$SLAM$ ניווט מווידאו (67604) | תרגיל 3

צליל עובדיה, שלומי אדלמן

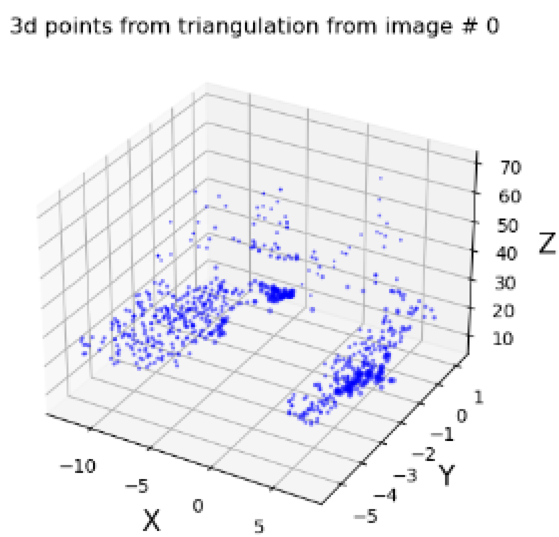
15 במאי 2023

לינק לתיקייה הרלוונטית בגיט:

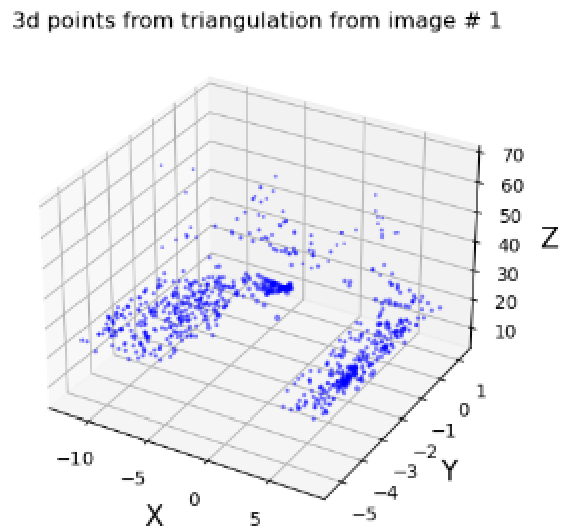
$https://github.com/TzlilOvadia/SLAM$

1 שאלה 1

ענן הנקודות עבור פריים 0:



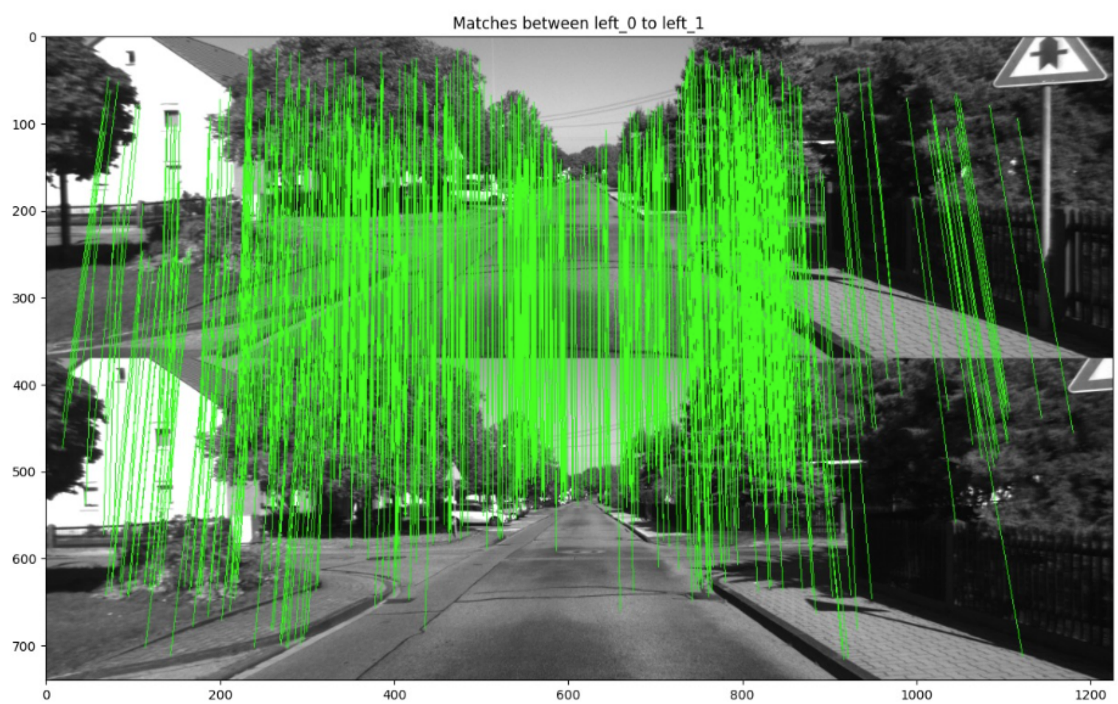
ועבור פריים 1:



הנקודות עברו סינון להשמטת ערכים קיצוניים. הותרנו את הנקודות הנמצאות בין האחוזונים $90 - 10$, בקנה מידה מותאם.

