דף סיכום בחינה

מספר שאלה	ניקוד מירבי	ציון
1	20.00	16.00
2.1	4.00	4.00
2.2	4.00	4.00
2.3	4.00	4.00
2.4	4.00	4.00
2.5	4.00	4.00
3.1	2.00	1.00
3.2	3.00	3.00
3.3	3.00	3.00
3.4	3.00	3.00
3.5	3.00	3.00
3.6	3.00	3.00
3.7	3.00	3.00
4.1	4.00	2.00
4.2	4.00	2.00
4.3	4.00	2.00
4.4	4.00	2.00
4.5	4.00	2.00
5.1	10.00	10.00
5.2	10.00	10.00

ציון בחינה סופי : 85.00

הבחינה הבדוקה בעמודים הבאים

מבני נתונים - תרגיל 1

צור שלום

ענבר בן חיים

שאלה 1 - היררכיית סדרי גודל

שלב ראשון :

סדר גודל אסימפטוטי (מהקטן לגדול)	הפונקציות
$\Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$	$f_{15}(n)=\frac{1}{3n^2}$
$\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$f_6(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}$
$\Theta(1)$	$f_1(n)=2022, f_8(n)=2^{64}$
$\Theta(\log(n))$	$f_2(n)=\log(n^8), f_{12}(n)=\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$
$\Theta(n)$	$f_{11}(n)=\log(2^n\cdot n^2), f_{14}(n)=\frac{2n}{7}$
$\Theta(n^2)$	$f_7(n)=6^{\log_{\sqrt{6}}(n)}$
$\Theta(n^3)$	$f_4(n)=3n^3+2\log(n)+1$
$\Theta\left(2^{\sqrt{n}}\right)$	$f_3(n)=2^{\sqrt{n}}$
$\Theta(4^n)$	$f_{13}(n)=4^n$
$\Theta(n^n)$	$f_{10}(n)=n^n$
$\Theta\left(4^{(2^n)}\right)$	$f_5(n)=4^{(2^n)}$
$\Theta\left(2^{(4^n)}\right)$	$f_9(n)=2^{(4^n)}$

...

1. נאמר ש- $f_1(n)=2022=\Theta(1)$ **אם קיימים** $C_1,C_2>0$ **ו-** $n_0>0$ **המקיימים** $0\le C_1\cdot 1\le 2022\le C_2\cdot 1$ **לכל** $n\ge n_0$.

נראה כי עבור : $C_1=C_2=2022$ **ו-** $n_0=1$**, מתקיים אי-השיוויון לכל** $n\ge 1$**. לכן מתקיים** $f_1(n)=2022=\Theta(1)$.

...

2. נאמר ש- $f_2(n)=\log(n^8)=\Theta(\log(n))$ **אם קיימים** $C_1,C_2>0$ **ו-** $n_0>0$ **המקיימים** $0\le C_1\cdot\log(n)\le\log(n^8)\le C_2\cdot\log(n)$ **לכל** $n\ge n_0$.

$$0\le C_1\cdot\log(n)\le\log(n^8)\le C_2\cdot\log(n)$$

$$0\le C_1\cdot\log(n)\le 8\cdot\log(n)\le C_2\cdot\log(n)$$

$$0\le C_1\le 8\le C_2$$

נראה כי עבור : $C_1 = C_2 = 8$ ו־ $n_0 = 2$, מתקיים אי־השיוויון לכל $n \geq 2$. לכן מתקיים $f_2(n) = \log(n^8) = \Theta(\log(n))$.

...

3. נאמר ש־ $f_3(n) = 2^{\sqrt{n}} = \Theta(2^{\sqrt{n}})$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \leq C_1 \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq 2^{\sqrt{n}} \leq C_2 \cdot 2^{\sqrt{n}}$ לכל $n \geq n_0$.

