

ezért f határértéke a 4-ben szintén 5.

Ezt a módszert általánosíthatjuk minden racionális törtfüggvényre, ha a határértéket az a hézagpontban akarjuk meghatározni [ilyenkor mindig „egyszerűsíthetünk" $(x-a)$-val].

Következő tételünk két nevezetes, többször is felhasznált állítást mond ki.

4.3. TÉTEL. a) $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

b) $\lim\limits_{0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Bizonyítás:

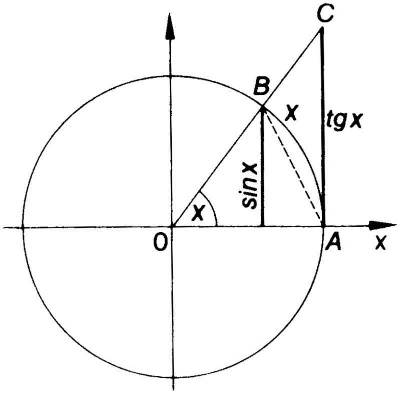
Először a tétel a) részét bizonyítjuk.

Mivel

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x},$$

azért elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



A *4.3. ábrán* látható, hogy minden $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén az OAB háromszög része az OAB körcikknek, az OAB körcikk pedig része az OAC háromszögnek.

4.3. ábra

Az OAB háromszög területe: $\dfrac{\sin x}{2}$,

az OAB körcikk területe: $\dfrac{x}{2}$,

az OAC háromszög területe: $\dfrac{\operatorname{tg} x}{2}$.

Így

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

azaz

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Mivel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ esetén $\sin x > 0$, $\sin x$-szel oszthatjuk az egyenlőtlenséget, és azt kapjuk, hogy

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

A reciprokokat véve, az adódik, hogy

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Ezért, ha (x_n) egy pozitív tagú, nullához tartó sorozat, akkor

$$1 > \frac{\sin x_n}{x_n} > \cos x_n, \qquad x_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{4.6.}$$

Tudjuk, hogy a cos függvény határértéke a 0 helyen megegyezik a 0 helyen fölvett függvényértékkel (4.2. tétel következménye), így

$$\lim_{0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Ezért (4.6.) és a 3.7. tétel miatt

$$\lim \frac{\sin x_n}{x_n} = 1,$$

azaz

$$\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A tétel b) részének bizonyításához a 4.2. tétel d) részének bizonyításában felírt (4.4.) egyenlőtlenségből indulunk ki:

$$1 + x \leqq e^x \leqq \frac{1}{1-x}, \qquad \text{ha} \qquad x < 1.$$

1-et kivonunk az egyenlőtlenségből, majd x-szel osztunk. Pozitív x esetén azt kapjuk, hogy

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-x},$$

negatív x esetén pedig azt kapjuk, hogy

$$1 > \frac{e^x - 1}{x} > \frac{1}{1-x}.$$

Mivel

$$\lim_{0} \frac{1}{1-x} = 1,$$

a fenti egyenlőtlenségekből a 3.7. tétel alapján azonnal adódik, hogy

$$\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

A most bizonyított tételt felhasználjuk a következő feladatok megoldásához.

4.11. példa. Legyen

$$f\colon f(x) = \frac{e^{x-a}-1}{x-a} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{a\}),$$

ahol a tetszőleges valós szám. Létezik-e, és mivel egyenlő $\lim\limits_{a} f(x)$?

Kiválasztunk tetszőlegesen egy (x_n) számsorozatot, amelynek határértéke a:

$$\lim x_n = a.$$

Tudjuk, hogy az f függvény a

$$g\colon g(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

és a

$$h\colon h(x) = x - a \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{a\})$$

függvényekből képezett összetett függvény:

$$f = g \circ h.$$

Mivel $\lim h(x_n) = \lim (x_n - a) = 0$, azért a 4.3. tétel b) része és az összetett függvény határértékére vonatkozó tétel [4.1. tétel b) része] alapján

$$\lim_{a} f(x) = \lim_{a} g(h(x)) = \lim_{0} g(x) = 1,$$

tehát

$$\lim_{a} \frac{e^{x-a}-1}{x-a} = 1.$$

Felhasználva a 4.3. tételt, hasonlóan látható be, hogy

$$\lim_{a} \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = 1.$$

4.12. példa. $\lim\limits_{0} \dfrac{\sin^2 3x}{x^3-3x^2} = ?$

Felhasználva a 4.3. tétel a) részét és a határértékre vonatkozó tételeket:

$$\lim_{0} \frac{\sin^2 3x}{x^3-3x^2} = \lim_{0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(x-3)} = \lim_{0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2 \cdot \frac{9}{x-3} = 1 \cdot \frac{9}{-3} = -3.$$

A következő tétel az a pontbeli határérték és az a környezetében lévő függvényértékek kapcsolatát mutatja be.

4.4. TÉTEL. *Legyen f egy függvény, amelynek a-ban létezik a határértéke.*

Ha $\lim\limits_{a} f(x) > c$, *ahol* $c \in \mathbf{R}$,

akkor a-nak van olyan K környezete, hogy

$$f(x) > c, \quad ha \quad x \in K \cap D_f \setminus \{a\}.$$

Fordítva: abból a tényből, hogy

$$f(x) > c$$

az a bizonyos környezetében, csak az következik, hogy

$$\lim_{a} f(x) \geqq c.$$

A tételt nem bizonyítjuk.

4.2 Függvények határértéke a végtelenben

A 3.3. fejezetben értelmeztük a sorozat, egy speciális függvény határértékének fogalmát. Most azt vizsgáljuk, hogy általában egy függvény milyen tulajdonságú, ha az x értéke „nagyon nagy”. Így jutunk el a függvény plusz végtelenben vett határértékének fogalmához.

DEFINÍCIÓ. *Legyen f olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya felülről nem korlátos halmaz. Ha minden olyan (x_n) számsorozat esetén, amelyre*

$$\lim x_n = +\infty \quad (x_n \in D_f),$$

igaz, hogy

$$\lim f(x_n) = A,$$

akkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik határértéke a plusz végtelenben és ez A-val egyenlő.
Jele: $\lim\limits_{+\infty} f(x) = A.$

Hasonlóan értelmezhető a függvény határértéke a mínusz végtelenben is. ennek megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

A konvergens számsorozatokra megismert tételek (3.1.–3.3., 3.5.–3.7. tétel) – megfelelően átfogalmazva – érvényesek a végtelenben határértékkel rendelkező függvényekre is.

4.13. példa. Az $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ függvény határértéke a plusz végtelenben 0. Ennek belátásához felveszünk tetszőlegesen egy (x_n) számsorozatot, amelyre

$$\lim x_n = +\infty.$$

Ekkor a függvényértékek sorozata – mint azt könnyen beláthatjuk –

$$\frac{1}{x_n} \to 0.$$

4.14. példa. Legyen

$$f\colon f(x) = \frac{6x}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Vizsgáljuk meg, hogy plusz végtelenben és mínusz végtelenben van-e a függvénynek határértéke.

Ugyanúgy járunk el, mint a sorozatok esetében, ha az a_n az n-nek racionális függvénye.

$$\lim_{+\infty} \frac{6x}{1+x^2} = \lim_{+\infty} \frac{\frac{6}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\lim_{-\infty} f(x) = 0.$$

4.15. példa. A sin függvénynek a plusz végtelenben nincs határértéke. Ezt úgy igazoljuk, hogy fölveszünk két különböző sorozatot, amelyeknek plusz végtelen a határértéke s a függvényértékek sorozatának nem ugyanaz a határértéke.

Legyen az első sorozat

$$(a_n) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Ekkor a függvényértékek sorozata

$$(\sin a_n) = \left(\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (1);$$

ennek a határértéke 1.

A másik sorozat legyen

$$(b_n) = (n\pi).$$

Ekkor a függvényértékek sorozata

$$(\sin b_n) = (\sin n\pi) = (0);$$

ennek a határértéke 0. Tehát a függvénynek nincs határértéke a plusz végtelenben, és hasonlóan belátható, hogy a mínusz végtelenben sincs határértéke.

Megjegyezzük, hogy kiindulhattunk volna olyan sorozatból is, amelyhez tartozó függvényérték-sorozatnak nincs határértéke.

4.16. példa. Az

$$f\colon f(x) = \frac{\sin x}{x} \qquad (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$$

függvény határértéke a plusz végtelenben is, a mínusz végtelenben is 0.

Ugyanis

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sin x.$$

A vizsgált függvényt felbontottuk két függvény szorzatára. Az első tényező $\left(x \to \frac{1}{x}\right)$ határértéke 0, a második tényező ($x \mapsto \sin x$) pedig korlátos, tehát a sorozatokra vonatkozó 3.5. tételt alkalmazva e függvényre, azt kapjuk, hogy a határértéke 0.

4.3 Tágabb értelemben vett határérték

Amikor azt mondjuk, hogy egy függvénynek van határértéke, ezen mindig azt értjük, hogy a határérték valós szám. Szerepelt a sorozatoknál a tágabb értelemben vett határérték is. Ennek mintájára bevezetjük a függvények tágabb értelemben vett határértékét: ez lehet mínusz végtelen vagy plusz végtelen. Szeretnénk hangsúlyozni, hogy itt formális dologról van szó: a ∞-t nem tekintjük matematikai objektumnak, azzal, hogy azt mondjuk: „a függvény határértéke plusz végtelen", csak a függvény egy tulajdonságát fejezzük ki.

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény a valamely környezetében (esetleg a-t kivéve értelmezve. Akkor mondjuk, hogy f-nek az a helyen a határértéke plusz végtelen, ha minden olyan (x_n) sorozat esetén, amelyre*

$$\lim x_n = a \qquad (x_n \in D_f \setminus \{a\}),$$

igaz, hogy

$$\lim f(x_n) = +\infty.$$

Jele: $\lim\limits_a f(x) = +\infty$.

A tágabb értelemben vett határérték lehet egy pontban, lehet bal oldali vagy jobb oldali határérték, lehet $+\infty$-ben vagy $-\infty$-ben vett határérték, és minden tágabb értelemben vett határérték lehet $+\infty$ vagy $-\infty$. Így 10-féle tágabb értelemben vett határérték létezik:

$$\lim_{a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{a} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{a+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{a+0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{a-0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{a-0} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{+\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{-\infty} f(x) = -\infty.$$

Az előzőekben megadtuk az első tágabb értelemben vett határérték definícióját. A többi esetet a fentiekhez hasonló módon értelmezzük. Ezekre külön nem térünk ki.

Ha két függvény közül az egyiknek vagy mindkettőnek csak tágabb értelemben vett határértéke van, akkor bizonyos esetekben könnyen meg tudjuk határozni a két függvény összegének, szorzatának, hányadosának határértékét. Hasonló tételek érvényesek, mint amilyenekkel a sorozatoknál megismerkedtünk (3.5. fejezet).

4.17. példa. Az f: $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ függvénynek a 0 helyen a bal oldali határértéke mínusz végtelen.

Fölveszünk egy tetszés szerinti (x_n) sorozatot, amelyre fennáll, hogy

$$\lim x_n = 0, \qquad x_n < 0.$$

Ekkor a függvényértékek sorozata

$$(f(x_n)) = \left(\frac{1}{x_n}\right).$$

Annak bizonyításához, hogy a függvényértékek sorozatának határértéke mínusz végtelen, megadunk egy tetszőleges $P < 0$ számot, és megmutatjuk, hogy valamely n_0 küszöbszámtól kezdve $f(x_n) < P$.

Mivel a negatív tagú (x_n) sorozat feltevésünk szerint nullához tart, valamely n_0-tól kezdve

$$\frac{1}{P} < x_n < 0.$$

Vegyük mindkét oldal reciprokát:

$$\frac{1}{x_n} < P,$$

vagyis

$$f(x_n) < P, \qquad \text{ha} \qquad n > n_0.$$

Ezzel beláttuk, hogy

$$\lim_{0-0} f(x) = -\infty.$$

Hasonló módon lehet belátni, hogy a jobb oldali határérték plusz végtelen:

$$\lim_{0+0} f(x) = +\infty.$$

Így csak a tágabb értelemben vett bal oldali, illetve jobb oldali határérték létezik, de ezek nem azonosak, tehát f-nek a nulla helyen nincs határértéke tágabb értelemben sem.

4.18. példa. Az $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ függvény tágabb értelemben vett határértéke a 0 helyen létezik és plusz végtelen.

Legyen (x_n) tetszés szerinti sorozat, amelyre igaz, hogy

$$\lim x_n = 0, \qquad x_n \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Ekkor tetszés szerinti $P>0$ számhoz van olyan n_0 küszöbszám, hogy $n>n_0$ esetén

$$|x_n| < \frac{1}{\sqrt{P}}$$

egyenlőtlenség fennálljon.
Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\frac{1}{x_n^2} > P$$

egyenlőtlenség érvényes minden $n>n_0$ esetén, vagyis

$$\lim \frac{1}{x_n^2} = +\infty.$$

Megjegyzés: Általában is igaz, hogy $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ függvény határértéke a 0 helyen páros n esetén $+\infty$, páratlan n esetén a bal oldali határérték $-\infty$, a jobb oldali $+\infty$.

4.19. példa. Legyen f: $f(x) = \dfrac{2x^3-4x+7}{x^2+5}$, $x \in \mathbf{R}$. Keressük a függvény határértékét a mínusz végtelenben.

Kiválasztunk tetszőlegesen egy (x_n) sorozatot, amelynek határértéke mínusz végtelen és $x_n \neq 0$. Ekkor a függvényértékek sorozatának n-edik tagja:

$$f(x_n) = \frac{2x_n^3-4x_n+7}{x_n^2+5} = \frac{x_n^3\left(2-\dfrac{4}{x_n^2}+\dfrac{7}{x_n^3}\right)}{x_n^2\left(1+\dfrac{5}{x_n^2}\right)} = x_n\frac{2-\dfrac{4}{x_n^2}+\dfrac{7}{x_n^3}}{1+\dfrac{5}{x_n^2}}.$$

A szorzat első tényezőjének határértéke mínusz végtelen, a második tényező határértéke 2, így a sorozat határértéke, tehát a függvény határértéke is mínusz végtelen:

$$\lim_{-\infty} f(x) = -\infty.$$

Megjegyzés: Ha f racionális törtfüggvény, akkor a $+\infty$-ben, illetve a $-\infty$-ben vett határértékére a 3.10. tétellel analóg állítás igaz.

4.20. példa. Legyen f: $f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

Keressük a -2 pontban a függvény határértékét.
Mivel

$$f(x) = (5x)\frac{1}{(x+2)^2},$$

az első tényező határértéke a -2 helyen -10, a második tényező pedig a 4.18. példában szereplő függvény transzformáltja, azaz úgy viselkedik a -2 helyen, mint $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ a 0 helyen, vagyis határértéke $+\infty$. Így f határértéke a -2 pontban $-\infty$ lesz.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy

$$\lim_{\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \qquad a > 1, \ \alpha \in \mathbf{R}, \tag{4.7.}$$

$$\lim_{\infty} x^\alpha = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ 0, & \alpha < 0. \end{cases} \tag{4.8.}$$

4.4 Folytonosság

Amikor vizsgáltuk néhány függvény határértékét, azt tapasztaltuk, hogy több olyan függvény is van, amelynek határértéke valamely helyen megegyezik a függvény helyettesítési értékével.

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt értelmezési tartományának valamely a pontjában **folytonosnak** nevezzük, ha az a pontban létezik a határértéke, és ez a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, azaz*

$$\lim_{a} f(x) = f(a).$$

*Ha csak a bal oldali határérték azonos a függvényértékkel, akkor **balról,** ha csak a jobb oldali határérték azonos, akkor **jobbról folytonosnak** nevezzük a függvényt.*

Olyan pontban, amely nem eleme a függvény értelmezési tartományának, nem is vethető fel a folytonosság kérdése. Így pl. az $x \mapsto \frac{1}{x}$ ($x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$) függvényről nem mondhatjuk, hogy a 0 pontban folytonos vagy nem folytonos: a folytonosság kérdésének ebben a pontban nincs értelme. Előfordulhat, hogy egy függvénynek az értelmezési tartomány egyik pontjában nincs határértéke, vagy van ugyan határértéke, de nem egyezik meg a függvényértékkel. Ekkor azt mondjuk, hogy a függvény nem folytonos abban a pontban.

A 4.5. példában láttuk, hogy a sgn függvénynek nincs határértéke a 0 helyen, tehát itt nem is folytonos.

4.21. példa. Legyen

$$f\colon\ f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|.$$

Folytonos-e ez a függvény a 0 pontban?

A függvény helyettesítési értéke a 0 pontban 0. Határértéke (mivel a 0 pont kivételével mindenütt 1 a függvényérték) a 0 helyen 1. Így a határérték nem egyezik meg a helyettesítési értékkel, tehát a függvény nem folytonos a 0 pontban.

4.22. példa. Legyen

$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}, \\ 4, & \text{ha} \quad x = 3. \end{cases}$$

Folytonos-e a függvény a 3 pontban?

A 3 helyen fölvett függvényérték 4:

$$f(3) = 4.$$

A függvény határértéke a 3 helyen (4.2. példa) 6:

$$\lim_{3} f(x) = 6.$$

A függvényérték nem egyenlő a határértékkel, tehát a függvény nem folytonos.

4.23. példa. Az $f\colon\ f(x) = [x]$ (egészrészfüggvény) az 1 pontban nem folytonos.

A függvény helyettesítési értéke 1, határértéke azonban nincs. Vegyünk fel egy olyan sorozatot, amelynek határértéke 1, de minden tagja 1-nél kisebb:

$$\lim x_n = 1, \qquad x_n < 1.$$

Bizonyos n_0 indextől kezdve a függvényértékek sorozatának minden tagja 0, így a függvény bal oldali határértéke is 0, tehát

$$\lim_{1-0} f(x) = 0.$$

Legyen egy másik sorozatnak a határértéke 1, de minden tagja 1-nél nagyobb:

$$\lim y_n = 1, \qquad y_n > 1.$$

A függvényértékek sorozatának minden tagja bizonyos indextől kezdve 1, így a függvény jobb oldali határértéke is 1, tehát

$$\lim_{1+0} f(x) = 1.$$

Látjuk, hogy a függvénynek nincs határértéke az 1 pontban. A jobb oldali határérték megegyezik a helyettesítési értékkel, tehát a függvény az 1 pontban jobbról folytonos.

Belátható, hogy egy függvény akkor folytonos egy a pontban, ha ott jobbról is és balról is folytonos.

DEFINÍCIÓ. *Ha az f függvény az $a \in D_f$ pontban nem folytonos, akkor az a pontot f* ***szakadási helyének*** *vagy* ***szakadási pontjának*** *nevezzük.*

A 4.21. példában szereplő függvénynek szakadási pontja a 0 pont. A 4.22. példában szereplő függvénynek egyetlen szakadási pontja van: a 3 pont. A 4.23. példában szereplő függvénynek szakadási helye az 1 pont, de szakadási helye értelmezési tartományának minden $a \in \mathbf{Z}$ pontja.

Bizonyítás nélkül megjegyezzük, hogy a folytonos függvényeknek a következő tulajdonsága van. Ha f értelmezési tartományának egy belső pontjában folytonos és a függvény grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben szemléltetjük *(4.4. ábra)*, akkor a folytonosság a következőt jelenti: tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén vesszük az

$$y = f(a) + \varepsilon$$

és az

$$y = f(a) - \varepsilon$$

egyenletű egyenesek által határolt sávot. Ehhez található olyan $\delta > 0$ szám, hogy képezve az

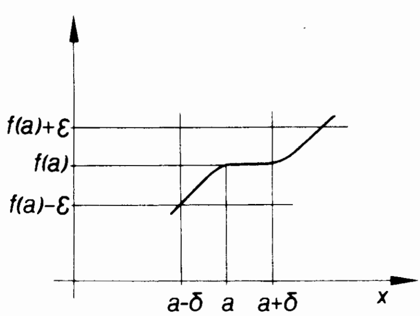
$$x = a + \delta$$

és az

$$x = a - \delta$$

egyenletű egyenesek által határolt sávot, a két sáv közös része tartalmazza a grafikonnak azt a részét, amelyre

$$a - \delta < x < a + \delta.$$



4.4. ábra

Ha két függvény folytonos valamilyen a pontban, akkor bizonyos műveletekkel újabb folytonos függvényeket állíthatunk elő belőlük. Erre vonatkozik a következő tétel.

4.5. TÉTEL. a) *Ha f és g folytonos az a pontban, akkor az*

$$f+g,$$
$$fg,$$
$$\frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0)$$

is folytonos az a pontban.

b) *Ha a g függvény folytonos értelmezési tartományának valamely a pontjában, és az f függvény folytonos a $g(a)$ pontban, akkor az*

$$f \circ g$$

összetett függvény is folytonos az a pontban.

Tételünk egyszerű következménye a határértékre vonatkozó 4.1. tételnek. Láttuk, hogy pl. két függvény összegének határértéke megegyezik a határértékek összegével. Folytonosság esetén a határértékek összege egyenlő a helyettesítési értékek összegével, ami pedig éppen a két függvény összegének helyettesítési értéke. Ez azt jelenti, hogy a két függvény összege is folytonos a vizsgált pontban.

Az előzőekben értelmeztük egy függvény folytonosságát értelmezési tartományának valamely pontjában. Több olyan függvény is létezik, amely értelmezési tartománya minden pontjában folytonos.

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt* ***folytonos függvénynek*** *nevezzük, ha értelmezési tartományának minden pontjában folytonos.*

Találkoztunk olyan függvénnyel is, amely ugyan nem folytonos, de létezik olyan halmaz, amelyre való leszűkítése folytonos függvény $\left(\text{pl.: } x \mapsto [x],\ x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]\right)$.

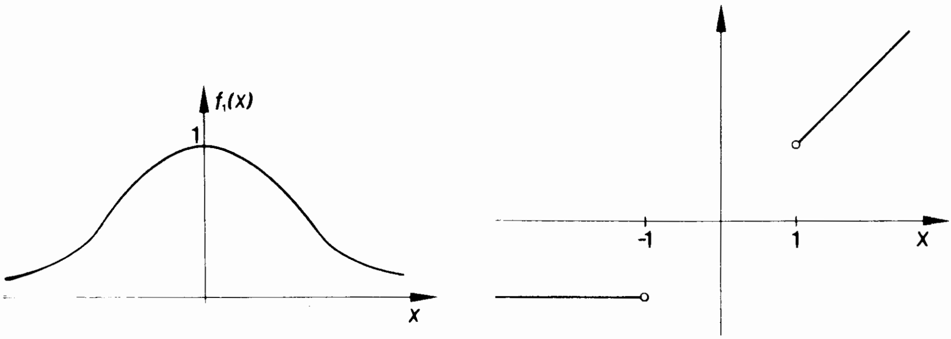
DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***folytonos*** *a $H \subset D_f$* ***halmazon,*** *ha f-nek a H halmazra való leszűkítése folytonos függvény.*

4.24. példa. Vizsgáljuk meg, hogy folytonosak-e az alábbi függvények:

$$f_1\colon\ f_1(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

$$f_2\colon\ f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x < -1, \\ x, & \text{ha} \quad x > 1. \end{cases}$$

Az f_1 két folytonos függvény ($x \mapsto -x^2$ és $x \mapsto e^x$) összetételével keletkezett összetett függvény, tehát folytonos. Az f_2 is folytonos értelmezési tartományának minden pontjában *(4.5. ábra)*.



4.5. ábra

A 4.2. tételben láttuk, hogy bizonyos függvények ($x \mapsto c$, $x \mapsto x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$) értelmezési tartományának minden pontjában a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel. Úgy is fogalmazhatunk tehát, hogy a felsorolt függvények folytonos függvények. E tétel következménye, hogy a 4.5. tétel alapján a felsorolt függvényekből bizonyos műveletekkel képezett függvények is olyanok, hogy értelmezési tartományuk minden pontjában a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis folytonosak. Fontossága miatt újra megfogalmazzuk a tételt – természetesen a folytonosság fogalmát felhasználva.

4.6. TÉTEL. *A polinomok,*
a racionális törtfüggvények,
a trigonometriai függvények,
az exponenciális függvények,
a logaritmusfüggvények

folytonos függvények.

4.5 Többváltozós valós függvények folytonossága

A többváltozós valós függvények folytonosságát hasonló módon értelmezzük, mint az egyváltozós valós függvények folytonosságát. Csak a kétváltozós függvényekkel foglalkozunk, de megállapításaink (definíció, tétel) könnyen általánosíthatók kettőnél több változóra.

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f kétváltozós függvény az (a, b) valamely környezetében értelmezve. Az (a, b) pontban létzik az f határértéke, ha minden (x_n) és (y_n) sorozatpár esetén, amelyre*

$$\lim x_n = a \qquad \text{és} \qquad \lim y_n = b$$

$$\big((x_n, y_n) \in D_f, (x_n, y_n) \neq (a, b)\big),$$

létezik a $\lim f(x_n, y_n)$ határérték. Ha ez a határérték $f(a, b)$-vel egyenlő, akkor az f-et az (a, b)-ben folytonosnak mondjuk.

Hasonló tételek érvényesek a többváltozós valós függvényekre, mint az egyváltozós függvényekre: két folytonos függvény összege, szorzata, hányadosa (ha a nevező nem nulla) folytonos függvény.

Most foglalkozzunk a szintvonalak folytonosságával.

4.7. TÉTEL. *Ha az f kétváltozós függvény folytonos az értelmezési tartományának valamely (a, b) pontjában, akkor az*

$$f_1 \colon f_1(x) = f(x, b)$$

függvény folytonos az a pontban, az

$$f_2 \colon f_2(y) = f(a, y)$$

függvény folytonos a b pontban.

Ez másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy a folytonos függvény szintvonalai is folytonosak a megfelelő pontban.

Nem bizonyítjuk!

4.25. példa. Az $f\colon f(x, y) = x^2+3xy-2y^2, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$ kétváltozós függvény polinom, tehát folytonos. Értelmezési tartományának egy pontja: (4, 1).

Az

$$f_1 \colon f_1(x) = f(x, 1) = x^2+3x-2 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és az

$$f_2 \colon f_2(y) = f(4, y) = 16+12y-2y^2 \qquad (y \in \mathbf{R})$$

függvények is folytonosak.

4.6 Zérushely meghatározása intervallumfelezéssel

Függvények vizsgálatakor sokszor van szükség a függvény zérushelyeinek meghatározására. Ez azt jelenti, hogy keressük az értelmezési tartománynak azokat a pontjait, ahol a függvény értéke 0. Az f függvény zérushelyeit az

$$f(x)=0$$

egyenlet gyökei adják. Feladatunk tehát egy egyenlet megoldása.

Ha f elsőfokú vagy másodfokú polinom, akkor a megoldást felírhatjuk egy képlet segítségével. Bizonyos speciális exponenciális, logaritmikus és trigonometriai egyenletek megoldásával a középiskolában foglalkoztak. Megemlítjük, hogy ha f harmad- vagy negyedfokú polinom, akkor is van módszer – csak elég bonyolult – az egyenlet megoldására. Magasabb fokú egyenletek megoldása bizonyos speciális esetben visszavezethető másodfokú egyenlet megoldására. Azonban az ötödfokú vagy annál magasabb fokú egyenlet gyökei véges számú alapműveletet tartalmazó formulával nem adhatók meg. Ilyenkor közelítő eljárásra van szükség. A közelítő megoldással el lehet érni, hogy az egyenlet gyökeit egy adott hibakorlátnál kisebb hibával határozzuk meg, vagyis az ismeretlen gyök és az általunk meghatározott közelítő gyök közti eltérés kisebb legyen, mint egy tetszés szerinti $\varepsilon>0$ szám.

A közelítő eljárás első lépése a gyökelkülönítés, vagyis azoknak az intervallumoknak a megkeresése, amelyekben a gyökök találhatók. Folytonos függvény esetén Bolzano tétele ad lehetőséget olyan intervallum megkeresésére, amely biztosan tartalmaz zérushelyet.

4.8. TÉTEL. *Legyen az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon, továbbá $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelű, azaz $f(a)\cdot f(b)<0$. Ekkor van olyan $c\in\,]a, b[$, hogy*

$$f(c)=0.$$

(Bolzano tétele)

Másképpen megfogalmazva: ha egy folytonos függvény az $]a, b[$ intervallumon sehol sem 0, akkor f ezen az intervallumon állandó előjelű.

A tétel bizonyításával nem foglalkozunk, de megemlítjük néhány következményét.

Ha az f függvény folytonos az $[a, b]$ intervallumon és $f(a)\neq f(b)$, akkor a függvény $f(a)$ és $f(b)$ között minden értéket fölvesz az intervallum pontjaiban.

Egy további következmény, hogy a folytonos függvény minden értéket fölvesz az intervallumbeli minimális és maximális függvényértékek között. A tétel – szemléletesen szólva – azt fejezi ki, hogy a folytonos függvény semmilyen értéket „nem ugorhat át”, minden „közbülső” értéket fölvesz. Viszont az $x\mapsto[x]$,

$x \in [0, 2]$ függvény nem folytonos, az $f(0)=0$ és az $f(2)=2$ között pl. az 1,5 értéket nem is veszi föl. Létezik azonban olyan nem folytonos függvény is, amely bármely $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket fölvesz az $]a, b[$ intervallumon.

Visszatérve a zérushely meghatározására, tehát ha f folytonos függvény, akkor először egy olyan intervallumot kell keresni, amelynek végpontjaiban a függvény előjele különböző. A zérushely, vagyis az egyenlet gyöke az intervallumnak egy belső pontja. De hogyan közelíthetjük meg ezt a pontot?

Az eljárás a következő: az $[a, b]$ intervallumot megfelezzük, és kiszámítjuk a függvény értékét a felezőpontban. Ha ez 0, akkor megkaptuk a pontos gyököt. Ha a felezőpontban a függvény értéke nem 0, akkor vesszük azt a félintervallumot, amelynek végpontjaiban a függvény értéke különböző előjelű. Így a kiindulási intervallumhoz képest fele olyan hosszú intervallumot kapunk, amely tartalmazza a zérushelyet. Ezt az intervallumot ismét megfelezzük, és kiszámítjuk a függvény értékét a felezőpontban. Ha nem 0, akkor a két részintervallum közül azt vesszük, amelynek elején és végén a függvény különböző előjelű. Ezután az új intervallumot ismét megfelezzük, és az eljárást így folytatjuk tovább. Ez az eljárás a közelítő gyök meghatározása intervallumfelezéssel.

Legyen a kiindulási intervallum $[a, b]$. Bevezetünk egy sorozatot: első tagja, x_1 az intervallum felezőpontja, x_2 a második felezéssel kapott pont; általában: x_n az n-edik felezéssel kapott pont *(4.6. ábra)*. Meg lehet mutatni, hogy e sorozat határértéke a keresett gyök:

$$\lim x_n = c.$$

Az x_1 eltérése a keresett gyöktől kisebb, mint az intervallum fele:

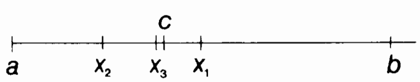
$$|x_1 - c| < \frac{b-a}{2}.$$

Az x_2 eltérése a keresett gyöktől kisebb, mint az intervallum negyedrésze:

$$|x_2 - c| < \frac{b-a}{4},$$

általában

$$|x_n - c| < \frac{b-a}{2^n}.$$



4.6. ábra

Megjegyezzük, hogy lehet zérushely olyan intervallumban is, amelynek végpontjaiban a függvény azonos előjelű (pl.: a polinom kétszeres zérushelye). Ennek a gyöknek a megkeresésére a felezéses eljárás nem alkalmas.

4.26. példa. Határozzuk meg az f: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$, $x \in \mathbf{R}$ függvény zérushelyeit.

Az

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

egyenletet úgy oldjuk meg, hogy először meghatározzuk a gyököket tartalmazó intervallumokat. A gyökelkülönítést vagy próbálgatással, vagy grafikus úton végezzük. Az utóbbi esetben célszerű átírni az egyenletet az

$$x^3 = -2x^2 + 2x + 4$$

alakra, és külön ábrázolni az

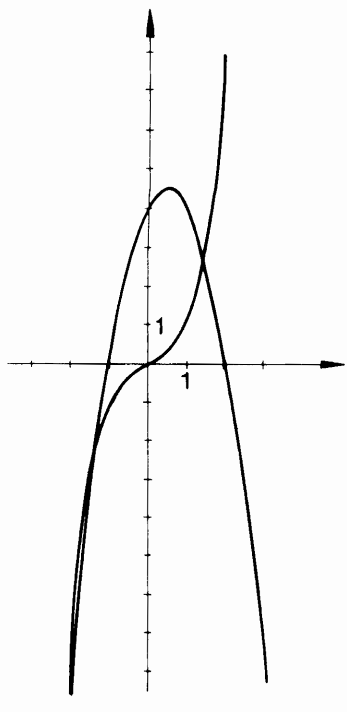
$$x \mapsto x^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

és az

$$x \mapsto -2x^2 + 2x + 4 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvényeket.

A *4.7. ábráról* látható, és egyszerű behelyettesítéssel igazolható, hogy az egyik gyök pontosan -2. A másik gyök a $[-1{,}9,\ -1]$ intervallumban van, a harmadik gyök pedig az $[1, 2]$ intervallumban. Bemutatjuk, hogyan lehet kiszámítani ezt a harmadik gyököt 0,01-nál kisebb hibával.



4.7. ábra

A kiindulási intervallum: $[1, 2]$, tehát $a = 1$ és $b = 2$. Meghatározzuk, hogy hányadik lépésben kapunk olyan közelítő gyököt, amelyre teljesül, hogy az ismeretlen gyöktől való eltérése kisebb, mint 0,01. Láttuk, hogy

$$|x_n - c| < \frac{b-a}{2^n},$$

ahol c az ismeretlen gyök. Példánkban

$$|x_n - c| < \frac{1}{2^n} < 0{,}01;$$

a számok reciprokát véve,

$$2^n > 100.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $n > 6$, tehát az x_7 lesz az első közelítő gyök, amely a kikötésnek eleget tesz.

i	x_i	$f(x_i) = x_i^3 + 2x_i^2 - 2x_i - 4$
1	1,5	+0,875
2	1,25	−1,421 875
3	1,375	−0,369 141
4	1,437 5	+0,228 270
5	1,406 25	−0,076 508
6	1,421 875	+0,074 350
7	1,414 062 5	−0,001 464

A közelítő gyök: $x_7 = 1{,}41$.
A másik gyök közelítő értékét hasonló módon lehet kiszámítani.

Láthatjuk, hogy az eljárás egyszerű. Kevesebb lépésből áll, ha az elején rövidebb intervallumból indulunk ki.

A hibakorlát alapján kiszámítva n értékét, a kapott közelítő gyök biztosan az adott hibakorlátnál kisebb hibával közelíti meg a gyököt.

5. DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

5.1 A differenciálhányados fogalma. A deriváltfüggvény

Ebben a fejezetben a differenciálhányadossal és annak legfontosabb tulajdonságaival foglalkozunk. A differenciálhányados a matematikai analízis egyik központi jelentőségű fogalma. Szerepe mind a matematika, mind más tudományok területén (fizika, kémia, közgazdaságtudomány, műszaki tudományok, biometria stb.) alapvető. Segítségével számos elméleti és gyakorlati probléma megoldása válik lehetővé.

A differenciálhatóságot általában a függvény értelmezési tartományának belső pontjaiban vizsgáljuk.

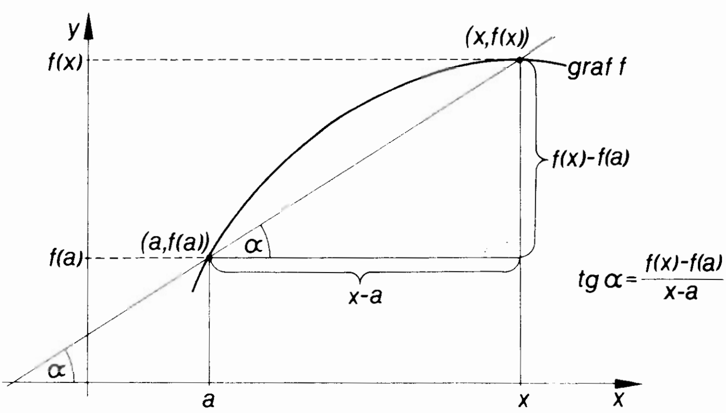
Bevezető példa:

Tekintsük az f függvény grafikonjának az a és x $(x \neq a)$ abszcisszájú pontjain az $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ pontokon) áthaladó egyenest. Ezt az egyenest a grafikon e pontokhoz tartozó **szelőjének** nevezzük.

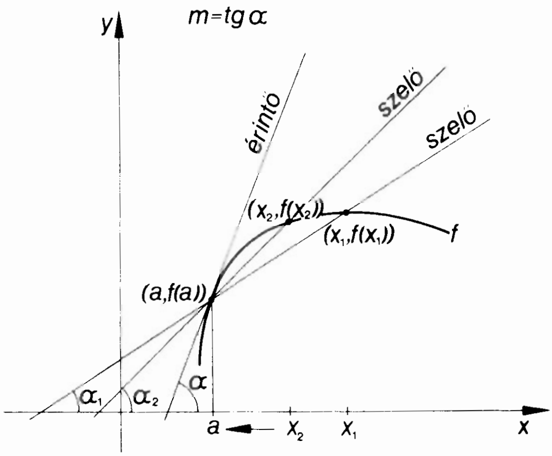
A szelő meredekségét az

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

hányados adja meg *(5.1. ábra)*.



5.1. ábra



5.2. *ábra*

Ha rögzítjük az a pontot, akkor ez a meredekség általában függ az x megválasztásától, de sok esetben azt tapasztaljuk, hogy véges határértékhez tart, ha x a-hoz konvergáló, a-tól különböző tagokból álló sorozaton fut át, azaz hogy létezik a véges

$$\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m \qquad (5.1.)$$

határérték *(5.2. ábra).*

Ezen értelmezés alapján az $(a, f(a))$ koordinátájú ponton áthaladó, az (5.1.) által megadott m meredekségű egyenest az f grafikonja a abszcisszájú pontjához tartozó **érintőjének** nevezzük.

Ennek egyenlete

$$y = f(a)+m(x-a),$$

ahol m értékét az (5.1.) adja meg.

A bevezető példán túlmenően még sokféle feladat megoldásához (pl. a pillanatnyi sebesség, a pillanatnyi gyorsulás stb.) segít hozzá, ha egy f függvényre vonatkozóan meg tudjuk határozni az (5.1.)-ben szereplő határértéket. Ez indokolja a következő elnevezések bevezetését.

DEFINÍCIÓ. *Legyen f egy függvény, a pedig értelmezési tartományának egy pontja. Ekkor a*

$$d_a^f\colon\ d_a^f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \in D_f \setminus \{a\})$$

*függvényt az f függvény „a” pontjához tartozó **differenciahányados-függvényének** (különbségihányados-függvényének) nevezzük. (Ha nem okoz félreértést, akkor a d_a^f helyett csak d_a-t írunk.)*

5.1. példa. Az f: $f(x)=3x^2$ függvénynek a 2 ponthoz tartozó különbségihányados-függvénye a következő:

$$d_2\colon\ d_2(x) = \frac{3x^2-12}{x-2} = \frac{3(x-2)\,(x+2)}{x-2} = 3x+6, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

5.2. példa. Legyen f: $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in\mathbf{R}_0^+$. Ekkor az f függvénynek az 1 ponthoz tartozó különbségihányados-függvénye így írható fel:

$$d_1:\ d_1(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1},\qquad x\in\mathbf{R}_0^+\setminus\{1\};$$

a 0 ponthoz tartozó differenciahányados-függvénye pedig a következő:

$$d_0:\ d_0(x)=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}},\qquad x\in\mathbf{R}^+.$$

DEFINÍCIÓ. *Legyen a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***differenciálható*** *az a pontban, ha a* d_a *differenciahányados-függvénynek az a pontban létezik véges határértéke.*

A

$$\lim_a d_a(x)=\lim_a\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

számot az f függvény „a" ponthoz tartozó ***differenciálhányadosának*** *nevezzük.*

Ha fenti határérték nem létezik, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban nem differenciálható.

5.3. példa. Állapítsuk meg, hogy az f: $f(x)=3x^2$ függvény differenciálható-e a 2 pontban.

Azt már láttuk (5.1. példa), hogy a 2 ponthoz tartozó különbségihányados-függvény:

$$d_2:\ d_2(x)=3x+6,\qquad x\in\mathbf{R}\setminus\{2\}.$$

Ennek a különbségihányados-függvénynek a 2 pontban van véges határértéke (l. 4.7a példa), tehát az f függvény differenciálható, és a 2 pontbeli differenciálhányadosa

$$\lim_2 d_2(x)=\lim_2(3x+6)=12.$$

5.4. példa. Nézzük meg, hogy az f: $f(x)=\sqrt{x}$ ($x\in\mathbf{R}_0^+$) függvény az 1 pontban differenciálható-e. Ha differenciálható, akkor számítsuk is ki az 1 pontbeli differenciálhányadosát.

Az adott ponthoz tartozó különbségihányados-függvény a következő (5.2. példa):

$$d_1:\ d_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1},\qquad x\in\mathbf{R}_0^+\setminus\{1\}.$$

Mivel
$$\lim_{1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}, \qquad \text{(l. 4.9a példa)}$$
azért f differenciálható az 1 pontban, és az 1 ponthoz tartozó differenciálhányadosa $\frac{1}{2}$.

Függvényünk minden olyan esetben differenciálható, amikor $a \in \mathbf{R}^+$. Ugyanis bármely rögzített $a \in \mathbf{R}^+$ esetén
$$d_a\colon\ d_a(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}, \qquad x \in \mathbf{R}_0^+ \setminus \{a\},$$
és ezért
$$\lim_{a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad \text{(l. 4.9b példa).}$$
Így például a 2 pontban f differenciálhányadosa $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, a 4 pontban pedig $\frac{1}{4}$.

Megjegyzés: Példáinkban – a függvény határértékére adott definíciónak megfelelően – nagyon sokszor úgy döntjük el az f függvény differenciálhatóságát az a pontban, hogy az
$$\left(\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a}\right)$$
differenciahányados-sorozatot vizsgáljuk, ahol
$$\lim x_n = a, \qquad x_n \in D_f \setminus \{a\}.$$
Ha igaz, hogy bármely (x_n) sorozatra a differenciahányadosok sorozata konvergens, akkor az f differenciálható az a pontban.

5.5. példa. Mutassuk meg, hogy az f: $f(x)=x^3$ függvény a 3 pontban differenciálható.

Legyen (x_n) tetszés szerinti olyan sorozat, amelyre
$$x_n \in \mathbf{R} \setminus \{3\}, \qquad \lim x_n = 3 \qquad (n \in \mathbf{N}^+).$$
Vizsgáljuk a különbségihányados-sorozatot:
$$(d_3(x_n)) = \left(\frac{f(x_n)-f(3)}{x_n-3}\right) = \left(\frac{x_n^3-27}{x_n-3}\right) = (x_n^2+3x_n+9).$$
Az $(x_n^2+3x_n+9)$ számsorozat három konvergens sorozat összege, így maga is konvergens. Tehát f differenciálható a 3 pontban, és
$$\lim (x_n^2+3x_n+9) = 27 \qquad \text{(l. 4.7b példa).}$$

A későbbiek során néhány tétel és definíció tömörebb megfogalmazásához használjuk fel az alábbi fogalmakat.

DEFINÍCIÓ. *Legyen A az f függvény értelmezési tartományának nyílt, nem üres részhalmaza. Azt mondjuk, hogy f* ***differenciálható az*** *A* ***halmazon,*** *ha f differenciálható A minden pontjában. Ha D_f nyílt, és $A = D_f$, akkor röviden* ***differenciálható függvényről*** *beszélünk.*

Az 5.4. példában vizsgált f: $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \in \mathbf{R}_0^+)$ függvény az $A = \mathbf{R}^+$ halmazon differenciálható függvény.