2 שאלה 2

אמנם לא התבקשנו מפורשות, אך לשם השלמות נציג את המאצ'ים בין $left0$ (למטה) ל$left1$ (למעלה):



3 שאלה 3

3.1 סעיף א

נניח שיש לנו את המטריצה $[R \mid t]$, המטריצה החיצונית של המצלמה $left_1$. זו מטריצה שמעבירה נקודות מהעולם (במקרה הזה, זהו העולם של המצלמה $left_0$) למערכת הקוארדינטות של $left_1$. לכן, הטרנפורמציה T שתעשה את ההעברה המבוקשת היא פשוט הכפלה של נקודה הנתונה בקוארדינטות הומוגניות במערכת של $left_0$, משמאל, במטריצה $[R \mid t]$. או באופן שקול, בהינתן נקודה x תלת מימדית בעולם של $left_0$, כדי להעבירה לעולם של $left_1$ נבצע $Rx + t$.
להמחשה, נניח שאנחנו מתעניינים במיקום של המצלמה של $left_0$ בעולם של $left_1$. אז אנחנו יודעים ש$left_0$ נמצאת בעולם המקורי ב$(0,0,0,1)$, ולכן נקבל שמיקומה בעולם החדש הוא:

$$R0 + t = t$$

3.2 סעיף ב

בהינתן מטריצה חיצונית של מצלמה A, $[I \mid 0]$, וטרנספורמציות $T_{A\to B}(x) = R_1x + t_1$ ו$T_{B\to C}(x) = R_2x + t_2$, מתקיים:

$$\begin{aligned} T_{A\to C}(x) &= T_{B\to C}(T_{A\to B}(x)) = T_{B\to C}(R_1x + t_1) \\ &= R_2(R_1x + t_1) + t_2 = R_2R_1x + (R_2t_1 + t_2) \end{aligned}$$

כלומר, המטריצה החיצונית של C (ביחס לעולם הגלובלי של A, שבמקרה זה זהה לחלוטין לעולם הגלובלי, שכן נתון שהמטריצה של A היא $[I \mid 0]$) היא:

$$[R_2R_1 \mid R_2t_1 + t_2]$$

3.3 סעיף ג

נתונה מצלמה עם מטריצה חיצונית $[R \mid t]$. מה מיקומה במערכת הקוארדינטות הגלובלית? נסמן את מיקום המצלמה במערכת הגלובלית בקוארדינטות הומוגניות ע"י $(c, 1)$, כאשר c הוא וקטור תלת מימדי.
אנחנו יודעים שבמערכת המקומית של המצלמה הנתונה, המצלמה נמצאת ב$(0,0,0)$. ולכן למעשה צריך להתקיים:

$$0 = [R \mid t]\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} = Rc + t$$

נעביר אגפים ונכפיל בהופכי (R הפיכה כמטריצת סיבוב, ואנחנו יודעים גם בדיוק מהו ההופכית שלה):

$$c = -R^Tt$$

כלומר מיקום המצלמה במערכת הגלובלית הוא $-R^Tt$.

3.4 סעיף ד

נסביר את דרך החישוב, המסתמכת על הסעיף הקודם:

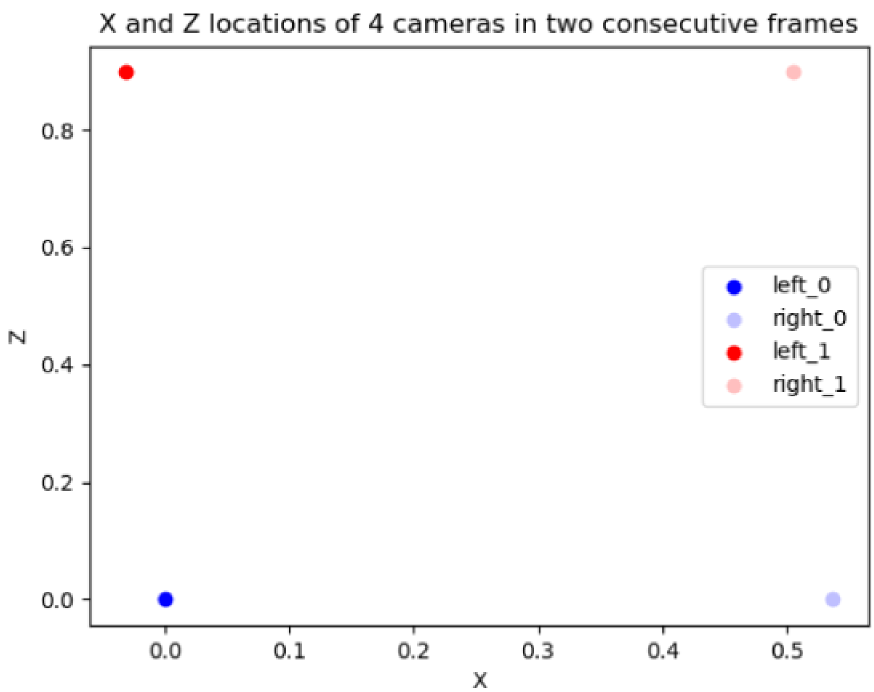
נניח ש$left_0$ נמצאת ב$(0,0,0)$.

אנחנו יודעים ש$right_0$ נבדלת ממנה בהזזה בלבד, או במילים אחרות, המטריצה החיצונית של $right_0$ היא $[I \mid s]$ עבור s נתון. לאור זאת ומהנוסחה בסעיף הקודם אנחנו יודעים ש$right_0$ ממוקמת ב$-s$.

באשר ל$left_1$, חישבנו על ידי PnP את המטריצה $[R \mid t]$ שמעבירה מהמערכת של $left_0$ למערכת של $left_1$, ולכן לפי הנוסחה הנ״ל המצלמה של $left_1$ נמצאת ב$-R^Tt$.

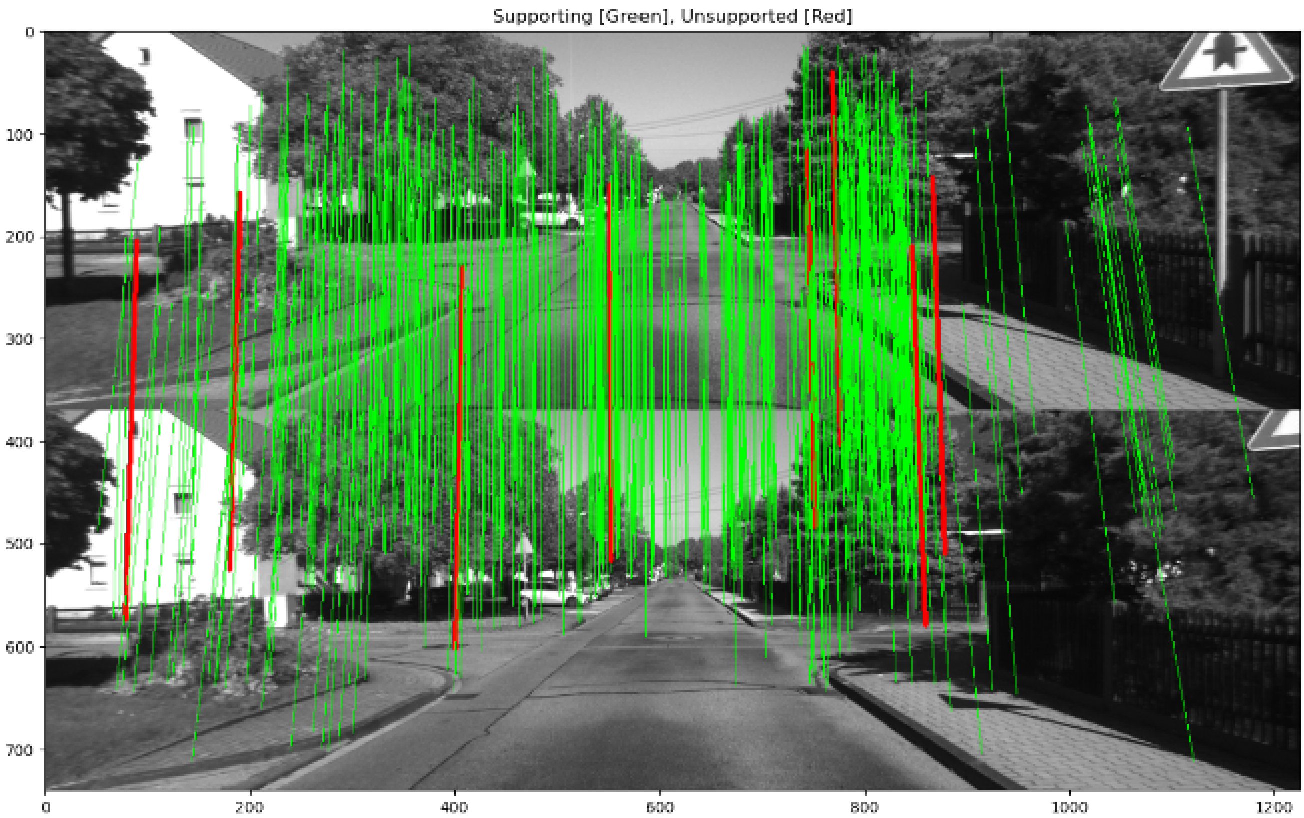
באשר ל$right_1$, בדיוק כמו בפריים הראשון, היא תמוקם ב$-R^Tt-s$.

וזהו ה$plot$ המתקבל עבור מיקומי 4 המצלמות בשני הפריימים הראשונים:



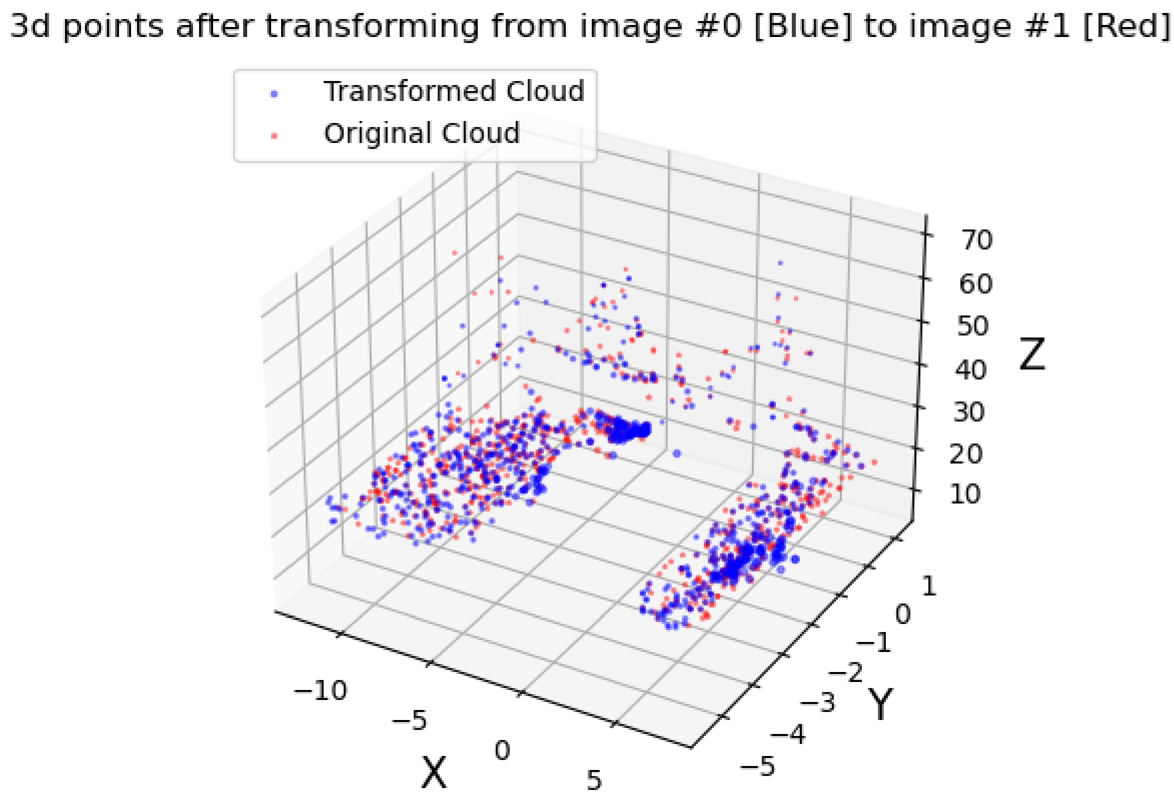
4 שאלה 4

להלן שתי התמונות השמאליות הראשונות (התחתונה מפריים 0 והעליונה מפריים 1), עם המאצ׳ים התומכים והלא תומכים ביניהן:

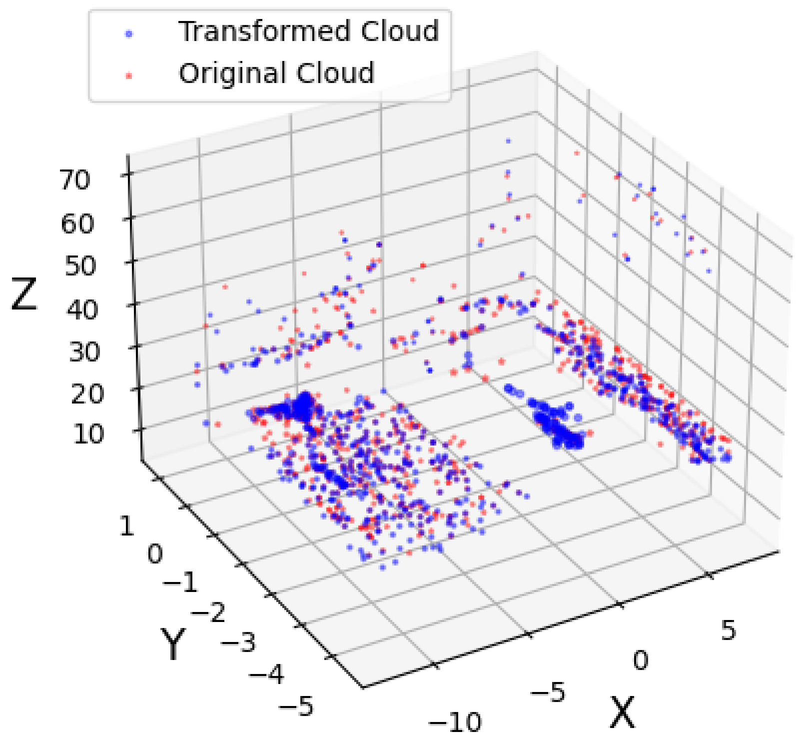


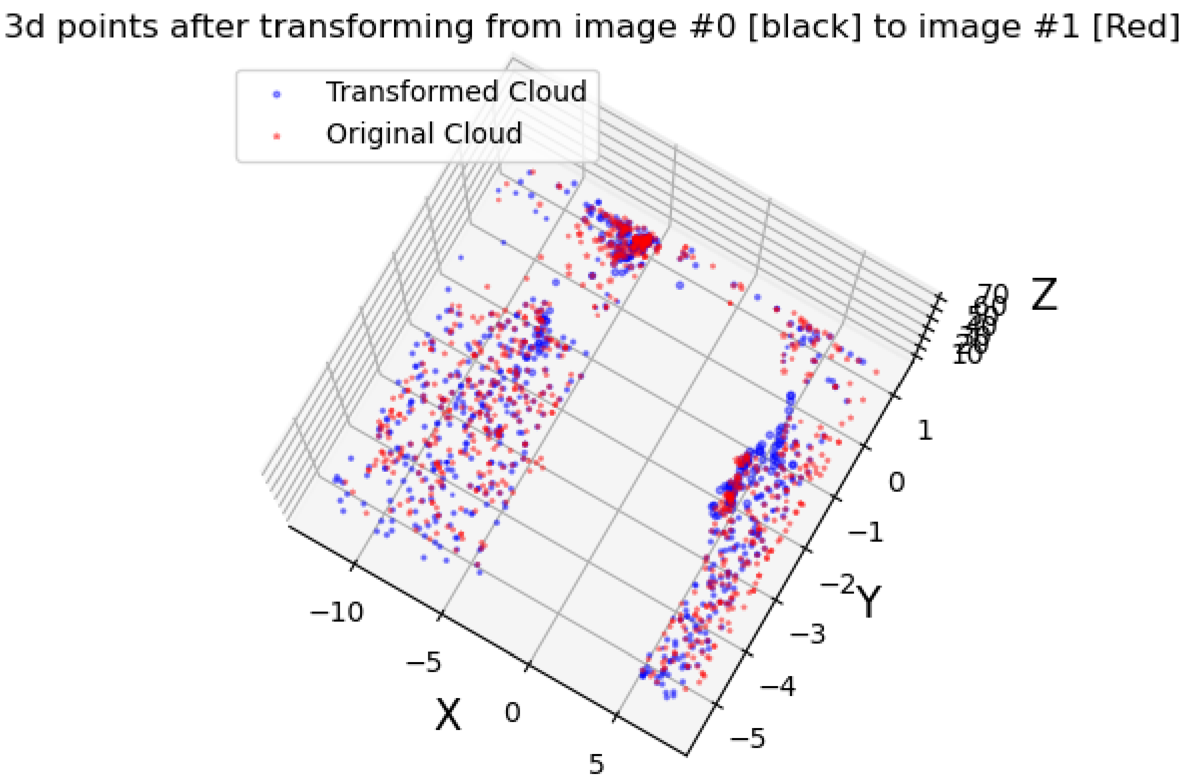
5 שאלה 5

נציג את ענני הנקודות המתקבלים מכמה זוויות, כדי להקנות תחושת עומק טובה יותר.