A differenciálhányados fogalmának bevezetése lehetőséget nyújt egy új függvény értelmezésére.

DEFINÍCIÓ. *Tegyük fel, hogy az f függvény a D_f minden belső pontját tartalmazó A halmazon differenciálható, és A nem üres.*
Azt a függvényt, amely az A minden pontjához az f e pontbeli differenciálhányadosát rendeli hozzá, az f ***deriváltfüggvényének*** *vagy röviden* ***deriváltjának*** *nevezzük és f'-vel jelöljük. Tehát minden $a \in A$ esetén*

$$f'(a) = \lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Megjegyzések: 1. Azt az eljárást, amellyel előállítjuk valamely függvény deriváltfüggvényét (deriváltját), differenciálásnak (vagy deriválásnak) mondjuk.

2. A deriváltfüggvény jelölésére ritkán még az $\dot{f}$, $\frac{df}{dx}$ szimbólumokat is használjuk.

5.6. példa. Az f: $f(x) = c$ $(c \in \mathbf{R})$ állandó függvény differenciálható, és deriváltja f': $f'(x) = 0$.
Rögzítsünk egy $a \in \mathbf{R}$ pontot, és vizsgáljuk meg, hogy létezik-e a

$$d_a\colon\ d_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (x \in D_f \setminus \{a\})$$

különbségihányados-függvénynek határértéke az a pontban.

Vegyünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$, $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ sorozatot, ekkor

$$\lim d_a(x_n) = \lim \frac{c-c}{x_n - a} = 0.$$

Ezért f' minden $x \in \mathbf{R}$ pontban értelmezve van, és f': $f'(x) = 0$.

5.7. példa. Tekintsük az f: $f(x) = x^3$ függvényt. A függvény értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható, és deriváltja a következő:

$$f'\colon\ f'(x) = 3x^2.$$

Legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszés szerinti. Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$, $x_n \in D_f \setminus \{a\}$ sorozatot, és vizsgáljuk a különbségihányados-sorozatot:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{x_n^3 - a^3}{x_n - a}\right) = \left(\frac{(x_n - a)(x_n^2 + ax_n + a^2)}{x_n - a}\right) = (x_n^2 + ax_n + a^2).$$

Az $(x_n^2 + ax_n + a^2)$ számsorozat három konvergens sorozat összege, így maga is konvergens. Tehát f differenciálható az a pontban, és

$$f'(a) = \lim d_a(x_n) = \lim (x_n^2 + ax_n + a^2) = 3a^2 \qquad \text{(l. 4.7c példa).}$$

Az a pontot tetszőlegesen választottuk, ezért az f függvény bármely $x \in \mathbf{R}$ pontban differenciálható, és $f'(x) = 3x^2$.

A kapott eredmény így is felírható:

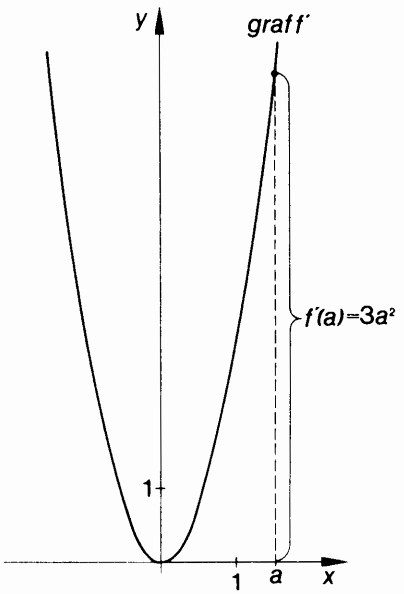
$$(x^3)' = 3x^2.$$

5.8. példa. Az f: $f(x) = x^3$ függvény differenciálható (l. 5.7. példa), ezért az $y = x^3$ egyenletű görbének minden (a, a^3) pontjában létezik érintője. Tetszőleges a esetén

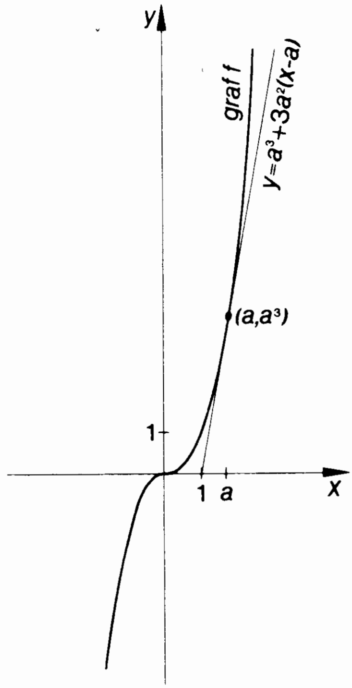
$$f'(a) = 3a^2 \qquad \textit{(5.3a ábra)},$$

így az (a, a^3) ponthoz tartozó érintő egyenlete a következő:

$$y = a^3 + 3a^2(x - a) \qquad (x \in \mathbf{R}) \qquad \textit{(5.3b ábra)}.$$



5.3a ábra



5.3b ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen f egy függvény, a pedig az értelmezési tartományának valamely belső pontja, és tegyük fel, hogy f differenciálható az a pontban. Ekkor az*

$$e(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

*elsőfokú polinomot f a pontbeli **érintőfüggvényének,** e polinom grafikonját pedig f $(a, f(a))$ pontbeli **érintőjének** nevezzük.*

5.9. példa. Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény deriváltfüggvénye létezik, és

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Legyen $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ tetszés szerinti. Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$ $(x_n \in D_f \setminus \{a\})$ sorozatot, és vizsgáljuk a különbséghányados-sorozatot:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a}}{x_n - a}\right) = \left(\frac{\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a}}{(\sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n a} + \sqrt[3]{a^2})}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n a} + \sqrt[3]{a^2}}\right).$$

Felhasználjuk, hogy $\lim \sqrt[3]{x_n^2} = \sqrt[3]{a^2}$;

$$\lim \sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$$

(l. a 4.8. példa utáni megjegyzést).
Így

$$f'(a) = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{x_n^2} + \sqrt[3]{x_n} \cdot \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Mivel az $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pontot tetszőlegesen választottuk, ezért f bármely $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ pontban differenciálható, és

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Más szimbólummal:

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}).$$

A derivált ismeretében bármikor meghatározhatjuk az f függvény a pontbeli differenciálhányadosát, hiszen ez nem más, mint a derivált a pontbeli helyettesítési értéke, azaz $f'(a)$. Például a fenti függvény 1 pontbeli differenciálhányadosa,

$$f'(1) = \frac{1}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény értelmezési tartományának egy a belső pontjában

$$\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty \qquad (\text{illetve } -\infty),$$

akkor szokás azt mondani, hogy f differenciálhányadosa a pontban $+\infty$ (illetve $-\infty$).

Megállapodás szerint olyan esetben, amikor az $f'(a)$ differenciálhányados végtelen, azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban nem differenciálható.

Így például az f: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvénynek a 0 ponthoz tartozó különbségihányados-függvénye:

$$d_0(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \qquad x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}.$$

Mivel a különbségihányados-függvénynek a 0 helyen $+\infty$ a határértéke, ezért f a 0 pontban nem differenciálható.

A differenciálhatóság értelmezésekor feltettük, hogy a kérdéses pont a vizsgált függvény értelmezési tartományának belső pontja. E megszorítás miatt pl. valamely $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett függvény esetében nem vethető fel a függvény differenciálhatóságának kérdése az a és b pontban. Ezt a problémát úgy hidaljuk át, hogy a differenciálhatóság fogalmát átvisszük olyan esetekre, amikor a függvénynek a kérdéses ponttól csak a jobbra eső vagy csak a balra eső környezetét vizsgáljuk.

DEFINÍCIÓ. *Legyen f „a” pontban és annak jobb (bal) oldali környezetében értelmezve. Azt mondjuk, hogy az f függvény* ***jobbról*** *(balról)* ***differenciálható*** *az a pontban, ha a d_a differenciahányados-függvénynek az a pontban létezik jobb oldali (bal oldali) véges határértéke.*

és

$$\lim \frac{(2-x_n)+1}{x_n-3} = \lim \frac{3-x_n}{x_n-3} = -1.$$

DEFINÍCIÓ. *Ha az f függvény az $[a, b]$ zárt intervallum belső pontjaiban differenciálható, az intervallum kezdő-, illetve végpontjában pedig jobbról, illetve balról differenciálható, akkor azt mondjuk, hogy f* ***differenciálható az $[a, b]$ zárt intervallumon.***

Például a g: $g(x)=x^2$ $(x \in [0, 1])$ függvény a $[0, 1]$ zárt intervallumon differenciálható, mert értelmezési tartománya belső pontjaiban a $]0, 1[$ nyílt intervallumon differenciálható, a 0, ill. az 1 intervallum-végpontokban pedig jobbról, illetve balról differenciálható.

Az előző példákban meglehetősen hosszadalmas volt a derivált meghatározása, noha igen egyszerű függvényekről volt szó. Szerencsére nem kell mindig ilyen fáradságos módon eljárni. Ugyanis az analízisben a derivált meghatározására olyan általános módszert dolgoztak ki, amely gyakran igen egyszerűvé és gyorsan végrehajthatóvá teszi a probléma megoldását. Ilyen módszerekkel az 5.4 pontban fogunk megismerkedni.

5.2 Néhány elemi függvény deriváltja

Ebben a fejezetben olyan differenciálási szabályokat mutatunk be, amelyek egyes különösen gyakran előforduló függvények deriváltfüggvényét adják meg.

A sin és cos függvényekről tudjuk, hogy minden pontban folytonosak. Vizsgáljuk meg, hogy differenciálhatók-e.

5.1. TÉTEL. *A* sin *és* cos *függvények differenciálhatók, és*

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin,$$

vagy más jelöléssel

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Bizonyítás:

Legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszés szerinti.

Felhasználva a

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

ismert trigonometrikus összefüggést, a d_a különbséghányados-függvény így írható fel:

$$d_a\colon\ d_a(x) = \frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{x-a}, \qquad x \in D_f \setminus \{a\}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$ $(x_n \in D_f \setminus \{a\})$ sorozatot, és vizsgáljuk a különbséghányados-sorozatot:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{\sin x_n - \sin a}{x_n - a}\right) = \left(\frac{2\sin\dfrac{x_n-a}{2}\cos\dfrac{x_n+a}{2}}{x_n-a}\right) =$$

$$= \left(\frac{\sin\dfrac{x_n-a}{2}}{\dfrac{x_n-a}{2}}\cdot\cos\frac{x_n+a}{2}\right).$$

Mivel

$$\lim\frac{\sin\dfrac{x_n-a}{2}}{\dfrac{x_n-a}{2}} = 1$$

(l. 4.11. példa) és a cos függvény az a helyen folytonos:

$$\lim\cos\left(\frac{x_n+a}{2}\right) = \cos a,$$

azért

$$\lim\frac{\sin x_n - \sin a}{x_n - a} = \cos a.$$

Az $a \in \mathbf{R}$ számot tetszőlegesen választottuk, ezért minden $x \in \mathbf{R}$ esetén a sin függvény differenciálható, és deriváltja:

$$\sin' = \cos.$$

A cos függvény differenciálhatóságának vizsgálatakor a

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

trigonometrikus összefüggést használjuk fel.

Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$ $(x_n \in D_f \setminus \{a\})$ sorozatot, és vizsgáljuk a különbséghányados-sorozatot:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{\cos x_n - \cos a}{x_n - a}\right) = \left(\frac{-2\sin\dfrac{x_n-a}{2}\sin\dfrac{x_n+a}{2}}{x_n-a}\right) =$$

$$= \left(-\frac{\sin\dfrac{x_n-a}{2}}{\dfrac{x_n-a}{2}} \cdot \sin\frac{x_n+a}{2}\right).$$

Mivel

$$\lim \frac{\sin\dfrac{x_n-a}{2}}{\dfrac{x_n-a}{2}} = 1$$

(l. 4.11. példa) és a sin függvény az a helyen folytonos, azért

$$\lim \frac{\cos x_n - \cos a}{x_n - a} = -\sin a.$$

Az $a \in \mathbf{R}$ számot tetszőlegesen választottuk, ezért minden $x \in \mathbf{R}$ esetén a cos függvény differenciálható, és deriváltja:

$$\cos' = -\sin.$$

5.2. TÉTEL. *Az* exp *függvény differenciálható, és*

$$\exp' = \exp,$$

vagy más jelöléssel

$$(e^x)' = e^x, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Bizonyítás:

Legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszőlegesen rögzített szám. Vizsgáljuk a differenciahányados-függvényt.

Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$ $(x_n \in D_f \setminus \{a\})$ sorozatot, ekkor a különbségi hányados-sorozat:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{e^{x_n} - e^a}{x_n - a}\right) = \left(e^a \cdot \frac{e^{x_n - a} - 1}{x_n - a}\right).$$

Mivel

$$\lim \frac{e^{x_n - a} - 1}{x_n - a} = 1$$

(l. 4.11. példa), azért

$$\lim d_a(x_n) = e^a \cdot 1 = e^a.$$

Az $a \in \mathbf{R}$ számot tetszőlegesen választottuk, ezért minden $x \in \mathbf{R}$ esetén az exp függvény differenciálható, és deriváltja:

$$(e^x)' = e^x.$$

5.3 TÉTEL. *Az* ln *függvény differenciálható, és*

$$\ln'\colon\ (\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbf{R}^+.$$

A tétel bizonyítására nem térünk ki.

5.4 TÉTEL. *Az $f_n(x) = x^n$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ függvény differenciálható, és*

$$f_n'(x) = nx^{n-1}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

vagy röviden

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Bizonyítás:

Legyen $a \in \mathbf{R}$ tetszőlegesen rögzített szám. Vizsgáljuk – mint szokás – a különbségihányados-függvényt.

Tekintsünk egy tetszőleges $\lim x_n = a$ $(x_n \in D_f \setminus \{a\})$ sorozatot, és vegyük a megfelelő különbségi hányadosok sorozatát:

$$(d_a(x_n)) = \left(\frac{x_n^n - a^n}{x_n - a}\right) = (x_n^{n-1} + x_n^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}).$$

Felhasználjuk, hogy $\lim x_n = a$ esetén a jobb oldalon álló összeg mindegyik tagjának a határértéke a^{n-1} (l. 4.2. tétel következménye).
Így

$$\lim d_a(x_n) = na^{n-1}.$$

Mivel az $a \in \mathbf{R}$ számot tetszőlegesen választottuk, azért minden $x \in \mathbf{R}$ esetén az $x \mapsto x^n$ függvény differenciálható, és deriváltja:

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

5.3 A folytonosság és a differenciálhatóság kapcsolata

Nézzük meg, milyen összefüggés van a folytonosság és a differenciálhatóság között.

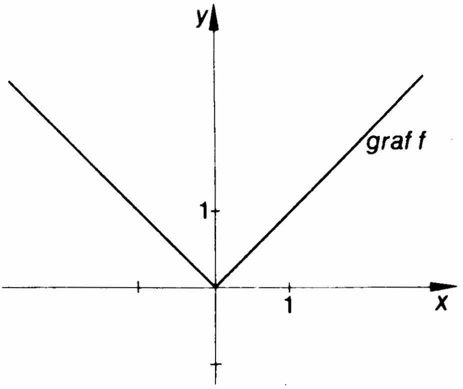
5.11. példa. Állapítsuk meg, hogy az f: $f(x) = |x|$ differenciálható-e a 0 pontban.

A függvény grafikonja az *5.5. ábrán* látható.

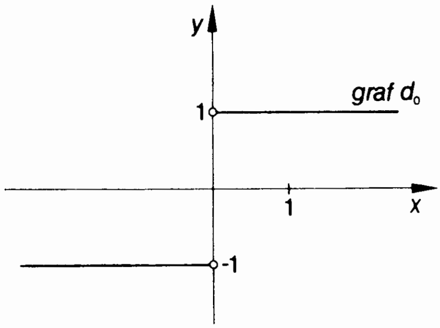
Az f függvény a 0 pontban (mint mindenhol) folytonos. A 0 ponthoz tartozó különbségihányados-függvény *(5.6. ábra)*:

$$d_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x>0, \\ -1, & \text{ha} \quad x<0. \end{cases}$$

A különbségihányados-függvénynek nincs határértéke a 0 helyen, az f függvény nem differenciálható a 0 pontban (de a 4.5. példához hasonlóan létezik a $d_0(x)$ jobb oldali, illetve bal oldali határértéke, az 1, ill. -1, azaz jobbról, illetve balról differenciálható).



5.5. ábra



5.6. ábra

Példánk azt mutatja, hogy a folytonosságból nem következik a differenciálhatóság. Igaz azonban az állítás megfordítása:

5.5. TÉTEL. *Ha a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja és f az a pontban differenciálható, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás:

Minden $x \in D_f \setminus \{a\}$ pontban igaz a következő egyenlőség:

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a).$$

Innen a függvények határértékére vonatkozó 4.1. tétel figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\lim_{a} f(x) = f(a)+\lim_{a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{a}(x-a).$$

Mivel a feltevés szerint a

$$\lim_{a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

véges határérték létezik ($f'(a)$-val jelöljük), így

$$\lim_{a} f(x) = f(a)+f'(a)\cdot 0 = f(a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy f folytonos az a pontban.

A differenciálhatóság tehát erősebb megkötés, mint a folytonosság.

A tétellel kapcsolatban két megjegyzést teszünk:

1. Léteznek olyan függvények is, amelyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, de sehol sem differenciálhatók.
2. Az 5.5. tétel mintájára belátható:
   Ha az f az a pontban jobbról (balról) differenciálható, akkor itt jobbról (balról) folytonos is.

Az 5.5. tételből adódik az alábbi

Következmény: Ha f differenciálható értelmezési tartományának valamely a belső pontjában, akkor a

$$\overline{d_a}\colon \overline{d_a}(x) = \begin{cases} d_a(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & (x\in D_f\setminus\{a\}) \\ f'(a), & (x=a) \end{cases}$$

függvény folytonos az a pontban, és ebből adódik, hogy a $\overline{d_a}$ függvényre minden $x\in D_f$ esetén teljesül az

$$f(x)-f(a) = \overline{d_a}(x)\,(x-a)$$

egyenlőség.

5.4 Differenciálási szabályok

A differenciálási szabályok azokat a differenciálásra vonatkozó összefüggéseket foglalják össze, amelyek segítségével az ugyanabban a pontban differenciálható függvényekből kiindulva és alkalmazva a megismert függvényképzési eljárásokat, újra differenciálható függvényekhez jutunk.

5.6. TÉTEL. *Legyen f és g differenciálható az a pontban. Ekkor*

a) *bármely $c \in \mathbf{R}$ esetén cf is differenciálható az a pontban, és*

$$(cf)'(a) = cf'(a);$$

b) *$f+g$ is differenciálható az a pontban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a);$$

c) *fg is differenciálható az a pontban, és*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a);$$

d) *a $g(a) \neq 0$ esetben $\frac{1}{g}$ is differenciálható az a pontban és*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)};$$

e) *a $g(a) \neq 0$ esetben $\frac{f}{g}$ is differenciálható az a pontban, és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás:

a) Írjuk fel a cf függvény a ponthoz tartozó különbségihányados-függvényét:

$$d_a(x) = \frac{(cf)(x)-(cf)(a)}{x-a} = \frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} = c\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, \qquad x \in D_{cf} \setminus \{a\}.$$

A határértékre vonatkozó 4.1. tétel alapján

$$(cf)'(a) = c \lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = cf'(a).$$

Vegyük az $f+g$ függvény a-hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$d_a(x) = \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{[f(x)+g(x)]-[f(a)+g(a)]}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}, \qquad x \in D_{f+g} \setminus \{a\}.$$

A két függvény összegére vonatkozó határértéktétel alapján az $f+g$ a pontbeli különbséghányados-függvényének az a helyen létezik határértéke, és az $f'(a)+g'(a)$-val egyenlő.

Az fg függvény a-hoz tartozó különbséghányados-függvénye:

$$d_a(x) = \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}, \qquad x \in D_{fg} \setminus \{a\}.$$

A különbséghányados-függvény egyszerű átalakítás után a következő alakban írható fel:

$$d_a(x) = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} =$$

$$= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}, \qquad x \in D_{fg} \setminus \{a\}.$$

Mivel g differenciálható az a pontban, azért folytonos is ebben a pontban, tehát $\lim\limits_{a} g(x) = g(a)$.

Felhasználva a határértékre vonatkozó 4.1. tételt, azt kapjuk, hogy

$$(fg)'(a) = \lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{a} g(x) + f(a) \lim_{a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Írjuk fel az $\frac{1}{g}$ függvény a-hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$d_a(x) = \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x-a} =$$

$$= -\frac{1}{g(x)g(a)} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}, \qquad x \in D_{\frac{1}{g}} \setminus \{a\}.$$

Mivel g deriválható az a pontban, azért folytonos is, így $\lim\limits_{a} g(x) = g(a)$, és a 4.4. tétel miatt a valamely környezetében $g(x) \neq 0$.

A határértékre vonatkozó 4.1. tétel alapján:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{1}{g(a)} \cdot \lim_a \frac{1}{g(x)} \cdot \lim_a \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

e) Mivel $\left(\frac{f}{g}\right)(a) = f(a) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(a)$, azért a (*c*) és (*d*) alapján $\frac{f}{g}$ is deriválható az a pontban, és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) =$$

$$= f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} - f(a)\frac{g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Az előző tételt megfogalmazhatjuk a megfelelő deriváltfüggvényekre is. A kiindulási függvények értelmezési tartományára kell csak ügyelnünk (pl. van-e közös részük?), és nem szükséges felírni a helyettesítési értékeket tartalmazó egyenlőségeket.

Így a differenciálható függvények deriváltfüggvényeire vonatkozó analóg összefüggések:

$$(cf)' = cf',$$

$$(f+g)' = f'+g',$$

$$(fg)' = f'g+fg',$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad (0 \notin g\,(D_g)),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2} \qquad (0 \notin g\,(D_g)).$$

Az előbb elmondottakhoz még az alábbi kiegészítéseket tesszük:

1. A fentiekből következik, hogy ha f_i ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) differenciálható függvények valamely A számhalmazon, továbbá $c_i \in \mathbf{R}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), akkor

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n$$

differenciálható függvény az A halmazon, és

$$(c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n)' = c_1f'_1 + c_2f'_2 + \ldots + c_nf'_n.$$

2. A c)-ben megismert differenciálási szabályt kiterjeszthetjük n tényezőre is, így pl. három tényező esetén a következő módon:

Ha f, g és h differenciálható függvény és $D_f \cap D_g \cap D_h \neq \emptyset$, akkor

$$(fgh)' = [(fg)h]' = (fg)'h + (fg)h' = (f'g+fg')h + (fg)h' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Általánosítva, n tényezős szorzat deriváltfüggvényét megkapjuk, ha minden tényező deriváltfüggvényét szorozzuk a fennmaradt $(n-1)$ tényezővel és az így kapott szorzatokat összeadjuk.

5.12. példa. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját.

a) f: $f(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 17, \quad x \in \mathbf{R}$,

b) g: $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

c) h: $h(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x - 2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$,

d) k: $k(x) = e^x \ln x, \quad x \in \mathbf{R}^+$.

A deriváltak:

a) f': $f'(x) = 12x^2 - 2x - 2, \quad x \in \mathbf{R}$,

b) g': $g'(x) = -\dfrac{2x - 2}{(x^2 - 2x + 1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

c) h': $h'(x) = \dfrac{8x(x-2) - (4x^2 + 1)1}{(x-2)^2} =$

$$= \frac{4x^2 - 16x - 1}{(x-2)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\},$$

d) k': $k'(x) = e^x \ln x + e^x \dfrac{1}{x} = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right), \quad x \in \mathbf{R}^+$.

5.7. TÉTEL. *Legyen a g függvény differenciálható az a pontban, f pedig a $g(a)$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ összetett függvény is differenciálható az a pontban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás:

Induljunk ki az $f \circ g$ függvény a ponthoz tartozó különbségihányados-függvényéből, feltéve, hogy a-nak valamely $K \subset D_{f \circ g}$ környezetében $g(x) \neq g(a)$, ha $x \neq a$.

$$d_a(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}, \quad x \in K \setminus \{a\}.$$

Ekkor a $t = g(x)$ és $s = g(a)$ jelölést bevezetve, a különbségihányados-függvény a következő módon írható fel:

$$d_a(x) = \frac{f(g(x))-f(g(a))}{x-a} = \frac{f(t)-f(s)}{x-a} = \frac{f(t)-f(s)}{t-s}\cdot\frac{t-s}{x-a} =$$

$$= \frac{f(t)-f(s)}{t-s}\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}, \qquad x \in K \setminus \{a\}.$$

Mivel g differenciálható az a pontban, azért ott folytonos is, és $\lim\limits_{a} g(x) = g(a) = s$.

Így

$$(f\circ g)'(a) = \lim_{s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\cdot\lim_{a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a} =$$

$$= f'(s)\cdot g'(a) = f'[g(a)]\cdot g'(a).$$

(Arra az esetre, amikor a-nak minden K környezetében van olyan a-tól különböző x pont, amelyre $g(x)=g(a)$, nem térünk ki.)

Megjegyzés: A kapott eredményt a deriváltfüggvényekkel is megfogalmazhatjuk.

Ha f és g differenciálható függvény, továbbá $g(D_g)\subset D_f$, akkor $f\circ g$ is differenciálható, és

$$(f\circ g)' = (f'\circ g)g'.$$

Az összetett függvény differenciálására megismert tétel érvényes akkor is, amikor az összetett függvényt több, de természetesen véges számú függvényből képezzük.

Így például három függvény esetén a differenciálási szabály:

$$(f(g(z(x))))' = f'(g(z(x)))\cdot g'(z(x))\cdot z'(x).$$

5.13. példa. Írjuk fel a h: $h(x) = (x^2+x+1)^6$ függvény deriváltját.

A h függvény a

$$g:\ g(x) = x^2+x+1$$

és az

$$f:\ f(u)=u^6$$

függvényekből tevődik össze: $h(x)=f(g(x))$. Figyelembe véve, hogy

$$g'(x) = 2x+1, \qquad f'(u)=6u^5,$$

az összetett függvény differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = 6(x^2+x+1)^5\cdot(2x+1).$$

Ezt így is írhatjuk:

$$[(x^2+x+1)^6]' = 6(x^2+x+1)^5(x^2+x+1)' = 6(x^2+x+1)^5(2x+1).$$

5.14. példa. Határozzuk meg a

$$h\colon h(x) = \sin^2 x \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény deriváltját.

A h függvény a

$$g\colon g(x) = \sin x$$

és az

$$f\colon f(u) = u^2$$

függvényekből tevődik össze: $h(x) = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$.
Mivel

$$g'(x) = \cos x, \qquad f'(u) = 2u,$$

az összetett függvény differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2 \sin x \cos x.$$

5.15. példa. Határozzuk meg a

$$h\colon h(x) = \sin(2x-1)^3 \qquad (x \in \mathbf{R})$$

függvény deriváltját.

A h függvény a

$$z\colon z(x) = 2x-1,$$

a

$$g\colon g(u) = u^3$$

és az

$$f\colon f(t) = \sin t$$

függvényekből tevődik össze: $h(x) = (f \circ g \circ z)(x) = f(g(z(x)))$. Figyelembe véve, hogy

$$z'(x) = 2, \qquad g'(u) = 3u^2, \qquad f'(t) = \cos t,$$

az összetett függvény differenciálási szabálya alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(g(z(x))) \cdot g'(z(x)) \cdot z'(x) = \\ &= \cos((2x-1)^3) 3(2x-1)^2 \cdot 2 = 6(2x-1)^2 \cos(2x-1)^3. \end{aligned}$$

5.5 Néhány további elemi függvény deriváltja

5.8. TÉTEL. *Az* $\exp_a$: $x \mapsto a^x$ $(a \in \mathbf{R}^+)$ *függvény differenciálható, és*

$$(\exp_a)' = \exp_a \cdot \ln a,$$

vagy másképpen írva,

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

Bizonyítás:

Az a^x hatványt írjuk át e alapú hatványra.

Mivel $a = e^{\ln a}$, azért

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} \qquad (a \in \mathbf{R}^+).$$

Az exp függvény és az összetett függvény differenciálási szabályának alkalmazásával kapjuk:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

5.9. TÉTEL. *Legyen* α *tetszőlegesen rögzített valós szám, ekkor az*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

függvény differenciálható, és

$$f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x \in \mathbf{R}^+;$$

vagy röviden

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$

Bizonyítás:

Az

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

egyenlőség és az összetett függvény differenciálási szabálya alapján:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x \in \mathbf{R}^+.$$

Megjegyzés: Az

$$\alpha = \frac{m}{n} \quad (n, m \in \mathbf{Z} \text{ és } n \text{ páratlan}) \text{ esetben az } x \mapsto x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

függvény negatív számokra is értelmezhető. Ekkor egyszerű szimmetriaokokból kifolyólag itt is érvényes a fenti differenciálási szabály.

5.10. TÉTEL. *A* tg *és* ctg *függvények differenciálhatók, és*

$$(\mathrm{tg})' = \frac{1}{\cos^2} = 1+\mathrm{tg}^2,$$

$$(\mathrm{ctg})' = -\frac{1}{\sin^2} = -1-\mathrm{ctg}^2.$$

Bizonyítás:

A törtfüggvény differenciálási szabályát felhasználva, adódik, hogy

$$(\mathrm{tg}\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2 x \quad \left(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right).$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -1-\mathrm{ctg}^2 x \quad (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}).$$

5.11. TÉTEL. *Az* f: $f(x) = \log_a x$ $(x \in \mathbf{R}^+,\ a \in \mathbf{R}^+ \setminus \{1\})$ *függvény differenciálható, és*

$$f'\colon f'(x) = \frac{1}{x \ln a}, \qquad x \in \mathbf{R}^+.$$

Bizonyítás:

A

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

egyenlőséget felhasználva, azt kapjuk, hogy

$$f'\colon f'(x) = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} \quad (x \in \mathbf{R}^+).$$

5.16. példa. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját.

a) f: $f(x) = (x^2+x-2)^{-5}$,

b) g: $g(x) = (2x^2+4)^{\frac{2}{3}}$,

c) h: $h(x) = 2^x\,\mathrm{tg}\,x$,

d) k: $k(x) = x^3 \log_2 x$.

A függvények deriváltja:

a) $f'\colon\ f'(x) = -5(x^2+x-2)^{-6}(x^2+x-2)' = -\dfrac{5(2x+1)}{(x^2+x-2)^6}$,

b) $g'\colon\ g'(x) = \dfrac{2}{3}(2x^2+4)^{-\frac{1}{3}}(2x^2+4)' = \dfrac{2\cdot 4x}{3\sqrt[3]{2x^2+4}}$,

c) $h'\colon\ h'(x) = 2^x \ln 2 \cdot \operatorname{tg} x + 2^x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{2^x}{\cos^2 x}[(\ln 2)\sin x \cos x + 1]$,

d) $k'\colon\ k'(x) = 3x^2 \cdot \log_2 x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = \dfrac{x^2}{\ln 2}[3 \ln 2 \cdot \log_2 x + 1]$.

Összefoglalólag közöljük néhány elemi függvény deriváltfüggvényét:

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$c,\quad c \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	0	$\mathbf{R}$
x	$\mathbf{R}$	1	$\mathbf{R}$
$x^n,\quad n \in \mathbf{N}^+$	$\mathbf{R}$	nx^{n-1}	$\mathbf{R}$
$\sqrt[n]{x},\quad n \in \mathbf{N}^+$	$\mathbf{R}_0^+$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbf{R}^+$
$\sqrt[n]{x},\quad n \in \mathbf{N}^+$ és páratlan	$\mathbf{R}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$
$\dfrac{1}{x^n},\quad n \in \mathbf{N}^+$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbf{R}\setminus\{0\}$
$\sqrt[q]{x^p},\quad p, q \in \mathbf{N}^+$	$\mathbf{R}^+$	$\dfrac{p}{q}\sqrt[q]{x^{p-q}}$	$\mathbf{R}^+$
$x^\alpha,\quad \alpha \in \mathbf{R}$	$\mathbf{R}^+$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbf{R}^+$
$\sin x$	$\mathbf{R}$	$\cos x$	$\mathbf{R}$
$\cos x$	$\mathbf{R}$	$-\sin x$	$\mathbf{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbf{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ $k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}$
e^x	$\mathbf{R}$	e^x	$\mathbf{R}$
$a^x,\quad a \in \mathbf{R}^+$	$\mathbf{R}$	$a^x \ln a$	$\mathbf{R}$
$\ln x$	$\mathbf{R}^+$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}^+$
$\log_a x,\quad a \in \mathbf{R}^+\setminus\{1\}$	$\mathbf{R}^+$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbf{R}^+$

5.6 Többször differenciálható függvények

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény valamely halmazon differenciálható, és deriváltfüggvénye legyen f'. Ha az f' függvény egy $A \subset D_{f'}$ halmazon differenciálható, akkor f' deriváltfüggvényét az f függvény* ***második deriváltfüggvényének*** *(vagy röviden második deriváltjának) nevezzük és f''-vel jelöljük. Szokásos még a*

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

jelölés is.

5.17. példa. Határozzuk meg az alábbi függvények második deriváltfüggvényét.

a) $f\colon\ f(x) = x^2 + 2x$,
b) $f\colon\ f(x) = \ln x \quad (x \in \mathbf{R}^+)$,
c) $f\colon\ f(x) = e^x$.

	A függvények (f)	
	deriváltfüggvénye (f')	második deriváltfüggvénye (f'')
a)	$f'(x) = 2x+2$	$f''(x) = 2$
b)	$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbf{R}^+$	$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \in \mathbf{R}^+$
c)	$f'(x) = e^x$	$f''(x) = e^x$

Számítsuk ki a függvények második differenciálhányadosát az 1 pontban.

a) $f''(1) = 2$, b) $f''(1) = -1$, c) $f''(1) = e$.

Ha az f függvény értelmezési tartománya nyílt halmaz és az f kétszer differenciálható értelmezési tartománya minden pontjában, akkor azt mondjuk, hogy f **kétszer differenciálható** függvény.

Természetesen, ha f kétszer differenciálható függvény, akkor $D_f = D_{f'} = D_{f''}$.

5.18. példa. Adott az

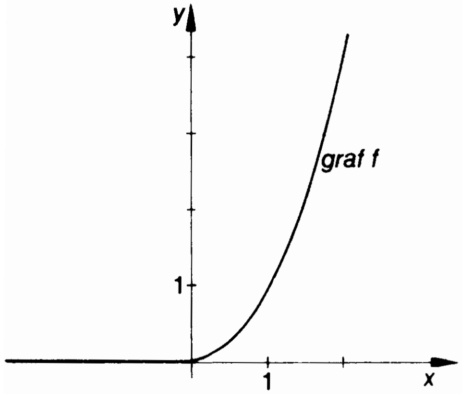
$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R}_0^-, \\ x^2, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R}^+ \end{cases}$$

függvény *(5.7. ábra)*.

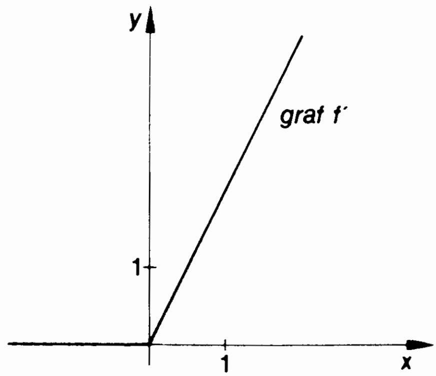
Az f függvény differenciálható, és deriváltja

$$f': f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R}_0^-, \\ 2x, & \text{ha} \quad x \in \mathbf{R}^+ \end{cases} \textit{(5.8. ábra)}.$$

Az f' függvény azonban már nem differenciálható függvény, mert f' a 0 pontban nem differenciálható.



5.7. ábra



5.8. ábra

Ez a példa is mutatja, hogy ha egy f függvény differenciálható, abból általában nem következik, hogy f kétszer is differenciálható.

Megjegyezzük, hogy értelemszerű módosítással könnyen értelmezhető valamely f függvény jobb, illetve bal oldali második differenciálhányadosa.

5.19. példa. Határozzuk meg az

$$f: f(x) = 2x - x^3, \qquad x \in [1, 3]$$

függvény második deriváltját, majd második differenciálhányadosát az 1, 2 és a 3 pontban.

$$f': f'(x) = 2 - 3x^2, \qquad x \in [1, 3],$$

$$f'': f''(x) = -6x, \qquad x \in [1, 3].$$

$$f''_+(1) = -6, \qquad f''(2) = -12, \qquad f''_-(3) = -18.$$

Az f függvény az értelmezési tartománya minden belső pontjában kétszer differenciálható, továbbá az 1 pontban létezik jobb oldali, a 3 pontban bal oldali második differenciálhányadosa.

Megfelelő feltételek fennállása esetén értelmezhetjük egy függvény magasabbrendű deriváltjait is.

Általában, ha $f^{(n)}$ függvény deriváltja valamely $A \subset D_{f^{(n)}}$ halmazon létezik, akkor azt az f $(n+1)$-edik deriváltfüggvényének (deriváltjának) nevezzük. Jelölése:

$$f^{(n+1)} \quad \text{vagy} \quad \frac{d^{n+1}f(x)}{dx^{n+1}}.$$

Ha $a \in D_{f^{(n)}}$, akkor azt mondjuk, hogy az f az a pontban n-szer differenciálható.

Az elmondottakhoz az alábbi megjegyzéseket tesszük:

1. Szokásos az a megállapodás, hogy valamely f függvény 0-adik deriváltján magát az f függvényt értjük, azaz

$$f^{(0)} = f.$$

2. Valamely f függvény n-edik deriváltját az f függvény **n-edrendű deriváltjának** is nevezzük.
   Az $f^{(n)}(a)$ valós szám – az n-edik (n-edrendű) derivált a pontban vett helyettesítési értéke – az f függvény n-edik differenciálhányadosa az a pontban.

5.20. példa. Határozzuk meg az

$$f\colon\ f(x) = \ln x \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

függvény negyedik (negyedrendű) deriváltjának az e helyen vett helyettesítési értékét.
A deriváltak:

$$f'\colon\ f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad x \in \mathbf{R}^+,$$

$$f''\colon f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad x \in \mathbf{R}^+,$$

$$f'''\colon\ f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad x \in \mathbf{R}^+,$$

$$f^{(4)}\colon\ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}, \qquad x \in \mathbf{R}^+;$$

$$f^{(4)}(e) = -\frac{6}{e^4}.$$

Ha minden $n \in \mathbf{N}$-re létezik az f függvény n-edrendű deriváltja, akkor f-et **akárhányszor** (vagy **végtelen sokszor**) **differenciálhatónak** nevezzük.

5.21. példa. Bármely polinom deriváltja is polinom, ezért akárhányszor differenciálható.

Legyen például

$$f\colon\ f(x) = 3x^4+x^3+2x^2+5x-4.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
f'\colon\ f'(x) &= 12x^3+3x^2+4x+5,\\
f''\colon\ f''(x) &= 36x^2+6x+4,\\
f'''\colon\ f'''(x) &= 72x+6,\\
f^{(4)}\colon\ f^{(4)}(x) &= 72,\\
f^{(5)}\colon\ f^{(5)}(x) &= 0,
\end{aligned}$$

és innen adódik, hogy

$$f^{(n)}\colon\ f^{(n)}(x) = 0 \qquad (n \geqq 5).$$

Megemlítjük még, hogy bármely racionális függvény akárhányszor differenciálható az értelmezési tartományának minden pontjában, és minden deriváltja racionális függvény. Az exp, sin, cos függvények differenciálási szabálya alapján nyilvánvaló, hogy ezek is akárhányszor differenciálhatók.

5.22. példa. Határozzuk meg a

$$\sin\colon\ x \mapsto \sin x$$

függvény 29-edik deriváltját.

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x,\\
(\sin x)'' &= -\sin x,\\
(\sin x)''' &= -\cos x,\\
(\sin x)^{(4)} &= \sin x \qquad\qquad (x \in \mathbf{R}).
\end{aligned}$$

A deriváltak 4-es periódussal ismétlődnek, így

$$(\sin x)^{(28)} = \sin x$$

és

$$(\sin x)^{(29)} = \cos x.$$

5.7 Egyenlet megoldása iterációval

A szélsőértékhelyek felkutatása céljából gyakran kerül sor valamely függvény zérushelyeinek közelítő meghatározására. A 4.6 fejezetben már megismerkedtünk egy ilyen módszerrel, az ún. intervallumfelezési eljárással. Zérushelyek meghatározására más módszerek is ismeretesek. Ilyen például az ún. **iterációs** módszer.

Ez a módszer az

$$x=f(x) \qquad (5.2.)$$

alakban felírt egyenletek megoldására alkalmazható.

Ha c gyöke az (5.2.) egyenletnek, akkor ez azt jelenti, hogy

$$c=f(c).$$

Ha x_0 nem gyöke az (5.2.) egyenletnek, akkor az f-nek az x_0 helyen vett helyettesítési értéke nem egyenlő x_0-lal, azaz

$$x_0 \neq f(x_0).$$

Jelöljük az $f(x_0)$ helyettesítési értéket x_1-gyel:

$$x_1=f(x_0).$$

Ezt az x_1-et helyettesítve az f-be, ha x_1 sem gyöke az egyenletnek, egy $x_2 \neq x_1$ értéket kapunk:

$$x_2=f(x_1).$$

Az eljárást folytatva, az

$$x_k=f(x_{k-1}) \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

valós számok egy sorozatához jutunk.

Az (x_k) sorozatot – a sorozat tagjainak képzési módjára utalva – iterációs sorozatnak szokás nevezni.

Az (x_k) sorozat konvergenciájára vonatkozik az alábbi tétel.

5.12. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy f differenciálható az $[a, b]$ intervallumon, és*

$$|f'(x)| \leqq q<1, \qquad x \in [a, b].$$

Legyen továbbá c az $x=f(x)$ egyenletnek az $[a, b]$ intervallumban lévő egyetlen gyöke ($c=f(c)$). Ekkor tetszőleges $x_0 \in [a, b]$ esetén az

$$(x_k)=(f(x_{k-1})) \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

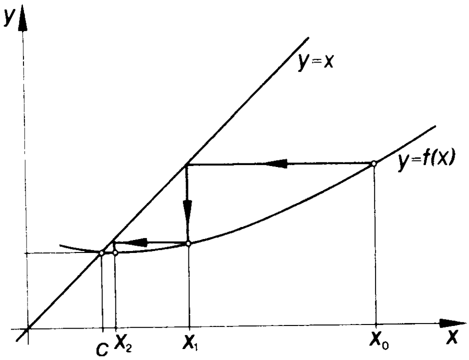
sorozat konvergens, és határértéke a keresett gyök, azaz

$$c = \lim x_k.$$

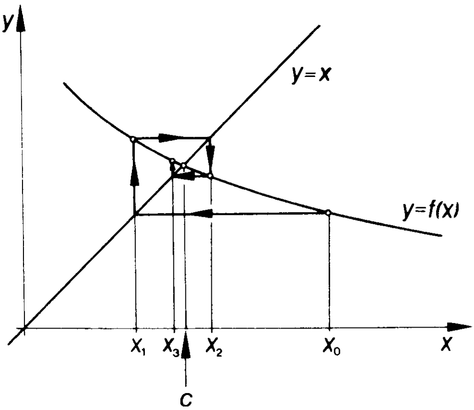
A tétel bizonyítására nem térünk ki (l. pl. [27]-ben).

Az eljárás lehetséges eseteit geometriailag az *5.9., 5.10., 5.11., 5.12. ábrák* szemléltetik. Az $x=f(x)$ egyenlet valós gyökét az $y=x$ egyenletű egyenes és az $y=f(x)$ egyenletű görbe metszéspontjának abszcisszája szolgáltatja.