3d points after transforming from image #0 [Blue] to image #1 [Red]
Transformed Cloud
Original Cloud
70
60
50
40
30
20
10
Z
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
Y
−10
−5
0
5
X

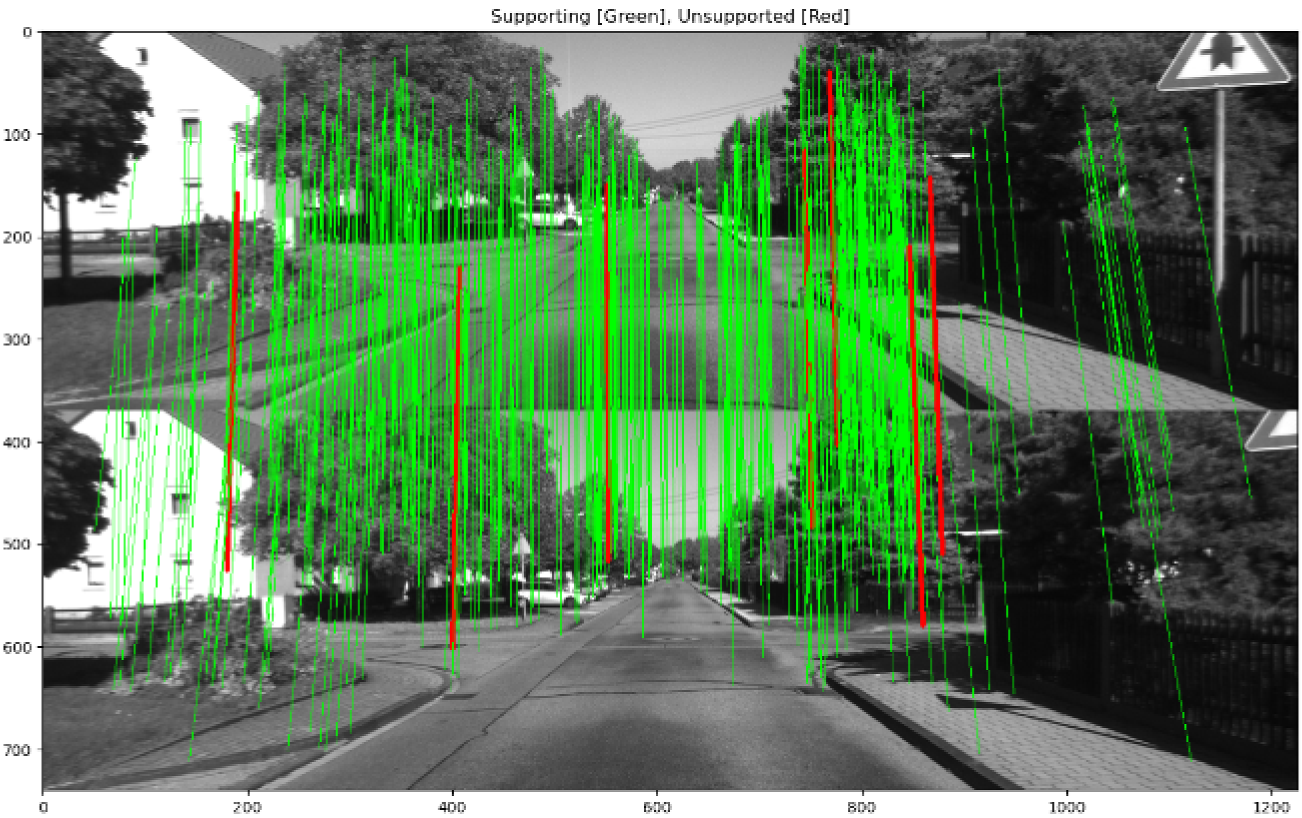
3d points after transforming from image #0 [Blue] to image #1 [Red]





נזכיר שכמקודם, גם כאן הנקודות עברו $trimming$ וכדומה.