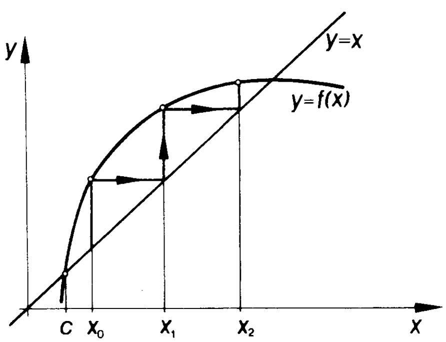
Az *(5.9.)* és az *(5.10.) ábrán* a c gyök környezetében $|f'(x)|\leqq q<1$, és az eljárás konvergens; az *(5.11.)* és az *(5.12.) ábrán* a c gyök környezetében $|f'(x)|>1$, és az eljárás divergens.



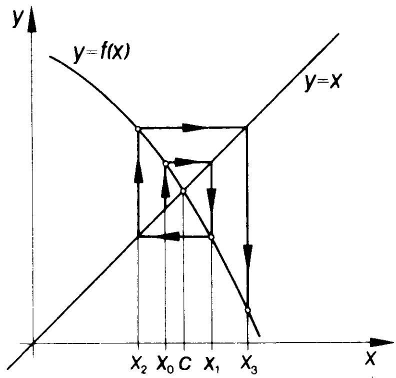
5.9. ábra



5.10. ábra



5.11. ábra



5.12. ábra

A közelítés hibájának becslésére az

$$|c-x_k| \leqq \frac{q}{1-q}|x_k-x_{k-1}| \qquad (k\in \mathbf{N}^+)$$

egyenlőtlenséget használjuk.

Ha $q \leqq \frac{1}{2}$, akkor

$$|c-x_k| \leqq |x_k-x_{k-1}|$$

adódik, vagyis ebben az esetben az

$$|x_k-x_{k-1}| < \varepsilon$$

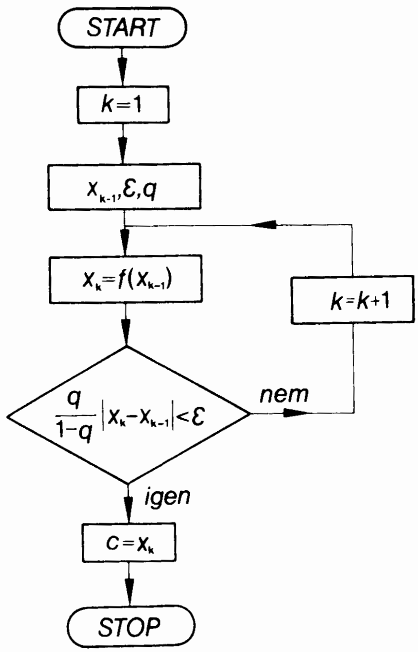
egyenlőtlenségből következik az

$$|c-x_k| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség.

Az iterációs eljárással adódó x_k értékeket a gyakorlatban addig számoljuk, míg két egymás utáni x_{k-1} és x_k érték egymástól az előírt hibakorlátnál ($\varepsilon > 0$) kevesebbel különbözik; ekkor leállítjuk az eljárást, és az x_k-t tekintjük az $x = f(x)$ egyenlet gyökének.

Az algoritmus blokkdiagramja az *5.13. ábrán* látható.



5.13. ábra

5.23. példa. Számítsuk ki az

$$x^5+x-0{,}5 = 0$$

egyenlet gyökét 10^{-4} pontossággal (hibakorláttal).

Egyenletünk az $f(x) = 0{,}5-x^5$ ($x \in \mathbf{R}$) függvény bevezetésével az

$$x=f(x)$$

alakot ölti. Határozzuk meg a gyököt tartalmazó intervallumot úgy, hogy

$$|f'(x)| = |-5x^4| \leqq q < 1$$

feltétel is teljesüljön.

Mivel az $x \mapsto x^5+x-0{,}5$ függvénynek
a 0 helyen vett helyettesítési értéke: $-0{,}5$;
a 0,5 helyen vett helyettesítési értéke: $1/32$,
azért a [0, 0,5] intervallumban van gyöke az egyenletnek. Továbbá

$$|-5x^4| \leqq q = \frac{5}{16}$$

a [0, 0,5] intervallumban, így minden feltétel teljesül, s például az

$$x_0 = 0{,}5, \qquad x_k = 0{,}5 - x_{k-1}^5 \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

sorozat feladatunk megoldásához konvergál.
A számítás eredménye:

k	x_k
0	0,500 000 0000
1	0,468 750 0000
2	0,477 368 8614
3	0,475 210 3478
4	0,475 765 7578
5	0,475 623 8055
6	0,475 660 1489

A $q < 0{,}5$ feltétel teljesülése miatt az $|x_6 - x_5| < 10^{-4}$ egyenlőtlenségből következik a c pontos gyökre és x_6 közelítő gyökre az

$$|c - x_6| < 10^{-4}$$

egyenlőtlenség teljesülése.
Tehát az egyenlet közelítő megoldása:

$$c \approx x_6.$$

5.24. példa. Határozzuk meg a

$$g\colon\ g(x) = e^x - x - 3,$$

függvény egyik zérushelyét.

Mivel g folytonos, továbbá

$$g(1,5) < 0 \qquad \text{és} \qquad g(2) > 0,$$

azért az [1,5; 2] intervallumban a g függvénynek van zérushelye.
Ha az

$$e^x - x - 3 = 0$$

egyenletet

$$x = e^x - 3$$

alakba írjuk, akkor az

$$|(e^x - 3)'| = |e^x| \leqq q < 1, \qquad x \in [1{,}5;\, 2]$$

feltétel nem teljesül.
Írjuk az egyenletet az

$$e^x = x + 3,$$

illetve az

$$x = \underbrace{\ln(x+3)}_{f(x)}$$

alakba.
Ekkor teljesül az

$$|f'(x)| = \left|\frac{1}{x+3}\right| \leqq q = \frac{2}{9}, \qquad x \in [1{,}5;\, 2]$$

feltétel. Így például az

$$x_0 = 1{,}5, \qquad x_k = \ln(x_{k-1}+3) \qquad (k \in \mathbf{N}^+)$$

sorozat feladatunk megoldásához konvergál.

A számítás eredménye, ha az egyenlet gyökét 10^{-5} pontossággal kívánjuk meghatározni:

$x_0 = 1{,}5$

k	$x_k = \ln(x_{k-1}+3)$	
1	1,504 077 397	
2	1,504 983 075	
3	1,505 184 134	
4	1,505 228 763	
5	1,505 238 670	$\left(q = \frac{2}{9} < \frac{1}{2}\right)$

Az x_5 közelítő gyökre teljesül az

$$|c - x_5| < 10^{-5}$$

egyenlőtlenség, tehát az egyenlet közelítő megoldása

$$c \approx x_5.$$

5.8 Többváltozós függvények differenciálása

DEFINÍCIÓ. *Legyen f egy kétváltozós függvény, (a, b) pedig értelmezési tartományának egy pontja.*
Ha az

$$f_1:\ f_1(x) = f(x, b), \qquad (x, b) \in D_f,$$

illetve

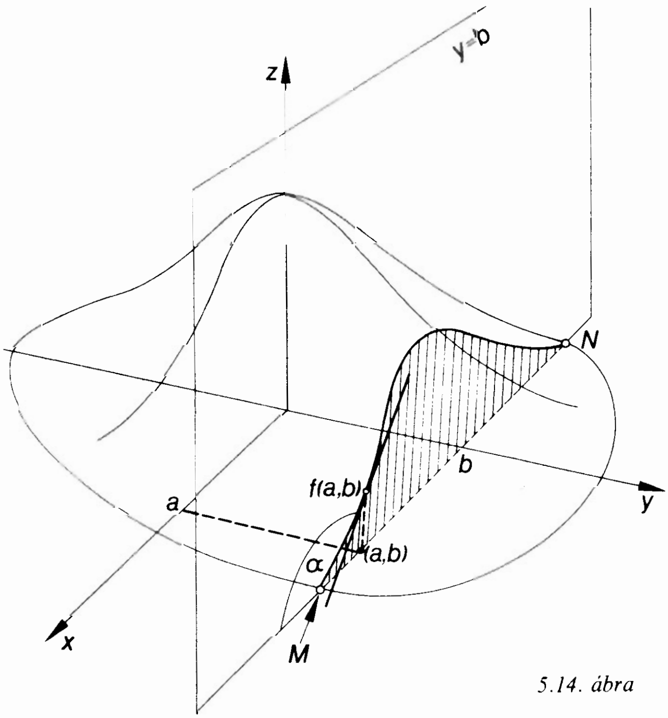
$$f_2:\ f_2(y) = f(a, y), \qquad (a, y) \in D_f$$

egyváltozós függvények (szintvonalak) az a, illetve b pontban differenciálhatók, akkor azt mondjuk, hogy az f az (a, b) pontban x (első változó) szerint, illetve y (második változó) szerint ***parciálisan differenciálható,*** *és parciális differenciálhányadosai az (a, b) pontban:*

$$f_1'(a), \text{ illetve } f_2'(b).$$

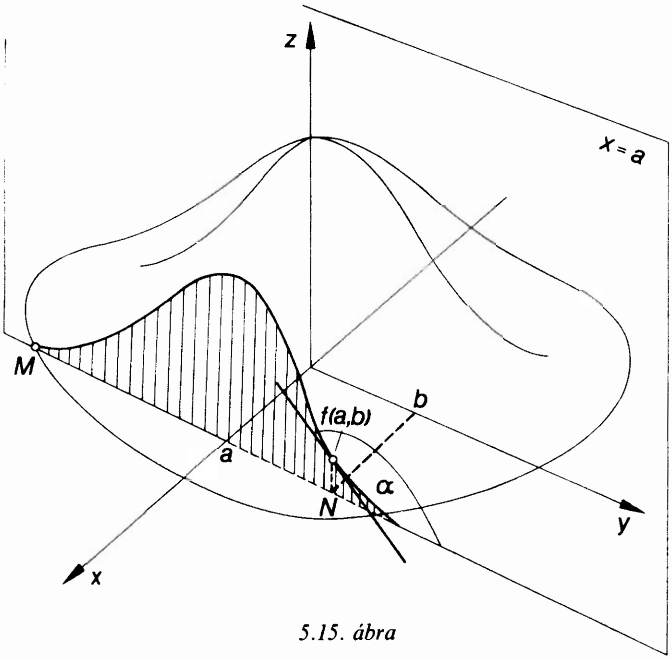
Az f kétváltozós függvény parciális differenciálhányadosainak geometriai jelentése a következő:

Tekintsük az f kétváltozós függvényt. Az f függvény grafikonja általában egy felület. Ennek a felületnek és az $y = b$ egyenletű síknak MN metszésvonala adja az $f_1(x)$ függvény grafikonját, amely már egy síkgörbe.



5.14. ábra

Az f függvénynek az x változó szerinti parciális differenciálhányadosa az (a, b) pontban (vagyis f_1-nek az a ponthoz tartozó differenciálhányadosa) az MN metszésvonalhoz az $\big((a, b), f(a, b)\big)$ pontban húzott érintő iránytangense. Az érintő természetesen benne fekszik az $y = b$ egyenletű síkban *(5.14. ábra)*. Hasonló jelentése van az f y szerinti parciális differenciálhányadosának az (a, b) pontban *(5.15. ábra)*.



5.15. ábra

5.25. példa. Vegyük az f: $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ kétváltozós függvényt.
Számítsuk ki az f függvény parciális differenciálhányadosait a (2, 3) pontban.
A (2, 3) ponthoz rendeljünk hozzá két egyváltozós függvényt az alábbi módon:

$$f_1 : f_1(x) = f(x, 3) = x^2 + 6x + 3,$$

illetve

$$f_2 : f_2(y) = f(2, y) = 4y + 7.$$

Így

$$f_1'(x) = 2x + 6, \quad f_2'(y) = 4;$$

$$f_1'(2) = 10, \quad f_2'(3) = 4.$$

Ennek geometriai jelentése az, hogy ha az f függvényhez tartozó felületet metsszük az $y=3$ síkkal, akkor a metszetgörbe $(2, 3, 19)$ koordinátájú pontjában az érintő meredeksége 10. Ha az $x=2$ síkkal metsszük, akkor a metszetgörbe ugyanazon pontban vett érintőjének meredeksége 4.

Az egyváltozós függvényekhez hasonlóan a kétváltozós függvényekre is értelmezzük a parciális deriváltfüggvények (deriváltak) fogalmát.

Definíció. *Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény az $A \subset D_f$ halmaz minden pontjában parciálisan differenciálható az x (első változó) szerint. Azt a függvényt, amely az A halmaz minden pontjához hozzárendeli az f függvény x szerinti parciális differenciálhányadosát, az f függvény x szerinti* ***parciális deriváltfüggvényének*** *nevezzük.*
Hasonlóan definiálható az y szerinti parciális deriváltfüggvény is.
A parciális deriváltfüggvények jelölése:

$$f'_x \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{illetve} \quad f'_y \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A definíció alapján az f kétváltozós függvényt az x szerint úgy kell parciálisan differenciálni, hogy az y-t konstansnak tekintjük, és az így előálló egyváltozós függvényt differenciáljuk.

Természetesen az y szerinti parciális differenciálásnál az x-et tekintjük konstansnak.

5.26. példa. Legyen f: $f(x, y) = x^2+xy^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Ennek a kétváltozós függvénynek két parciális deriváltja van.

Az x szerinti parciális derivált meghatározásánál az y-t, az y szerintinél pedig az x-et tekintjük konstansnak. Így a parciális deriváltak:

$$f'_x:\ f'_x(x, y) = 2x+y^2, \qquad D_{f'_x} = \mathbf{R}^2,$$

$$f'_y:\ f'_y(x, y) = 2xy, \qquad D_{f'_y} = \mathbf{R}^2.$$

Számítsuk ki a $(2, 3)$ pontbeli parciális differenciálhányadosokat.

$$f'_x(2, 3) = 2\cdot 2+3^2 = 13,$$

$$f'_y(2, 3) = 2\cdot 2\cdot 3 = 12.$$

A kétváltozós függvények parciális deriváltjaira elmondottakat könnyen általánosíthatjuk kettőnél több, akárhány változóra is.

A többváltozós függvényt valamely változó szerint parciálisan úgy differenciáljuk, hogy a kérdéses változó kivételével az összes többi változót konstansnak tekintjük, és az így előálló egyváltozós függvényt differenciáljuk.

5.27. példa. Határozzuk meg az

$$f\colon f(x, y, z) = 3xy^2z^2 + 6yz^3 + 2x^2yz, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

háromváltozós függvény parciális deriváltjait.

Az f-nek három parciális deriváltja van. Az x szerinti parciális derivált meghatározásakor a másik két változót konstansnak tekintjük. Így

$$f'_x\colon f'_x(x, y, z) = 3y^2z^2 + 4xyz, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

Hasonlóképpen

$$f'_y\colon f'_y(x, y, z) = 6xyz^2 + 6z^3 + 2x^2z, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3;$$

és

$$f'_z\colon f'_z(x, y, z) = 6xy^2z + 18yz^2 + 2x^2y, \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3.$$

5.9 Magasabb rendű parciális deriváltak

Többváltozós valós függvények esetében is beszélhetünk magasabb rendű parciális deriváltakról, feltéve, hogy a parciális deriváltfüggvények „tovább" deriválhatók.

Definíciójukat kétváltozós függvényekre adjuk meg. Ezt – értelemszerűen – tetszőleges n-változós függvényekre is kiterjeszthetjük.

DEFINÍCIÓ. *Tegyük fel, hogy egy halmazon léteznek az f kétváltozós függvény f'_x és f'_y parciális deriváltfüggvényei, és f'_x, valamint f'_y parciálisan differenciálható valamely $(a, b) \in D_{f'_x} \cap D_{f'_y}$ pontban. Ekkor azt mondjuk, hogy f **kétszer parciálisan differenciálható** az (a, b) pontban.*

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény valamely A halmazon kétszer parciálisan differenciálható. Ekkor az*

$$f''_{xx}\colon f''_{xx}(x, y) = (f'_x)'_x\,(x, y),$$

$$f''_{xy}\colon f''_{xy}(x, y) = (f'_x)'_y\,(x, y),$$

$$f''_{yx}\colon f''_{yx}(y, x) = (f'_y)'_x\,(x, y),$$

$$f''_{yy}\colon f''_{yy}(y, y) = (f'_y)'_y\,(x, y), \qquad (x, y) \in A$$

*függvényeket f **második** (másodrendű) **parciális deriváltfüggvényeinek** nevezzük.*

Analóg módon értelmezhetők – a másodrendű parciális deriváltfüggvényekből kiindulva – a harmadrendű parciális deriváltfüggvények, és így tovább. Egy kétváltozós függvénynek összesen 2^k számú k-adrendű parciális deriváltfüggvénye értelmezhető.

Ha az f kétváltozós függvényt többször parciálisan differenciáljuk ugyanazon változó szerint, akkor az így kapott függvényeket az f **tiszta parciális deriváltfüggvényeinek** nevezzük.

Ha pedig az f kétváltozós függvényt többször parciálisan differenciáljuk, de nem mindig ugyanazon változó szerint, akkor az így kapott függvényeket az f **vegyes parciális deriváltfüggvényeinek** nevezzük.

5.28. példa. Legyen

$$f\colon\ f(x, y) = xe^y + y \sin x, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Írjuk fel az f függvény második parciális deriváltfüggvényei közül azokat, ahol másodszor x szerint deriváltunk:

$$f'_x\colon\ f'_x(x, y) = e^y + y \cos x, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

$$f'_y\colon\ f'_y(x, y) = xe^y + \sin x, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

$$f''_{xx}\colon\ f''_{xx}(x, y) = -y \sin x, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

$$f''_{yx}\colon\ f''_{yx}(x, y) = e^y + \cos x, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Megemlítjük, hogy az elnevezés egyöntetűsége céljából az f függvény f'_x és f'_y parciális deriváltfüggvényeit az f első (vagy elsőrendű) parciális deriváltfüggvényeinek nevezzük.

5.29. példa. Határozzuk meg az

$$f\colon\ f(x, y) = 2x^3y^4$$

függvény másodrendű parciális deriváltfüggvényeit, majd a (2, 1) pontbeli vegyes másodrendű parciális differenciálhányadosait.

Az f elsőrendű parciális deriváltfüggvényei:

$$f'_x\colon\ f'_x(x, y) = 6x^2y^4,$$

$$f'_y\colon\ f'_y(x, y) = 8x^3y^3,$$

a második parciális deriváltfüggvényei:

$$f''_{xx}\colon\ f''_{xx}(x, y) = 12xy^4,$$

$$f''_{xy}\colon\ f''_{xy}(x, y) = 24x^2y^3,$$

$$f''_{yx}\colon\ f''_{yx}(x, y) = 24x^2y^3,$$

$$f''_{yy}\colon\ f''_{yy}(x, y) = 24x^3y^2.$$

A (2, 1) pontbeli vegyes másodrendű parciális differenciálhányadosok:

$$f''_{xy}(2, 1) = 96, \qquad \text{és} \qquad f''_{yx}(2, 1) = 96.$$

Látható, hogy a vegyes másodrendű parciális differenciálhányadosok megegyeznek, azaz

$$f''_{xy}(2, 1) = f''_{yx}(2, 1).$$

5.13. TÉTEL. *Ha az f kétváltozós függvénynek az (a, b) pont környezetében léteznek másodrendű parciális deriváltfüggvényei és azok az (a, b) pontban folytonosak, akkor*

$$f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b).$$

A tétel igazolására nem térünk ki.

5.10 Taylor-polinom, Taylor-sor

Ebben a fejezetben egy egyszerű módszert ismertetünk a végtelen sokszor differenciálható függvények értékének alapműveletek segítségével történő közelítő meghatározására.

Ha az f függvény többször differenciálható, akkor hozzárendelhető olyan polinom, amely az a helyen $f(a)$; a polinom differenciálhányadosai pedig a megfelelő $f^{(i)}(a)$ értéket veszik fel.

DEFINÍCIÓ. *Ha az f függvény az a pontban n-szer differenciálható, akkor képezhetjük a*

$$T_n\colon\ T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

polinomot, amelyet az f függvény a-hoz tartozó ***n-edrendű Taylor-polinomjának*** *nevezünk.*

Könnyű belátni, hogy

$$T_n(a) = f(a);\ T'_n(a) = f'(a);\ T''_n(a) = f''(a),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Megjegyzések: 1. Ha f n-edfokú polinom, akkor bármely rögzített a valós számra

$$T_n(x) = f(x), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

2. Ha $a = 0$, akkor a T_n függvényt f **n-edrendű MacLaurin-polinomjának** nevezzük.

Nézzünk néhány példát!

5.30. példa. *a)* Legyen f: $f(x)=e^x$.

Írjuk fel f-nek az 1 ponthoz tartozó 4-edrendű Taylor-polinomját.
Mivel

$$f^{(n)}(x)=e^x \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad \text{és} \quad a=1,$$

azért

$$T_4\colon\ T_4(x) = e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\frac{e}{3!}(x-1)^3+\frac{e}{4!}(x-1)^4.$$

A 0 ponthoz tartozó 4-edrendű MacLaurin-polinomja pedig

$$T_4\colon\ T_4(x) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.$$

b) Legyen f: $f(x) = \ln(1+x)$, $x\in\,]-1, +\infty[$.

Írjuk fel f-nek a 0 ponthoz tartozó n-edrendű MacLaurin-polinomját.
Mivel

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}, \qquad x\in\,]-1, +\infty[,$$

$$f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad x\in\,]-1, +\infty[,$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \qquad x\in\,]-1, +\infty[,$$

általában

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \qquad x\in\,]-1, +\infty[,$$

azért

$$T_n\colon\ T_n(x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

A 3.6. fejezetben már találkoztunk a hatványsor fogalmával (l. 90. oldalon lévő definíciót). A hatványsorokkal kapcsolatban mindig az az alapvető kérdés, hogy milyen halmazon konvergens. Azt a halmazt, amelyen a hatványsor konvergens, a hatványsor konvergenciahalmazának nevezzük.

Bebizonyítható, hogy egy hatványsor vagy csak az a pontban, vagy csak az a pontra szimmetrikus intervallumban (az a környezetében) konvergens (a végpontokban eltérő módon viselkedhet), vagy mindenütt konvergens.

Például az $1+x+x^2+\ldots+x^n$ sor (végtelen mértani sor) konvergenciahalmaza a $]-1, 1[$ nyílt intervallum (l. 3.11. tétel).

Különös fontosságuk van azoknak a hatványsoroknak, amelyeket az alábbi definícióban adunk meg.

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény az értelmezési tartománya valamely a pontjában akárhányszor differenciálható.*
Ekkor az

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

hatványsort az f függvény ***a-hoz tartozó Taylor-sorának*** *nevezzük.*

Megjegyzések: 1. Az f függvény a-hoz tartozó Taylor-sorának n-edik részletösszege egyenlő az f a-hoz tartozó n-edrendű Taylor-polinomjával.

2. Az $a=0$ esetben a Taylor-sor helyett a MacLaurin-sor elnevezés használatos.

Nézzünk néhány példát!

5.31. példa. *a)* Legyen f: $f(x)=e^x$. Mivel $f^{(n)}(x)=e^x$ $(n\in\mathbf{N}^+)$, azért f-nek az 1 ponthoz tartozó Taylor-sora a következő:

$$e+\frac{e}{1!}(x-1)+\frac{e}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{e}{n!}(x-1)^n+\ldots,$$

a 0 ponthoz tartozó MacLaurin-sora pedig

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

b) Legyen f: $f(x)=\ln(1+x)$, $x\in]-1,+\infty[$.
Mivel (l. 5.30. példa)

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\qquad (n\in\mathbf{N}^+,\ x\in]-1,+\infty[),$$

azért f-nek a 0 ponthoz tartozó MacLaurin-sora a következő:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots.$$

A felsorolt példákból látható, hogy a Taylor-sorok, illetve a MacLaurin-sorok képzése technikailag igen egyszerű feladat. Sokkal nehezebb probléma annak eldöntése, hogy mi ezeknek a hatványsoroknak a konvergenciahalmaza. A hányadoskritériummal (l. 3.12. tétel) könnyen ellenőrizhetők a következő eredmények. Az $f(x)=e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ függvényekhez tartozó MacLaurin-sor konvergenciahalmaza az $\mathbf{R}$ halmaz, ezzel szemben az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényhez tartozó MacLaurin-sor konvergenciahalmaza a $]-1, 1]$ intervallum, tehát az intervallum bal végpontja nem tartozik a halmazhoz, de a jobb végpont igen (ez utóbbi állítás a hányadoskritériummal nem igazolható). Magának a konvergenciahalmaznak az ismerete azonban nem elégséges. Rendkívül fontos számunkra az is, hogy a konvergenciahalmaz mely pontjaiban egyezik meg a hatványsor összege a függvény megfelelő helyettesítési értékével. Egyezés esetén azt mondjuk, hogy az illető pontban a hatványsor előállítja a függvényt.

Az $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ és az $f(x) = \ln(1+x)$ $(x \in]-1, +\infty[)$ függvényeknél a konvergenciahalmaz minden pontjára igaz, hogy a hatványsoruk előállítja a függvényt. Így

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \ldots \qquad (x \in]-1, 1]).$$

(Nem bizonyítjuk.)

Amikor valamely függvényt előállítunk hatványsorával, azt is szoktuk mondani, hogy az illető függvényt hatványsorba fejtettük.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy van olyan – akárhányszor differenciálható – függvény, amelynek Taylor-sora (MacLaurin-sora) mindenütt konvergens, de a sor összege nem állítja elő a függvényt. Ilyen esetekre azonban nem térünk ki.

5.14. TÉTEL *Legyen az f függvény az „a" pont egy K környezetében akárhányszor differenciálható, és tegyük fel, hogy az $f^{(n)}(x)$ deriváltak egy közös korlát alatt maradnak, azaz van olyan k valós szám, hogy*

$$|f^{(n)}(x)| \leqq k \qquad (x \in K,\ n \in \mathbf{N}).$$

Ekkor bármely $x \in K$ esetén

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots .$$

(Nem bizonyítjuk.)

A tétel szerint, ha a függvény deriváltjai valamilyen korlát alatt maradnak, akkor a függvény Taylor-sora előállítja a függvényt.

Az előzőekben említett $f(x)=e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \ln(1+x)$ ($x \in]-1, 1]$) függvényekre fennállnak az 5.14. tétel feltételei, így hatványsorba fejthetők.

Felmerülhet az a kérdés, hogy mi haszna mindennek. Most csupán arra hivatkozunk, hogy sorfejtés alapján mód nyílik rá, hogy függvényeket (pl.: sin, cos stb.) polinomok segítségével közelítsünk meg. Ez egyszerűen úgy történik, hogy a sor tagjait csak bizonyos kitevőig vesszük figyelembe, a többi tagot elhagyjuk. Az $f(x)=e^x$ negyedfokú közelítése például így írható fel:

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}.$$

A tagok számának növelésével a konvergenciahalmazon a közelítés tetszés szerinti pontossággal valósítható meg.

Az a lehetőség, hogy a függvények tetszés szerinti pontossággal helyettesíthetők polinomokkal, egyszerűvé teszi a függvények értékének tetszés szerinti pontosságú kiszámítását. A polinomok helyettesítési értékének meghatározásához ugyanis csupán a négy alapműveletet kell alkalmazni, mégpedig véges számú lépésben. Pl. a sin, cos, exp stb. függvények numerikus vizsgálatára valójában nincs is más lehetőség. A számítógépek is ezen a módon végzik el az ezekkel a függvényekkel való számításokat.

Példaképpen megemlítjük, hogy az $f(x)=e^x$ függvény helyettesítési értéke 0,1 esetén az előbb felírt negyedfokú közelítő polinommal így fejezhető ki:

$$e^{0,1} \approx 1+\frac{0,1}{1!}+\frac{0,01}{2!}+\frac{0,001}{3!}+\frac{0,0001}{4!}.$$

Ez a valós szám már négy tizedesjegyre pontosan szolgáltatja a helyettesítési értéket. A pontos számítások szerint ugyanis

$$e^{0,1} \approx 1,1052,$$

s a fenti valós szám is ezt adja eredményül.

A közelítő polinom pontossága nem csak attól függ, hogy hány tagot veszünk figyelembe, hanem attól is, hogy milyen messze választjuk meg az x konkrét értékét a 0-tól. A pontosság meghatározására nem térünk ki.

6. DIFFERENCIÁLHATÓ FÜGGVÉNYEK VIZSGÁLATA

Ebben a fejezetben a differenciálható függvények néhány olyan globális és lokális tulajdonságát vizsgáljuk, amelyet a differenciálhányadosok segítségével lehet felismerni. Először az egyváltozós, majd később a többváltozós függvényeket vesszük szemügyre.

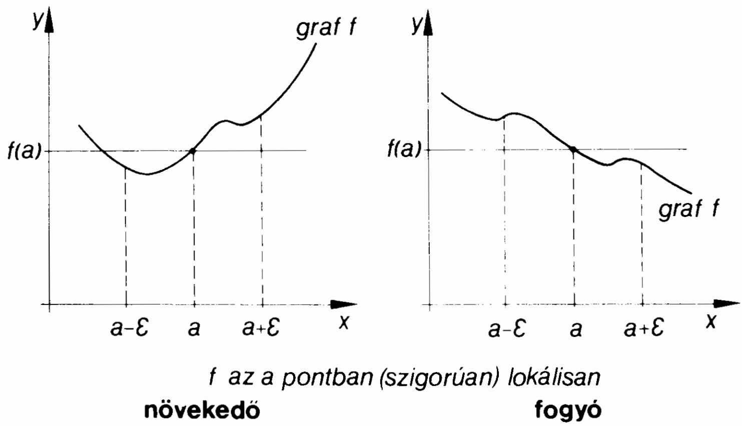
6.1 Lokális növekedés és fogyás, monotonitás

DEFINÍCIÓ. *Legyen a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény az a pontban (szigorúan)* ***lokálisan növekedő,*** *illetve* ***fogyó,*** *ha van olyan* $\varepsilon > 0$, *hogy minden*

$$x \in]a-\varepsilon, a[\quad \textit{esetén} \quad f(x) < f(a), \quad \textit{illetve} \quad f(x) > f(a)$$

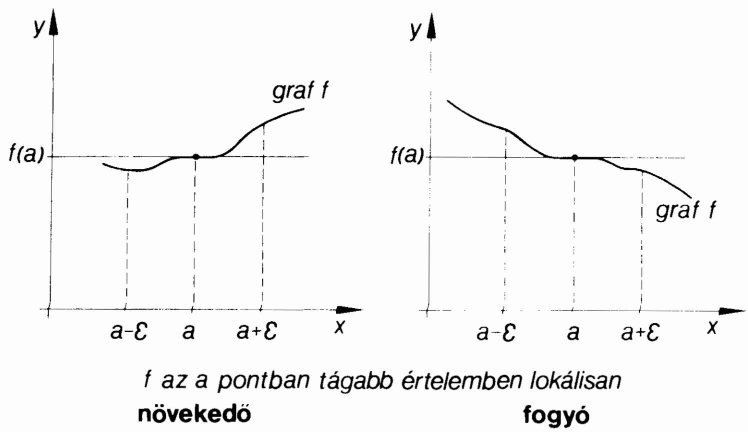
és minden

$$x \in]a, a+\varepsilon[\quad \textit{esetén} \quad f(x) > f(a), \quad \textit{illetve} \quad f(x) < f(a).$$



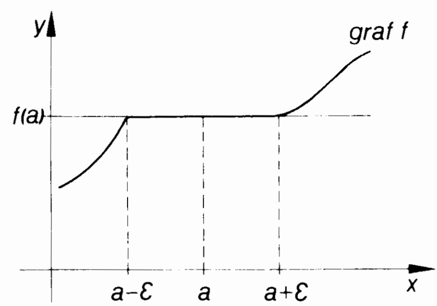
6.1a ábra

Ha a függvényértékek között az egyenlőséget megengedjük, akkor tágabb értelemben vett lokális növekedésről, illetve fogyásról beszélünk (6.1a, b ábra).



6.1b ábra

Az elmondottakhoz néhány megjegyzést fűzünk.



6.2. ábra

1. Ha a az f függvény értelmezési tartományának egy belső pontja és ott f tágabb értelemben lokálisan növekedő és lokálisan fogyó is, akkor f az a pont ε-sugarú környezetében állandó *(6.2. ábra)*.

2. Az f függvényt **jobbról lokálisan növekedőnek,** illetve **jobbról lokálisan fogyónak** nevezzük értelmezési tartománya valamely a pontjában, ha van olyan $\varepsilon > 0$, hogy minden $x \in]a, a+\varepsilon[$ esetén $f(x) > f(a)$, illetve $f(x) < f(a)$. Hasonló módon értelmezzük az a pontban balról lokálisan növekedő, illetve balról lokálisan fogyó függvényt.

A most bevezetett elnevezések emlékeztetnek a monoton függvényekkel kapcsolatban a 2.5 pontban megismert elnevezésekre. Ez nem indokolatlan, mert szoros összefüggés található a két fogalomkör között.

6.1. TÉTEL. *Legyen az I nyílt intervallum része az f függvény értelmezési tartományának. Az f pontosan akkor (szigorúan) lokálisan növekedő, illetve fogyó az I minden pontjában, ha f (szigorúan) monoton növekedő, illetve fogyó az I intervallumon.*

Megjegyzés: Ha valamely feltétel csak tágabb értelemben teljesül, akkor a megfelelő állítás is.

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy f monoton növekedő az I intervallumon, és legyen $a \in I$. Ekkor – mivel I nyílt intervallum – az a pontnak van olyan K környezete, amely része az I intervallumnak. Mivel az egész I intervallumra, így a K környezetre is teljesül, hogy $x < a$ esetén $f(x) < f(a)$ és $x > a$ esetén $f(x) > f(a)$, azért f az a pontban (szigorúan) lokálisan növekedő.

A fordított állítást nem bizonyítjuk, az megtalálható pl. [15]-ben.

Lehetséges, hogy egy f függvény lokálisan növekedő egy a helyen, de nincs olyan környezete a-nak, amelyben f monoton növekedő.

Ilyen függvény például a 0 helyen az

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ez a függvény a 0 helyen lokálisan növekedő, de a 0-nak nincs olyan környezete, amelyben monoton növekedő lenne.

Az f függvény a pontbeli viselkedésére – ha a-ban differenciálható – következtethetünk az f a pontbeli differenciálhányadosából.

A lokális növekedés, illetve lokális fogyás és a differenciálhányados között a következő összefüggés áll fenn.

6.2. TÉTEL. *Legyen az f függvény differenciálható az a pontban.*

a) *Ha f tágabb értelemben lokálisan növekedő (fogyó) az a pontban, akkor $f'(a) \geqq 0$ ($f'(a) \leqq 0$).*

b) *Ha $f'(a) > 0$ ($f'(a) < 0$), akkor f (szigorúan) lokálisan növekedő (fogyó) az a pontban.*

Bizonyítás:

a) Ha f az a pontban tágabb értelemben lokálisan növekedő, akkor van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$\text{minden} \quad x \in]a-\varepsilon, a[\quad \text{esetén} \quad f(x) \leqq f(a)$$

és

$$\text{minden} \quad x \in]a, a+\varepsilon[\quad \text{esetén} \quad f(x) \geqq f(a),$$

következésképpen

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0, \quad \text{ha} \quad x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}.$$

Innen a 4.4. tétel alapján következik, hogy

$$f'(a) = \lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqq 0.$$

b) Tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor a 4.4. tétel alapján van olyan $\varepsilon > 0$, amelyre teljesül, hogy

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0, \quad \text{ha} \quad x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\setminus \{a\}.$$

Innen következik, hogy

$$\text{minden} \quad x \in]a-\varepsilon, a[\quad \text{esetén} \quad f(x) < f(a),$$

és

$$\text{minden} \quad x \in]a, a+\varepsilon[\quad \text{esetén} \quad f(x) > f(a).$$

Az a pontban tágabb értelemben lokálisan fogyó függvényre, illetve az $f'(a) < 0$ esetre a tétel hasonló módon igazolható.

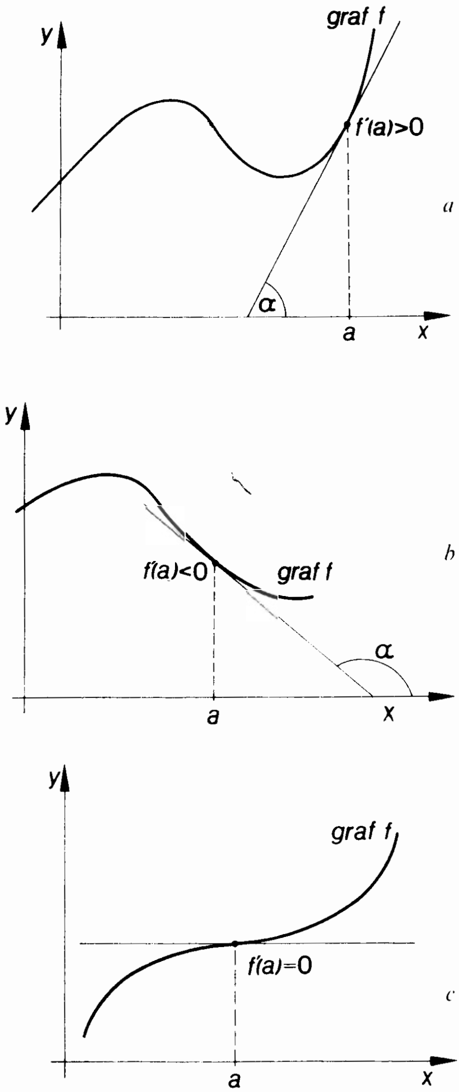
Az elmondottakhoz az alábbi megjegyzéseket tesszük:

1. Az a) állítás nem megfordítása b)-nek. Például az f: $f(x) = x^3$ függvény a 0 pontban (szigorúan) lokálisan növekedő, de $f'(0) = 0$. A példa alapján nyilvánvaló, hogy az a pontbeli (szigorú) lokális növekedésből nem következik, hogy $f'(a) > 0$.

2. A tétel b) része geometriailag azt jelenti, hogy ha az f grafikonjának $(a, f(a))$ pontjában húzott érintő meredeksége pozitív, akkor f lokálisan növekedő *(6.3a ábra)*, ha negatív, akkor f lokálisan fogyó *(6.3b ábra)*. A tétel a) része pedig geometriailag azt jelenti, hogy ha f az a pontban tágabb értelemben lokálisan növekedő, akkor a grafikonjának $(a, f(a))$ pontjában húzott érintő meredeksége vagy pozitív, vagy az érintő vízszintes, ha pedig tágabb értelemben lokálisan fogyó, akkor az érintő vagy vízszintes, vagy meredeksége negatív *(6.3c ábra)*.

3. Az „egyoldali" lokális növekedés, illetve lokális fogyás feltételei az egyoldali differenciálhányadosok segítségével fogalmazhatók meg.

Az előző eredmények felhasználásával a függvény monotonitását kapcsolatba hozhatjuk a differenciálhányadosak egy egyszerű tulajdonságával.



6.3. a, b, c, ábra

6.3. TÉTEL. *Legyen az f függvény az $[a, b]$ intervallumon folytonos és az $]a, b[$ intervallumon differenciálható. Az f függvény*

a) *pontosan akkor tágabb értelemben monoton növekedő (fogyó) az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x \in]a, b[$ pontban*

$$f'(x) \geqq 0 \qquad (f'(x) \leqq 0);$$

b) *pontosan akkor állandó az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x \in]a, b[$ pontban*

$$f'(x) = 0;$$

c) *pontosan akkor (szigorúan) monoton növekedő (fogyó) az $[a, b]$ intervallumon, ha minden $x \in]a, b[$ pontban*

$$f'(x) \geqq 0 \qquad (f'(a) \leqq 0),$$

de $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelynek tetszőleges x elemére $f'(x) = 0$.

Bizonyítás:

a) A 6.1. tétel értelmében (l. Megjegyzés), ha f tágabb értelemben monoton növekedő az $[a, b]$ intervallumon, akkor f bármely $c \in]a, b[$ pontban tágabb értelemben lokálisan növekedő. Ez a 6.2. tétel a) pontja szerint azt jelenti, hogy $f'(c) \geqq 0$, azaz minden $x \in]a, b[$ pontra fennáll az $f'(x) \geqq 0$ összefüggés.

Megfordítva: tegyük fel, hogy minden $x \in]a, b[$ pontra fennáll, hogy $f'(x) \geqq 0$. Ebből a feltételből tetszőleges $c > 0$ valós szám esetén következik, hogy a g: $g(x) = f(x) + cx$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény minden $x \in]a, b[$ pontjára teljesül a $g'(x) > 0$ egyenlőtlenség. Ezért a 6.2. tétel b) pontja szerint g minden $x \in]a, b[$ pontban (szigorúan) lokálisan növekedő, és így a 6.1. tétel szerint a g függvény monoton növekedő az $]a, b[$ intervallumon, s így természetesen tágabb értelemben is növekedő. Ekkor minden $x_1, x_2 \in]a, b[$, $x_1 < x_2$ esetén fennáll a

$$g(x_1) \leqq g(x_2),$$

vagyis az

$$f(x_1) + cx_1 \leqq f(x_2) + cx_2$$

összefüggés minden pozitív c-re. Ebből következik, hogy

$$c(x_1 - x_2) \leqq f(x_2) - f(x_1).$$

Mivel c akármilyen kis pozitív szám is lehet, a jobb oldalon nem állhat negatív szám, és így

$$f(x_1) \leqq f(x_2).$$

Ugyanígy igazolható a tágabb értelemben a monoton fogyó f-re is az a) állítás.

b) Az a)-ból következik a b) állítás, hiszen f pontosan akkor állandó az $[a, b]$ intervallumon, ha itt tágabb értelemben egyszerre monoton növekedő is és monoton fogyó is.

c) Ha f (szigorúan) monoton növekedő az $[a, b]$ intervallumban, akkor nem lehet $[a, b]$-nek olyan részintervalluma, amelynek minden x elemére fennáll az $f'(x) = 0$ egyenlőség, hiszen ebből a b) alapján az következnék, hogy $[a, b]$ ezen részintervallumán f állandó, ami azonban lehetetlen.

Megfordítva: ha minden $x \in]a, b[$ pontban fennáll, hogy $f'(x) \geqq 0$, de $[a, b]$-nek nincs olyan részintervalluma, amelynek tetszőleges x elemére $f'(x)=0$, akkor az a) szerint f tágabb értelemben monoton növekedő az $[a, b]$ intervallumon. Ha ezentúl nem volna (szigorúan) monoton növekedő, akkor nyilván volna olyan részintervalluma az $[a, b]$-nek, amelyben f állandó, tehát a feltevéssel ellentétben a részintervallum minden elemére fennállna, hogy $f'(x)=0$.

Ugyanígy igazolható a szigorúan monoton fogyó f-re is a c) állítás.

Az elmondottakhoz az alábbi megjegyzéseket fűzzük:

1. Az előbb bemutatott tételek nemcsak véges, hanem végtelen: $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ intervallumokon differenciálható függvényekre is érvényesek.
2. Ha minden $x \in]a, b[$-re $f'(x) > 0$, illetve $f'(x) < 0$, akkor f az $[a, b]$ intervallumon (szigorúan) monoton növekedő, illetve (szigorúan) monoton fogyó.

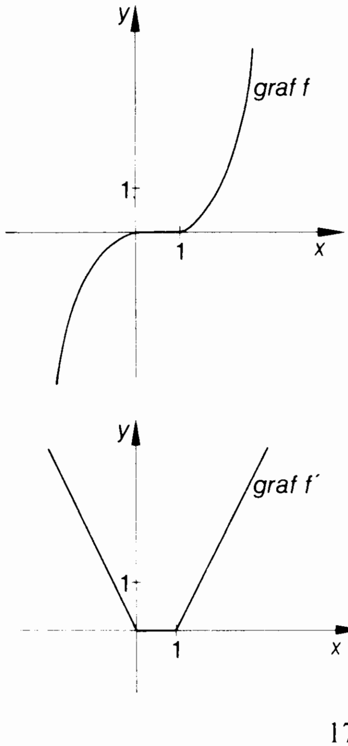
6.1. példa. Az

$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha} \quad x \in]-\infty, 0], \\ 0, & \text{ha} \quad x \in]0, 1], \\ (x-1)^2, & \text{ha} \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}$$

függvény deriváltja

$$f'\colon\ f'(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ha} \quad x \in]-\infty, 0] \\ 0, & \text{ha} \quad x \in]0, 1], \\ 2(x-1), & \text{ha} \quad x \in]1, +\infty[. \end{cases}$$

Mivel minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $f'(x) \geqq 0$ *(6.4. ábra)*, de a $]0, 1]$ intervallumban $f'(x)=0$, azért f tágabb értelemben monoton növekedő (6.3. tétel a) pontja). Az f a $]0, 1]$ intervallumon állandó (6.3. tétel b) pontja).



6.4. ábra

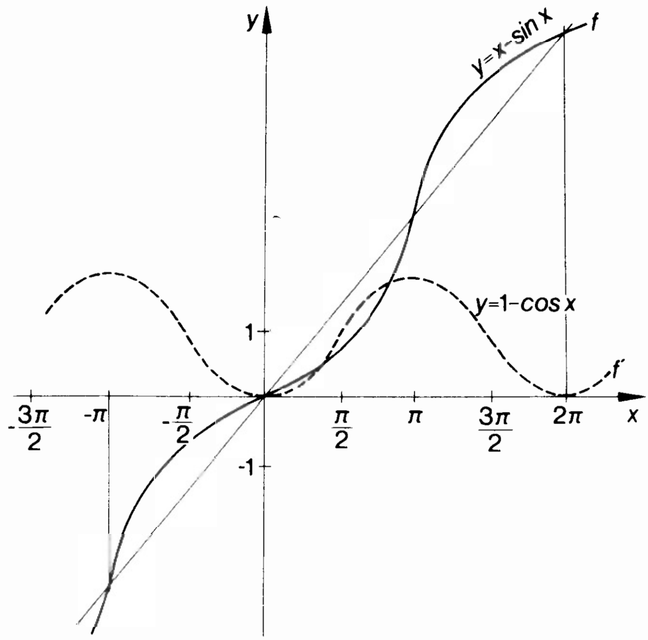
6.2. példa. Az

$$f\colon\ f(x) = x - \sin x$$

függvény deriváltja

$$f'\colon\ f'(x) = 1 - \cos x.$$

Mivel minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $f'(x) \geqq 0$ és nem áll fenn az f értelmezési tartományának egyetlen részintervallumán sem az $f'(x) = 0$ egyenlőség *(6.5. ábra)*, ezért f (szigorúan) monoton növekedő (6.3. tétel c) pontja).



6.5. ábra

6.2 Szélsőérték

6.4. TÉTEL. *Legyen a az f függvény értelmezési tartományának egy olyan belső pontja, amelyben f differenciálható. Ha az a pont f-nek lokális szélsőértékhelye, akkor*

$$f'(a) = 0.$$

Bizonyítás:

Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $f'(a) \neq 0$. Ekkor a 6.2. tétel b) állítása alapján $f'(a) > 0$ esetén f az a pontban lokálisan növekedő, $f'(a) < 0$ esetén lokálisan fogyó.

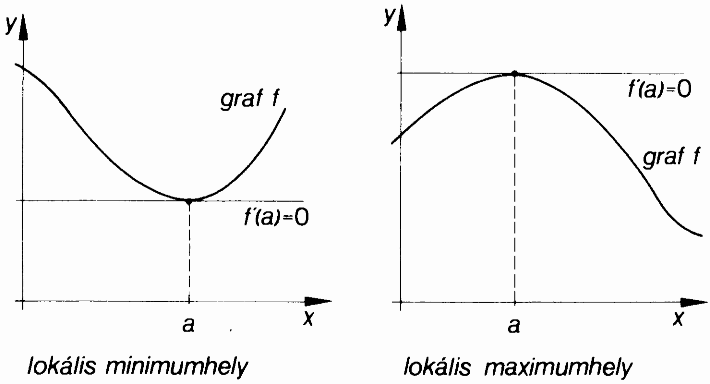
Mindkét eset kizárja azt, hogy f-nek az a pontban lokális szélsőértéke legyen, tehát szükségképpen $f'(a)=0$.

H az f-nek létezik deriváltfüggvénye, akkor az f értelmezési tartományának azokat a belső pontjait, ahol $f'(x)=0$, az f **stacionárius pontjainak** nevezzük.

Megjegyzések: 1. Ha az f függvény differenciálható, akkor szélsőértéket csak stacionárius pontban vehet fel.

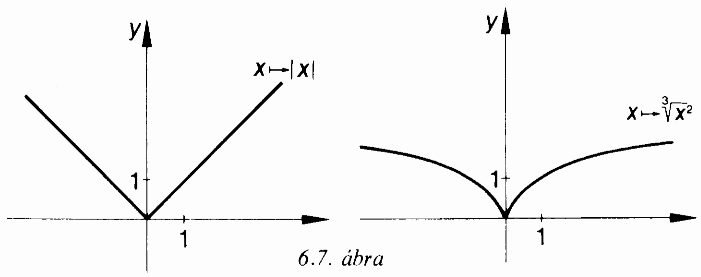
2. A 6.4. tételben szereplő $f'(a)=0$ feltétel csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy a szélsőértékhely legyen. Például az $x \mapsto x^3$ függvény differenciálhányadosa a 0 pontban 0, de a függvénynek a 0 helyen nincs szélsőértéke.

3. A tétel geometriailag azt jelenti, hogy ha egy differenciálható f függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van, akkor az f grafikonjának $(a, f(a))$ pontjához húzott érintő párhuzamos az x tengellyel *(6.6. ábra)*.



6.6. ábra

4. Az f függvénynek lehet szélsőértéke olyan pontban is, ahol f nem differenciálható. Így pl. az f: $f(x)=|x|$ függvénynek a 0 pontban lokális minimuma van, de f a 0 helyen nem differenciálható. Hasonlóképpen a g: $g(x)=\sqrt[3]{x^2}$ függvénynek a 0 pontban lokális minimuma van, de g a 0 helyen nem differenciálható *(6.7. ábra)*.



6.7. ábra

Az előzőekben láttuk, hogy a differenciálhányados zérussá válása csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy egy differenciálható függvénynek a kérdéses helyen lokális szélsőértéke legyen. A továbbiakban a lokális szélsőérték létezésének egy-egy elégséges feltételét fogalmazzuk meg.

6.5. TÉTEL. *Legyen az f függvény az a pont valamely környezetében differenciálható. Ha f′ az a pontban előjelet vált, akkor f-nek az a pontban (szigorú) lokális szélsőértéke van.*

a) *Ha f′ az a pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át, akkor f az a pontban (szigorú) lokális minimumot,*

b) *ha f′ az a pontban pozitív értékből negatív értékbe megy át, akkor f az a pontban (szigorú) lokális maximumot vesz fel.*

Bizonyítás:

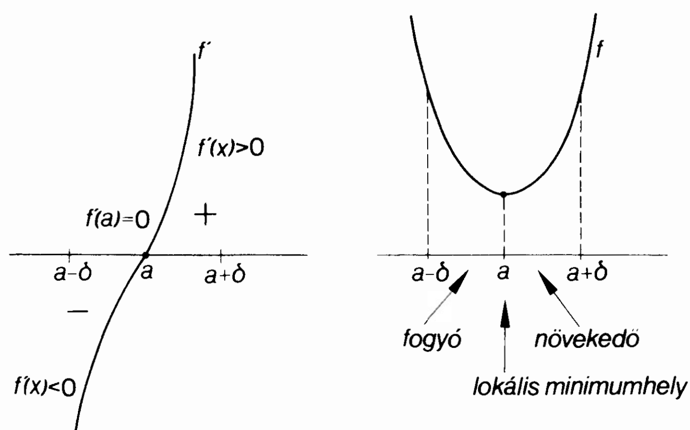
Mivel f' az a pontban negatívból pozitívba megy át, azért létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$f'(x) < 0, \qquad x \in]a-\delta, a[$$

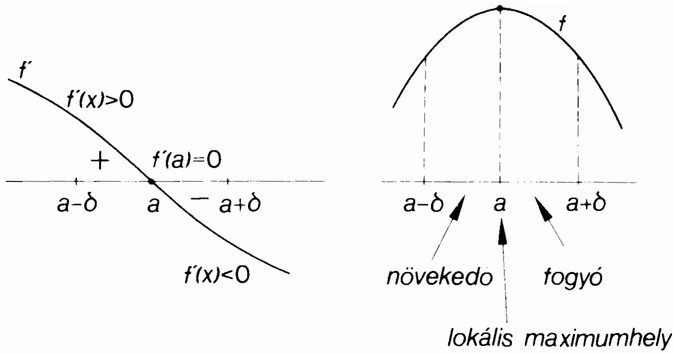
és

$$f'(x) > 0, \qquad x \in]a, a+\delta[.$$

Ebből következik, hogy f az $]a-\delta, a[$ intervallumban monoton csökken, az $]a, a+\delta[$ intervallumban pedig monoton növekedik, ezért f-nek az a pontban szigorú lokális minimuma van (*6.8.* és *6.9. ábra*).
A lokális maximumra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

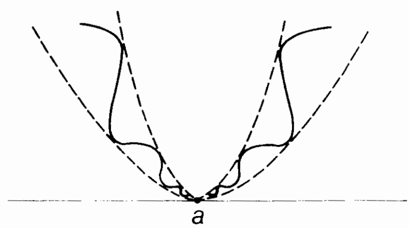


6.8. ábra



6.9. ábra

Megjegyezzük, hogy az f' deriváltfüggvény előjelváltása elégséges, de nem szükséges feltétele annak, hogy az a pont lokális szélsőértékhely legyen. Megadható olyan függvény, amely differenciálható, egy adott pontban szélsőértéke van, de ott a deriváltfüggvény nem vált előjelet (l. *6.10. ábrát,* ahol a folytonos vonal az origó környezetében a szaggatott vonalakat végtelen sokszor érinti).



6.10. ábra

Az előző tételből közvetlenül adódik az alábbi állítás.

6.6. TÉTEL. *Legyen az f függvény az a pontban kétszer differenciálható. Ha*

$$f'(a)=0 \quad \text{és} \quad f''(a)>0 \quad (f''(a),<0),$$

akkor az f az a pontban (szigorú) lokális minimumot (maximumot) vesz fel.

Bizonyítás:

Az $f''(a)>0$ feltételből következik, hogy f' az a pontban (szigorúan) lokálisan növekedő, s mivel $f'(a)=0$, ezért az f' az a pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át. Így az előző tételből következik, hogy f az a pontban (szigorúan) lokális minimumot vesz fel.

A lokális maximumra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható.

Ha $f'(a)=0$ és $f''(a)=0$, akkor a kérdés még nyitva marad, lehet, hogy van, lehet, hogy nincs az a pontban lokális szélsőérték.

6.3. példa. Legyen f: $f(x)=x^3$ és g: $g(x)=x^4$.

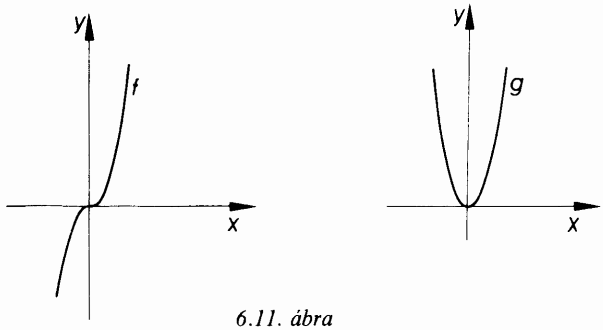
Mind az f, mind a g a 0 pontban kétszer differenciálható, és

$$f'(0)=f''(0)=0,$$

illetve

$$g'(0)=g''(0)=0.$$

Az f-nek a 0 pontban nincsen lokális szélsőértéke, míg a g-nek ezen a helyen szigorúan lokális minimuma van (hiszen itt abszolút minimuma is van, *6.11. ábra*).



6.11. ábra

6.4. példa. Határozzuk meg az f: $f(x)=\dfrac{6x}{1+x^2}$ függvény lokális szélsőértékeit.

A deriváltfüggvény így írható fel:

$$f'\colon\ f'(x)=\frac{6(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,.$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai: -1 és 1. Az f' zérushelyei három részintervallumra bontják az f értelmezési tartományát. Az f' ezekben felvett értékeinek előjeléből vontunk le következtetéseket az f monotonitási viszonyaira (6.3. tétel), valamint lokális szélsőértékhelyeikre (6.5. tétel).

A deriváltfüggvény előjele:

$$f'(x)<0, \quad \text{ha} \quad x\in\,]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[,$$

illetve

$$f'(x)>0, \quad \text{ha} \quad x\in\,]-1, 1[.$$

Az f függvény tehát a $]-\infty, -1[$ és az $]1, +\infty[$ intervallumokon (szigorúan) monoton fogyó, a $]-1, 1[$ intervallumon pedig (szigorúan) monoton növekedő.

Mivel f' $-\,+$ jelváltó a -1 pontban és
$+\,-$ jelváltó az 1 pontban,
azért f-nek

(szigorú) lokális minimumhelye -1,
(szigorú) lokális maximumhelye 1.

A lokális minimum értéke: $f(-1)=-3$,
a lokális maximum értéke: $f(1)=3$.

A lokális szélsőértékhelyeket a második deriváltfüggvény segítségével is meghatározhatjuk. A második deriváltfüggvény a következő:

$$f'': \; f''(x)=\frac{12x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Mivel

$$f'(-1)=0, \qquad f''(-1)>0$$

és

$$f'(1)=0, \qquad f''(1)<0,$$

azért f-nek a -1 helyen lokális minimuma, az 1 helyen pedig lokális maximuma van.

Az f függvény folytonos, ezért f határértékét külön csak a $-\infty$, $+\infty$ helyeken kell megvizsgálni:

$$\lim_{-\infty} f = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{+\infty} f = 0. \qquad \text{(4.14. példa)}$$

Mivel a D_f minden pontjára fennáll az

$$f(x) \geqq f(-1),$$

illetve az

$$f(x) \leqq f(1)$$

egyenlőtlenség, azért f-nek a -1 pontban abszolút minimuma, az 1 pontban pedig abszolút maximuma van D_f-re vonatkozóan.

A gyakorlatban sokszor találkozunk azzal a feladattal, hogy egy differenciálató f függvény $[a, b] \subset D_f$ intervallumra történő leszűkítésének keressük szélsőértékhelyeit. Bebizonyítható, hogy a folytonos $g=f|_{[a,\,b]}$ függvénynek van szolút minimuma is és abszolút maximuma is. Ezeket vagy az $[a, b]$ zárt ervallum belső pontjaiban, vagy az a, b pontokban veszi fel.

Így a g függvény abszolút szélsőértékét az alábbiak szerint határozzuk meg:

Megkeressük g értelmezési tartományának azokat a belső pontjait, ahol g-nek lokális szélsőértéke van.

Kiszámítjuk az e pontokhoz tartozó lokális szélsőértékeket.

Összehasonlítjuk a belső pontokhoz tartozó lokális szélsőértékeket, valamint a $g(a)$, $g(b)$ értékeket.

Ezek közül a legnagyobb lesz a g abszolút maximuma, a legkisebb pedig az szolút minimuma $[a, b]$-re vonatkozóan.

6.5. példa. Legyen

$$g\colon\ g(x) = 2x^3 - 24x, \qquad x \in [-3, 5].$$

(A g függvény az $f\colon\ f(x) = 2x^3 - 24x$, $x \in \mathbf{R}$ függvénynek a $[-3, 5]$ intervallumra való szűkítése.)

A deriváltfüggvény a következő:

$$g'\colon\ g'(x) = 6x^2 - 24, \qquad x \in\,]-3, 5[;$$

ennek zérushelyei a -2 és a 2 pont.

Mivel

$$g''\colon\ g''(x) = 12x, \qquad x \in\,]-3, 5[$$

és

$$g''(-2) = -24, \qquad g''(2) = 24,$$

azért g-nek a -2 pontban lokális maximuma van, a maximum értéke $g(-2) = 32$; a 2 pontban pedig lokális minimuma van, a minimum értéke $g(2) = -32$.

A g függvény értéke az intervallum végpontjaiban: $g(-3) = 18$, $g(5) = 130$.

Így g-nek a 2 pontban abszolút minimuma, az 5 pontban abszolút maximuma van a $[-3, 5]$ intervallumon.

6.6. példa. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket deriváltjuk segítségével monotonitás és szélsőérték szempontjából.

a) $$f\colon\ f(x) = \frac{5x}{(x+2)^2}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}.$$

Az f deriváltfüggvénye a következő:

$$f'\colon\ f'(x) = \frac{10 - 5x}{(x+2)^3}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}.$$

Az $f'(x) = 0$ egyenletnek az $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$ halmazon a megoldása: 2. A D_f halmaz három intervallumra bomlik; f' ezekben felvett értékeinek az előjeléből következtetéseket vonhatunk le f monotonitási viszonyairól, valamint lokális szélsőértékhelyeiről. Az f' derivált előjelviszonyai könnyen eldönthetők. Az f' számlálója és nevezője a $]-\infty, -2[$ és a $]+2, +\infty[$ intervallumokban különböző előjelű, a $]-2, 2[$ intervallumban pedig azonos előjelű.

Ezért

$$f'(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in\,]-\infty, -2[\, \cup\,]2, +\infty[,$$

és

$$f'(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x \in\,]-2, 2[.$$

Az f tehát a $]-\infty, -2[$, a $]2, +\infty[$ intervallumokon (szigorúan) monoton fogy, a $]-2, 2[$ intervallumon pedig (szigorúan) monoton növekedik. A 2 pont az f-nek lokális maximumhelye, és ott $f(2)=0{,}625$.

Az f függvény folytonos, D_f sem alulról, sem felülről nem korlátos, ezért f határértékét külön csak a -2, $-\infty$ és a $+\infty$ helyeken kell megvizsgálni:

$$\lim_{-2-0} f = -\infty, \qquad \lim_{-2+0} f = -\infty \qquad \text{(4.20. példa),}$$

$$\lim_{-\infty} f = 0, \qquad \lim_{-\infty} f = 0 \qquad \text{(4.19. példa utáni megjegyzés).}$$

Az f-nek a D_f-re vonatkozóan a 2 pont abszolút maximumhelye, és az abszolút maximum értéke 0,625. Ugyanis a D_f minden pontjára fennáll az $f(x) \leqq f(2)$ egyenlőtlenség.

b)
$$g\colon\ g(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}.$$

A g deriváltfüggvénye a következő:

$$g'\colon\ g'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-4}}, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{4\}.$$

A $g'(x)=0$ egyenletnek nincs az $\mathbf{R} \setminus \{4\}$ halmazon megoldása. Ez azt jelenti, hogy g-nek nincs stacionárius pontja. Szélsőérték szempontjából tehát csak az a hely jöhet számításba, ahol g nem differenciálható, vagyis a 4 hely.

A 4 pont (itt g nem differenciálható) két részintervallumra bontja g értelmezési tartományát; g' ezekben felvett értékeinek az előjeléből következtetéseket vonhatunk le g monotonitási viszonyaira.

Mivel a $]-\infty, 4[$ intervallumban g' negatív, a $]4, +\infty[$ intervallumban pozitív, azért

g (szigorúan) monoton fogy, ha $x \in]-\infty, 4[$,
g (szigorúan) monoton növekedik, ha $x \in]4, +\infty[$.

Ebből következik, hogy g-nek a 4 helyen abszolút minimuma van a D_g-re vonatkozóan.

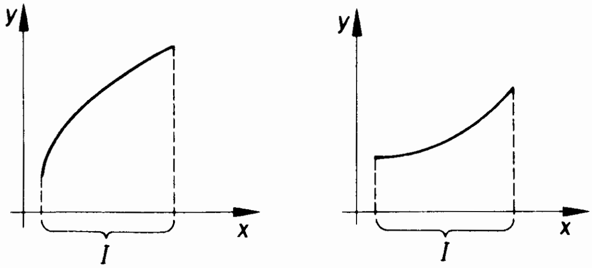
Mivel g folytonos, továbbá $D_g = \mathbf{R}$, azért g határértékét csak a $-\infty$, $+\infty$ helyeken kell megvizsgálni:

$$\lim_{-\infty} g = +\infty, \qquad \text{és} \qquad \lim_{+\infty} g = +\infty.$$

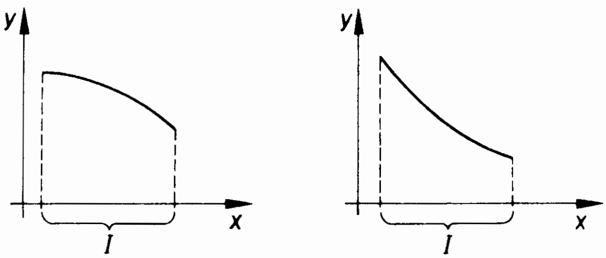
6.3 Konvex és konkáv függvények

Egy I intervallumon differenciálható, pl. monoton növekedő függvény „kétféleképpen" növekedhet *(6.12a ábra)*. Az egyik grafikonra az a jellemző, hogy bármely pontjához húzott érintője felett helyezkedik el (kivéve természetesen az érintési pontot), míg a másikra az, hogy bármely pontban húzott érintője alatt helyezkedik el. Hasonlóan egy monoton csökkenő függvény „kétféleképpen" csökkenhet *(6.12b ábra)* aszerint, hogy az érintője hogyan helyezkedik el a grafikonhoz viszonyítva. Láttuk, hogy az f a abszcisszájú pontjában húzott érintőjének egyenlete

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$



6.12a ábra



6.12b ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény az értelmezési tartományának valamely I intervallumán differenciálható. Ha bármely $a \in I$ esetén*

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), \qquad x \in I \setminus \{a\},$$

illetve

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x-a), \qquad x \in I \setminus \{a\},$$

vagyis f az I intervallumon mindig az érintője felett van, illetve mindig az érintője alatt van (kivéve az érintési pontot), akkor azt mondjuk, hogy f az I intervallumon (szigorúan) konvex, ill. konkáv.
Ha az egyenlőséget is megengedjük, akkor azt mondjuk, hogy f tágabb értelemben konvex, illetve konkáv.

Könnyen belátható, hogy az $x \mapsto x$ függvény tágabb értelemben konvex is, konkáv is, de nincs **R**-nek olyan intervalluma, amelyben (szigorúan) konvex vagy konkáv volna. Az abs függvény tágabb értelemben konvex, de nem (szigorúan) konvex. Hasonló egyszerű példáktól eltekintve, elég bonyodalmas elemi úton a függvények konvexitásának, illetve konkávitásának vizsgálata. A differenciálszámítás egyszerűbb eszközt ad kezünkbe ilyen vizsgálatokhoz. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

6.7. TÉTEL. *Legyen az f függvény az értelmezési tartományának valamely I intervallumán differenciálható. Ekkor az f függvény az I intervallumon pontosan akkor (szigorúan) konvex, illetve konkáv, ha f′ (szigorúan) monoton növekedő, illetve fogyó.*

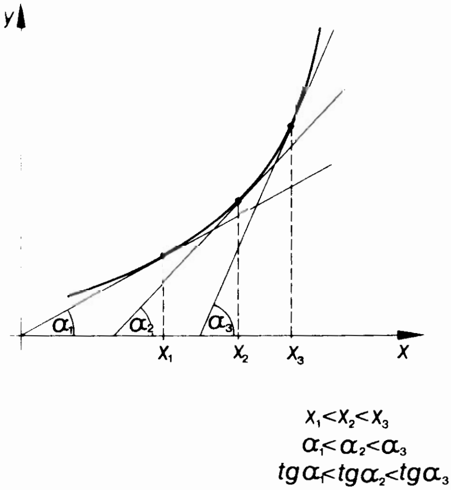
Megjegyzés: Ha valamely feltétel csak tágabb értelemben teljesül, akkor a megfelelő állításra is ugyanez érvényes.

Ez az állítás a szemléletből eléggé kézenfekvő, mert azt fejezi ki, hogy

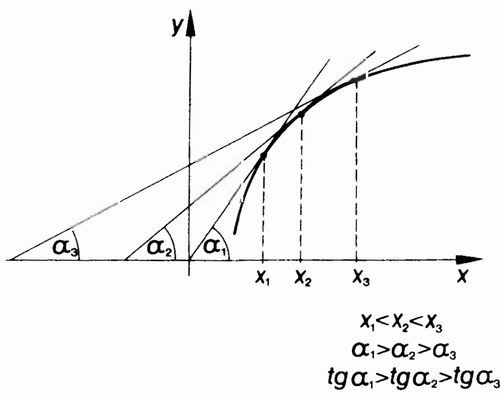
a) konvex függvény esetén növekvő abszcisszaértékekhez egyre nagyobb iránytangensű érintő tartozik *(6.13a ábra)*;

b) konkáv függvény esetén növekvő abszcisszaértékekhez egyre kisebb iránytangensű érintő tartozik *(6.13b ábra)*.

A tétel bizonyítására nem térünk ki.

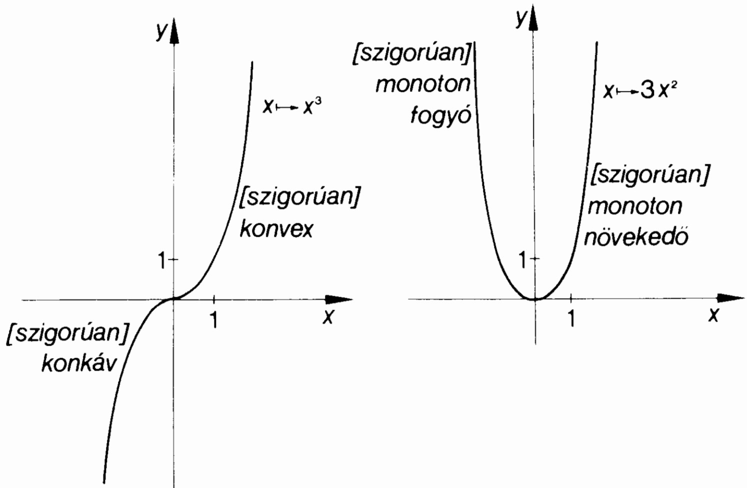


6.13a ábra



6.13b ábra

6.7. példa. Az f: $f(x)=x^3$ függvény a $]-\infty, 0[$ intervallumban konkáv, mert az f': $f'(x)=3x^2$ derivált ebben az intervallumban monoton fogyó, a $]0, +\infty[$ intervallumban pedig konvex, mert f' ebben az intervallumban monoton növekedő *(6.14. ábra)*.



6.14. ábra

6.8. példa. Legyen

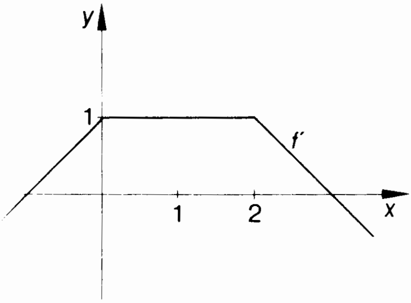
$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + x, & \text{ha} \quad x \in\,]-\infty, 0], \\ x, & \text{ha} \quad x \in\,]0, 2], \\ -\dfrac{x^2}{2} + 3x - 2, & \text{ha} \quad x \in\,]2, +\infty[. \end{cases}$$

Az f függvény differenciálható, és deriváltja a következő *(6.15. ábra)*:

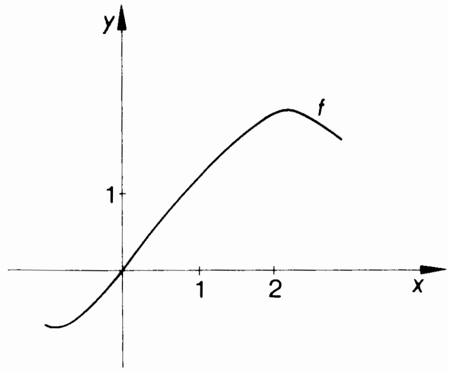
$$f'\colon\ f'(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha} \quad x \in\,]-\infty, 0], \\ 1, & \text{ha} \quad x \in\,]0, 2], \\ -x+3, & \text{ha} \quad x \in\,]2, +\infty[. \end{cases}$$

Az f a $]-\infty, 2[$ intervallumban tágabb értelemben konvex; a $]0, +\infty[$ intervallumban tágabb értelemben konkáv *(6.16. ábra)*, mert az f' a $]-\infty, 2[$-ben tágabb értelemben monoton növekedő, míg a $]0, +\infty[$-ben tágabb értelemben monoton csökkenő *(6.16. ábra)*.

A differenciálható függvényeknek a 6.7. tételben megfogalmazott tulajdonsága – kétszer differenciálhatóság esetén – visszavezethető a második derivált előjel szerinti viselkedésére. Az előbb említett tételt a monoton függvények deriváltjaira vonatkozó tétellel egybevetve, az alábbi következményt kapjuk:



6.15. ábra



6.16. ábra

6.8. TÉTEL. *Legyen az f függvény az értelmezési tartományának valamely I intervallumán kétszer differenciálható. Az f függvény az I intervallumon pontosan akkor (szigorúan) konvex, illetve konkáv, ha minden $x \in I$ pontban*

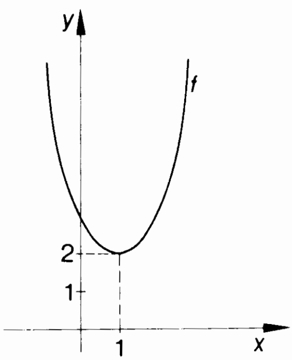
$$f''(x) \geqq 0, \qquad \textit{illetve} \qquad f''(x) \leqq 0,$$

de I-nek nincs olyan részintervalluma, amelynek tetszőleges x elemére $f''(x) = 0$.

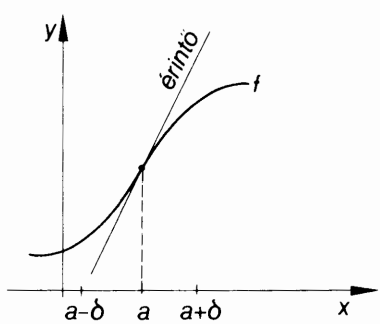
Megjegyzés: Ha a fentiek mellett I valamely részintervallumán $f''(x) = 0$, akkor f tágabb értelemben konvex, illetve konkáv.

Egy függvény (szigorúan) konvex, illetve konkáv lehet akkor is, ha a második differenciálhányadosa egyes helyeken zérus. Például az f: $f(x) = (x-1)^4 + 2$ függvény (szigorúan) konvex, de az f'': $f''(x) = 12(x-1)^2$ második derivált az 1 helyen 0, azaz $f''(1) = 0$ *(6.17. ábra)*.

Differenciálható függvények esetén konvexitás-konkávitás szempontjából jellegzetes pontok az ún. inflexiós pontok.



6.17. ábra



6.18. ábra

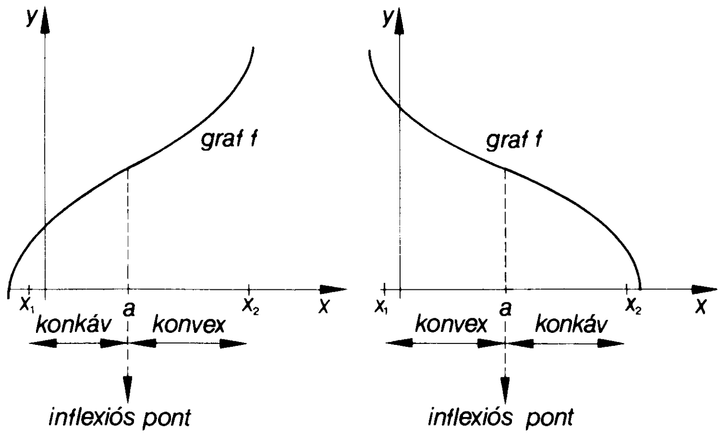
DEFINÍCIÓ. *Legyen az f függvény az értelmezési tartományának valamely a belső pontjában differenciálható. Ha az a pontbeli érintő az a-ban átmetszi az f függvény grafikonját, vagyis az*

$$F\colon\ F(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)] \qquad (x \in D_f)$$

függvény az a pontban előjelet vált, akkor az a pontot f ***inflexiós pontjának*** *nevezzük (6.18. ábra).*

Megjegyezzük, hogy a szögletes zárójelben felírt elsőfokú polinomot az f függvény a-hoz tartozó érintőfüggvényének nevezzük, hiszen graf f-nek az $(a, f(a))$ ponthoz tartozó érintője éppen az előbb említett polinom grafikonja.

Egyszerűen belátható, hogy ha f az $]x_1, x_2[$ intervallumban differenciálható, az $]x_1, a[$ intervallumban (szigorúan) konvex és az $]a, x_2[$ intervallumban (szigorúan) konkáv (vagy megfordítva), akkor az a pont f-nek inflexiós pontja *(6.19. ábra)*.

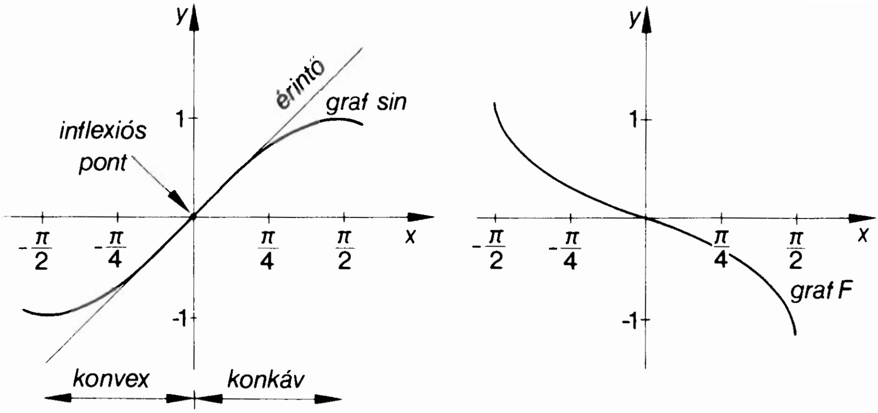


6.19. ábra

6.9. példa. A sin függvény például a $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ intervallumban konvex, a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ intervallumban konkáv, és a sin függvénynek a 0 pontban inflexiós pontja van.

Az $F(x) = \sin x - x$ $(x \in \mathbf{R})$ függvény a 0 pontban előjelet vált *(6.20. ábra)*.

A továbbiakban megadjuk az inflexiós pont létezésének egy elégséges feltételét.



6.20. ábra

6.9. TÉTEL. *Legyen az f függvény az a pont környezetében kétszer differenciálható. Ha f″ az a pontban előjelet vált, akkor f-nek az a pontban inflexiós pontja van.*

Bizonyítás:

Mivel f'' az a pontban negatív értékből pozitív értékbe megy át (vagy megfordítva), azért létezik olyan $\delta \in \mathbf{R}^+$, hogy

$$f''(x) < 0 \quad [f''(x) > 0], \qquad x \in]a-\delta, a[,$$

és

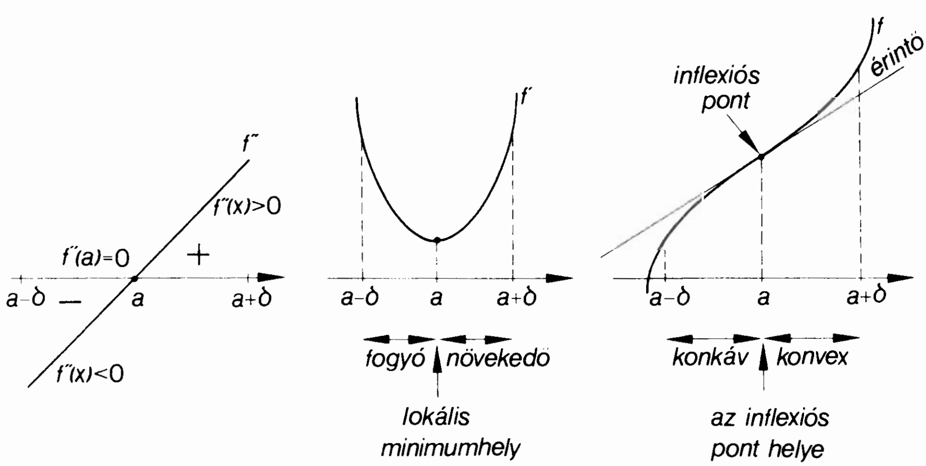
$$f''(x) > 0 \quad [f''(x) < 0], \qquad x \in]a, a+\delta[.$$

Ebből következik, hogy f

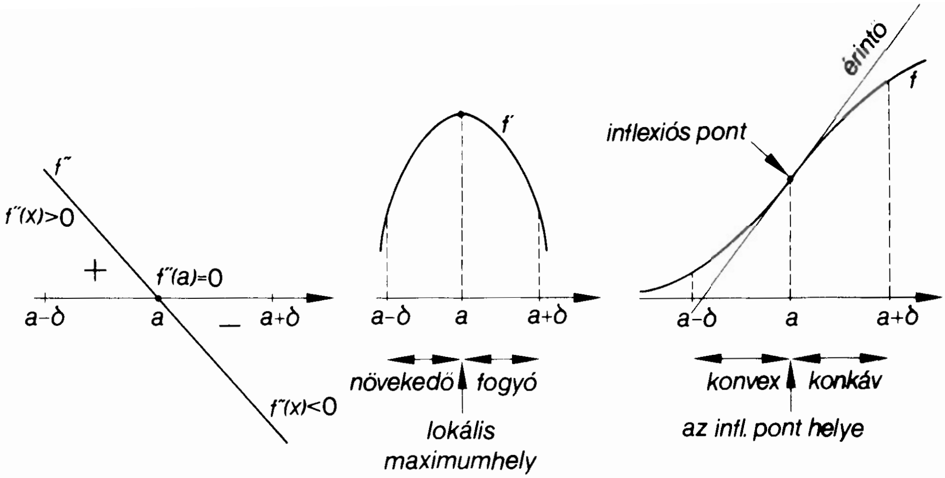
az $]a-\delta, a[$ intervallumban konkáv, illetve konvex,

az $]a, a+\delta[$ intervallumban pedig konvex, illetve konkáv,

ezért f-nek az a pontban inflexiós pontja van *(6.21a, b ábra)*.



6.21a ábra



6.21b ábra

6.10. példa. Határozzuk meg az

$$f\colon\ f(x) = x^3 - \frac{x^4}{2}$$

függvény inflexiós pontjait.

$$f''(x) = 6x - 6x^2.$$

Az $f''(x)=0$ egyenlet megoldásai: 0 és 1.
Az f'' ezekben előjelet vált, azért ezek f inflexiós pontjai.
Mivel

$$f''(x)<0, \quad \text{ha} \quad x\in\,]-\infty, 0[,$$

$$f''(x)>0, \quad \text{ha} \quad x\in\,]0, 1[$$

és

$$f''(x)<0, \quad \text{ha} \quad x\in\,]1, +\infty[,$$

azért f a $]-\infty, 0[$, $]1, +\infty[$ intervallumokon konkáv, a $]0, 1[$ intervallumon pedig konvex.

Ha létezik az $f'''(a)$, további elégséges feltétel adható meg az f függvény a helyen lévő inflexiós pontjának létezésére.

6.10. TÉTEL. *Legyen az f függvény az a pontban háromszor differenciálható. Ha*

$$f''(a)=0 \quad \text{és} \quad f'''(a)\neq 0,$$

akkor f-nek az a inflexiós pontja.

A tétel bizonyítására nem térünk ki.

Ha $f''(a)=0$ és $f'''(a)=0$, akkor a kérdés még nyitva marad: lehet, hogy van, lehet, hogy nincs az a helyen inflexiós pont. Például az $x \mapsto x^5$ és $x \mapsto x^4$ függvénynek a 0 pontban mind a második, mind a harmadik differenciálhányadosa zérus; az elsőnek a 0 pontban van inflexiós pontja, a másodiknak nincsen, minimuma van.

6.4 Függvényvizsgálat

Valamely függvény vizsgálatán – elsősorban – az alábbi kérdések megválaszolását értjük:

- Vannak-e a függvénynek zérushelyei?
- Vannak-e a függvénynek (lokális és abszolút) szélsőértékhelyei?
- A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyeken a szóban forgó függvény monoton?
- Vannak-e a függvénynek inflexiós pontjai?
- A függvény értelmezési tartománya felbontható-e olyan intervallumokra, amelyeken a függvény konvex, illetve konkáv?
- Az értelmezési tartományának torlódási pontjaiban létezik-e a függvénynek határértéke, illetve hol folytonos a függvény?
- Ha a függvény értelmezési tartománya felülről (illetve alulról) nem korlátos számhalmaz, létezik-e a $+\infty$-ben (illetve $-\infty$-ben) a függvénynek határértéke?
- Mi a függvény értékkészlete?

6.11. példa. Vizsgáljuk meg az

$$f\colon\ f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$$

függvényt.

Az $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x = 0$ egyenlet megoldása: 0.

Állítsuk elő az f függvény első három deriváltfüggvényét:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 6x + 8,\\ f''(x) &= 2x - 6,\\ f'''(x) &= 2. \end{aligned}$$

Az $f'(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$ egyenlet megoldásai: 2, 4;
az $f''(x) = 2x - 6$ egyenlet megoldása pedig: 3.

Az f' függvény két zérushelye három részintervallumra bontja az értelmezési tartományt; f' ezekben felvett értékeinek előjeléből következtetéseket vonhatunk le f monotonitására:

$$f'(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x \in]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[,$$

$$f'(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in]2, 4[.$$

Az f tehát a $]-\infty, 2[$ és a $]4, +\infty[$ intervallumokon monoton növekedik, a $]2, 4[$ intervallumon monoton fogy.

Mivel

$$f''(2) = -2 < 0 \quad \text{és} \quad f''(4) = 2 > 0,$$

azért f-nek

$$\text{a 2 helyen lokális maximuma van, } f(2) = 6\frac{2}{3},$$

$$\text{a 4 helyen lokális minimuma van, } f(4) = 5\frac{1}{3}.$$

Az f'' függvény zérushelye két részintervallumra bontja az értelmezési tartományt, f'' ezekben felvett értékeinek előjeléből következtethetünk arra, hogy az f melyik intervallumban konkáv, illetve melyikben konvex.

$$f''(x) < 0, \quad \text{ha} \quad x \in]-\infty, 3[,$$

$$f''(x) > 0, \quad \text{ha} \quad x \in]3, +\infty[.$$

Az f tehát a $]-\infty, 3[$ intervallumon konkáv, a $]3, +\infty[$ intervallumon pedig konvex.

Mivel

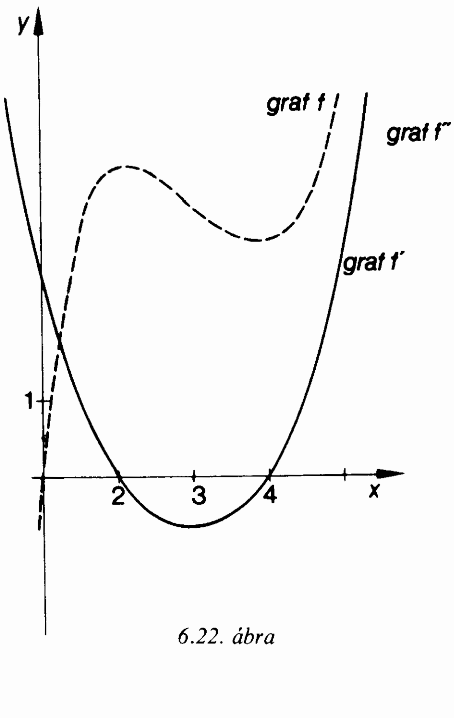
$$f'''(3) \neq 0,$$

azért f-nek a 3 helyen inflexiós pontja van, $f(3) = 6$.