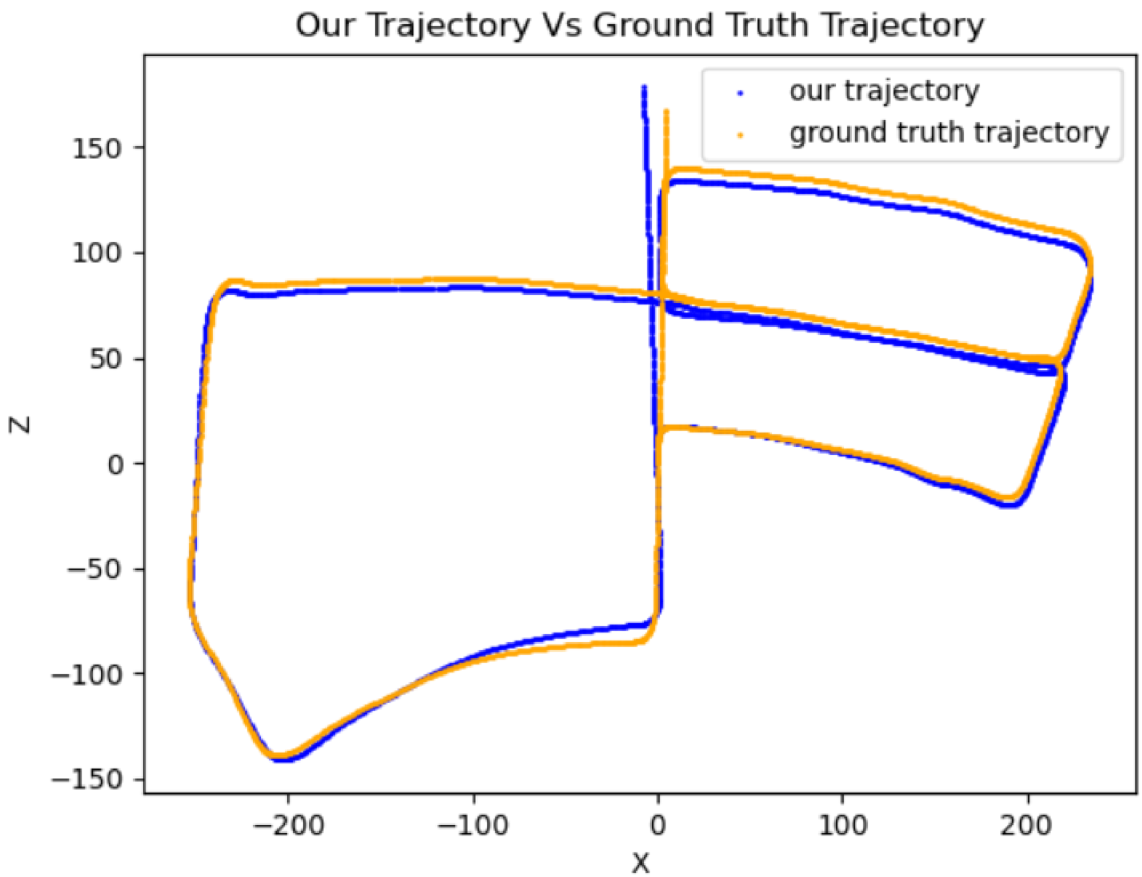
באשר לתומכים ולמתנגדים לתוצאה שנתן ה$ransac$, להלן הפלוט:



6 שאלה 6

הרצת האלגוריתם על כלל הפריימים לקחה 557 שניות. נציין שהשתמשנו במספר אדפטיבי של איטרציות עבור לולאת הרנסק, אם כי חסמנו מספר זה מלמעלה ע"י 100 איטרציות.

להלן מסלול העקיבה אחר מיקום המצלמה לפי תוצאת האלגוריתם שלנו, ולפי ה$ground\ truth$:


Our Trajectory Vs Ground Truth Trajectory
our trajectory
ground truth trajectory
150
100
50
0
−50
−100
−150
Z
−200
−100
0
100
200
X

7 שאלה 7

7.1 סעיף 1

סעיף 3.7.1

$$x \sim N(\mu_x, \Sigma_x)$$
$$y = Ax + b$$

נוכיח את השוויונות הבאים:

$$\mu_y = A\mu_x + b$$
$$\Sigma_y = A\Sigma_x A^T$$

נתחיל בחישוב μ_y:

$$\mathbb{E}[y] = \mathbb{E}[Ax+b] \overset{linearity\ of\ \mathbb{E}}{=} \mathbb{E}[Ax] + \mathbb{E}[b] = A \cdot \mathbb{E}[x] + \mathbb{E}[b] \overset{\mathbb{E}[x] \equiv \mu_x}{=} A \cdot \mu_x + b$$

ואכן, קיבלנו את הביטוי המתבקש עבור μ_y:

$$\mu_y = A\mu_x + b$$

כעת, נעבור לחישוב Σ_y:

$$\Sigma_y = Cov[y] = Cov[Ax+b] =$$

$$\mathbb{E}[(y - \mu_y)(y - \mu_y)^T] = \mathbb{E}\left[\left(Ax + b - (A\mu_x + b)\right) \cdot \left(Ax + b - (A\mu_x + b)\right)^T\right] =$$
$$\mathbb{E}[(Ax - A\mu_x) \cdot (Ax - A\mu_x)^T] = \mathbb{E}[A(x-\mu_x) \cdot (x-\mu_x)^T A^T] = A \cdot \mathbb{E}[(x-\mu_x) \cdot (x-\mu_x)^T] A^T =$$

כעת, נשים לב כי הביטוי האחרון מקיים:

$$\mathbb{E}[(x-\mu_x) \cdot (x-\mu_x)^T] \equiv Cov(x) \equiv \Sigma_x$$

ומכאן:

$$A \cdot \mathbb{E}[(x-\mu_x) \cdot (x-\mu_x)^T] A^T = \cdots = A \cdot \Sigma_x \cdot A^T$$

כנדרש

■

7.2 סעיף 2

כאמור בנתוני השאלה, הקשר בין x לבין y נתון על ידי:

$$y = Ax + b$$

נסמן אם כן

$$g(x) = Ax + b$$

מאחר ונתון לנו כי A הפיכה, מתקיים כי גם g הפיכה, ובאופן מפורש:

$$g^{-1}\left(y\right) = A^{-1}y - A^{-1}b$$

אכן, כדי לוודא זאת נראה כי מתקיים:

$$g^{-1}\left(g\left(x\right)\right) = g^{-1}\left(Ax + b\right) = A^{-1}\left(Ax + b\right) - A^{-1}b = x$$

כעת, נוכל להשתמש בנוסחה למעבר משתנה בשביל לחשב את פונקציית הצפיפות של y, f_y:

$$\begin{aligned} f_y\left(y\right) &= f_x\left(g^{-1}\left(y\right)\right)\left|J_{g^{-1}}\right| \\ &= f_x\left(A^{-1}y - A^{-1}b\right)\left|A^{-1}\right| \\ &= \frac{\left|A^{-1}\right|}{Z}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(A^{-1}y - A^{-1}b - \mu_x\right)^T\Sigma_x^{-1}\left(A^{-1}y - A^{-1}b - \mu_x\right)} \\ &= \frac{\left|A^{-1}\right|}{Z}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(y - b - A\mu_x\right)^T A^{-T}\Sigma_x^{-1}A^{-1}\left(y - b - A\mu_x\right)} \end{aligned}$$

כאשר Z קבוע הנרמול של הגאוסיאן. השתמשנו בכך שהנגזרת של $A^{-1}y - A^{-1}b$ היא A^{-1}, ובמעבר האחרון סידרנו את הביטוי על ידי הוצאת A^{-1} מהביטויים שבסוגריים ושימוש בחוקי שחלוף.
כעת, נבחין כי קיבלנו בדיוק נוסחה לצפיפות של משתנה נורמלי עם תוחלת $A\mu_x + b$ ועם מטריצת שונות משותפת $\left(A^{-T}\Sigma_x^{-1}A^{-1}\right)^{-1} = A\Sigma_x A^T$.
חדי העין יבחינו כי לא הראינו שהקבוע שלפני האקספוננט זהה לזה שמופיע בנוסחה לצפיפות של משתנה נורמלי. ואולם, מאחר ואנחנו יודעים כי f_y היא פונקציית צפיפות חוקית (מנוסחת מעבר המשתנה שבה השתמשנו), וככזו היא נסכמת ל1, הקבוע המתאים נקבע ביחידות: כלומר, קיים קבוע אחד ויחיד, בדיוק זה המופיע בנוסחת ההתפלגות הנורמלית עבור y (עם השונות והתוחלת כפי שתיארנו), שיגרום לצפיפות להיסכם ל1 כנדרש. ולכן למעשה ממש הראינו שהצפיפות של y היא צפיפות של משתנה נורמלי, ולכן y מתפלג נורמלית כנדרש.