Az f függvény folytonos, $D_f = \mathbf{R}$, ezért f határértékét külön csak a $-\infty$, $+\infty$ helyeken kell megvizsgálni.

Könnyű belátni, hogy

$$\lim_{-\infty} f = -\infty, \quad \lim_{+\infty} f = +\infty.$$



6.22. ábra

Az f-nek nincs abszolút szélsőértéke, mivel D_f egyetlen a pontjára sem áll fenn az $f(x) \leqq f(a)$, illetve $f(x) \geqq f(a)$ $(x \in D_f)$ egyenlőtlenség.

A deriváltfüggvények ábrázolásával a kapott eredményeket jól tudjuk követni *(6.22. ábra)*.

A jó áttekinthetőség végett célszerű táblázatot készíteni, ahol – az általános szokás szerint – a következő megállapodásokkal élünk:

Jelölés:		Jelentése:
$f'(x)$, $f''(x)$	+	$f'(x)>0$, $f''(x)>0$,
$f'(x)$, $f''(x)$	−	$f'(x)<0$, $f''(x)<0$,
↗		monoton növekedő,
↘		monoton fogyó,
min.		lokális minimumhely,
max.		lokális maximumhely,
$\cup$		konvex
$\cap$		konkáv
inf.		inflexiós pont.

x	$\in]-\infty, 2[$	$=2$	$\in]2, 3[$	$=3$	$\in]3, 4[$	$=4$	$\in]4, +\infty[$
$f'(x)$	+	0		−		0	+
f	↗	max. $\left(6\frac{2}{3}\right)$		↘		min. $\left(5\frac{1}{3}\right)$	↗
		$\cap$		inf. (6)		$\cup$	
$f''(x)$		−		0		+	

A függvény értékkészlete, $f(D_f) = \mathbf{R}$.

6.12. példa. Vizsgáljuk a valószínűségszámításban fontos szerepet játszó

$$f\colon\ f(x) = e^{-x^2}$$

függvényt.

Az $f(x) = e^{-x^2} = 0$ egyenletnek nincsen megoldása, így az f függvénynek nincsen zérushelye.

Az f függvény deriváltjai:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2),$$

$$f'''(x) = e^{-x^2}(12x-8x^3).$$

Az f' derivált zérushelye 0, $f'(0)=0$.

Mivel $f''(0)=-2<0$, azért az $f(x)=e^{-x^2}$ függvénynek lokális maximumhelye a 0 pont, és ott a függvény maximuma $f(0)=1$.
Minthogy

$$e^{-x^2}>0, \quad \text{ha} \quad x\in \mathbf{R}$$

és

$$\lim_{+\infty} f = 0, \quad \lim_{-\infty} f = 0,$$

azért f értelmezési tartománya bármely x pontjára fennáll az

$$f(x)<f(0)$$

egyenlőtlenség. Így $f(0)=1$ az f függvény abszolút maximuma.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}\begin{cases} >0, & \text{ha} \quad x<0, \\ <0, & \text{ha} \quad x>0. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy f monoton növekedő a $]-\infty, 0[$ és monoton csökkenő a $]0, +\infty[$ intervallumban.

Az f'' második derivált zérushelyei: $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Mivel $f'''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4\sqrt{\frac{2}{e}} < 0$ és $f'''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{2}{e}} > 0$, azért az f függvénynek a $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pontok inflexiós pontjai.

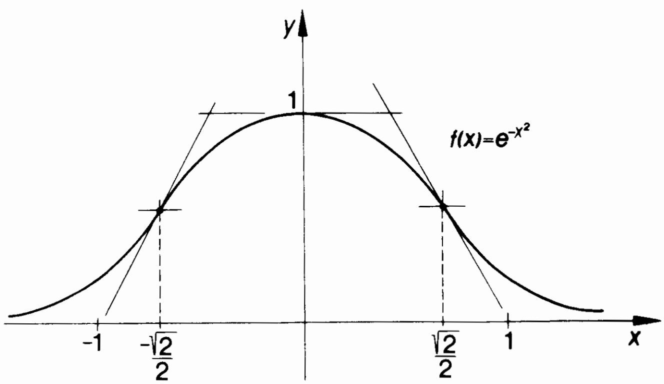
$$f''(x)=e^{-x^2}(4x^2-2)\begin{cases} >0, & \text{ha} \quad |x|>\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ <0, & \text{ha} \quad |x|<\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Ebből következik, hogy f konvex a $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ és a $\left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ intervallumban, konkáv a $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ intervallumban.

A függvény értékkészlete: $f(D_f)=]0, 1]$.

Az alábbi táblázat elkészítése után a függvény grafikonja már könnyen szemléltethető *(6.23. ábra)*:

x	$\in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$	$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right[$	$=0$	$\in \left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$	$= \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\in \left]\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$
f'	+			0	−		
f	$\nearrow$			max (1)	$\searrow$		
	$\cup$	inf $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\cap$			inf $\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\cup$
f''	+	0	−			0	+



6.23. *ábra*

6.5 Néhány gazdasági alkalmazás

A közgazdaságtudomány több fogalma kapcsolatos a differenciálhányadossal, így érdekes lehet számunkra a differenciálhányados néhány gazdasági interpretációjának megismerése.

Tegyük fel, hogy az f függvény azt mutatja meg, hogy mekkora lesz a kereslet bizonyos cikkből az egységártól függően. Az egységár az I intervallumban változhat, $D_f = I$.

Legyen $a \in I$ egy rögzített egységár. Ekkor az a egységárhoz tartozó

$$x \mapsto f(x) - f(a) \qquad (x \in I)$$

függvény megadja a keresletváltozást, ha az egységár a-hoz képest megváltozik. Az a egységárhoz tartozó

$$d(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (x \in I \setminus \{a\})$$

különbségihányados-függvény pedig megmutatja az $x - a$ árváltozáshoz tartozó relatív keresletváltozást, vagyis azt, hogy az egységár egy pénzegységnyi megváltozása átlagosan mekkora változást von maga után a keresletben. A kereslet jellemzésére igen alkalmas mutatónak bizonyul a fenti különbségihányadosfüggvény a pontbeli határértéke, vagyis az ún. keresleti függvény differenciálhányadosa, a egységár mellett. Ezt a differenciálhányadost az a egységárhoz tartozó határkeresletnek szoktuk nevezni.

Hasonló értelemben lehet beszélni határbevételről, határköltségről, határhatékonyságról stb. Ezeket az ún. költségfüggvény, hatékonysági függvény stb. differenciálhányadosa fejezi ki valamely konkrét termelési vagy forgalmi adat esetén. (Az olyan függvények tényleges meghatározása, mint pl. a keresleti függvény, nem egyszerű feladat. Ennek matematikai vonatkozásaival a matematikai statisztika foglalkozik.)

A kereslet alakulásának jellemzésére más mérőszámok is léteznek, ilyen például az **elaszticitás.** Ez azt mutatja, hogy 1%-os árváltozás (vagy jövedelemváltozás) hány százalékos keresletváltozást okoz.

Tegyük fel, hogy az f függvény valamely árucikk keresletét mutatja az egységártól függően, $D_f = I$.
Ekkor valamely $a \in I$ esetén a

$$d(x) = \frac{f(x) - f(a)}{f(a)} \qquad (x \in I,\ f(a) \neq 0)$$

függvény megmutatja az $f(a)$-hoz tartozó relatív keresletváltozást.

Az

$$\frac{x-a}{a} \quad (x \in I)$$

hányados az $a \in I$ egységárhoz tartozó relatív árváltozást jelzi.

A relatív változások összehasonlítása céljából képezzük az $a \in I$ egységárhoz tartozó következő függvényt:

$$h\colon\ h(x) = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{f(a)}}{\dfrac{x-a}{a}} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{a}{f(a)}, \qquad x \in I\setminus\{a\},\ f(a) \neq 0.$$

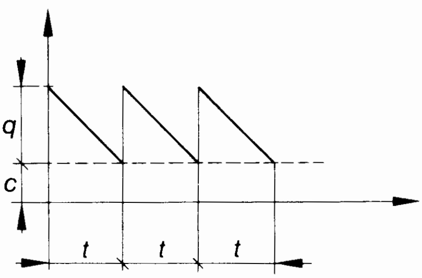
Az f függvény $a \in I$ egységárhoz tartozó elaszticitásán a h függvény a-hoz tartozó határértékét értjük:

$$\lim_{a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{a}{f(a)} = f'(a)\cdot\frac{a}{f(a)}.$$

A közgazdasági számításoknál, pl. a keresletkutatásnál az Engel-görbékkel kapcsolatban a relatív változások és ebből az elaszticitások jutnak fontos szerephez.

A differenciálszámítás sok alkalmazási lehetősége közül még egyet mutatunk be.

Tegyük fel, hogy egy áruház raktárában valamely cikkből a készlet minimális szintje c darab. Tegyük fel azt is, hogy az utánpótlás úgy történik, hogy meghatározott t időközönként (pl. nap) bizonyos állandó q darabbal töltjük fel a raktárt. A forgalmat egyenletesnek tételezzük fel, ezért a készlet fogyása is egyenletesnek tekinthető *(6.24. ábra)*. Így a készlet a feltöltésekor $c+q$ darabból áll, míg t időszak (nap) eltelte után ez lecsökken c darabra; az átlagos készlet pedig nyilván



6.24. ábra

$$\frac{c+c+q}{2} = c + \frac{q}{2} \quad \text{(darab)}.$$

Ismerjük még, hogy a kérdéses cikk várható napi forgalma r forint, továbbá hogy egy-egy szállítmány költsége (függetlenül a szállítmány nagyságától) a forint, s végül, hogy egy darab raktározási költsége naponként b forint.

Mekkora legyen a készletfeltöltés (az utánpótlás) nagysága, hogy az áruellátás a lehető legkevesebb költséget eméssze fel? Hány naponként kell ekkor a raktárt feltölteni?

Egy t napból álló periódusra a szállítmány és a raktározás költsége:

$$k = a + \left(c + \frac{q}{2}\right) bt.$$

Ha egy évre n nyitvatartási napot számítunk, akkor az évi összforgalom

$$Q = nr.$$

Ez idő alatt összesen $\frac{n}{t}$ alkalommal kell a raktárt feltölteni, ami nyilván megegyezik a $\frac{Q}{q}$ hányadossal:

$$\frac{n}{t} = \frac{Q}{q}.$$

Az egy évre számított összköltség tehát

$$\left[a + \left(c + \frac{q}{2}\right) bt\right] \frac{Q}{q}$$

forint lesz.

Minthogy $t = \frac{nq}{Q}$, ezért a költségfüggvény

$$K: K(q) = \frac{aQ}{q} + \frac{nb}{2}(2c + q), \qquad q \in \mathbf{R}^+.$$

A K a q-nak deriválható függvénye:

$$K'(q) = -\frac{aQ}{q^2} + \frac{nb}{2}.$$

A $K'(q) = 0$ egyenlet (pozitív) gyöke

$$q_0 = \sqrt{\frac{2aQ}{nb}}.$$

Mivel most

$$K''(q) = \frac{2aQ}{q^3} > 0$$

minden $q \in \mathbf{R}^+$-ra, azért a K függvénynek a q_0 helyen minimuma van. Ez lesz az utánpótlás optimális nagysága.

Ezután már a második kérdésre is felelhetünk. Az egyes szállítások közötti napok számát úgy kapjuk meg, hogy q_0-t elosztjuk az egy napra eső forgalommal. Így azt kapjuk, hogy

$$t_0=\frac{q_0}{\frac{Q}{n}}=\frac{nq_0}{Q}=\frac{n}{Q}\sqrt{\frac{2aQ}{nb}}=\sqrt{\frac{2an}{Qb}}$$

naponként kell – az optimális utánpótlási készlettel – a raktárt feltölteni.

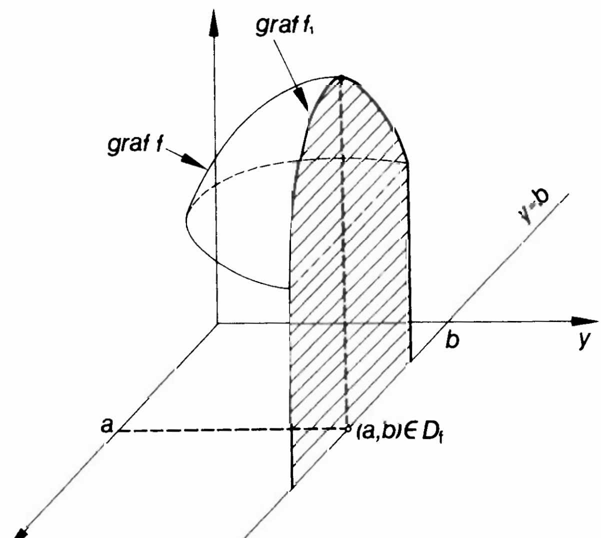
Megjegyezzük, hogy itt egyes vizsgált mennyiségek diszkrét értékeket vesznek ugyan fel, de a vizsgálat megkönnyítése céljából éltünk a folytonosság feltevésével.

6.6 A többváltozós függvények szélsőértéke

Tekintsük a *6.25. ábrán* lévő f kétváltozós függvény grafikonját.

Az f-nek az értelmezési tartomány (a, b) belső pontjában lokális maximuma van *(6.25. ábra)*.

Az egyváltozós függvényekre vonatkozóan a 2.5 pontban bevezetett szélsőérték-fogalmak közvetlenül átvihetők a kétváltozós függvényekre. Minthogy a megfelelő definíciók teljesen hasonlóak, közülük most csak egyet fogalmazunk meg.



6.25. ábra

Az $(a, b) \in D_f$ pont az f kétváltozós függvény lokális maximumhelye, ha az (a, b) pontnak van olyan K környezete, hogy f-nek az (a, b) a $K \cap D_f$ halmazra nézve abszolút maximumhelye.

A definícióból következik, hogy az a pontban az f_1: $f_1(x) = f(x, b)$ egyváltozós függvénynek is maximuma van *(6.25. ábra)*. Ha f_1 az a pontban differenciálható [vagyis f x szerint az (a, b) pontban parciálisan differenciálható], akkor a 6.4. tétel szerint

$$f'_1(a) = f'_x(a, b) = 0.$$

Az előbbiekhez hasonlóan a b pontban az f_2: $f_2(y) = f(a, y)$ egyváltozós függvénynek is maximuma van, és ha f_2 a b pontban differenciálható [vagyis f y szerint az (a, b) pontban parciálisan differenciálható], akkor

$$f'_2(b) = f'_y(a, b) = 0.$$

Hasonló mondható el minimum esetén. Ezzel bizonyítottuk a következő tételt.

6.11. TÉTEL. *Legyen az (a, b) az f kétváltozós függvény értelmezési tartományának egy belső pontja. Ha az (a, b) pontban léteznek az f parciális deriváltjai és ott f-nek lokális szélsőértéke van, akkor*

$$f'_x(a, b) = 0 \quad \text{és} \quad f'_y(a, b) = 0.$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy ha az $(a, b) \in D_f$ szélsőértékhely, akkor a graf f-et mind az $x = a$, mind az $y = b$ síkkal elmetszve, a kapott görbék (a, b) pontbeli érintője párhuzamos lesz az (x, y) alapsíkkal.

Az előbbi tételben megfogalmazott feltétel a lokális szélsőérték létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele. Például az f: $f(x, y) = xy$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ függvény parciális differenciálhányadosai a $(0, 0)$ pontban 0-val egyenlőek, de könnyen belátható, hogy a $(0, 0)$ pont akármilyen kis környezetében a függvény az $f(0, 0) = 0$ függvényértéknél nagyobb értéket is felvesz (ha pl. $x > 0$ és $y > 0$), és kisebbet is (ha pl. $x > 0$ és $y < 0$). Így f-nek a $(0, 0)$ pontban nincs szélsőértéke.

6.13. példa. Az f: $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ $((x, y) \in \mathbf{R}^2)$ függvénynek a parciális deriváltjai:

$$f'_x: \; f'_x(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

$$f'_y: \; f'_y(x, y) = -2ye^{-x^2-y^2}, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Az f stacionárius pontját (a korábbiaknak megfelelően azt a pontot nevezzük így, ahol mindkét parciális derivált 0) a

$$-2xe^{-x^2-y^2} = 0$$

$$-2ye^{-x^2-y^2} = 0$$

egyenletrendszer megoldása szolgáltatja.

A stacionárius pont az $x=0$ és $y=0$ megoldásnak megfelelő $(0, 0)$ pont, és több stacionárius pont nincsen. A függvény vizsgálatával könnyen belátható, hogy ebben a pontban f-nek lokális (sőt abszolút) maximuma van. Függvényünk ugyanis ott veszi fel a maximumát, ahol legnagyobb a kitevője. A $-x^2-y^2$ kitevő pedig akkor a legnagyobb, amikor $x=y=0$. Ekkor ugyanis a kitevő 0, s minden egyéb esetben negatív.

Az f-nek a $(0, 0)$ pontban valóban maximuma van, és a maximum értéke:

$$f(0, 0)=e^0=1.$$

A lokális szélsőérték létezésének elégséges feltételét általánosan nem fogalmazzuk meg, csupán a kétváltozós függvényre vonatkozó tételt adjuk meg:

6.12. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az f kétváltozós függvény valamennyi második parciális deriváltja létezik az (a, b) pontban, és azok ott folytonosak.*

Ha

$$f'_x(a, b)=0 \quad \textit{és} \quad f'_y(a, b)=0,$$

továbbá

a) $D(a, b) = f''_{xx}(a, b)f''_{yy}(a, b)-[f''_{xy}(a, b)]^2 > 0,$

akkor f-nek az (a, b) pontban lokális szélsőértéke van:

$f''_{xx}(a, b)<0$ esetén maximuma,
$f''_{yy}(a, b)>0$ esetén minimuma;

b) $D(a, b)<0,$

akkor f-nek az (a, b) pontban nincs lokális szélsőértéke;

c) $D(a, b)=0,$

akkor annak az eldöntésére, hogy van-e lokális szélsőértéke (a, b)-ben, további vizsgálat szükséges.

A tétel igazolására nem térünk ki, az megtalálható pl. [15]-ben. Ugyancsak ott megtalálható a lokális szélsőérték létezésének szükséges, illetve elégséges feltétele kettőnél több változóra.

6.14. példa. Keressük meg az

$$f\colon f(x, y) = x^3-3xy+y^3 \quad ((x, y) \in \mathbf{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékét.

Az f első parciális deriváltjai:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y,$$

$$f'_y(x, y) = -3x + 3y^2.$$

Az f második parciális deriváltjai:

$$f''_{xx}(x, y) = 6x,$$

$$f''_{yy}(x, y) = 6y,$$

$$f''_{xy}(x, y) = -3.$$

A

$$3x^2 - 3y = 0$$
$$-3x + 3y^2 = 0$$

egyenletrendszer megoldásaként az alábbi számpárokat kapjuk:

$$(0, 0) \quad \text{és} \quad (1, 1).$$

Tehát f-nek a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ helyeken lehet lokális szélsőértéke.

Ezután meghatározzuk a $(0, 0)$ és az $(1, 1)$ pontokban a másodrendű parciális differenciálhányadosokat:

a) A $(0, 0)$ pontban

$$f''_{xx}(0, 0) = 6 \cdot 0 = 0,$$

$$f''_{yy}(0, 0) = 6 \cdot 0 = 0,$$

$$f''_{xy}(0, 0) = -3.$$

Mivel

$D(0, 0) = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$, azért a $(0, 0)$ pontban f-nek nincs szélsőértéke.

b) Az $(1, 1)$ pontban

$$f''_{xx}(1, 1) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$f''_{yy}(1, 1) = 6 \cdot 1 = 6,$$

$$f''_{xy}(1, 1) = -3.$$

Mivel

$$D(1, 1) = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$$

és

$$f''_{xx}(1, 1) = 6 > 0,$$

azért f-nek az $(1, 1)$ pontban lokális minimuma van. A lokális minimum értéke: $f(1, 1) = -1$.

6.15. példa. Egy vállalat kétféle terméket állít elő. Tegyük fel, hogy a termelés folyamatos fenntartásához szükséges nyersanyagok beszerzésének és készletezésének évi költségét a következő formulával számolhatjuk:

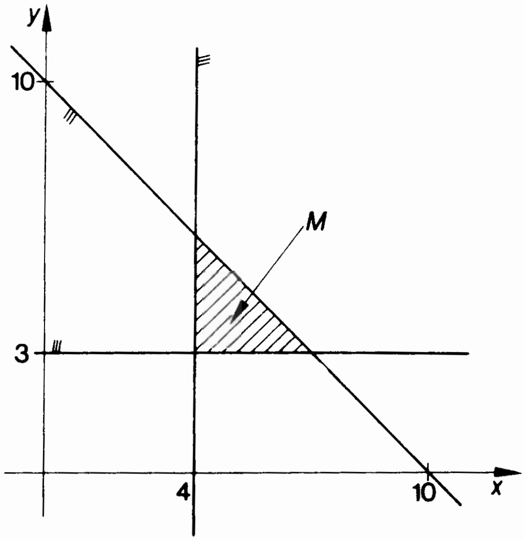
$$\frac{200}{x+y}+50(x+y),$$

ahol x az egyik, y a másik termékből egy év alatt termelt mennyiséget jelenti ezer tonnában. A vállalat a két termékből maximálisan 10 ezer tonnát tud előállítani, ugyanakkor az első termékből 4 ezer, a másikból 3 ezer tonna rendelést feltétlenül ki kell elégítenie. Milyen termékösszetétel esetén lesz a beszerzés és készletezés költsége minimális?

A feladat matematikailag azt jelenti, hogy a

$$K\colon\ K(x, y) = \frac{200}{x+y}+50(x+y) \qquad (x \geqq 4,\ y \geqq 3,\ x+y \leqq 10)$$

függvény minimumát kell megkeresni. Az értelmezési tartományt a *6.26. ábra* mutatja.



6.26. ábra

A

$$K'_x(x, y) = -\frac{200}{(x+y)^2}+50 = 0$$

$$K'_y(x, y) = -\frac{200}{(x+y)^2}+50 = 0$$

egyenletrendszer megoldása (ugyanarról a két egyenletről van szó):

$$x+y = \pm 2.$$

Ez azt jelenti, hogy K szélsőértékét az

$$y = 2-x$$

és az

$$y = -2-x$$

egyenesek mentén vehetné fel, de azoknak egyetlen pontja sem tartozik az értelmezési tartományhoz. Anélkül, hogy az ide vonatkozó eredményeket, illetve módszereket részletesen ismertetnénk, megjegyezzük, hogy vizsgálhatjuk a K viselkedését az értelmezési tartomány határán. Az értelmezési tartományt három szakasz határolja:

$$\begin{array}{lrl} \text{I.} & y = 3, & 4 \leqq x \leqq 7, \\ \text{II.} & y = 4, & 3 \leqq y \leqq 6, \\ \text{III.} & x+y = 10, & 4 \leqq x \leqq 7. \end{array}$$

A III. szakaszon

$$K(x, y) = \frac{200}{10} + 50 \cdot 10 = 520.$$

Az I. szakaszon a

$$K_1\colon\ K_1(x) = K(x, 3) = \frac{200}{x+3} + 50(x+3) \qquad (x \in [4, 7])$$

függvény monoton növekedő, ugyanis

$$K_1'(x) = -\frac{200}{(x+3)^2} + 50 > 0, \qquad \text{ha} \qquad x \in (4, 7).$$

Így K_1 minimuma az $x=4$ pontban van, és a minimum

$$K_1(4) = K(4, 3) = \frac{200}{7} + 50 \cdot 7 = 378{,}57.$$

A II. szakaszon a

$$K_2\colon\ K_2(y) = K(4, y) = \frac{200}{4+y} + 50(4+y) \qquad (y \in [3, 6])$$

szintén monoton növekedő, így K_2 minimuma a 3 pontban van. A minimum értéke

$$K_2(3) = K(4, 3) = K_1(4) = 378{,}57.$$

Ez azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány határán a függvény a legkisebb értéket a (3, 4) pontban veszi fel. Jelen esetben itt van K-nak a minimuma is.

6.7 A legkisebb négyzetek módszere

A gyakorlati életben gyakran előfordul, hogy nem ismerjük azt az f függvényt, amely adott X halmaz elemeit egy Y halmaz elemeire képezi le. Viszont ismerünk összetartozó (x_i, y_i) elempárokat:

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ha az ezeknek a számpároknak megfelelő pontokat egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk, a kapott pontok f grafikonján helyezkednek el. Ha f-et nem ismerjük, akkor általában grafikonját sem ismerjük, éppen az ábrázolt pontok elhelyezkedéséből próbálunk következtetni f jellegére. A helyzetet csak bonyolítja, ha az (x_i, y_i) számpárok elemei mérés vagy felmérés eredményei, és így pontatlanságokat is tartalmaznak. Az f tulajdonságainak meghatározásában a vizsgált gazdasági, társadalmi, műszaki stb. jelenség jellege is segítséget nyújthat (pl. előre tudjuk, hogy a függvény lineáris). Legtöbbször megelégszünk azzal, hogy megkeressük, meghatározott függvénycsaládból melyik függvény közelíti legjobban a keresett függvényt. Adott G függvénycsalád elemei közül azt a g függvényt fogadjuk el f legjobb közelítésének, amelyre a

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - g(x_i)]^2$$

kifejezés minimális – ez a **legkisebb négyzetek elve.**

Legyen pl. G az összes

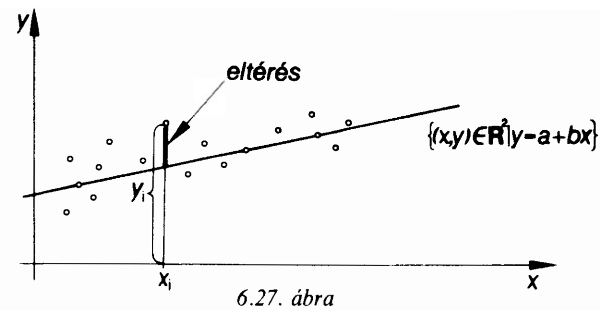
$$g\colon g(x) = a + bx$$

alakú függvények halmaza. Ennek alapján azt a g függvényt, vagyis azt az (a, b) együtthatópárt fogadjuk el megoldásként, amelyre az

$$F\colon F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2 \qquad ((a, b) \in \mathbf{R}^2)$$

függvény minimális lesz.

Geometriailag arról van szó, hogy az $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ pontokra legjobban illeszkedőnek azt az $y = a + bx$ egyenest mondjuk, amelytől az adott pontok ordinátái eltérésének négyzetösszege minimális *(6.27. ábra)*.



6.27. ábra

Az F függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol az F'_a és F'_b parciális deriváltaknak zérushelye van.
A parciális deriváltak:

$$F'_a(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (-2)(y_i - a - bx_i), \qquad (a, b) \in \mathbf{R}^2,$$

$$F'_b(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (-2x_i)(y_i - a - bx_i), \qquad (a, b) \in \mathbf{R}^2.$$

A zérushelyek meghatározásához meg kell oldanunk az alábbi egyenletrendszert:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - ax_i - bx_i^2) = 0.$$

A feladat természeténél fogva nyilván feltételezhetjük, hogy az x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) értékek nem mind egyenlőek.
Átrendezzük az egyenleteket:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = na + b \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

és az első egyenlet mindkét oldalát $\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$-vel, a második egyenlet mindkét oldalát n-nel szorozzuk:

$$\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = -na \sum_{i=1}^{n} x_i - b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2,$$

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = na \sum_{i=1}^{n} x_i + nb \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

majd összeadjuk a két egyenletet:

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = nb\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

Innen

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

A b értékét az első egyenletbe helyettesítve:

$$a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Képezzük az F függvény másodrendű parciális deriváltjait:

$$F''_{aa}(a, b) = 2n,$$

$$F''_{bb}(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$F''_{ab}(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ebből

$$D(a, b) = 2n\,2\sum_{i=1}^{n} x_i - \left(2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 =$$

$$= 4n\left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right] > 0,$$

ha nem minden x_i azonos (nem bizonyítjuk), és

$$F''_{aa}(a, b) = 2n > 0.$$

Így tehát F-nek valóban lokális minimuma van az egyenletrendszer megoldásakor kapott (a, b) pontban, és belátható, hogy ez az egyetlen lokális minimum abszolút minimum is.

7. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Az előző fejezetben megismertük, hogyan lehet adott intervallumon az f függvény deriváltját, f'-t meghatározni. Ebben a fejezetben egy fordított irányú művelettel foglalkozunk: a derivált függvény ismeretében keressük az eredeti függvényt.

7.1 Primitív függvény, határozatlan integrál

DEFINÍCIÓ. *Akkor mondjuk, hogy F* ***primitív függvénye*** *az f függvénynek az* $I \subset \mathbf{R}$ *intervallumban, ha F folytonos I-n és I minden belső pontjában*

$$F' = f.$$

Az f: $f(x) = x^2$ függvény primitív függvénye a számegyenesen az F: $F(x) = \frac{x^3}{3}$, mert $F'(x) = x^2 = f(x)$. De primitív függvénye f-nek az $x \mapsto \frac{x^3}{3} + 6$ vagy az $x \mapsto \frac{x^3}{3} - 4$ függvény is.

A cos függvény primitív függvénye a sin függvény, de primitív függvénye az $x \mapsto \sin x + 3$ vagy az $x \mapsto \sin x - 1$ is minden valós számra.

7.1. TÉTEL. *Ha f-nek az I intervallumban van primitív függvénye, akkor végtelenül sok primitív függvénye van. Ha valamely primitív függvénye F, akkor a primitív függvények F + C alakú függvények, ahol C állandó.*

Bizonyítás:

Azt szeretnénk belátni, hogy a primitív függvények csak állandóban különböznek egymástól.

Tegyük fel, hogy F_1 és F_2 két különböző primitív függvénye az f függvénynek.

Ekkor

$$F_1' = f \quad \text{és} \quad F_2' = f,$$

azaz

$$F_1' - F_2' = (F_1 - F_2)' = 0.$$

($F_1 - F_2$ nyilvánvalóan folytonos.)

Azt kaptuk, hogy az $F_1 - F_2$ függvény deriváltja az I intervallumon 0, amiből következik, hogy $F_1 - F_2$ konstans függvény (6.3. tétel):

$$F_1 - F_2 = C$$

azaz

$$F_1 = F_2 + C.$$

A primitív függvények valóban csak konstansban különböznek egymástól, és ezt kellett belátnunk.

DEFINÍCIÓ. *Egy f függvény* ***határozatlan integráljának*** *mondjuk az $I \subset \mathbf{R}$ intervallumban az f függvény primitív függvényeinek halmazát (ha nem üres halmazról van szó).*
Jele:

$$\int f(x)\,dx \quad \textit{vagy tömören} \quad \int f.$$

[Olvasd: integrál $f(x)\,dx$ vagy integrál f.]

Az integráljel mögötti részt integrandusnak, az x változót integrációs változónak nevezzük [természetesen az x helyett más betűt is írhatunk, pl. $\int f(u)\,du$, $\int f(t)\,dt, \ldots$]. Mivel az $\int f$ az f függvény primitív függvényeinek halmazát jelenti, a F és f közötti kapcsolatot az

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C,\ C \in \mathbf{R}\}$$

egyenlet fejezi ki, ahol F az egyik primitív függvény. Mivel $\int f$ halmazban az $F + C$ alakú függvények vannak, röviden, de pontatlanul gyakran az

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

egyenlőséget írjuk.

Egy függvény határozatlan integrálját megadni azt jelenti, hogy megkeressük az összes primitív függvényét.

7.1. példa. Határozzuk meg f primitív függvényeit, ha

$$f\colon f(x) = x^3.$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C, \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Mivel a primitív függvények csak additív konstansban különbözhetnek egymástól, ezért egy függvény különböző primitív függvényeinek grafikonjai az (x, y) derékszögű koordináta-rendszerben az y tengely mentén párhuzamos eltolással adódnak *(7.1. ábra)*.

7.2. példa. Határozzuk meg az

$$f\colon f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 3, & \text{ha} \quad x \geqq 0 \end{cases}$$

függvény egy primitív függvényét.

Keressük azt a F függvényt, amelynek differenciálhányadosa f.

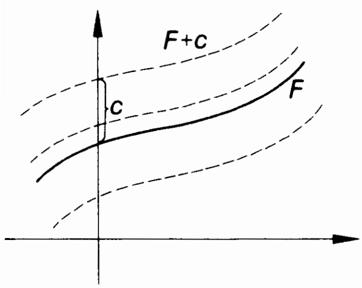
Nemnegatív és negatív x-re külön-külön megadhatunk egy primitív függvényt:

$$F\colon F(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x < 0 \\ 3x, & \text{ha} \quad x \geqq 0. \end{cases}$$

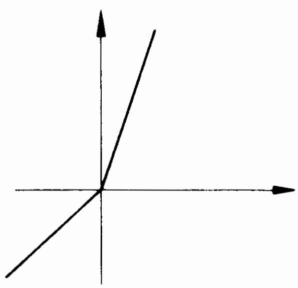
F azonban az egész számegyenesen nem primitív függvénye f-nek, mert az értelmezési tartománynak nem minden pontjára igaz, hogy

$$F'(x) = f(x),$$

ugyanis a 0 pontban F nem differenciálható (töréspontja van, mint azt a *7.2. ábra* mutatja).



7.1. ábra



7.2. ábra

7.2 Elemi függvények határozatlan integráljai

Az alábbiakban néhány számunkra fontos elemi függvény primitív függvényeit adjuk meg az értelmezési tartományukon:

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1,\ \alpha \in \mathbf{R},$

2. $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C,$

3. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$

4. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$

5. $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C,$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C,$

7. $\int e^x dx = e^x + C,$

8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad a > 0,\ a \neq 1.$

A primitív függvények helyességét deriválással ellenőrizhetjük.
A 2. esetben vegyük figyelembe, hogy $x < 0$ esetén

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

A továbbiakban az $\int 1\, dx$ helyett gyakran $\int dx$-et írunk, az $\int \frac{1}{x}\, dx$-et $\int \frac{dx}{x}$ alakban írhatjuk.

Természetesen az 1–8. pontokban felsorolt egyenlőségeket még bővíteni lehetne, de mi további alapintegrálokkal nem foglalkozunk.

A következőkben a határozatlan integrálokra vonatkozó néhány olyan tulajdonsággal ismerkedünk meg, amelyeket a differenciálási szabályokból nyerhetünk.

7.3 Integrálási szabályok

7.2. TÉTEL. *Ha f-nek és g-nek az I intervallumban léteznek a primitív függvényei, akkor cf-nek és (f+g)-nek is van primitív függvénye és*

a) $\int cf = c\int f.$

b) $\int (f+g) = \int f + \int g.$

Megjegyzés: Az *a)* alatti azonosság azt jelenti, hogy az $\int cf$ halmaz elemei az $\int f$ halmaz elemeinek c-szeresei; a *b)* alatti pedig azt, hogy az $\int (f+g)$ halmaz elemei úgy adódnak, hogy az $\int f$ és $\int g$ halmazok elemeit összeadjuk.

Bizonyítás:

a) Legyen F az f-nek egy tetszőleges primitív függvénye, $F' = f$ (vagy ami ugyanaz, az $F \in \int f$).
Ekkor

$$(cF)' = cF' = cf$$

egyenlőség miatt

$$\int cf = c\int f.$$

b) Legyen f és g egy-egy tetszőleges primitív függvénye F és G, vagyis

$$F' = f, \quad \text{és} \quad G' = g.$$

Ekkor

$$(F+G)' = F' + G' = f + g.$$

Így valóban

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

A most bizonyított állításainkat úgy is fogalmazhatjuk, hogy
a) a konstans kiemelhető az integráljel elé,
b) összegfüggvény határozatlan integrálja a tagok határozatlan integráljainak összegével egyenlő (összeget tagonként integrálhatunk).

Az előbbi tételek ismételt felhasználásával kapjuk, hogy ha $f_1, f_2, \ldots, f_n$-nek létezik a primitív függvénye, akkor

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \ldots + c_n f_n) = c_1 \int f_1 + c_2 \int f_2 + \ldots + c_n \int f_n, \qquad n \geqq 3.$$

7.3. példa. Keressük az alábbi függvények határozatlan integrálját:

a) $f_1\colon\ f_1(x) = 6x^4 + 4x^2 + 5,$

$$\int (6x^4 + 4x^2 + 5)\,dx = 6\int x^4 dx + 4\int x^2 dx + \int 5\,dx =$$

$$= \frac{6x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 5x + C.$$

b) f_2: $f_2(x) = \dfrac{2x^5+x^3-x^2+3}{x^3}$,

$$\int \frac{2x^5+x^3-x^2+3}{x^3}\,dx = 2\int x^2\,dx + \int dx - \int \frac{1}{x}\,dx +$$

$$+3\int x^{-3}\,dx = \frac{2x^3}{3} + x - \ln|x| - \frac{3}{2}x^{-2} + C.$$

Mindkét esetben differenciálással ellenőrizhetjük az eredmény helyességét.

7.3. TÉTEL. *Ha az f-nek az I intervallumban F a primitív függvénye, akkor*

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C, \qquad ax+b\in I,$$

a és b állandó, $a\neq 0$.

Bizonyítás:

Feltevésünk szerint $F'=f$, az összetett függvény differenciálási szabályát felhasználva:

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right]' = \frac{1}{a}F'(ax+b)\cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b).$$

7.4. példa. Határozzuk meg az

a) $x \mapsto (3x+5)^4$,

b) $x \mapsto \cos(4x-2)$,

c) $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{4}+3\right)$

függvények határozatlan integrálját.

A 7.3. tétel alapján

a) $\displaystyle\int (3x+5)^4\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+5)^5}{5}+C = \frac{(3x+5)^5}{15}+C,$

b) $\displaystyle\int \cos(4x-2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x-2)+C,$

c) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{x}{4}+3\right)dx = -4\cos\left(\frac{x}{4}+3\right)+C.$

7.4. TÉTEL. *Legyen f differenciálható az I intervallumban, ekkor*

$$\int f^{\alpha} f' = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \alpha \neq -1,$$

(ha $\alpha \neq \mathbf{N}$, akkor $f > 0$ feltételezéssel élünk).

Bizonyítás:

Az összetett függvény differenciálási szabályát alkalmazva:

$$\left(\frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\right)' = \frac{1}{\alpha+1} \cdot (\alpha+1) \cdot f^{\alpha} \cdot f' = f^{\alpha} \cdot f'.$$

7.5. példa. Adjuk meg az

a) $f_1 : f_1(x) = (6x^2+5)^4 \cdot 12x,$

b) $f_2 : f_2(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2-2}}$

függvények határozatlan integrálját. Deriválással ellenőrizzük az eredményt.

a) $$\int (6x^2+5)^4 \cdot 12x \, dx = \frac{(6x^2+5)^5}{5} + C.$$

Deriváljuk a primitív függvényt:

$$\left[\frac{(6x^2+5)^5}{5} + C\right]' = \frac{1}{5} \cdot 5(6x^2+5)^4 \cdot 12x = (6x^2+5)^4 12x$$

b) $$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2-2}} dx = \int \frac{2x}{(3x^2-2)^{\frac{1}{2}}} dx = \int 2x(3x^2-2)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int 6x(3x^2-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x^2-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(3x^2-2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Ellenőrzés:

$$\left[\frac{2}{3}(3x^2-2)^{\frac{1}{2}} + C\right]' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(3x^2-2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x = \frac{2x}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

7.5. TÉTEL. *Ha f differenciálható az I intervallumban és $f(x) \neq 0$ $(x \in I)$, akkor*

$$\int \frac{f'}{f} = \ln |f| + C.$$

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy

1. ha $f(x) > 0$, akkor $|f(x)| = f(x)$,

2. ha $f(x) < 0$, akkor $|f(x)| = -f(x)$.

Mind a két esetben alkalmazzuk az összetett függvény differenciálási szabályát.

$$1.\ (\ln |f(x)| + C)' = [\ln f(x) + C]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$2.\ (\ln |f(x)| + C)' = [\ln(-f(x)) + C]' = -\frac{1}{f(x)} \cdot [-f'(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

7.6. példa.

a) $$\int \frac{2x}{5x^2+2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{10x}{5x^2+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln(5x^2+3) + C,$$

b) $$\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

Parciális integrálás

A szorzatfüggvény differenciálási szabályának megfordításával adódó integrálási szabályt **parciális integrálásnak** nevezzük.

7.6. TÉTEL. *Ha f és g differenciálható és f', g' folytonos az I intervallumban, akkor*

$$\int fg' = fg - \int f'g. \tag{7.1.}$$

Bizonyítás:

Képezzük az $f \cdot g$ szorzatfüggvény deriváltját:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Vegyük mindkét oldal primitív függvényét, vagyis integráljuk mindkét oldalt (megmutatható, hogy f' és g' folytonossága esetén a primitív függvények léteznek):

$$f \cdot g = \int f' \cdot g + \int f \cdot g'.$$

Ebből

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g.$$

Ezzel a képlettel az fg' primitív függvényének meghatározását az $f'g$ primitív függvényének meghatározására vezethetjük vissza, vagy fordítva.

A primitív függvény e módszerrel való meghatározását parciális integrálásnak nevezzük. (A jobb oldal első tagját integrált résznek is szokták nevezni.)

Néhány példán bemutatjuk a parciális integrálás módszerének alkalmazását.

7.7. példa.

$$\int xe^x \, dx = ?$$

Nehezen tudjuk közvetlenül eldönteni, hogy az $x \to x \cdot e^x$ függvénynek mi a primitív függvénye, de alkalmazhatjuk a 7.6. tételt.

Legyen $f(x) = x$ és $g'(x) = e^x$, akkor $f'(x) = 1$ és $g(x) = e^x$. Ezeket behelyettesítve (7.1.)-be:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + C.$$

Az eredmény helyességét deriválással ellenőrizzük:

$$(xe^x - e^x + C)' = 1 \cdot e^x + xe^x - e^x = xe^x.$$

7.8. példa. $\int \ln x \, dx = ? \quad (0 < x \in \mathbf{R}).$

Az integrandust $1 \cdot \ln x$-nek tekintjük:

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx.$$

Legyen

$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \ln x,$$

ekkor

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alkalmazva (7.1.)-et:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Tehát

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C.$$

7.9. példa. $\int x^2 \cos x \, dx = ?$

Most a parciális integrálási módszer többszöri alkalmazásával jutunk el az eredményhez.

Legyen

$$f(x) = x^2, \qquad g'(x) = \cos x,$$

ekkor

$$f'(x) = 2x, \qquad g(x) = \sin x.$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - \int 2x \sin x \, dx. \tag{7.2.}$$

A jobb oldali integrálra ismét alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét:

$$\int -2x \sin x \, dx = 2x \cos x - \int 2 \cos x \, dx, \tag{7.3.}$$

$$f(x) = -2x, \qquad g'(x) = \sin x,$$

$$f'(x) = -2, \qquad g(x) = -\cos x.$$

Így már alapintegrálhoz jutottunk.

$$-\int 2 \cos x \, dx = -2 \sin x + C. \tag{7.4.}$$

Tehát (7.2.), (7.3.) és (7.4.) alapján:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

7.10. példa. $\int e^x \sin x \, dx = ?$

Legyen

$$f(x) = e^x, \qquad g'(x) = \sin x.$$

Ekkor

$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = -\cos x.$$

Így

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx. \tag{7.5.}$$

Látszólag semmivel sem jutottunk előbbre, de érdemes ismét parciálisan integrálni.

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx, \tag{7.6.}$$

az

$$f(x) = e^x, \qquad g'(x) = \cos x$$

választás mellett

$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin x.$$

(7.5.) és (7.6.) alapján

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx. \tag{7.6a}$$

Látjuk, hogy ismételt parciális integrálással a jobb oldalon az eredeti integrál jelenik meg.

A bal oldalon szereplő primitív függvények halmazának egyik eleme legyen H. Ekkor (7.6a)-ból

$$H = -e^x \cos x + e^x \sin x - H + c,$$

amelyből

$$H = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + \frac{c}{2}.$$

Mivel H tetszőleges elem volt és $\frac{c}{2}$ is tetszőleges konstans, azért

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C,$$

ami a (7.6a) egyenlet formális rendezésének felel meg.

7.11. példa. $\int x^n \ln x\, dx = ?$

Legyen

$$f'(x) = x^n, \qquad g(x) = \ln x.$$

ekkor

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x}\, dx,$$

$$-\int \frac{x^n}{n+1}\, dx = -\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C.$$

Tehát

$$\int x^n \ln x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2} + C.$$

A bemutatott példák alapján a következőket tapasztalhattuk:

Vannak esetek, amikor a parciális integrálás módszerének egyszeri alkalmazása eredményre vezet, más esetben viszont annak többszöri alkalmazásával kapjuk meg az eredményt. Előfordulhat, hogy a parciális integrálás ismételt alkalmazásával az eredeti integrált kapjuk vissza, ilyenkor az egyenlet rendezése vezet eredményhez.

Integrálás helyettesítéssel

Igen gyakran alkalmazható integrálási módszerhez jutunk az összetett függvény differenciálási szabályának egyfajta megfordítása által. Ez az úgynevezett **helyettesítéssel való integrálás** módszere.

7.7. TÉTEL. *Ha g függvény differenciálható az I intervallumban és $F'(x)=f(x)$, $x \in g(I)$,* akkor

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))+C.$$

Bizonyítás:

Feltevésünk szerint F primitív függvénye f-nek, azaz

$$F'(x)=f(x).$$

Az összetett függvény deriválási szabályának alkalmazásával

$$(F(g(x)))' = f(g(x))\cdot g'(x),$$

és ebből

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x))+C.$$

Ezzel állításunkat igazoltuk, amit röviden így is írhatunk:

$$\int (f\circ g)g' = F\circ g+C.$$

Az $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$ képleten a következő formális átalakítást hajthatjuk végre.

Legyen

$$t=g(x).$$

Ekkor a $\dfrac{dt}{dx} = g'(x)$ egyenlőségből

$$g'(x)\,dx = dt. \tag{7.7.}$$

Így

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \qquad [t=g(x)].$$

Bár átalakításaink formálisak voltak, a módszer a 7.7. tétel feltételei mellett alkalmazható.

7.12. példa. $\int e^{x^2}\cdot x\,dx = ?$

Az első tényező összetett függvény, amelynek belső függvénye g: $g(x) = x^2$.

Az integrandus nem $f[g(x)]g'(x)$ alakú, de mivel $(x^2)'=2x$, ha szorozzuk és osztjuk is 2-vel, már a kívánt alakú lesz.

Így

$$\frac{1}{2}\int e^{x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

7.13. példa. $$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}\,dx = ?$$

A nevező összetett függvény, amelynek belső függvénye

$$g\colon\ g(x) = 3x^2+5.$$

Legyen $t = 3x^2+5$.
Ekkor (7.7.) alapján

$$dt = (3x^2+5)'\,dx = 6x\,dx.$$

Mivel az integráljel mögött $2x\,dx$ szerepel, célszerű ezt kifejezni:

$$\frac{dt}{3} = 2x\,dx.$$

Így

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{t}+C.$$

Végül a $t = 3x^2+5$ visszahelyettesítést elvégezve, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{3x+5}+C.$$

Deriválással ellenőrizzük az eredményt:

$$\left(\frac{2}{3}\sqrt{3x^2+5}+C\right)' = \left(\frac{2}{3}(3x^2+5)^{\frac{1}{2}}+C\right)' =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(3x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 6x = \frac{2x}{\sqrt{3x^2+5}}.$$

7.14. példa. $$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x}}\,dx = ?$$

Legyen

$$\sqrt{2+5x} = t,$$

ebből

$$2+5x = t^2$$

és

$$x = \frac{t^2-2}{5}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{5}, \qquad dx = \frac{2t}{5}\,dt.$$

A helyettesítést elvégezve,

$$\int \frac{\frac{t^2-2}{5}}{t} \cdot \frac{2t}{5}\,dt = \int \frac{t^2-2}{5t} \cdot \frac{2t}{5}\,dt = \frac{2}{25}\int (t^2-2)\,dt = \frac{2}{25}\left(\frac{t^3}{3} - 2t\right) + C.$$

Végül

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x}}\,dx = \frac{2}{25}\left(\frac{\sqrt{(2+5x)}^3}{3} - 2\sqrt{2+5x}\right) + C.$$

Természetesen semmilyen általános szabályt nem tudunk adni a $t = g(x)$ helyettesítés megválasztására. Célunk mindig az, hogy a helyettesítéssel nyert integrál egyszerűbb legyen az eredeti integrálnál.

7.4 A határozott integrál fogalma

Mielőtt a határozott integrál általános tárgyalásával foglalkoznánk, elevenítsük fel a parabolikus háromszög területének meghatározását (a középiskolából ismert) közelítő módszerrel.

Keressük annak a síkidomnak a területét, amelyet az $f(x) = x^2$ egyenletű görbe, az x tengely és az $x = b$ egyenes határol *(7.3. ábra)*.

Jelöljük a szóban forgó ún. „görbe vonalú háromszög" területét T-vel. Osszuk fel a $[0, b]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részintervallumra, s legyenek az osztópontok

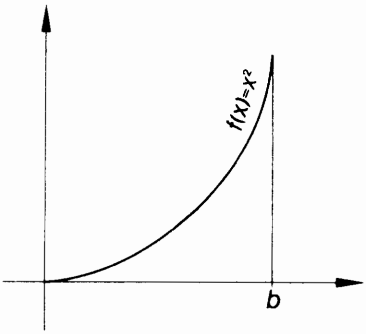
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_n = b,$$

ahol

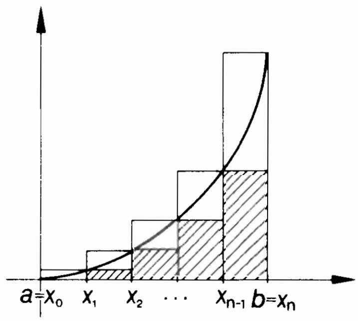
$$x_1 = \frac{1b}{n}, \; x_2 = \frac{2b}{n}, \; \ldots, \; x_i = \frac{ib}{n}, \; \ldots, \; x_n = \frac{nb}{n}.$$

A keresett T területnek egy alsó becslését kapjuk, ha minden $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum mint alap fölé olyan téglalapot rajzolunk, amelynek magassága a részintervallum bal végpontjában felvett $f(x_{i-1}) = (x_{i-1})^2 = \left(\frac{i-1}{n}b\right)^2$ függvényérték. Így a parabolikus háromszöget egy n lépcsőjű tört vonallal határolt sokszög területével közelítjük meg. (A parabolaívet egy n lépcsőjű függvénnyel.)

Az n lépcsőjű sokszög területét az $x_i - x_{i-1} = \frac{b}{n}$ alapú és $\left(\frac{1b}{n}\right)^2, \left(\frac{2b}{n}\right)^2, \ldots, \left(\frac{nb}{n}\right)^2$ magasságú téglalapok területének összege adja (7.4. ábra).



7.3. ábra



7.4. ábra

Jelöljük ezt a területet s_n-nel:

$$s_n = \frac{b}{n}\left(\frac{1b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{b}{n}\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^3}{n^3}[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2]. \qquad (7.9.)$$

Ez kisebb, mint a parabola alatti terület: $s_n \leqq T$.
A (7.9.) jobb oldalán a zárójelben a természetes számok négyzetének összege szerepel.
Mivel

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad (7.10.)$$

az első $(n-1)$ négyzetszám összege:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Tehát

$$s_n = \frac{b^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} = \frac{b^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right).$$

A T területnek egy felső becslését úgy kapjuk, hogy minden részintervallum fölé a jobb oldali függvényértéknek megfelelő magasságú téglalapokat rajzolunk.
Jelöljük ezt a területet S_n-nel:

$$S_n = \frac{b}{n}\left(\frac{1b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \ldots + \frac{b}{n}\left(\frac{nb}{n}\right)^2 = \frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2).$$

A (7.10.) miatt

$$S_n = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n} = \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Nyilvánvaló, hogy $T \leqq S_n$.
Ha n-et növeljük, mindig több részre osztjuk a $[0, b]$ intervallumot, akkor

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^3}{3}.$$

Mivel minden n-re

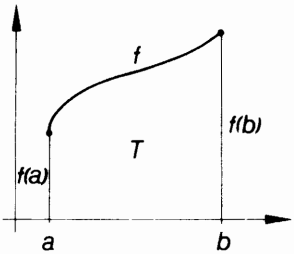
$$s_n \leqq T \leqq S_n,$$

a T terület csak a közös határérték lehet: $T = \dfrac{b^3}{3}$.

Monoton függvények határozott integrálja

Először monoton függvényekkel foglalkozunk. Tételeinket monoton növekedő függvényekre fogalmazzuk meg, de ezek könnyen átfogalmazhatók és bizonyíthatók monoton csökkenő függvényekre is. Feladatunk tehát a következő:

Legyen f az $[a, b]$ intervallumon értelmezett monoton növekedő korlátos függvény és $f \geqq 0$. Határozzuk meg az ún. görbe vonalú trapéz területét, amelyet az x tengely az f függvény grafikonja és az $x=a$, $x=b$ egyenesek határolnak *(7.5. ábra)*.



7.5. ábra

Annak feltételezése, hogy $f(x) \geqq 0$, nem jelent megszorítást, ez egyszerű eltolással elérhető.

Azt a módszert, amellyel a parabolikus háromszög területét meghatároztuk, alkalmazhatjuk most is. Mivel a későbbiekben az alapintervallumot nem mindig egyenlő részekre osztjuk, egy fogalmat kell definiálni.

DEFINÍCIÓ. *Legyen*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

az $[a, b]$ *intervallum felosztása n részre. A* ***felosztás finomságán*** *a*

$$\delta_n = \max_i (x_i - x_{i-1})$$

számot értjük.

A δ_n tehát az $[a, b]$ intervallum valamely (nem feltétlenül egyenlő részre történő) felosztásához tartozó részintervallumok hosszúságai közül a legnagyobbat jelöli.

Minden olyan felosztást, amelyet ebből újabb véges sok osztópont felvételével nyerünk úgy, hogy közben δ_n csökken, az adott felosztás finomításának nevezünk.

DEFINÍCIÓ. *Ha f monoton növekedő és korlátos az* $[a, b]$ *intervallumban, akkor az*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

felosztáshoz tartozó ***alsó összegen*** *(a beírt téglalapok területösszegén) az*

$$s_n = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

összeget; ***felső összegen*** *(a körülírt téglalapok területösszegén) az*

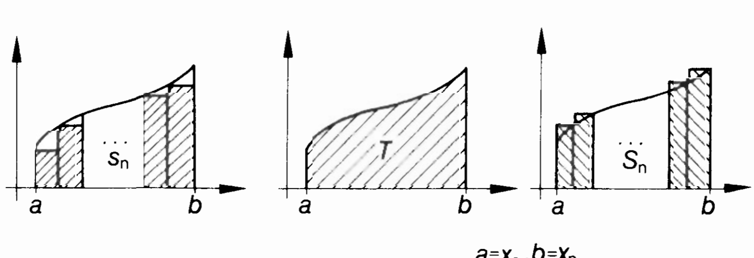
$$S_n = f(x_1)(x_1 - x_0) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget értjük.

(Hasonlóan definiálható az alsó és felső összeg monoton csökkenő függvény esetében.)

Ha továbbra is feltételezzük, hogy $f(x) \geqq 0$ $x \in [a, b]$, ekkor T-vel jelölve a függvény alatti területet *(7.6. ábra)*, látható, hogy

$$s_n \leqq T \leqq S_n \tag{7.11.}$$



7.6. ábra

7.8. TÉTEL. *Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, azaz $\delta_n \to 0$, akkor a (s_n) és (S_n) sorozatok konvergálnak és*

$$\lim_{\delta_n \to 0} s_n = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = T.$$

Bizonyítás:

Tudjuk, hogy

$$s_n = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

és

$$S_n = f(x_1)(x_1 - x_0) + f(x_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Be fogjuk látni, hogy ha a beosztást minden határon túl finomítjuk, akkor

$$\lim_{\delta_n \to 0} (S_n - s_n) = 0,$$

$$S_n - s_n = [f(x_1) - f(x_0)](x_1 - x_0) + [f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) + \ldots +$$

$$+ [f(x_n) - f(x_{n-1})](x_n - x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}).$$

A függvény monoton növekedése miatt

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) \geqq 0.$$

A részintervallumok hosszát helyettesítsük a leghosszabb részintervallum

$$\delta_n = \max_i [x_i - x_{i-1}]$$

hosszával. Így a jobb oldal csak növekedhet:

$$0 \leqq S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})](x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - f(x_{i-1})]\,\delta_n =$$

$$= [f(b) - f(a)]\delta_n.$$

Ha most a felosztást minden határon túl finomítjuk, vagyis $\delta_n \to 0$, akkor a jobb oldal 0-hoz tart, amiből következik, hogy a bal oldal is 0-hoz tart:

$$\lim_{\delta_n \to 0} (S_n - s_n) = 0.$$

Ebből (7.11.) miatt következik, hogy

$$\lim_{\delta_n \to 0} s_n = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = T.$$

Hasonló állítás fogalmazható meg monoton csökkenő korlátos függvényekre.

Most megmutatjuk, hogy a függvényértékek választásánál nem kell ragaszkodnunk a részintervallumok végpontjaihoz.

7.9. TÉTEL. *Legyen f az $[a, b]$ intervallumban monoton és korlátos,*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

az $[a, b]$ intervallum egy felosztása
és

$$\begin{gathered} x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \\ x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \leqq \xi_n \leqq x_n \end{gathered}$$

tetszés szerinti valós számok. Legyen továbbá

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ekkor

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n = \lim_{\delta_n \to 0} s_n = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = T.$$

Bizonyítás:

A bizonyítást monoton növekedő függvényre végezzük el (fogyóra hasonlóan történhet a bizonyítás).

Mivel ξ_i az $[x_{i-1}, x_i]$ részintervallum valamely tetszés szerinti pontja, azért nyilvánvaló, hogy

$$f(x_{i-1}) \leqq f(\xi_i) \leqq f(x_i).$$

Ebből

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \leqq \sigma_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i-1}) = S_n.$$

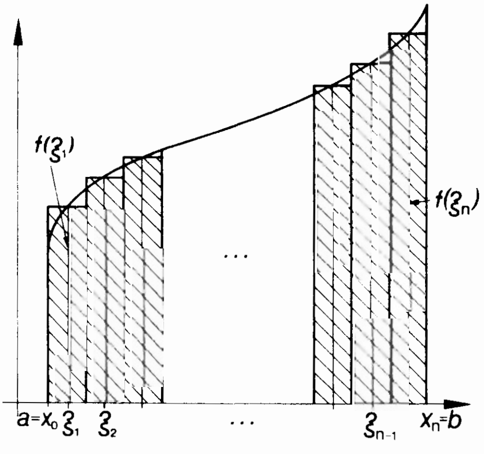
Vagyis

$$s_n \leqq \sigma_n \leqq S_n.$$

Ha a felosztást minden határon túl finomítjuk, akkor a 7.8. és a 3.7. tétel értelmében

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sigma_n = \lim_{\delta_n \to 0} s_n = \lim_{\delta_n \to 0} S_n = T$$

(7.7. ábra).



7.7. ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

az $[a, b]$ *intervallum egy felosztása és*

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

A függvénynek az adott beosztáshoz tartozó közelítő összegén a

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

összeget értjük. Az f függvényt az $[a, b]$ intervallumban ***integrálhatónak*** *mondjuk, ha a felosztás minden határon túli finomításával keletkező (σ_n) sorozatnak létezik a (beosztástól és a ξ_i közbülső pontoktól független) határértéke.*
A határértéket az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett integráljának vagy ***határozott integráljának*** *nevezzük. Jele:*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{vagy röviden} \qquad \int_a^b f.$$

Ezek után a 7.9. tétel így fogalmazható: ha f az $[a, b]$ intervallumban monoton és korlátos, akkor integrálható.

Megjegyzés: A $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ közelítő összeget szokás még téglányösszegnek vagy Riemann-féle integrálközelítő összegnek is nevezni.

Azt is mondhatjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon Riemann szerint integrálható, ha a

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

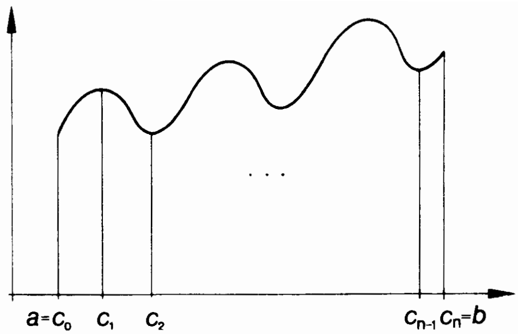
határérték létezik.
Ekkor az

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett Riemann-integrálja.

DEFINÍCIÓ. *Az f függvényt az (a, b) intervallumban* ***szakaszonként monoton függvénynek*** *nevezzük, ha van az $[a, b]$ intervallumnak olyan véges felosztása:*

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b,$$



7.8. ábra

hogy minden $[c_{i-1}, c_i]$ *részintervallumban* f *monoton. Az ilyen függvények integrálját a következőképpen definiálhatjuk (7.8. ábra):*

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_{n-1}}^{b} f.$$

Ha a függvény szakaszonként nem monoton, de folytonos, arra az esetre vonatkozik a következő tétel.

7.10. TÉTEL. *Ha az* $[a, b]$ *intervallumnak van olyan*

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_n = b$$

felosztása, hogy minden nyitott részintervallumon az f *függvény folytonos (szakaszonként folytonos) és* f $[a, b]$*-n korlátos, akkor* f *az* $[a, b]$*-n integrálható.*
(Nem bizonyítjuk.)

7.5 Határozott integrál numerikus meghatározása

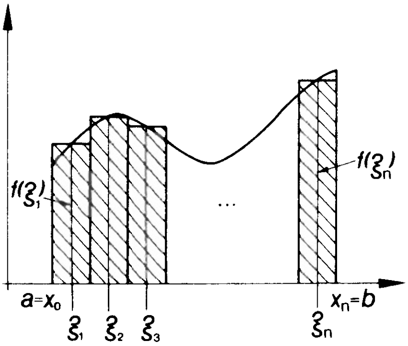
A későbbiekben látni fogunk olyan módszert, amivel a primitív függvény ismeretében a határozott integrál pontos értéke könnyen meghatározható. A gyakorlatban az integrálási problémák elsősorban numerikus problémák, amelyek megoldására elektronikus számítógépek, és ezekhez gépi algoritmusok állnak rendelkezésünkre. A számítás gépi úton történhet, általában gyorsan elvégezhető, és előre megadott pontosságot kaphatunk. Az alábbiakban bemutatunk néhány módszert.

Téglalapszabály

Ez az eljárás a határozott integrál definícióján alapul. Az f függvény $[a, b]$ intervallumon vett integráljának kiszámításához osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részintervallumra. A részintervallumok hossza

$$[x_i - x_{i-1}] = \frac{b-a}{n} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Az f függvény integrálját az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumok fölé rajzolt téglalapok területösszegével közelítjük. A téglalapok magassága az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum tetszés szerinti ξ_i pontjában felvett függvényérték (*7.9. ábra*).



7.9. ábra

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[f(\xi_1)+f(\xi_2)+\ldots+f(\xi_n)]$$

Ha speciálisan mindig az intervallum bal végpontját választjuk, akkor

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[f(a)+f\left(\frac{b-a}{n}\right)+f\left(\frac{2(b-a)}{n}\right)+\ldots+f\frac{(n-1)(b-1)}{n}\right]=$$

$$=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left[a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right].$$

Ha f differenciálható az $[a, b]$ intervallumban és $|f'|<K$ (f' korlátos), és azt akarjuk megtudni, hogy hány részre kell felosztani $[a, b]$-t, hogy a közelítő érték és a határozott integrál közötti eltérés értéke egy előre megadott pozitív ε-nál kisebb legyen, a következő becslés adható:

$$n \geqq K\frac{(b-a)^2}{\varepsilon}.$$

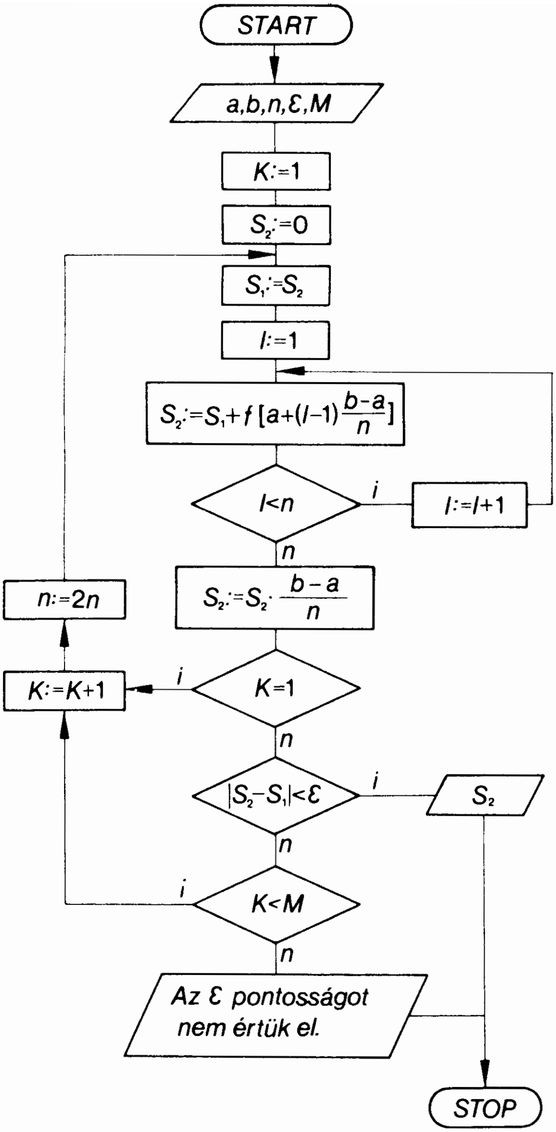
(Nem bizonyítjuk.)

A téglalapszabály blokkdiagramja a *7.10. ábrán* látható, ahol a az intervallum kezdőpontja, b az intervallum végpontja, n a részintervallumok száma.
S_1, S_2 két egymás utáni beosztáshoz tartozó közelítő érték. Az eljárást addig folytatjuk, amíg $|S_1-S_2|<\varepsilon$ be nem következik.
Az M biztonsági állandó (a ciklusok számát korlátozza).

Trapézszabály

Ebben az esetben a közelítő összeget nem téglalapok, hanem trapézok területeinek összege adja (*7.11. ábra*).

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő hosszúságú részintervallumra. Ekkor $x_i-x_{i-1}=\dfrac{b-a}{n}$ lesz a trapézok magassága, párhuzamos oldalai pedig az osztópontokhoz tartozó függvényértékek.



7.10. ábra

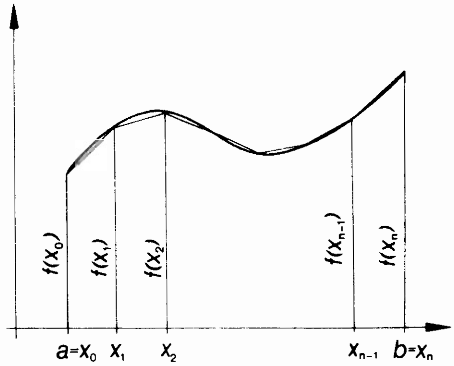
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right].$$

Legyen f kétszer deriválható az $[a, b]$ intervallumban és $|f''| < K$, akkor az elkövetett hiba

$$\varepsilon < K\frac{(b-a)^3}{12n^2}. \qquad (7.12.)$$

(Nem bizonyítjuk.)



7.11. ábra

7.15. példa. Határozzuk meg az $f(x)=e^{-x^2}$ határozott integrálját a $[0, 1]$ intervallumban. Alkalmazzuk a trapézszabályt. Legyen $n=5$. A részintervallumok hossza $\frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2$.

Foglaljuk táblázatba az adatokat.

Az $f(x)=e^{-x^2}$ értékek táblázatból ismertek.

i	x_i	$-x_i^2$	$f(x_i)=e^{-x_i^2}$	
0	0,0	0,00	1,00	
1	0,2	−0,04	0,961	
2	0,4	−0,16	0,852	
3	0,6	−0,36	0,698	3,038
4	0,8	−0,64	0,527	
5	1,0	−1,0	0,368	

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 0,2\left(\frac{1+0,368}{2}+3,038\right) = 0,7444.$$

Nézzük meg, milyen eltérés lehet a határozott integrál és a közelítő érték között.

$$(e^{-x^2})'' = -2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2-2).$$

$|f''(x)| < 2$ minden $[0, 1]$ intervallumbeli x-re. Ezért (7.12.) alapján

$$\varepsilon < 2\frac{(1-0)^2}{12\cdot 25} = \frac{2}{300} = 0,0066.$$

Tehát

$$\left|\int_0^1 e^{-x^2}\,dx - 0,7444\right| < 0,0066.$$

7.16. példa. Határozzuk meg az $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$ határozott integrál értékét trapézszabály segítségével a $[0, \pi]$ intervallumban $n=10$ esetén.

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{10}\left(\frac{\sin 0+\sin\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{2\pi}{10}+\sin\frac{3\pi}{10}+\right.$$

$$\left.+\sin\frac{4\pi}{10}+\sin\frac{5\pi}{10}+\sin\frac{6\pi}{10}+\sin\frac{7\pi}{10}+\sin\frac{8\pi}{10}+\sin\frac{9\pi}{10}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{10}\left(\frac{\sin 0°+\sin 180°}{2}+\sin 18°+\sin 36°+\sin 54°+\sin 72°+\right.$$

$$\left.+\sin 90°+\sin 108°+\sin 126°+\sin 144°+\sin 162°\right)=$$

$$=\frac{3{,}14}{10}(2\sin 18°+2\sin 36°+2\sin 54°+2\sin 72°+\sin 90°),$$

$$\int\limits_0^\pi \sin x\,dx \approx 0{,}314(2\cdot 0{,}3090+2\cdot 0{,}5878+2\cdot 0{,}8090+2\cdot 0{,}9511+1)=$$

$$=1{,}9835.$$

Mivel $|(\sin x)''|=|\sin x|\leqq 1$, (7.12.) alapján

$$\varepsilon<1\cdot\frac{\pi^3}{12\cdot 100}=0{,}0258.$$

Látni fogjuk (7.18b példa), hogy az integrál pontos értéke 2, azaz a hibabecslés nagyon jó.

Simpson-szabály

Trapézszabály esetén a görbét húrral helyettesítettük, a görbe alatti területet trapézek területeinek összegével közelítettük.

Simpson-szabály alkalmazásakor a görbét parabolaívekkel helyettesítjük. a görbe alatti területet parabolaívek alatti területekkel közelítjük.

Az $[a, b]$ intervallumot mindig páros számú ($n=2r$) egyenlő hosszúságú részintervallumra osztjuk fel.

Levezetés nélkül közöljük az eredményt, amit **Simpson-szabálynak** nevezünk

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{2n-2})+$$

$$+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})],$$

ahol

$$h = \frac{b-a}{2r}$$

és az osztásközök száma $n = 2r$. Kissé átrendezve is felírjuk:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}[f(x_0)+f(x_n)+4f(x_1)+4f(x_3)+\ldots+4f(x_{n-1})+$$
$$+2f(x_2)+2f(x_4)+\ldots+2f(x_{n-2})].$$

Itt azzal nem foglalkozunk, hogy adott hibakorlát esetén hány részre kell osztanunk az $[a, b]$ intervallumot.

7.17. példa. Számítsuk ki az $\int_0^\pi \sin x\,dx$ integrál értékét a Simpson-szabály felhasználásával $n = 10$ esetén.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{30}\left(\sin 0+\sin\pi+4\sin\frac{\pi}{10}+4\sin\frac{3\pi}{10}+\right.$$
$$+4\sin\frac{5\pi}{10}+4\sin\frac{7\pi}{10}+4\sin\frac{9\pi}{10}+2\sin\frac{2\pi}{10}+$$
$$\left.+2\sin\frac{4\pi}{10}+2\sin\frac{6\pi}{10}+2\sin\frac{8\pi}{10}\right)=$$
$$=\frac{\pi}{30}(4\sin 18^\circ+4\sin 54^\circ+4\sin 90^\circ+4\sin 54^\circ+4\sin 18^\circ+$$
$$+2\sin 36^\circ+2\sin 72^\circ+2\sin 72^\circ+2\sin 36^\circ)=$$
$$=\frac{\pi}{30}(8\cdot 0{,}3090+8\cdot 0{,}8090+4+4\cdot 0{,}5878+4\cdot 0{,}9511)=$$
$$=1{,}99909.$$

A trapézszabállyal számított értéknél pontosabb értéket kaptunk.

7.6 A határozott integrál tulajdonságai

7.11. TÉTEL. *Ha f és g integrálható az $[a, b]$ intervallumon és $c \in \mathbf{R}$, akkor*

a) $\int_a^b cf = c\int_a^b f,$

b) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

Bizonyítás:

Tekintsük az $[a, b]$ intervallumnak egy tetszőleges felosztását:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

a) Képezzük cf függvénynek a felosztáshoz tartozó közelítő összegét:

$$\sigma_n = cf(\xi_1)(x_1 - x_0) + cf(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + cf(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= c[f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})] =$$
$$= c \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Azt kaptuk, hogy a cf függvény közelítő összege az f függvény közelítő összegének c-szerese. Ha az $[a, b]$ intervallum felosztását minden határon túl finomítjuk úgy, hogy $\delta_n \max_i (x_i - x_{i-1}) \to 0$, a 7.9. tétel alapján következik, hogy

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) Képezzük az $f+g$ függvény közelítő összegét:

$$\sigma_n = [f(\xi_1) + g(\xi_1)](x_1 - x_0) + [f(\xi_1) + g(\xi_2)](x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ [f(\xi_n) + g(\xi_n)](x_n - x_{n-1}) =$$
$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) +$$
$$+ g(\xi_1)(x_1 - x_0) + g(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + g(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tehát az $f+g$ függvény közelítő összegét az f függvény közelítő összegének és a g függvény közelítő összegének összegeként kapjuk. Ha az $[a, b]$

intervallum felosztását minden határon túl finomítjuk, akkor a 7.9. tétel alapján

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

és ezt kellett belátni.

A 7.11. tételt a következőképpen is fogalmazhatjuk:

a) A konstans kiemelhető az integráljel elé.

b) Összegfüggvény határozott integrálja a tagok határozott integráljának összegével egyenlő (összeget tagonként integrálhatunk).

A 7.11. tétel ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n) = c_1 \int_a^b f_1 + c_2 \int_a^b f_2 + \ldots + c_n \int_a^b f_n,$$

feltéve, hogy az f_i függvények integrálhatók az $[a, b]$ intervallumban.

Kézenfekvő az alábbiakban megállapodnunk:

DEFINÍCIÓ. *Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumban, akkor*

$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \tag{7.13.}$$

$$\int_a^a f = 0.$$

7.12. TÉTEL. *Ha $a<b<c$ és f integrálható az $[a, b]$ és $[b, c]$ intervallumokon, akkor integrálható az $[a, c]$ intervallumon is, és*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad \textit{(7.12. ábra)}. \tag{7.14.}$$

(Nem bizonyítjuk.)

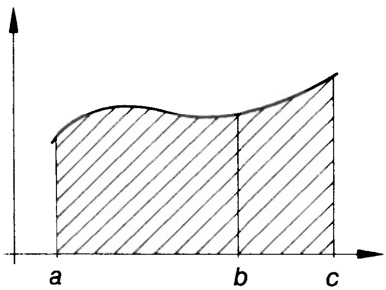
A 7.12. tétel az a, b, c egymáshoz viszonyított elhelyezkedésétől függetlenül is igaz. Legyen pl. $a<c<b$, akkor tételünk szerint

$$\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f,$$

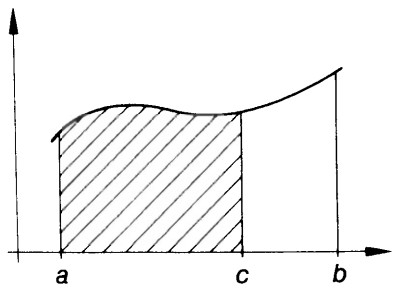
$$\int_a^c f = \int_a^b f - \int_c^b f.$$

Ebből a (7.13.) alapján

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f \quad (7.13.\ \textit{ábra}).$$



7.12. ábra



7.13. ábra

7.13. TÉTEL. *Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumban és*

$$m \leqq f(x) \leqq M,$$

akkor

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f \leqq M(b-a). \qquad (7.15.)$$

Bizonyítás:

Valamely felosztás esetén

$$\sum_{i=1}^{n} m(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1}).$$

Vagyis

$$m(b-a) \leqq \sigma_n \leqq M(b-a)$$

minden felosztás esetén. Ebből és a határozott integrál definíciójából következik az állításunk.

7.14. TÉTEL. *Ha f integrálható és folytonos az $[a, b]$ intervallumban, akkor létezik olyan*

$$a \leqq \xi \leqq b$$

valós szám, amelyre

$$f(\xi)(b-a) = \int_a^b f.$$

Bizonyítás:

Ha f állandó az $[a, b]$ intervallumban, akkor állításunk triviális. Ha f nem állandó, akkor a 7.13. tételt követő megjegyzés miatt

$$\inf_{[a,b]} f(x) = m \leqq f(x) \leqq M = \sup_{[a,b]} f(x) \qquad (x \in [a, b])$$

esetén

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

Ebből következik, hogy van olyan c szám, amelyre

$$c(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.16.}$$

és

$$m < c < M.$$

Ez azt jelenti, hogy az $[a, b]$ intervallumban van c-nél kisebb és nagyobb függvényérték is. A folytonos függvények Bolzano-tulajdonsága (l. 4.8. tétel) alapján van az $[a, b]$ intervallumban legalább egy olyan ξ hely, hogy

$$f(\xi) = c.$$

Ez (7.16.)-tal együtt állításunkat igazolja.

7.7 A Newton–Leibniz-szabály

Meg lehet mutatni (a bizonyítást nem részletezzük), hogy ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor integrálható annak minden részintervallumán is. Így az $[a, x]$ intervallumon is. Azaz létezik az

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

integrál. (Mivel a felső határt x-szel jelöltük, célszerű az integrandusban x helyett más betűt, pl. t-t írni, így nem okozhat félreértést.)

Minden $x \in [a, b]$ számhoz egy valós számot, az $[a, x]$ intervallumon vett integrál

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

értékét rendeljük. Így az $[a, b]$ intervallumon egy függvényt definiálhatunk, jelöljük ezt G-vel:

$$G\colon\ G(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a, b]. \tag{7.17.}$$

DEFINÍCIÓ. *Ha f integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor a*

$$G\colon\ G(x) = \int_a^x f \qquad (x \in [a, b])$$

*függvényt f **integrálfüggvényének** nevezzük.*

Az integrálfüggvény ismerete megkönnyíti a határozott integrál kiszámítását, hiszen (7.17)-ből azonnal adódik, hogy

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b). \tag{7.18.}$$

Vagyis a határozott integrált egyszerűen a G függvénynek a b helyen felvett értéke adja. Ezért vizsgáljuk meg közelebbről, hogy valamely f-hez, illetve $[a, b]$ intervallumhoz tartozó G integrálfüggvényt hogyan lehet meghatározni. Erre vonatkozik az alábbi tétel.

7.15. TÉTEL. *Ha G az f-nek integrálfüggvénye az $[a, b]$ intervallumban, akkor*

$$G(a) = 0,$$

és ha f folytonos is az $[a, b]$ intervallumban, akkor

$$G'(x) = f(x), \qquad x \in \,]a, b[.$$

Bizonyítás:

Az állítás első fele (7.13.) és (7.17.) alapján triviális.

Legyen $x \in [a, b[$, akkor

$$G'(x) = \lim_{x_n \to x} \frac{G(x_n) - G(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \to x} \frac{\int_a^{x_n} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{x_n - x} =$$

$$= \lim_{x_n \to x} \frac{\int_x^{x_n} f(t)\,dt}{x_n - x}.$$

Tegyük fel, hogy $a < x < x_n \leqq b$ (ha x_n balra van x-től, hasonlóan folytatható a bizonyítás). Ekkor a 7.14. tétel alapján minden n-re van olyan ξ_n szám, amelyre

$$x \leqq \xi_n \leqq x_n,$$

és

$$\int_x^{x_n} f(t)\,dt = f(\xi_n)\,(x_n - x). \tag{7.19.}$$

Ezt felhasználva,

$$G'(x) = \lim_{x_n \to x} \frac{f(\xi_n)(x_n - x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \to x} f(\xi_n).$$

A (7.19.) miatt, ha $x_n \to x$, akkor a (ξ_n) sorozat szintén x-hez tart, ugyanakkor f folytonossága miatt

$$\lim_{\xi_n \to x} f(\xi_n) = f(x).$$

Ebből következik, hogy

$$G'(x) = f(x).$$

Tehát G egy primitív függvénye f-nek.

Tegyük fel, hogy az $[a, b]$ intervallumon F is primitív függvénye f-nek, akkor C alkalmas választásával az $[a, b]$ minden x pontjában igaz a

$$G(x) = F(x) + C$$

egyenlőség. A 7.15. tétel alapján viszont

$$G(a) = F(a) + C,$$

amiből

$$C = -F(a).$$

Tehát

$$G(x) = F(x) - F(a).$$

Ebből és (7.18.)-ból azonnal adódik a **Newton–Leibniz-féle képlet:**

Ha f folytonos az $[a, b]$ intervallumban és F primitív függvénye itt f-nek, akkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b.$$

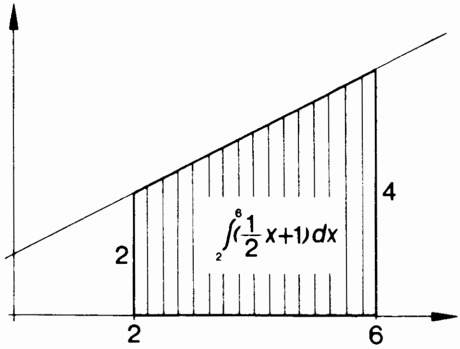
A határozott integrált Newton–Leibniz-képlet segítségével tehát úgy számítjuk ki, hogy megkeressük az f egy primitív függvényét, F-et, és a felső határ helyettesítési értékéből kivonjuk az alsó határ helyettesítési értékét.

7.18. példa. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat a Newton–Leibniz-formula segítségével.

a) $\displaystyle\int_2^6 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = ?$

$$\int_2^6 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + x\right]_2^6 = [9+6] - [1+2] = 12,$$

ami geomatriailag azt jelenti, hogy a *7.14. ábrán* látható trapéz területének mérőszáma 12 területegység. Erről elemi úton is könnyen meggyőződhetünk.



7.14. ábra

b) $\int_0^\pi \sin x \, dx = ?$

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi =$$

$$= [-\cos \pi] - [-\cos 0] =$$

$$= 1 + 1 = 2.$$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx = ?$

Ha a határozott integrál primitív függvényét helyettesítéssel keressük, akkor a határokat a helyettesítésnek megfelelően módosítani kell.

Legyen $t = 1 + 3x$

$$\frac{dt}{dx} = 3, \quad dx = \frac{dt}{3}.$$

Ennek megfelelően módosítani kell a határokat. Az alsó határon $x = 0$, tehát $t = 1 + 3 \cdot 0 = 1$, a felső határon $x = 1$, így $t = 1 + 3 \cdot 1 = 4$, azaz a t szerint 1-től 4-ig kell integrálni:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{t} \right]_1^4 = \left[\frac{2}{3} \sqrt{4} \right] - \left[\frac{2}{3} \sqrt{1} \right] = \frac{2}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy úgy is kiszámíthattuk volna az integrál értékét, hogy meghatározzuk az integrandus primitív függvényét:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+3x} + C,$$

és ebbe helyettesítjük az eredeti határokat:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+3x}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Most nézzünk egy olyan határozott integrált, amelyet parciális integrálással határozhatunk meg:

d) $\int_0^\pi x \cos x\,dx = ?$

Legyen $f = x$, $g' = \cos x$.
Ekkor $f' = 1$, $g = \sin x$.

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx,$$

$$\int_0^\pi x\cos x\,dx = [x\sin x]_0^\pi + [\cos x]_0^\pi = 0-1-1 = -2.$$

7.8 Néhány területszámítási feladat

Az integrál geometriai értelmezéséből következik, hogy ha f korlátos és integrálható az $[a, b]$ intervallumon, akkor az $\int_a^b f(x)\,dx$ annak a síkidom területének mérőszámát jelenti, amelyet az f grafikonja, az $x=a$ és $x=b$ egyenesek és az x tengely határolnak, feltéve, ha $f \geqq 0$ *(7.15. ábra)*.

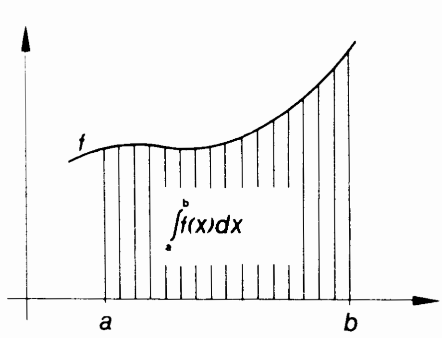
Ha $f(x) \leqq 0$ $(x \in [a, b])$, akkor $-f(x) \geqq 0$, és így $\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$, azaz $\int_a^b f(x)\,dx \leqq 0$.

Így a terület mérőszámát az integrál abszolút értéke adja:

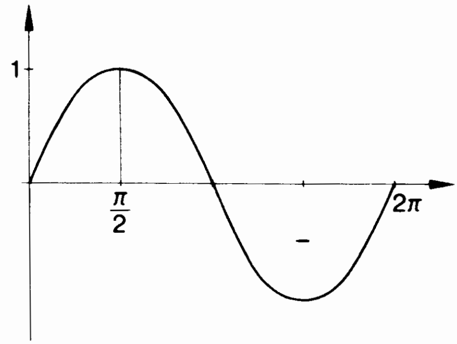
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|.$$

7.19. példa. Mekkora területet zár be az x tengellyel a $[0, 2\pi]$ intervallumon a sin függvény grafikonja? *(7.16. ábra.)*

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = [-\cos 2\pi]-[-\cos 0] = -1+1 = 0.$$



7.15. ábra



7.16. ábra

Ilyenkor részintervallumokra bontunk, itt szimmetriaokokból elég az egyik felét, sőt negyedét számítani:

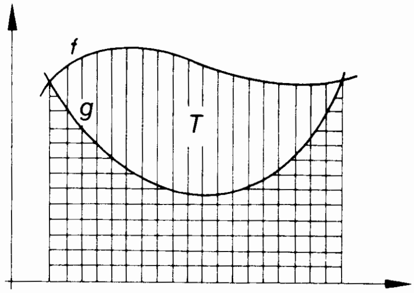
$$T = \int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= 4[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(-\cos\frac{\pi}{2} - [-\cos 0]\right) =$$

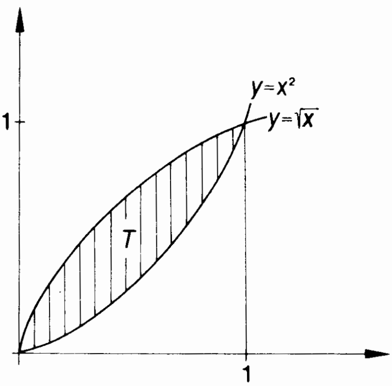
$$= 4(0+1) = 4.$$

Két vagy több függvénygörbe által határolt síkidom területének mérőszáma ezek ismeretében könnyen meghatározható. A *7.17. ábrán* látható f és g függvény által határolt T síkidom területe két terület különbségeként határozható meg:

$$T = \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g).$$



7.17. ábra



7.18. ábra

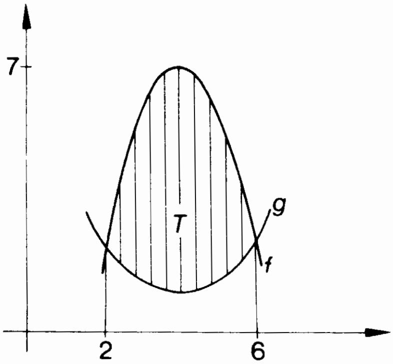
7.20. példa. Határozzuk meg az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=\sqrt{x}$ egyenletű görbék által bezárt síkidom területének mérőszámát *(7.18. ábra)*.

Az integrációs határokat a két függvény metszéspontjainak abszcisszája adja:

Ha $x^2=\sqrt{x}$, akkor $x_1=0$, $x_2=1$.

$$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx-\int_0^1 x^2\,dx=\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x}^3-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

7.21. példa. Határozzuk meg az $f(x)=-x^2+8x-9$ és $g(x)=\dfrac{x^2}{2}-4x+9$ függvények által bezárt síkidom területének mérőszámát *(7.19. ábra)*.



7.19. ábra

$$-x^2+8x-9=\frac{x^2}{2}-4x+9,$$

$$-2x^2+16x-18=x^2-8x+18,$$

$$x^2-8x+12=0, \quad \text{ha} \quad x_1=2,\ x_2=6.$$

$$\int_2^6 (-x^2+8x-9)\,dx-\int_2^6 \left(\frac{x^2}{2}-4x+9\right)dx=\int_2^6 \left(-\frac{3}{2}x^2+12x-18\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{2}+6x^2-18x\right]_2^6=[-108+216-108]-[-4+24-36]=16.$$

7.9 Improprius integrál

Az eddigiekben a határozott integrál fogalmát csak véges intervallumokra és korlátos függvényekre értelmeztük. A határozott integrál fogalmát bizonyos esetekben általánosabbá tehetjük.

Az improprius integrál az integrál fogalmának kiterjesztése azokra az esetekre, amikor

1. az integrációs intervallum végtelen,
2. az $[a, b]$ véges intervallumban az f nem korlátos.

1. eset:

DEFINÍCIÓ. *Ha f integrálható az $[a, \infty[$ intervallum minden $[a, b]$ részintervallumában és létezik a*

$$\lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

véges határérték, akkor ezt az f függvény $[a, \infty[$ intervallumban vett ***improprius integráljának*** *nevezzük.*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b=\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Hasonlóan definiálható az

$$\int_{-\infty}^b f$$

improprius integrál is.

Ha f integrálható a $]-\infty, b]$ minden részintervallumán, akkor

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a=-\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha a jobb oldalon álló határérték véges, akkor az improprius integrál konvergens. Ha nem véges, vagy esetleg nem létezik, akkor az improprius integrált divergensnek nevezzük.

E két esetből következik, hogy
ha mindkét határ végtelen, az f függvény $]-\infty, \infty[$ intervallumon értelmezett improprius integrálját az

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx + \int_b^\infty f(x)\,dx$$

egyenlőséggel értelmezzük, feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrálok léteznek. ahol b tetszőleges valós szám.

7.22. példa. Határozzuk meg az alábbi improprius integrálokat:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = ?$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b=\infty} \int_1^b x^{-2}\,dx = \lim_{b=\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b=\infty} \left(\left[-\frac{1}{b}\right] - [-1]\right) = 1.$$

Mivel a határérték véges, az improprius integrál *(7.20. ábra)* konvergens.

b) $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = ?$

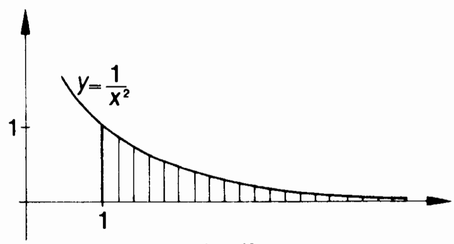
$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b=\infty} \int\limits_1^{b} \frac{1}{x}\, dx = \lim_{b=\infty} [\ln x]_1^b =$$

$$= \lim_{b=\infty} ([\ln b]-[\ln 1]) = \infty.$$

Mivel véges határérték nem létezik, az improprius integrál divergens.

2. eset:

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallum valamelyik végpontjában, pl. b-ben végtelen, akkor az improprius integrál értelmezésére a következő definíció mondható ki:



7.20. ábra

DEFINÍCIÓ. *Legyen f az $[a, b]$ intervallumban nem integrálható. de integrálható bármely $[a, b-\varepsilon]$ részintervallumában $(b-\varepsilon > a)$. Ha létezik a $\lim\limits_{\varepsilon=0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$ határérték, akkor ezt tekintjük az $f\,[a, b]$ intervallumban vett improprius integráljának:*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Hasonlóan: ha az f függvény az $[a, b]$ intervallumon nem integrálható, de integrálható bármely $[a+\varepsilon, b]$ részintervallumán $(a+\varepsilon < b)$, akkor

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx.$$

Ha az f függvény az $[a, b]$ intervallum belső pontjában, pl. c-ben nem korlátos, akkor az előbbi esetekre a következő módon vezethető vissza:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon=0} [\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx].$$

7.23. példa. Határozzuk meg az alábbi improprius integrált:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = ?$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\varepsilon=0} [2\sqrt{x}]_{0+\varepsilon}^1 =$$

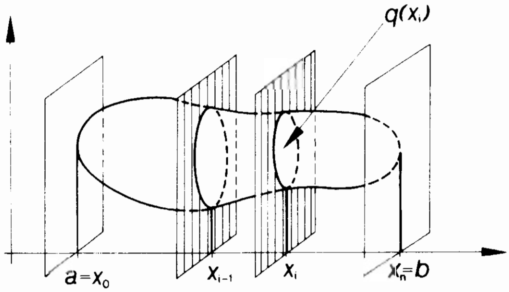
$$= 2\sqrt{1} - 2\cdot\sqrt{0} = 2.$$

7.10 Térfogatszámítás

Tekintsünk egy zárt felület által határolt testet. Tegyük fel, hogy az egész test az x tengelyre merőleges két sík között fekszik, amelyek az x tengelyt az a és b pontban metszik *(7.21. ábra)*.

Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n nem feltétlenül egyenlő hosszúságú részintervallumra:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots x_{i-1} < x_i < \ldots x_n = b.$$



7.21. ábra

Legyen ismert a test bármely olyan metszetének területe, amelyet az x tengelyre merőleges síkkal képezünk. Minden ilyen metszet területét egyértelműen meghatározza a merőleges sík x tengellyel való metszéspontja, tehát a metszet területét mint x-nek valamely $q(x)$ függvényét tekinthetjük.

Ha egy metszet területét a részintervallum hosszával megszorozzuk, egy henger térfogatát kapjuk. Közelítsük meg a keresett térfogatot hengerek térfogatának összegével, és legyen $\max(x_i - x_{i-1}) = \delta_n$.
Ha a

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} q(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

határérték létezik, akkor ez egyrészt a test térfogatát adja, másrészt definíciónk szerint ez a határérték a q függvény $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálja:

$$V = \int_a^b q(x)\, dx.$$

Ha speciálisan egy olyan forgástest térfogatát akarjuk meghatározni az $[a, b]$ intervallumban, amely f grafikonjának x tengely körüli forgatásával keletkezett, akkor a metszet területe minden esetben egy kör területe *(7.22. ábra)*.

A kör sugara $f(x)$, így területe $q(x) = f^2(x)\pi$, vagyis az x tengely körüli forgástest térfogata az $[a, b]$ intervallumban:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) = dx.$$

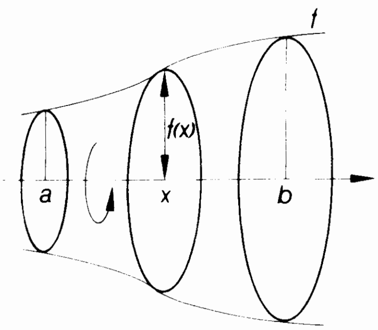
7.24. példa. Forgassuk meg az $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(x \in [-r, r])$ függvény görbéjét (amely félkör) az x tengely körül, és határozzuk meg a keletkezett forgástest (gömb) térfogatát a $[-r, r]$ intervallumban *(7.23. ábra)*.

$$V = \pi \int_{-r}^{r} [\sqrt{r^2 - x^2}]^2\, dx = \int_{-r}^{r} [r^2 - x^2]\, dx =$$

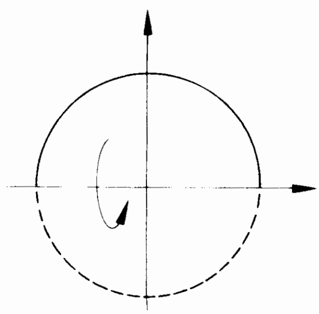
$$= \pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} = \pi \left(\left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right] \left[-r^3 + \frac{r^3}{3} \right] \right) =$$

$$= \pi \left(2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right) = \frac{4r^3\pi}{3},$$

amely valóban egy r sugarú gömb térfogatának ismert mérőszáma.



7.22. ábra

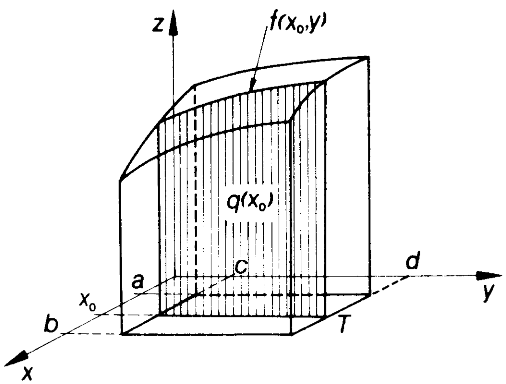

7.23. ábra

7.11 Kettős integrál

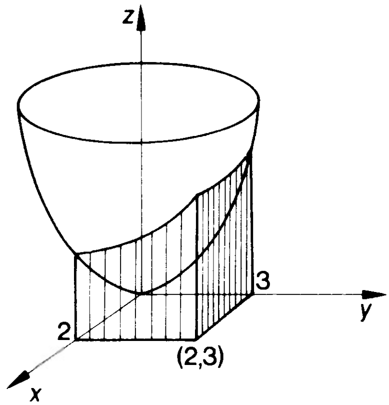
Legyen az f kétváltozós függvény az $a \leqq x \leqq b$ és $c \leqq y \leqq d$ egyenlőtlenségekkel megadott T téglalapon korlátos *(7.24. ábra)*. A következőkben csak ilyen függvényekkel foglalkozunk. Keressük a T téglalap fölötti térfogatot. Legyen $x_0 \in [a, b]$. Tekintsük az x_0 értékét konstansnak, s messük el a T téglalap fölötti testet az $x = x_0$ egyenletű, (x, y) síkra merőleges síkkal. A síkmetszet területe legyen $q(x_0)$ *(7.25. ábra)*, amely az $f_2 : f_2(y) = f(x_0, y)$ függvény grafikonja alatti terület, és így

$$q(x_0) = \int_c^d f_2(y)\, dy = \int_c^d f(x_0, y)\, dy,$$

ha ez az integrál létezik.



7.24. ábra



7.25. ábra

Mivel ismerjük bármely x_0 pontban az x tengelyre merőleges síkmetszetek területét, azért az előző pontban ismert térfogatintegrál alapján (ha q integrálható az $[a, b]$ intervallumon)

$$V = \int_a^b q(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

DEFINÍCIÓ. *Legyen az f kétváltozós függvény értelmezve a*

$$T = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\} = [a, b] \times [c, d]$$

téglalapon. Ha a

$$q(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$$

integrálok minden $x \in [a, b]$ esetén léteznek és q integrálható az $[a, b]$ intervallumban, akkor az

$$\int_a^b q(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

*integrált f T téglalapon vett **kettős integráljának** nevezzük.*

A téglalap fölötti térfogatot kettős integrállal kaptuk meg. A kettős integrál értékét úgy határozzuk meg, hogy először elvégezzük a belső (y szerinti) integrálást, majd a külső (x szerinti) integrálást, vagy fordítva. Az integrál sorrendje felcserélhető, ha mindkettő létezik.

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy$$

(l. pl. [15]).

A kettős integrál a definíciójából adódóan rendelkezik a határozott integrálra a 7.6 pontban megfogalmazott tulajdonságokkal.

7.16. TÉTEL. *Ha f és g kettős integrálja létezik az $[a, b] \times [c, d]$ téglalapon, akkor*

$$\int_a^b \int_c^d cf(x, y)\,dy\,dx = c\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx,$$

és

$$\int_a^b \int_c^d [f(x, y) + g(x, y)]\,dy\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx + \int_a^b \int_c^d g(x, y)\,dy\,dx.$$

7.25. példa. Legyen $z(x, y) = x^2 + y^2$ $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Határozzuk meg a $0 \leqq x \leqq 2$, $0 \leqq y \leqq 3$ téglalap fölötti térfogatot *(7.25. ábra).*

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^3 (x^2 + y^2)\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^3 dx = \int_0^2 (3x^2 + 9)\,dx =$$

$$= [x^3 + 9x]_0^2 = 8 + 18 = 26.$$

Tehát az adott téglalap fölötti térfogat 26 egység.

7.26. példa. Számítsuk ki a következő kettős integrált:

$$\int_1^2 \int_0^\infty \frac{1}{y^2} x e^{-x^2}\,dx\,dy = ?$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{y^2} xe^{-x^2}\, dx = \lim_{b=\infty} \left[\int_0^b -\frac{1}{2y^2} 2xe^{-x^2}\, dx \right] =$$

$$= \lim_{b=\infty} \left[-\frac{1}{2y^2} e^{-x^2} \right]_0^b = \frac{1}{2y^2},$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2y^2}\, dy = \left[-\frac{1}{2y} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{4} \right] - \left[-\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4}.$$

Így

$$\int_1^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{y^2} xe^{-x^2}\, dx\, dy = \frac{1}{4}.$$

7.12 Differenciálegyenletek

Valamely f függvény primitív függvényének meghatározásakor tulajdonképpen az $F' = f$ egyenletet oldottuk meg, ahol az ismeretlen az F függvény. Ha például az $f(x) = 3x^2 + 2$ függvény F primitív függvényét keressük, akkor az

$$F'(x) = 3x^2 + 2 \tag{7.20.}$$

egyenletet oldjuk meg; a megoldás

$$F(x) = \int (3x^2 + 2)\, dx = x^3 + 2x + C.$$

A (7.20.) alatti egyenletben az ismeretlen F függvénynek a differenciálhányadosa szerepel.

DEFINÍCIÓ. *Az olyan egyenleteket, amelyekben egy ismeretlen függvény deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek (és esetleg maga a függvény is), **differenciálegyenleteknek** nevezzük.*

7.27. példa. Az

$$f''(x) - 2f'(x) = 8f(x) \tag{7.21.}$$

differenciálegyenlet megoldása az

$$f_1(x) = e^{4x} \tag{7.22.}$$

függvény, ugyanis

$$f_1'(x) = 4e^{4x}, \quad f_1''(x) = 16e^{4x}.$$

Ezeket a (7.21.) egyenletbe helyettesítve, a

$$16e^{4x} - 2 \cdot 4e^{4x} = 8e^{4x}$$

azonosságot kapjuk.

Könnyű belátni, hogy a (7.21.) egyenletnek – mint ahogy a (7.20.)-nak is – végtelen sok megoldása van, hiszen – mint erről könnyen meggyőződhetünk – megoldása az

$$f_2(x) = e^{-2x} \tag{7.23.}$$

függvény is. Sőt megoldása lesz ezek bármely **lineáris kombinációja** is.

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbf{R}) \tag{7.24.}$$

DEFINÍCIÓ. *Ha a differenciálegyenletben az ismeretlen függvény előforduló legmagasabb rendű deriváltja az n-edik derivált, akkor* ***n-edrendű differenciálegyenletről*** *beszélünk. Ha az ismeretlen függvény és deriváltja(i) csupán az első hatványon szerepelnek, akkor* ***lineáris differenciálegyenletről*** *beszélünk.*

Ennek megfelelően (7.20.) elsőrendű, (7.21.) pedig másodrendű lineáris differenciálegyenlet.

A (7.20.) elsőrendű differenciálegyenlet megoldásában van egy C szabadon választható állandó, a (7.21.) másodrendű differenciálegyenlet (7.24.) megoldásában két állandó (C_1 és C_2) szerepel. Ez általában is igaz: az n-edrendű differenciálegyenlet ún. általános megoldása n db szabadon választható állandót tartalmaz. A (7.24.) általános megoldásából a $C_1 = 1$ és $C_2 = 0$ választással a (7.22.) alatti f_1, a $C_1 = 0$ és $C_2 = 1$ választással a (7.23.) alatti f_2 megoldását kapjuk a differenciálegyenleteknek. Ezek az ún. **partikuláris megoldások.** Úgy is mondhatnánk, hogy az általános megoldás a differenciálegyenlet összes megoldásainak halmaza (egy-két kivétel lehet), ennek a halmaznak az elemeit partikuláris megoldásnak hívjuk.

Mi a továbbiakban csak néhány egyszerű differenciálegyenlet-típussal foglalkozunk. Az ismeretlen függvényt y-nal fogjuk jelölni.

7.17. TÉTEL. *Ha az f függvénynek létezik valamely halmazon primitív függvénye, akkor ott az*

$$y' = f(x)$$

differenciálegyenlet megoldása:

$$y = \int f(x)\,dx.$$

A tétel állítása nyilvánvaló, ezért bizonyításával nem foglalkozunk.

7.18. TÉTEL. *Legyen az f függvény primitív függvénye F, és g függvényé G, akkor* *az* $$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \qquad (7.25.)$$

differenciálegyenlet y megoldása a következő egyenletnek tesz eleget

$$G(y) = F(x) + C.$$

Bizonyítás: (7.25.)-ből

$$g(y(x))y'(x) = f(x).$$

Integráljuk mindkét oldalt x szerint

$$\int g(y(x))y'(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Az összetett függvényre vonatkozó 7.7. tételt alkalmazva,

$$G(y) = F(x) + C.$$

Megjegyezzük, hogy (7.25.)-ből formális átalakítással is ugyanezt kaptuk volna:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Az ebből adódó

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

egyenlet mindkét oldalát integrálva, az

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

egyenlőséget kapjuk, és így

$$G(y) = F(x) + C.$$

A későbbiekben is ezen a módon járunk el.
A (7.25.) differenciálegyenletet **szétválasztható típusúnak** mondjuk.

7.28. példa. Oldjuk meg az

$$y' = 2xy^2$$

differenciálegyenletet.
Mivel

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2,$$

$$\frac{1}{y^2}\,dy = 2x\,dx \qquad (y \neq 0).$$

Integráljuk mindkét oldalt:

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

Ebből

$$y = \frac{-1}{x^2 + C}.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Feltehetjük még azt a kérdést is, hogy van-e a differenciálegyenletnek olyan megoldása, amelynek grafikonja átmegy az (1; 1) ponton, azaz $y(1) = 1$.
Mivel

$$y(1) = \frac{1}{1+C} = 1,$$

azonnal adódik, hogy ez a partikuláris megoldás a $C = 0$ értékhez tartozik:

$$y(x) = \frac{1}{x^2}.$$

7.29. példa. (A nemzeti jövedelem egyszektoros, egytényezős növekedési modellje.) Legyen $y(0) = y_0$ a nemzeti jövedelem értéke a bázisidőszakban, $y(t)$ a nemzeti jövedelem a t időpontban. Tegyük fel, hogy a növekedés mértéke arányos a jövedelem pillanatnyi nagyságával:

$$y(t) - y(t_0) = k(t - t_0)y(t),$$

ha $t - t_0$ elég kicsi.
Ebből

$$\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} = ky(t).$$

Ha mindkét oldal határértékét vesszük a $t = t_0$ helyen, akkor az

$$y'(t_0) = ky(t_0)$$

egyenlet adódik (feltéve, hogy y differenciálható). Mivel t_0 tetszőleges volt, y eleget tesz az

$$y' = ky$$

differenciálegyenletnek. Ebből

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dt.$$

Mindkét oldalt integrálva (feltehetjük, hogy $y>0$):

$$\ln y = kt + C^*.$$

Ebből

$$y = e^{kt+C} = e^{kt}e^{C^*}.$$

Ha bevezetjük az $e^{C^*}=C$ jelölést, akkor a megoldás

$$y(\mathrm{t}) = Ce^{kt}.$$

Feltevésünk szerint

$$y(0) = Ce^{k\cdot 0} = y_0,$$

ezért

$$C=y_0.$$

Tehát

$$y(t) = y_0 e^{kt},$$

ahol k a növekedés rátája.

7.19. TÉTEL. *Az*

$$y' + p(x)y = r(x) \tag{7.26.}$$

elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = \left(\int r(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)e^{-\int p(x)\,dx}.$$

Bizonyítás:

Először oldjuk meg az ún. homogén egyenletet (jobb oldal nulla)

$$y_h' + p(x)y_h = 0. \tag{7.27.}$$

Ez a differenciálegyenlet szétválasztható típusú (7.18. tétel)

$$\frac{1}{y_h}\,dy_h = -p(x)\;dx.$$

Ebből integrálással

$$\ln y_h = -\int p(x)\,dx + D^*$$

adódik. Ebből y_h-t kifejezhetjük:

$$y_h(x) = e^{-\int p(x)\,dx + D^*} = e^{-\int p(x)\,dx}e^{D^*} = De^{-\int p(x)\,dx}.$$

Ez a (7.27.) homogén egyenlet megoldása. A differenciálegyenletek megoldásánál gyakran alkalmazzák azt a módszert, amellyel a homogén megoldásból a (7.26.), az ún. **inhomogén egyenlet** megoldását kapjuk. Az inhomogén egyenlet y megoldását úgy keressük, hogy feltételezzük, hogy y_h-ban a D függ az x-től:

$$y(x) = D(x)e^{-\int p(x)\,dx}. \tag{7.28.}$$

Ekkor

$$y'(x) = D'(x)e^{-\int p(x)\,dx} + D(x)e^{-\int p(x)\,dx}(-p(x)).$$

Helyettesítsük ezeket (7.26.)-ba:

$$D'(x)e^{-\int p(x)\,dx} - D(x)p(x)e^{-\int p(x)\,dx} + p(x)D(x)e^{-\int p(x)\,dx} = r(x).$$

A bal oldalon a második és harmadik tag kiesik, így

$$D'(x) = r(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

Innen

$$D(x) = \int r(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C.$$

Ezt (7.28.)-ba helyettesítve adódik állításunk.

7.30. példa. Oldjuk meg az

$$y' - y = 2x$$

differenciálegyenletet.

A megoldásnál nem a 7.19. tétel által adott formulába helyettesítünk, hanem e példán keresztül követjük a tétel bizonyítását, előnyösebbnek tartjuk a módszer megtanulását, mint a végeredményét.

Először oldjuk meg a homogén

$$y_h' - y_h = 0$$

egyenletet:

$$\frac{dy_h}{dx} = y_h.$$

Ebből

$$\frac{1}{y_h}\,dy_h = dx.$$

Integráljuk mindkét oldalt

$$\ln|y_h| = x + D^*.$$

Ebből

$$|y_h(x)| = e^{x+D^*} = De^x.$$

Az abszolút érték itt azt jelenti, hogy a megoldások

$$y(x) = De^x, \quad \text{ill.} \quad y_h(x) = -De^x \qquad (D>0).$$

Az inhomogén egyenlet megoldását

$$y(x) = D(x)e^x \tag{7.29.}$$

alakban keressük.

$$y'(x) = D'(x)e^x + D(x)e^x.$$

Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve, a

$$D'(x)e^x + D(x)e^x - D(x)e^x = 2x$$

egyenletet kapjuk, amelyből

$$D'(x) = 2xe^{-x}.$$

Így

$$D(x) = 2\int xe^{-x}\,dx = 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + C = -2(x+1)e^{-x} + C.$$

A megoldás (7.29.) alapján

$$y = [-2(x+1)e^{-x} + C]e^x = Ce^x - 2(x+1).$$

Befejezésül megjegyezzük, hogy ha az ismeretlen függvény többváltozós, akkor a differenciálegyenletben általában parciális deriváltjai szerepelnek. Az ilyen típusú differenciálegyenletet **parciális differenciálegyenletnek** nevezzük.

Függelék

F.1. LOGIKAI ALAPFOGALMAK. BOOLE-ALGEBRA

Amikor a matematikában valamely állítást, ítéletet bizonyítunk, akkor korábban ismert állításokat, ítéleteket használunk fel. Például abból az állításból, hogy „a négyszög két szomszédos oldala egyenlő és a négyszög szögei derékszögek" egyszerűen bebizonyíthatjuk azt az ítéletet, hogy „az adott négyszög négyzet". (Természetesen a bizonyítás során már ismert geometriai állításokat, ítéleteket is felhasználunk.) Könnyen látható, hogy itt a feltétel is két ítélet, a „négyszög két szomszédos oldala egyenlő", a „négyszög szögei derékszögek" „és" kötőszóval való összekapcsolásával adódik. Bármely állításunk lehet **igaz** vagy **hamis.** Az, hogy az összetett ítélet igaz vagy hamis, attól függ, hogy az összetételben szereplő ítéletek igazak vagy hamisak.

Hasonlóképpen abból a két ítéletből, hogy a „hallgató vizsgáira felkészül", valamint „eredménytelenül zárja a félévet", újabb ítéletet alkothatunk „vagy" kötőszó segítségével: „a hallgató vizsgáira felkészül, vagy eredménytelenül zárja a félévet". Nyilvánvaló, hogy ennek az összetett ítéletnek az igaz vagy hamis volta szintén az összetevő ítéletek igaz vagy hamis voltától függ.

Azt, hogy egy ítélet igaz vagy hamis, a kérdéses ítélet **logikai értékének** nevezzük.

Az előbbiekből is világos, hogy az olyan műveletek lesznek fontosak számunkra, amelyeket ítéleteken végrehajtva, ismét ítéletet kapunk eredményül, az eredmény logikai értéke *csak* azon ítéletek logikai értékétől függ, amelyeken a műveletet végrehajtottuk. Ezeket **logikai műveleteknek** nevezzük.

DEFINÍCIÓ. *Ha A, B két ítélet, akkor az „A és B" ítéletet a két ítélet* ***konjunkciójának*** *nevezzük. Jele: $A \wedge B$. $A \wedge B$ akkor és csak akkor igaz, ha A is és B is igaz.*

Jelentse $A = 1$ azt, hogy A igaz, $A = 0$ azt, hogy A hamis, vagyis az igaz logikai érték szimbóluma 1, a hamis logikai értéké 0. Mivel egy logikai ítéletnek csak két értéke lehet (igaz vagy hamis), könnyen felírhatjuk az $A \wedge B$ definíció szerinti összes lehetséges értékeit az ún. **igazságtáblán** *(F.1.1. táblázat).*

DEFINÍCIÓ. *Ha A, valamint B két ítélet, akkor az „A vagy B" ítéletet a két ítélet* ***diszjunkciójának*** *nevezzük. Ez akkor és csak akkor igaz, ha vagy A, vagy B, vagy mindkettő igaz. Jele: $A \vee B$.*

A könnyebb áttekinthetőség végett foglaljuk itt is táblázatba az $A \vee B$ lehetséges értékeit *(F.1.2. táblázat)*.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \wedge B$	1	0	0	0

F.1.1. táblázat

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \vee B$	1	1	1	0

F.1.2. táblázat

A diszjunkció definíciójával kapcsolatosan jegyezzük meg, hogy a köznapi nyelvben az A vagy B ítéletet sokszor úgy értjük, hogy az akkor igaz, ha A és B közül az egyik igaz, de nem mind a kettő; pl. „az adott szám páros vagy páratlan" ítélet két összetevője közül csak az egyik lehet igaz (kizáró vagy). Definíciónk szerint az „A vagy B" akkor is igaz, ha A is és B is igaz (megengedő vagy).

DEFINÍCIÓ. *Ha A ítélet, akkor a „nem A" ítéletet A* ***negációjának*** *nevezzük, amely akkor és csak akkor igaz, ha A hamis. Jele:* $\bar{A}$.

A definícióból azonnal következik, hogy $\bar{\bar{A}} = A$.
Nézzünk még egy példát: Ha

A = Jancsi szereti Juliskát,
B = Juliska szereti Jancsit

két ítélet, akkor a következő ítéleteket logikai formulával is megadhatjuk:

Szeretik egymást $= A \wedge B$.
Csak Jancsi szereti Juliskát $= A \wedge \bar{B}$.
Legalább egyik szereti a másikat $= A \vee B$.
Egyik sem szereti a másikat $= \bar{A} \wedge \bar{B} = \overline{A \vee B}$.

(A legutolsó egyenlőségre még visszatérünk.)

A definiált logikai műveletek mindegyike logikai ítéletekre alkalmazva olyan logikai ítéletet eredményez – mint ezt korábban is hangsúlyoztuk –, amelynek logikai értéke csak az eredeti ítéletek logikai értékétől függ. Ebből a szempontból nem lehet logikai műveleteknek tekinteni A és B ítéletek olyan összekapcsolását például, hogy „A-t nehezebb bizonyítani, mint B-t". Ennek logikai értéke nemcsak A, illetve B logikai értékétől függ.

Ezek után térjünk rá a definiált műveletekre vonatkozó alapvető azonosságok tárgyalására. Ismételten felhívjuk a figyelmet arra, hogy a logikai ítéletek mindegyike csak két értéket vehet fel (1 = igaz, 0 = hamis), ellentétben valamely közönséges algebrai változóval, amelynek általában végtelen sok értéke lehet. Így az ítéletkalkulusban az azonosságok igazolása történhet ugyanúgy, mint a műveletek definíciójának leírása (*F.1.1.* és *F.1.2. táblázat*), az összes lehetséges eset igazságtáblába való foglalásával. (Ez a közönséges algebrában nem lehetséges; például az összeadást pozitív egész számok körében nem lehet úgy definiálni, hogy az összeadandók minden lehetséges értékpárjához megadjuk az összeget.)

Az 1.2 pontban beszéltünk a halmazok között definiált műveletekről. Vegyük észre, hogy az „a eleme az A halmaznak" ($a \in A$) is egy ítélet. Az $a \in A \cap B$ ítélet – a halmazok közös részének definíciója alapján – az $a \in A$ ítélet, valamint az $a \in B$ ítélet konjunkciója, hiszen $a \in A \cap B$ akkor és csak akkor igaz, ha $a \in A$ is, és $a \in B$ ítélet is igaz. Hasonlóan lehet belátni, hogy a halmazok egyesítése a diszjunkció fogalmával analóg. Ezek után nem meglepő, hogy a halmazműveletek tulajdonságai igazak lesznek a logikai műveletek esetében is.

Az azonosságok közül csak néhánynak a bizonyítását részletezzük, a többit ennek alapján az olvasó könnyen igazolhatja.

1. $A \vee B = B \vee A, \quad A \wedge B = B \wedge A$ (kommutativitás).

Lássuk az első igazolását. Az *F.1.3. táblázatból* láthatjuk, hogy a bal és a jobb oldal A és B minden lehetséges értékére egyenlő.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \vee B$	1	1	1	0
$B \vee A$	1	1	1	0

F.1.3. táblázat

2. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ (asszociativitás).

3. $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$,
$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ (disztributivitás).

A 3.-ból nézzük a második azonosság bizonyítását *(F.1.4. táblázat)*.

A	1	1	1	1	0	0	0	0
B	1	1	0	0	1	1	0	0
C	1	0	1	0	1	0	1	0
$A \wedge B$	1	1	0	0	0	0	0	0
$(A \wedge B) \vee C$	1	1	1	0	1	0	1	0
$A \vee C$	1	1	1	1	1	0	1	0
$B \vee C$	1	1	1	0	1	1	1	0
$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$	1	1	1	0	1	0	1	0

F.1.4. táblázat

4. $0 \vee A = A, \quad 1 \wedge A = A.$

5. $1 \vee A = 1, \quad 0 \wedge A = 0.$

Amint látható, ezek az azonosságok arra az esetre vonatkoznak, amikor a konjunkció vagy diszjunkció egyik tagjának logikai értékét ismerjük, így itt a 0, illetve 1 olyan logikai ítéleteket jelentenek, amelyek logikai értéke ismert: hamis, illetve igaz.

6. $A \vee A = A, \quad A \wedge A = A$ (tautológia).

7. $A \vee \bar{A} = 1, \quad \bar{A} \wedge A = 0.$

A fentiek alapján feltűnhet, hogy az 1–7. azonosságpár esetében az egyik azonosság a másikból úgy származtatható, hogy bennük a konjunkció és diszjunkció,

a 0 és 1,
az A és $\bar{A}$ (ha előfordul)

szerepét felcseréljük. Ez az ún. **dualitási elv** általában is érvényes, vagyis minden logikai azonosság igaz marad a fenti cserék elvégzése után (nem bizonyítjuk).

A felsorolt 14 azonosság segítségével az ítéletkalkulus többi azonossága igazolható, ezért ezeket **alapazonosságoknak** tekintjük. Például az ún. **abszorpciós törvények:**

$$A \wedge (A \vee B) = A,$$
$$A \vee (A \wedge B) = A$$

csupán az alapazonosságok felhasználásával igazolhatók.

A második törvény bizonyítása:

$$A \vee A \wedge B = A \wedge 1 \vee A \wedge B = A \wedge (1 \vee B) = A \wedge 1 = A.$$

Újabb tételek igazolásához a már bizonyított állításokat is fel lehet használni. Gyakran előfordul, hogy valamely összefüggés igazolásakor ezen az úton bonyolultabb célhoz érni, mint kipróbálni, hogy a kérdéses összefüggés a benne szereplő változók minden lehetséges értékére fennáll-e. Jó példa erre a *de Morgan*-féle azonosságok,

$$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

bármelyike. Bizonyításukat az *F.1.5. táblázat* tartalmazza.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \wedge B$	1	0	0	0
$\overline{A \wedge B}$	0	1	1	1
$\bar{A}$	0	0	1	1
$\bar{B}$	0	1	0	1
$\bar{A} \vee \bar{B}$	0	1	1	1

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \vee B$	1	1	1	0
$\overline{A \vee B}$	0	0	0	1
$\bar{A}$	0	0	1	1
$\bar{B}$	0	1	0	1
$\bar{A} \wedge \bar{B}$	0	0	0	1

F.1.5. táblázat

Az eddigiekből világosan látszik, hogy ha valamely H halmaz részhalmazain értelmezzük a halmazműveleteket, azok teljesen analóg azonosságoknak tesznek eleget, mint a logikai műveletek. A logikai, illetve a halmazműveletek esetében az történt, hogy az ítéletek halmazán, illetve H részhalmazainak halmazán értelmeztünk három műveletet (konjunkció, diszjunkció, negáció, illetve közös rész, egyesítés, komplementerképzés); létezik két kitüntetett elem (0 és 1, illetve $\emptyset$ és H) és azok a felsorolt 14 azonosságnak tesznek eleget. Az ilyen halmazokat a műveletekkel együtt **Boole-algebrának** nevezzük. [George Boole (1815–1864) angol matematikus.] Megjegyezzük, hogy a 14 azonosság között van olyan, amelyik a többiek segítségével bizonyítható, vagyis kevesebb ún. alapazonosság is elegendő ahhoz, hogy valamely halmaz a rajta definiált műveletekkel együtt Boole-algebrát alkosson. Ezekkel a kérdésekkel nem foglalkozunk.

A logikai alapműveletek definíciójában a műveletben szereplő (A, B) változópár értékeihez logikai értékeket rendeltünk *(F.1.1.* és *F.1.2. táblázat)*. Mivel az

(A, B) változópár négyféle értéket vehet fel: (1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0) és mindegyikhez rendelhetjük az igaz (1) és a hamis (0) érték bármelyikét, azért $2^4 = 16$-féle műveletet (logikai függvényt) lehet definiálni. Ezek közül gyakori előfordulásuk miatt még kettővel foglalkozunk részletesen.

A köznapi beszédben a „ha A, akkor B" alakú ítéleteket olyan esetekben használjuk, amikor az A ítélet logikai értéke valamilyen ok miatt bizonytalan („ha a vállalat teljesíti a tervét, akkor a jól dolgozók prémiumot kapnak" ítéletnél még nem tudjuk az első ítélet logikai értékét: a vállalat teljesíti-e a tervét). Ez azt jelentené, hogy a „ha A, akkor B" ítéletnek éppen akkor nem lenne értelme, ha A, illetve B logikai értékét ismerjük. A szokásos szóhasználattól eltérően a „ha A, akkor B" ítéletnek minden esetben logikai értéket tulajdonítunk, amely csak az A és a B logikai értékeitől függ, vagyis A és B mind a négy lehetséges értékpárjához (1, 1); (1, 0); (0, 1); (0, 0) logikai értéket rendelünk, mégpedig az *F.1.6. táblázat* szerint.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \Rightarrow B$	1	0	1	1

F.1.6. táblázat

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \Leftrightarrow B$	1	0	0	1

F.1.7. táblázat

DEFINÍCIÓ. *Ha A és B ítéletek, a „ha A, akkor B" ítéletet az A és B* ***implikációjának*** *nevezzük, amely akkor és csak akkor hamis, ha A igaz és B hamis. Jele: $A \Rightarrow B$.*

Az igazságtáblából *(F.1.6. táblázat)* azonnal látszik, hogy az implikáció nem kommutatív művelet, másrészt

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B,$$

az implikáció tehát kifejezhető a negáció és a diszjunkció segítségével.

A matematikában gyakran használjuk az „akkor és csak akkor" kifejezést, amelyen két állítás egy időben történő teljesülését értjük *(F.1.7. táblázat)*. Ez azt jelenti, hogy mindegyik állításból következik a másik.

DEFINÍCIÓ. *Ha A és B ítéletek, akkor az „A akkor és csak akkor igaz, ha B igaz" ítéletet A és B* ***ekvivalenciájának*** *nevezzük, amely akkor és csak akkor igaz, ha $A = B$. Jele: $A \Leftrightarrow B$.*

Nyilvánvaló, hogy

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A),$$

ami azt jelenti, hogy az ekvivalencia is kifejezhető az alapműveletek segítségével.

Mint már említettük, a részletezett négy műveleten kívül még további 12 definiálható, és ezek is kifejezhetők az alapműveletek segítségével. A teljesség kedvéért felírjuk mind a 16-ot és azt, hogy hogyan adhatók meg az alapműveletek segítségével (*F.1.8. táblázat*). A vonalak azokat a sorokat kapcsolják össze, amelyek egymás negáltjai.

A	1	1	0	0		
B	1	0	1	0		
1	0	0	0	0	$A \wedge \bar{A} = B \wedge \bar{B}$	
2	1	0	0	0	$A \wedge B$	szorzás
3	0	1	0	0	$A \wedge \bar{B}$	
4	1	1	0	0	$A \wedge \bar{B} \vee A \wedge B = A$	
5	0	0	1	0	$\bar{A} \wedge B$	
6	1	0	1	0	$\bar{A} \wedge B \vee A \wedge B = B$	
7	0	1	1	0	$\bar{A} \wedge B \vee A \wedge \bar{B}$	kizáró vagy
8	1	1	1	0	$A \vee B$	összeadás (megengedő vagy)
9	0	0	0	1	$\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$	
10	1	0	0	1	$(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{B} \vee A) = A \Leftrightarrow B$	ekvivalencia
11	0	1	0	1	$\bar{B}$	
12	1	1	0	1	$\overline{\bar{A} \wedge B} = A \vee \bar{B} = B \Rightarrow A$	implikáció
13	0	0	1	1	$\bar{A}$	
14	1	0	1	1	$\overline{A \wedge \bar{B}} = \bar{A} \vee B = A \Rightarrow B$	implikáció
15	0	1	1	1	$\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	
16	1	1	1	1	$\overline{A \wedge \bar{A}} = \bar{A} \vee A = \bar{B} \vee B$	

F.1.8. táblázat

Az olvasó könnyen utánaszámolhat, hogy három logikai változónak (A, B, C) nyolc értékhármasa lehetséges (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), ...; mindegyikhez rendelhetjük az igaz és a hamis logikai értékeket, így összesen 2^8-féle logikai függvényt definiálhatunk. Természetesen ezek is kifejezhetők az alapműveletek segítségével.

F.2. SZEMELVÉNYEK A PÉNZÜGYI SZÁMÍTÁSOKBÓL

F.2.1 A kamatos kamat számítása

A *kamat* a kölcsönök után az adós által időarányosan fizetendő pénzösszeg. A **kamatláb** 100 pénzegység egy meghatározott időre **(kamatidőre)** vonatkozó kamata. Például, ha az évi kamatláb 8%, akkor 100,— Ft egy évi kamata 8,— Ft. Ha nem mondunk mást, a kamatidő egy év. A kamat kiszámításának módja:

$$p = \frac{T \cdot I}{100} = T \cdot i,$$

ahol p a kamat, T a kölcsönösszeg, I a kamatláb és $i = I/100$. Kamatszámításkor a hónapokat 30, az évet 360 napnak számítjuk. Így a kamat $n(\leq 360)$ napra

$$p = \frac{T \cdot I \cdot n}{360 \cdot 100} = \frac{T \cdot i \cdot n}{360}.$$

Egyszerű kamatnak hívjuk a kamatot, ha azt csak egy kamatidőre vagy annak egy részére számítjuk. Amikor valamely k_0 tőke kamatait minden kamatidő végén a tőkéhez csatoljuk (a következő kamatidőben már ez is kamatozik) és k_0 több kamatidőben történő növekedését vizsgáljuk, **kamatos kamat** számításáról beszélünk.

Nézzük az első kamatidő elején kölcsönadott (kölcsönvett) k_0 összeg növekedésének mechanizmusát I% kamatláb mellett – bevezetve az $1+i = r$ jelölést:

Kamatidő (időszak)	Tőke az időszak elején	Egyszerű kamat	Tőke az időszak végén
1.	k_0	$k_0 i$	$k_1 = k_0 + k_0 i = k_0(1+i) = k_0 r$
2.	$k_0 r$	$k_0 r \cdot i$	$k_2 = k_0 r + k_0 r i = k_0 r(1+i) = k_0 r^2$
$\vdots$			
n	$k_0 r^{n-1}$	$k_0 r^{n-1} i$	$k_n = k_0 r^{n-1} + k_0 r^{n-1} i = k_0 r^{n-1}(1+i) = k_0 r^n$

A k_n-t felnövekedett értéknek, r-t **kamattényezőnek** nevezzük. Látjuk, hogy a felnövekedett értékek mértani sorozatot alkotnak:

$$k_n = k_0 r^n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{F.2.1}$$

Például az év elején az OTP-nél 5%-os kamatra elhelyezett 10 000,— Ft a hatodik év végére

$$k_6 = 10\,000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^6 = 10\,000 \cdot 1{,}05^6 = 13\,400\text{,— Ft}$$

értékre növekedik.

Szükséges hangsúlyozni, hogy a fizetési kötelezettségek esetében a *fizetendő összeg nagysága mellett a lejárat időpontjának (a „mikor"-nak) is lényeges szerepe van.* Ennek illusztrálására nézzünk egy példát:

F.2.1. példa. Egy gépet szeretnénk vásárolni, két ajánlatunk van:

1. az ár 150 000,— Ft, és a leszállításkor kell fizetni;
2. az ár 180 000,— Ft, a vételár felét leszállításkor kell kiegyenlíteni, a másik felének fizetésére hat év kamatmentes haladékot kapunk.

Melyik a kedvezőbb ajánlat, ha 8%-os kamatlábbal számolunk?

A megoldáshoz kell választanunk egy időpontot (ún. **jelen időt**), amikor az összegeket összehasonlítjuk.

a) Legyen a jelen idő a leszállítás időpontja. Az első ajánlat szerint ekkor kell 150 000,— Ft-ot fizetnünk.

A második ajánlat szerint 90 000,— Ft-ot kell most fizetnünk. A további 90 000,— Ft-nak 6 év múlva kell rendelkezésünkre állnia. A kérdés úgy is felvethető, hogy mekkora összeggel kell most rendelkeznünk, hogy 8% kamatláb mellett 6 év múlva 90 000,— Ft-unk legyen:

$$k_0 \cdot 1{,}08^6 = 90\,000.$$

Ebből

$$k_0 = 56\,715{,}30 \text{ Ft}.$$

Vagyis a második ajánlat szerint a leszállításkor

$$90\,000\text{,— Ft} + 56\,715{,}30 \text{ Ft} = 146\,715{,}30 \text{ Ft}$$

a vételár. Ez a kedvezőbb (l. *F.2.1a ábrát*).

b) Legyen a jelen idő a leszállítás utáni hatodik év (a második részlet lejárata). Az első ajánlat szerinti 150 000,— Ft ún. **jelen értéke** (l. *F.2.1b ábrát*):

$$150\,000 \cdot 1{,}08^6 = 238\,031{,}10 \text{ (Ft)}.$$

A második ajánlat szerinti leszállításkor fizetett 90 000,— Ft jelen értéke:

$$90\,000 \cdot 1{,}08^6 = 142\,818{,}70 \text{ (Ft)}.$$

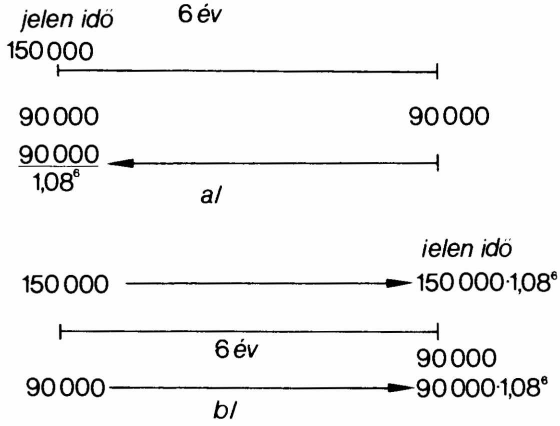
A második részletfizetés jelen értéke

$$90\,000,\!\text{— Ft}.$$

Így a második ajánlat szerint a teljes vételár jelen értéke

$$90\,000,\!\text{— Ft} + 142\,818{,}70\ \text{Ft} = 232\,818{,}70\ \text{Ft}.$$

Természetesen így is ez adódik kedvezőbbnek.



F.2.1. ábra

F.2.2. példa. Most fogalmazzuk át az előbbi feladatot: Az 1. példában szereplő vásárlási feltételek mellett hány %-os kamatláb esetén lesz a két ajánlat azonos?

Ismét tételezzük fel, hogy a jelen idő a második részlet lejáratának időpontja. Ekkor az 1. példa *b)* részének gondolatmenetét követve:

$$150\,000 \cdot r^6 = 90\,000 + 90\,000 r^6.$$

Ebből

$$r^6 = \frac{90\,000}{60\,000} = 1{,}5,$$

$$r = 1 + i = \sqrt[6]{1{,}5} \approx 1{,}0699.$$

Így

$$I = 100 \cdot i \approx 7\%.$$

Ez azt is jelenti, hogy 7%-nál kisebb kamatláb mellett az első, 7%-nál nagyobb kamatláb mellett a második ajánlat a kedvezőbb.

F.2.1.1 Diszkontálás

Az 1. példában már foglalkoztunk a 6 év múlva befizetett összeg jelen értékével. Egy példán keresztül térjünk még vissza a problémához. Kérdés, mekkora összeget kell elhelyeznünk 9%-os kamatra, hogy 10 év múlva 50 000,— Ft álljon rendelkezésünkre (vagyis a 10 év múlva felvett 50 000,— Ft-nak mekkora a jelen értéke).

Az (F.2.1.) formula alapján

$$k_0\, 1{,}09^{10} = 50\,000,$$

$$k_0 = 50\,000\left(\frac{1}{1{,}09}\right)^{10} = 21\,120{,}54.$$

Ezt a jelen értéket **diszkontált értéknek** nevezzük. Tehát 50 000,— Ft 10 évre diszkontált értéke 9%-os kamatláb mellett 21 120,54 Ft. Az $\frac{1}{1{,}09}$, általában a

$$v = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{r}$$

számot **diszkonttényezőnek** nevezzük. Így (F.2.1.)-ből

$$k_0 = k_n \frac{1}{r^n} = k_n v^n.$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ha a diszkontálást évente megfelelő százalékkal való csökkentéssel végezzük, akkor a százalékláb nem azonos az eredeti kamatlábbal. Például 100,— Ft 5%-os kamatláb mellett 1 év alatt 105,— Ft-ra növekedik fel. Tehát 105,— Ft diszkontált értéke 1 évre 5%-os kamatláb mellett 100,— Ft.

$$105 \cdot \frac{1}{1{,}05} = 100.$$

Természetesen a 105,— Ft-ot nem 5%-kal kell csökkenteni, hogy 100,— Ft legyen, hanem

$$100 = 105-5 = 105-105 \cdot \frac{5}{105} = 105(1-0{,}0476),$$

tehát a csökkenés 4,76%-os.

Általában, ha a kamatláb I% és így $r = 1+i$ a kamattényező és azt a kamatlábat, amellyel a diszkontáláskor csökkenteni kell az összeget, D jelöli ($D/100 = d$), akkor

$$k_0 = k_1\left(1-\frac{D}{100}\right) = k_1(1-d) = k_1 \frac{1}{1+i}.$$

Egyszerű számítással adódik, hogy

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

A D számot **diszkontlábnak** nevezzük. Példánkban $d = \frac{0{,}05}{1{,}05} = 0{,}0476$, és így $D = 4{,}76\%$.

A fentiekből – megtartva a korábbi jelöléseket – adódik, hogy

$$k_0 = k_n(1-d)^n.$$

F.2.1.2 Nominális és effektív kamatlábak, konform kamatláb

A kamatoskamat-számítás lényegéből következik, hogy például az évi 12%-os kamat nem azonos a havi 1%-os kamattal. Ennek megmutatására nézzük 100,— Ft egy év alatt felnövekedett értékét a kétféle kamatidővel számolva:

évi 12% mellett	$100 \cdot (1+0{,}12)^1 = 112{,}—$ Ft,
havi 1% mellett	$100 \cdot (1+0{,}01)^{12} = 112{,}68$ Ft.

Úgy is fogalmazhatunk: ha évente m-szer ($m > 1$) (példánkban 12-szer) történik a tőkésítés $\frac{J}{m}$ %-kal (példánkban 1%-kal), akkor ez ténylegesen nem J%-os (példánkban 12%-os) évi kamatlábnak felel meg. Az **effektív** (tényleges) **évi kamatlábat** jelöljük I-vel. Ekkor

$$1+i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m \tag{F.2.2.}$$

$\left(\text{ahol } \frac{I}{100} = i, \text{ és } \frac{J}{100} = j\right)$. Ebből az effektív évi kamatláb:

$$I = \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1\right] \cdot 100.$$

(Példánkban $I = 12{,}68\%$.)

Ha mind kisebb időtartamokat választunk kamatlábidőnek, azaz m-et növeljük, akkor

$$I = \lim_{m\to\infty} \left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1\right] \cdot 100 = (e^j - 1) \cdot 100.$$

Ezt a határesetet **folytonos kamatozásnak** nevezzük, és az I jelen esetben a folytonos kamatozáshoz tartozó effektív évi kamatláb.

Megjegyezzük, hogy a J kamatlábat **névleges** vagy **nominális kamatlábnak** nevezzük. Példánkban az évi nominális 12%-os kamatnak évi 12,68%-os effektív kamatláb felel meg, ha havonta történik a tőkésítés.

A kérdés megfordítható: évi I%-os effektív kamatlábnak mekkora nominális kamatláb felel meg?

Az (F.2.2.)-ből

$$\frac{j}{m} = \sqrt[m]{1+i} - 1,$$

azaz a nominális kamatláb:

$$J = 100 \cdot m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right). \qquad \text{(F.2.3.)}$$

Vegyük észre, hogy a $\frac{J}{m}$ az a kamatláb, amellyel az egyes részidőszakokban tőkésíteni kell, hogy ugyanazt az eredményt kapjuk, mintha év végén I%-os kamattal tőkésítenénk. Például, ha évi 12%-os kamattal dolgozunk, akkor negyedéves tőkésítés esetén az évi nominális kamatláb (F.2.3)-ból ($m=4$):

$$J = 100 \cdot 4\left(\sqrt[4]{1{,}12} - 1\right) = 11{,}49\%.$$

Ekkor

$$\frac{J}{4} = 2{,}87\%,$$

vagyis negyedévenként 2,87%-kal kell tőkésíteni ahhoz, hogy évi 12%-os kamatot kapjunk. A $\frac{J}{m}$ kamatlábat az I kamatláb m részidőszakra osztáshoz tartozó **konform kamatlábának** nevezzük.

F.2.1.3 Az infláció szerepe, figyelembevétele

Induljunk ki egy konkrét példából. 10 000,— Ft-ot 10 évre 12%-os kamatláb mellett kölcsönadunk. Tegyük fel, hogy évi 7%-os az árszínvonal emelkedése. Kérdés, hogy a 10. év végén mekkora a rendelkezésünkre álló tőke vásárlóértéke?

Tőkénk felnövekedett értéke:

$$10\,000 \cdot 1{,}12^{10} = 31\,058{,}50 \text{ Ft}.$$

Ezzel szemben a jelenleg 10 000,— Ft-ba kerülő áru ára 10 év múlva:

$$10\,000 \cdot 1{,}07^{10} = 19\,671{,}50 \text{ (Ft)}.$$

Ez azt jelenti, hogy tőkénk vásárlóértéke

$$\frac{31\,058{,}50}{19\,671{,}50} = \left(\frac{1{,}12}{1{,}07}\right)^{10} = 1{,}579$$

szeresére – vagy ami ugyanaz – 57,9%-kal növekedett.

Általában I% évi kamatláb és F%-os évi árszínvonal-emelkedés esetén tőkénk vásárlóértéke

$$\left(\frac{1+\dfrac{I}{100}}{1+\dfrac{F}{100}}\right)^n = \left(\frac{1+i}{1+f}\right)^n$$

szeresére növekedik.

Úgy is eljárhattunk volna, hogy 10 000,— Ft felnövekedett értékének vásárlóértékét a jelenlegi árszínvonalra állítjuk vissza (diszkontáljuk):

$$10\,000 \cdot 1{,}12^{10} \cdot \frac{1}{(1{,}07)^{10}} = 15\,788{,}50,$$

amelyből szintén 57,9%-os emelkedés adódik.

Megjegyezzük, hogy a közgazdasági gyakorlatban – sőt a szakirodalomban is – gyakran a fenti eljárás helyett egyszerűen azt mondják, hogy 12%-os kamatláb és 7%-os árszínvonal növekedésnél az évi vásárlóérték-növekedés 5%-os, így 10 év múlva

$$10\,000 \cdot 1{,}05^{10} = 16\,288{,}94 \text{ (Ft)}$$

a vásárlóérték, azaz a növekedés 62,9%-os. Az előző eredményektől való eltérés nagysága önmagáért beszél.

F.2.2 Járadékszámítás

Az egyenlő időközökben fizetett összegek sorozatát járadéknak nevezzük. E fizetések történhetnek olyan céllal, hogy a fizető fennálló tartozását akarja kiegyenlíteni – **törlesztőjáradék,** vagy megfelelő pénzösszeg gyűjtése a cél – **gyűjtőjáradék.**

Két egyszerűsítő feltevéssel élünk:

a) a befizetési időközök megegyeznek a kamatidővel;

b) minden alkalommal ugyanakkora összeget fizetünk be.

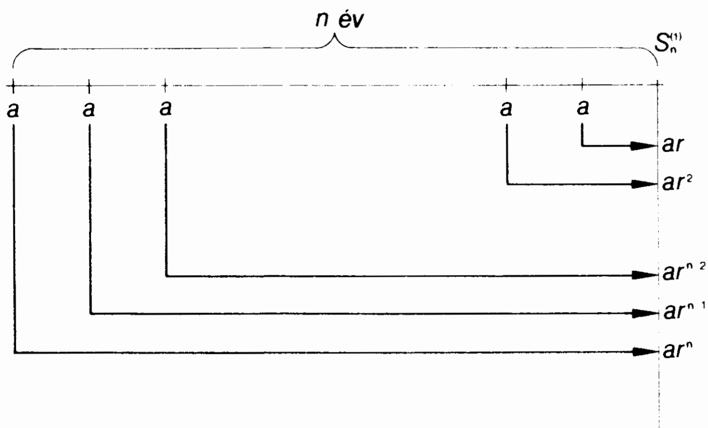
Ha a kamatidő egy év, az egy-egy alkalommal befizetett összeget **annuitásnak** nevezzük.

F.2.2.1 Gyűjtőjáradék

Nézzük először a gyűjtőjáradékot. Évi I%-os kamatláb mellett n éven át minden év elején befizetünk a összeget. Kérdés, hogy az utolsó befizetés után egy évvel mekkora összeg áll rendelkezésünkre. Jelölje $S_n^{(1)}$ a keresett összeget [az (1) jel arra utal, hogy az utolsó befizetés után egy időszakkal vizsgáljuk a tőkénket]. Már az előző pontokban is hangsúlyoztuk, hogy a befizetéseknél a „mikor" is számít, és nem lehet egyszerűen azt mondani, hogy n-szer fizettünk a forintot, tehát az $S_n^{(1)}$ nem más, mint $n \cdot a$. Célszerű jelen időnek az n-edik év végét választani. Az első befizetés és a jelen idő között n év telt el, így a befizetett a összeg felnövekedett értéke:

$$a(1+i)^n = ar^n$$

Hasonlóan növekedtek a többi alkalommal befizetett összegek is, csak az eltelt évek száma mindegyiknél más és más. A befizetések időpontjait és a felnövekedett értékeket az *F.2.2. ábrán* vázoltuk.



F.2.2. ábra

Így

$$S_n^{(1)} = ar + ar^2 + \ldots + ar^n = ar\frac{r^n-1}{r-1} = ar\frac{r^n-1}{i}. \qquad \text{(F.2.4.)}$$

Ha 1,— Ft annuitás felnövekedett értékét s_n-nel jelöljük, azaz

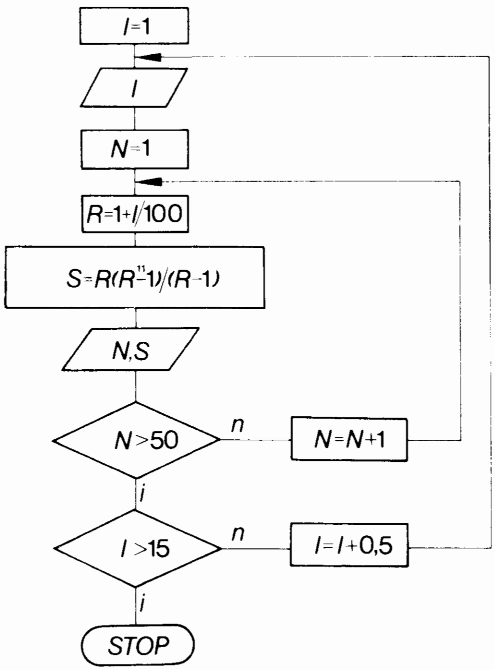
$$\frac{S_n^{(1)}}{a} = s_n = r\frac{r^n-1}{r-1} = r\frac{r^n-1}{i}, \qquad \text{(F.2.5.)}$$

akkor s_n csak a kamatlábtól (vagy ami ugyanaz, r-től) és az évek számától (n-től) függ; értékeit táblázatba foglalhatjuk. Az *F.2.3. ábrán* egy olyan algoritmus blokkdiagramja látható, amely 1%-tól 15%-ig 0,5%-os lépésközökkel elkészíti s_n értékeit 1-től 50 évig.

Most nézzünk két példát.

F.2.3. példa. Hány évig kell minden év január 1-jén az OTP-be 5000,— Ft-ot elhelyezni, hogy évi 5%-os kamatláb mellett az utolsó év végén 50 000, — Ft álljon rendelkezésünkre?

Mivel



F.2.3. ábra

$$s_n = \frac{S_n^{(1)}}{a} = \frac{50\,000}{5000} = 10,$$

és (F.2.5.)-ből

$$r^n = \frac{s_n i}{r} + 1,$$

azért

$$1{,}05^n = \frac{10 \cdot 0{,}05}{1{,}05} + 1 = 1{,}476.$$

Ebből

$$n = \frac{\lg 1{,}476}{\lg 1{,}05} = 7{,}98 \approx 8 \text{ év}.$$

Ha rendelkezésünkre áll 5%-os kamatlábra az s_n-ek táblázata, akkor egyszerűen vissza kell keresni, hogy hányadik évben (mekkora n-nél) lesz $s_n = 10$. Azt találjuk a táblázat 5%-os oszlopában, hogy $s_7 = 8{,}5491$, $s_8 = 10{,}0266$.

Már innen látszik, hogy n kerekített értéke 8 lesz. Ha pontosabban akarjuk n értékét ismerni, akkor lineáris interpolációt végzünk:

$$n - 7 = \frac{10 - 8{,}5491}{10{,}0266 - 8{,}5491} \approx 0{,}98.$$

Két tizedes pontosságra számolva, azonos eredményt kapunk a fentivel.

Abban az esetben, ha r (vagy másként fogalmazva a kamatláb) az ismeretlen, általában elemi úton nem jutunk el a megoldáshoz. Egy példán mutatunk be néhány közelítő eljárást:

F.2.4. példa. Tíz évig minden év január 1-jén elhelyezünk a pénzintézetben 5000,– Ft-ot. Hány %-os kamatláb mellett növekedik tőkénk a tizedik év végére 80 000,– Ft-ra?

Ha vannak táblázataink, akkor az s_n táblázatában megnézzük, hogy az

$$s_{10} = \frac{80\,000}{5000} = 16$$

értéket melyik százalékláb oszlopában találjuk meg.

A 8,25%-os kamatláb oszlopában $s_{10} = 15{,}8691$,
a 8,5%-os kamatláb oszlopában $s_{10} = 16{,}0961$.

A keresett százalékláb a kettő között van. Pontosabb meghatározására négy módszert mutatunk, amelyek az első kivételével akkor is használhatók, ha a táblázat nem áll rendelkezésünkre.

a) Interpoláció

A táblázatunk adatai alapján

$$\frac{I-8{,}25}{8{,}5-8{,}25} = \frac{16-15{,}8691}{16{,}0961-15{,}8691} = 0{,}5767.$$

Ebből

$$I = 8{,}394\%.$$

b) Intervallumfelezés

Az (F.2.5.)-ből átrendezéssel az

$$f(r) = r^{n+1} - (s_n + 1)r + s_n = 0 \qquad \text{(F.2.6.)}$$

egyenlet adódik.

Jelen esetben

$$f(r) = r^{11} - 17r + 16 = 0. \qquad \text{(F.2.7.)}$$

Kövessük a 4.6. pontban megismert eljárást; a kiindulási intervallum lehet az *a)*-ban kapott (1,0825; 1,085) intervallum. [Táblázat nélkül sem nehéz olyan r értékeket találni, amelyek közé (F.2.7.) bal oldalának zérushelye esik, legfeljebb távolabb vannak egymástól, azaz hosszabb a kiinduláskor vett intervallum.]

BASIC nyelven írt program lehet a következő:

```
10 INPUT "INT.BAL VÉGE?"; A
20 INPUT "INT.JOBB VÉGE?"; B
30 INPUT "PONTOSSÁG?"; E
40 INPUT "KIS SN?"; SN
```

```
50 INPUT "ÉVEK SZÁMA?"; N
60 F1=A↑(N+1)-(SN+1)* A+SN
70 F2=B↑(N+1)-(SN+1)* B+SN
80 IF(F1*F2>0) THEN GO TO 180
90 C=(A+B)/2
100 F=C↑(N+1)-(SN+1)* C+SN
110 IF(F1*F<0) THEN GO TO 140
120 F1=F : A = C
130 GO TO 150
140 F2=F : B = C
150 IF((B-A)>E) THEN GO TO 90
160 PRINT "R="; C
170 GO TO 190
180 PRINT "ROSSZ INTERVALLUM"
190 END
```

Ezen a módon a 8,3946% adódik, ezt tekinthetjük három tizedesjegyre pontos eredménynek.

Megjegyzés: Ennél és a további módszereknél ügyelni kell arra, hogy a tényleges r érték mellett az $r=1$ is megoldása az (F.2.6.)-nak.

c) Iteráció

Könnyű belátni, hogy (F.2.6.) bal oldalának deriváltja,

$$f'(r) = 11 \cdot r^{10} - 17$$

az egyenletet kielégítő r értéknél és az ennél nagyobb r-eknél pozitív. Vegyünk a keresett megoldásnál nagyobb r-t. Az *a)*-ból következik, hogy $r=1{,}085$ ilyen. (Ha nincs táblázatunk, akkor sem nehéz ilyent találni.) Mivel

$$f'(1{,}085) = 11 \cdot 1{,}085^{10} - 17 = 7{,}87 < 8,$$

az

$$r = r - \frac{r^{11} - 17r + 16}{8}$$

egyenlet jobb oldalának deriváltja a kérdéses intervallumban a keresett megoldás és $r=1{,}085$ között 1-nél kisebb. Így az 5.7. pont szerint az iteráció konvergens lesz. Az iterációt addig végezve, míg a két szomszédos lépésben adódó r értékek eltérése kisebb nem lesz 10^{-6}-nál, a következő BASIC programmal jutunk célba:

```
10 R=1,085
20 R1=R-(R↑11-17*R+16)/8
```

```
30 P=ABS(R1-R)
40 R=R1
50 IF P>1 · E-6 THEN GO TO 20
60 PRINT "R="; R
70 END
```

Programunk a negyedik iterációs lépésnél véget ér, és R = 1,083 946 értéket ír ki, azaz $I = 8{,}3946\%$ a négy tizedesjegyre pontos érték.

d) Iteráció Newton-módszerrel

Ha az (F.2.7.) egyenlet bal oldalát, vagyis az

$$f(r) = r^{11} - 17r + 16 \qquad r \geqq 1$$

függvényt vázoljuk, az *F.2.4. ábrát* kapjuk.

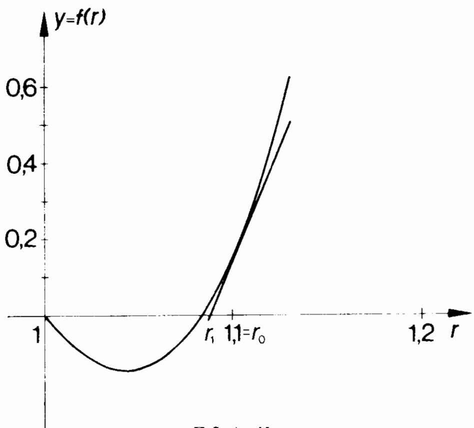
Ha a görbéhez pl. az $r_0 = 1{,}1$ pontban érintőt húzunk, annak egyenlete

$$y - f(1{,}1) = f'(1{,}1)\,(r - 1{,}1).$$

Ez az érintő az r tengelyt ott metszi, ahol az $y = 0$, azaz

$$r_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} = 1{,}1 - \frac{1{,}1^{11} - 17 \cdot 1{,}1 + 16}{11 + 1{,}1^{10} - 17} = 1{,}0867.$$

Általában az érintő r tengellyel való metszéspontja



F.2.4. ábra

$$r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)}.$$

Ha ezt az eljárást megismételjük r_1-ben, az érintő r-tengellyel való metszéspontja:

$$r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)} = r_1 - \frac{r_1^{11} - 17 \cdot r_1 + 16}{11 \cdot r_1^{10} - 17} =$$

$$= 1{,}0867 - \frac{1{,}0867^{11} - 17 \cdot 1{,}0867 + 16}{11 \cdot 1{,}0867^{10} - 17} = 1{,}084.$$

Könnyű belátni, hogy az így kapott $r_1, r_2, \ldots,$ sorozat az f zérushelyéhez konvergál.

Ennek BASIC programja, amely az r_0 induló értéket és a pontosságot (két szomszédos lépésbeli érték eltérésének korlátját) a program elején kéri:

```
 10 INPUT "ÉVEK SZÁMA"; N
 20 INPUT "INDULÓ ÉRTÉK"; R
 30 INPUT "PONTOSSÁG"; E
 40 INPUT "SN = "; S
 50 R1 = R - (R↑(N + 1) - (S + 1)*R + S)/((N + 1)*R↑N - S - 1)
 60 P = ABS(R1 - R)
 70 R = R1
 80 IF P > E THEN GO TO 50
 90 PRINT "R = "; R
100 END
```

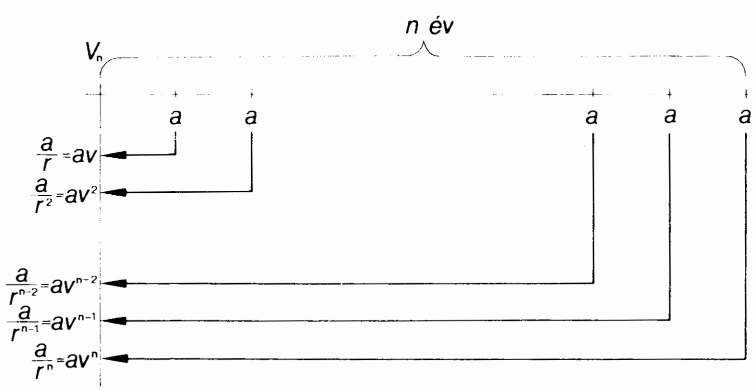
Az $R = 1{,}1$ értékkel indítva, a negyedik iterációval véget ér az eljárás:

$$R = 1{,}083\,946.$$

F.2.2.2 Törlesztőjáradék

Tegyük fel, hogy $V_n^{(1)}$ összegű kölcsönt veszünk fel I%-os kamatra, amelyet n évig, évi a Ft-os annuitással törlesztünk. Mi az összefüggés a fenti adatok között?

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a kölcsönt év elején vettük fel, és minden év január 1-jén fizetjük be az a összeget (először a kölcsön felvétele után egy évvel). Minden annuitást a kölcsön felvételének időpontjára diszkontálunk *(F.2.5. ábra)*.



F.2.5. ábra

Így, ha v a diszkonttényező, akkor

$$V_n^{(1)} = av + av^2 + \ldots + av^n = av\frac{v^n - 1}{v - 1} = av\frac{1 - v^n}{1 - v}. \qquad \text{(F.2.8.)}$$

Úgy is eljárhattunk volna, hogy az annuitásokat felkamatoljuk az n-edik év végére. Ekkor az előző pontnak megfelelően az

$$S_n^{(1)} = ar\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

összeget kapjuk, amelynek a $V_n^{(1)}$ összeg $(n+1)$ évi kamatos kamatával növelt értékével kell egyenlőnek lennie:

$$V_n^{(1)} r^{n+1} = ar\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Ebből $V_n^{(1)}$-et kifejezve (F.2.8.) adódik.

Ha az $a = 1$ Ft annuitáshoz tartozó kölcsönösszeget a_n-nel jelöljük, akkor

$$a_n = \frac{V_n^{(1)}}{a} = v\frac{1 - v^n}{1 - v}. \qquad \text{(F.2.9.)}$$

Az a_n csak I-től (r-től) és n-től függ, s_n-hez hasonlóan táblázatba foglalhatjuk. A táblázatbeli értékeket az *F.2.3. ábrán* vázolt eljárással analóg módon kaphatjuk meg.

F.2.5. példa. 300 000 Ft kölcsönt veszünk fel 8%-os kamatra. 30 év alatt egyenlő részletekben kell visszafizetnünk. Mekkora az évi törlesztőrész?

(F.2.8.)-ból

$$a = \frac{V_n^{(1)}(1 - v)}{v(1 - v^n)} = \frac{300\,000\left(1 - \dfrac{1}{1{,}08}\right)}{\dfrac{1}{1{,}08}\left[1 - \left(\dfrac{1}{1{,}08}\right)^{30}\right]} = 26\,648{,}23 \text{ (Ft)}.$$

Ha rendelkezésünkre áll az a_n táblázata, akkor a_{30} értékét kikeresve a 8%-os kamatlábnál, $a_{30} = 11{,}257\,783\,34$. Ezzel osztva a kölcsön összegét, a fentivel azonos eredményt kapunk.

F.2.6. példa. Hány %-os kamatra kell kölcsönadnunk 200 000 Ft-unkat, ha tíz évig minden évben 34 500,– Ft-ot szeretnénk törlesztésként felvenni?

A 4. példában szereplő eljárásokat alkalmazhatjuk.

a) Interpoláció: Akkor használhatjuk, ha táblázat áll rendelkezésünkre.

$$a_{10} = \frac{200\,000}{34\,500} = 5{,}797\,10.$$

A 11%-os oszlopban $a_{10} = 5{,}8892$,
a 11,5%-os oszlopban $a_{10} = 5{,}7678$,

$$\frac{11{,}5 - I}{11{,}5 - 11} = \frac{5{,}7971 - 5{,}7678}{5{,}8892 - 5{,}7678} = 0{,}2414.$$

Ebből

$$I = 11{,}38\%.$$

Az előző pontban látott *b)–d)* módszerek alkalmazásához (F.2.9.) egyenletet rendezzük:

$$f(v) = v^{n+1} - (a_n + 1)v + a_n = 0.$$

Ez az egyenlet teljesen azonos szerkezetű az (F.2.6.) egyenlettel.

A *b)* módszer változatlanul alkalmazható, a BASIC programban is csak s_n változót kell a_n-re cserélni. (Figyelem, példánk adatainak betáplálásánál $A = 1/1{,}115$ és $B = 1/1{,}11$).

A *c)* módszer alkalmazásához figyelembe kell venni, hogy a derivált

$$f'(v) = (n+1)v^n - (a_n + 1) < 0.$$

Ugyanakkor példánkban

$$|f'(v)| = |(n+1)v^n - (a_n + 1)| = |11v^{10} - 6{,}7971| < 7.$$

Így az iterációs egyenlet

$$v = v + \frac{v^{n+1} - (a_n + 1)v + a_n}{7}.$$

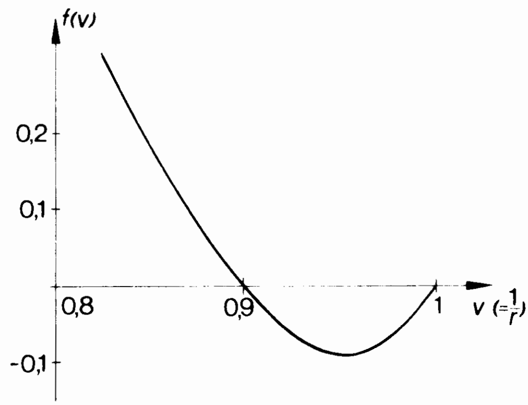
A *d)* módszer iterációs egyenlete:

$$v = v - \frac{v^{n+1} - (a_n + 1)v + a_n}{(n+1)v^n - a_n - 1}.$$

Az $f(v) = v^{n+1} - (a_n + 1)v + a_n = v^{11} - 6{,}7971v + 5{,}7971 \quad 0 < v \leqq 1$ függvényt az *F.2.6. ábrán* láthatjuk.

Látható, hogy a kezdőértékkel itt is vigyázni kell, mivel a $v = 1$ is zérushely. Ezt a problémát úgy oldhatjuk meg, hogy a keresett v-nél biztosan kisebb értékkel indulunk. Így az iteráció a megfelelő ponthoz konvergál $\left(v = \frac{1}{1{,}1138} = 0{,}8978\right)$.

Az F.2.5. példával kapcsolatban felvethetjük azt a kérdést is, hogy például a 15. év végén menynyi a tartozásunk. Ennek eldöntésére készítsünk ún. **törlesztési tervet.**



F.2.6. ábra

Törlesztési terv

Év (időszak)	Tartozás az év elején	Annuitásból		Összes törlesztés
		kamatra	törlesztésre	
1.	$V_n^{(1)} = 300\,000$	24 000	$x_1 = 2648{,}23$	$G_1 = 2648{,}23$
2.	297 351,77	23 788,14	$x_2 = 2860{,}09$	$G_2 = 5508{,}32$
3.	294 491,68	23 559,33	$x_3 = 3088{,}90$	$G_3 = 8597{,}22$
⋮				
15.				
16.	228 094,96			$G_{15} = 71\,905{,}04$

Nyilvánvaló, hogy $x_1 = a - V_n^{(1)} i$. Mivel a 2. évben a tartozás $V_n^{(1)} - x_1$, ennek kamatát kell levonni az annuitásból, hogy x_2-t megkapjuk.

$$x_2 = a - \left(V_n^{(1)} - x_1\right)i = \left(a - V_n^{(1)} i\right) + x_1 i = x_1 + x_1 i = x_1(1+i) = x_1 r.$$

Hasonlóan lehet belátni, hogy

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 r = x_1 r^2 \\ x_4 &= x_3 r = x_1 r^3 \\ &\vdots \\ x_k &= \ x_1 r^{k-1} \end{aligned}$$

Ennek megfelelően az első k év összes törlesztése,

$$G_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k = x_1 + x_1 r + \ldots + x_1 r^{k-1} = x_1 \frac{r^k - 1}{r - 1}.$$

Példánkban

$$G_{15} = 2648{,}23 \cdot \frac{1{,}08^{15} - 1}{0{,}08} = 71\,905{,}04.$$

Így a 16. sor és a továbbiak hasonlóan tölthetők ki, mint az első három.

F.2.3 Beruházás

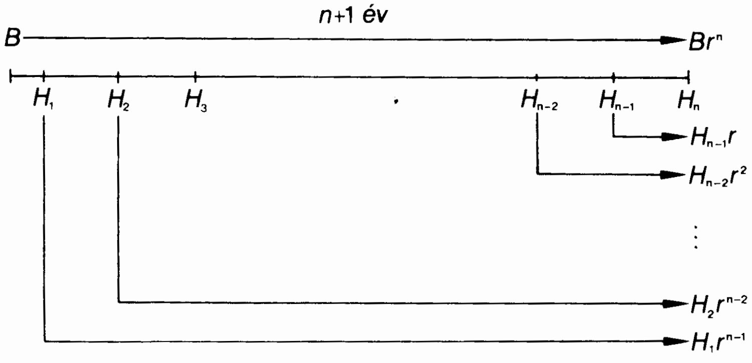
Legyen egy vállalat egy év alatt befejeződő (egyéves) beruházásánál a beruházott összeg B. Az egyszerűség érdekében tegyük fel, hogy a beruházás az előző év elején történt és számításainknál n évet veszünk figyelembe (pl. ennyi az amortizációs idő). A beruházás hozama az i-edik évben legyen H_i. A jövedelmezőségi szintből számított kamatláb legyen I%. Felmerül a kérdés, hogy a hozadék fedezi-e az ebből adódó ráfordítást.

B az n-edik év végére

$$B\left(1+\frac{I}{100}\right)^n = B(1+i)^n = Br^n$$

értékre nőne fel *(F.2.7. ábra)*. A hozamok felnövekedett összértéke

$$H_1 r^{n-1} + H_2 r^{n-2} + \ldots + H_{n-1} r + H_n.$$



F.2.7. ábra

A hozamok akkor fedezik a beruházás okozta ráfordítást, ha

$$Br^n \leqq \sum_{i=1}^{n} H_i r^{n-i}. \qquad \text{(F.2.10.)}$$

Ha k évig tartó beruházás esetén az év elején a beruházott összeg rendre B_1, B_2, ..., B_k, akkor

$$B_1 r^n + B_2 r^{n-1} + \ldots + B_k r^{n-k+1}$$

összeg áll (F.2.10.) bal oldalán.

F.2.3.1 Beruházásgazdaságossági mutatók

Az (F.2.10.) formula mindkét oldalát osztva r^n-nel, a

$$B \leqq \sum_{i=1}^{n} H_i r^{-i} = \sum_{i=1}^{n} H_i v^i \qquad \text{(F.2.11.)}$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelyet közvetlenül is megkaphattunk volna, ha felkamatolás helyett a hozamokat a beruházás időpontjára diszkontáljuk.

Ha a hozamok minden évben ugyanakkorák:

$$H_1 = H_2 = \ldots = H_n = H,$$

akkor (F.2.11.) a következő alakú lesz:

$$B \leqq Hv \frac{1-v^n}{1-v} = H \frac{1-v^n}{i}. \qquad \text{(F.2.12.)}$$

a) Az

$$E = \sum_{i=1}^{n} H_i v^i - B$$

különbséget **nettó jelenérték-mutatónak** nevezzük. Ennek pozitív előjele azt mutatja, hogy a hozamokat diszkontálva, a bevételek fedezik-e a befektetést.

Több évig tartó beruházás esetén

$$E = \sum_{i=1}^{n} H_i v^i - \sum_{i=1}^{k} B_i v^{i-1}.$$

Egyéves beruházásnál, ha a hozamok minden évben azonosak, (F.2.12.)-ből

$$E = H \frac{1-v^n}{i} - B.$$

b) Az

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i v^i}{\sum_{i=1}^{k} B_i v^{i-1}}$$

hányadost **megtérülési rátának** nevezzük. Akkor gazdaságos a beruházás, ha $R \geqq 1$. (Ez azt is jelenti, hogy $E \geqq 0$.) Úgy is mondhatjuk, hogy R megmutatja, hogy a beruházott összegünk hányszor térül meg. Az R definícióját k évig tartó beruházásra adtuk meg, de könnyen átírható E-hez hasonlóan a speciális esetekre: egyéves beruházásra, illetve az egyenlő hozamok esetére.

c) Az

$$\frac{1}{R}=\frac{\sum_{i=1}^{k} B_i v^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} H_i v^i}$$

hányadost **megtérülési időnek** nevezik. Azt szokták mondani, hogy a számításba vett időhorizont éveinek számát (jelen esetben n év) megszorozva $\frac{1}{R}$-rel, az egyszeri megtérülés idejét kapjuk években kifejezve. Pl. $n=12$ év esetén, ha $R=2$, akkor 6 év alatt térül meg a beruházott összeg. Ez még akkor sem pontos következtetés, ha egyszeri beruházás esetén az évi hozamok egyenlőek. Ugyanis általában nem igaz, hogy az első 6 év diszkontált hozamainak összege azonos a második hat év diszkontált hozamainak összegével. Minden esetben csak annyi igaz, hogy 12 év alatt kétszer térül meg a beruházott összeg.

d) A **belső megtérülési ráta** azt az r kamattényezőt jelöli, amelynek reciprokával, $v=\frac{1}{r}$-rel diszkontálva az éves hozamokat, a bevételek éppen fedezik a beruházott összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i v^i = B,$$

illetve k évig tartó beruházás esetén

$$\sum_{i=1}^{n} H_i v^i = \sum_{i=1}^{k} B_i v^{i-1}.$$

Ebből $n \geqq 5$ esetén a v-t még akkor sem tudjuk elemi úton kifejezni, ha az évi hozamok azonosak, vagyis ha a

$$H\frac{1-v^n}{i} = B$$

egyenletet kell megoldanunk. Erre az előző pontokban megismert közelítő eljárások szolgálnak.

Az elmondottakra nézzünk egy példát.

F.2.7. példa. Legyen a fejlesztési ráfordítás ezer Ft-ban
az első évben 300,
a második évben 300,
a harmadik évben 400.
Az évi hozam (a beruházás jövedelmezősége) legyen 200 eFt. A beruházás a negyedik év elején kezd üzemelni, az üzemelés ideje 15 év.

a) Mekkora a belső megtérülési ráta?

b) Tegyük fel, hogy a tőkét a bank fedezi. A tőke hány %-át kell évente a vállalatnak befizetnie, hogy az üzemelési idő (15 év) alatt a pénz a banknak visszatérüljön, ha 10%-os évi kamatlábbal számolunk?

c) A bank az üzemelési idő mindegyik évében a tőke 6,7%-át kéri és még az évi hozam 40%-át. Visszatérül-e a banknak a tőke, ha 10%-os évi kamatlábbal számolunk?

a) Az (F.2.10.) formulát alkalmazzuk három évig tartó beruházás esetére. A beruházás megkezdése és az üzemeltetési idő vége között 18 év telik el, így a ráfordítás felkamatolt értéke (ezer forintban számolva)

$$300 \cdot r^{18} + 300 \cdot r^{17} + 400 \cdot r^{16}.$$

A hozamok felkamatolt értékei:

$$200 \cdot r^{14} + 200 \cdot r^{13} + \ldots + 200 \cdot r + 200 = 200 \cdot \frac{r^{15}-1}{r-1}.$$

Így az egyenletünk:

$$300 \cdot r^{18} + 300 \cdot r^{17} + 400 \cdot r^{16} = 200 \frac{r^{15}-1}{r-1}.$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát $(r-1)$-gyel:

$$300r^{19} + 300r^{18} + 400r^{17} - 300r^{18} - 300r^{17} - 400r^{16} = 200r^{15} - 200.$$

Minden tagot hozzunk a bal oldalra, és osszuk el az egyenletet 100-zal. Ekkor az

$$f(r) = 3r^{19} + r^{17} - 4r^{16} - 2r^{15} + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk. Alkalmazzuk a 4. példa *d)* részében megismert Newton-féle iterációs módszert: képezni kell egy r_0-ból indulva az

$$r_1 = r_0 - \frac{f(r_0)}{f'(r_0)},$$

$$r_2 = r_1 - \frac{f(r_1)}{f'(r_1)}$$

$$\vdots$$

sorozatot, amely a megoldáshoz konvergál. Jelen esetben

$$f'(r) = 57r^{18} + 17r^{16} - 64r^{15} - 30r^{14}.$$

Legyen $r_0 = 1{,}12$, a 4.*d)* példában lévő BASIC programhoz hasonlót könnyen írhatunk.

Ennek segítségével az

$$r_1 = 1{,}136\ 754\ 212$$
$$r_2 = 1{,}133\ 038\ 492$$
$$r_3 = 1{,}132\ 779\ 981$$
$$r_4 = 1{,}132\ 778\ 788$$
$$r_5 = 1{,}132\ 778\ 787$$
$$r_6 = 1{,}132\ 778\ 787$$

sorozatot kapjuk, amelyből r három tizedesre kerekített értéke 1,133 (ez 13,3%-nak felel meg).
Megjegyezzük, hogy ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha nem az üzemelési időszak végére kamatoltatjuk fel a megfelelő összegeket, hanem a beruházás kezdetére diszkontáljuk. Ezzel a módszerrel oldjuk meg a példa *b)* részét.

b) A bank által kifizetett összegeket a beruházás elejére diszkontálva,

$$300 + 300\frac{1}{1{,}1} + 400\frac{1}{1{,}1^2} = 903{,}305\ 78 \text{ eFt-ot}$$

kapunk.
Ha a vállalat minden üzemelési évben a Ft-ot fizet be, akkor a befizetett összegek diszkontált értéke:

$$\frac{a}{1{,}1^4} + \frac{a}{1{,}1^5} + \ldots + \frac{a}{1{,}1^{18}} = \frac{a}{1{,}1^4}\,\frac{\dfrac{1}{1{,}1^{15}} - 1}{\dfrac{1}{1{,}1} - 1} = a \cdot 5{,}714\ 560.$$

Ebből $a = 158\ 070{,}92$ Ft, amely az évi hozam 79%-a. Megjegyezzük, hogy amennyiben a kamattényező magasabb lenne a belső megtérülési rátánál, akkor az évi hozam nem fedezi a visszafizetendő részletet.

c) A kölcsönzött 1 millió Ft 6,7%-a 67 000 Ft. Az évi hozam 40%-a 80 000 Ft. Így a vállalat évi 147 000 Ft-ot fizet a banknak. A *b)* részben láttuk, hogy 10%-os kamatláb mellett a bank akkor kapja vissza a pénzét, ha az évente befizetett összeg 158 070,92 Ft.