$f_3(n) = 2^{\sqrt{n}} = \Theta(2^{\sqrt{n}})$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

4. נאמר ש־ $f_4(n) = 3n^3 + 2\log(n) + 1 = \Theta(n^3)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים

$0 \leq C_1 \cdot n^3 \leq 3n^3 + 2\log(n) + 1 \leq C_2 \cdot n^3$ לכל $n \geq n_0$.

$$0 \leq C_1 \cdot n^3 \leq 3n^3 + 2\log(n) + 1 \leq C_2 \cdot n^3$$

$$0 \leq C_1 \leq 3 + \frac{2\log(n)}{n^3} + \frac{1}{n^3} \leq C_2$$

נראה כי עבור : $C_1 = 1, C_2 = 7$ ו־ $n_0 = 2$, מתקיים אי־השיוויון לכל $n \geq 2$. לכן מתקיים $f_4(n) = 3n^3 + 2\log(n) + 1 = \Theta(n^3)$.

...

5. נאמר ש־ $f_5(n) = 4^{(2^n)} = \Theta(4^{(2^n)})$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \leq C_1 \cdot 4^{(2^n)} \leq 4^{(2^n)} \leq C_2 \cdot 4^{(2^n)}$ לכל $n \geq n_0$.

$f_5(n) = 4^{(2^n)} = \Theta(4^{(2^n)})$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

6. נאמר ש־ $f_6(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \leq C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq C_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n \geq n_0$.

$f_6(n) = \frac{1}{\sqrt{n}} = \Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

7. נאמר ש־ $f_7(n) = 6^{\log_{\sqrt{6}}(n)} = \Theta(n^2)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \leq C_1 \cdot n^2 \leq 6^{\log_{\sqrt{6}}(n)} \leq C_2 \cdot n^2$ לכל $n \geq n_0$.

נשים לב :

$$f_7(n) = 6^{\log_{\sqrt{6}}(n)} =$$

$$n^{\log_{\sqrt{6}}(6)} =$$

$$n^2$$

כלומר, $f_7(n) = 6^{\log_{\sqrt{6}}(n)} = n^2 = \Theta(n^2)$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

8. נאמר ש־ $f_8(n) = 2^{64} = \Theta(1)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot 1 \le 2^{64} \le C_2 \cdot 1$ לכל $n \ge n_0$.
נראה כי עבור : $C_1 = C_2 = 2^{64}$ ו־ $n_0 = 1$, מתקיים אי־השיוויון לכל $n \ge 1$. לכן מתקיים $f_8(n) = 2^{64} = \Theta(1)$.

...

9. נאמר ש־ $f_9(n) = 2^{(4^n)} = \Theta\left(2^{(4^n)}\right)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot 2^{(4^n)} \le 2^{(4^n)} \le C_2 \cdot 2^{(4^n)}$ לכל $n \ge n_0$.

$f_9(n) = 2^{(4^n)} = \Theta\left(2^{(4^n)}\right)$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

10. נאמר ש־ $f_{10}(n) = n^n = \Theta(n^n)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot n^n \le n^n \le C_2 \cdot n^n$ לכל $n \ge n_0$.

$f_{10}(n) = n^n = \Theta(n^n)$ מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

11. נאמר ש־ $f_{11}(n) = \log(2^n \cdot n^2) = \Theta(n)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot n \le \log(2^n \cdot n^2) \le C_2 \cdot n$ לכל $n \ge n_0$.

$$f_{11}(n) = \log(2^n \cdot n^2) =$$

$$f_{11}(n) = \log(2^n) + \log(n^2) =$$

$$f_{11}(n) = n \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(n) =$$

$$f_{11}(n) = n + 2 \cdot \log(n)$$

נמצא $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot n \le n + 2 \cdot \log(n) \le C_2 \cdot n$ לכל $n \ge n_0$.

$$0 \le C_1 \cdot n \le n + 2 \cdot \log(n) \le C_2 \cdot n$$

-2
(1)

$$0 \le C_1 \le 1 + \frac{2 \cdot \log(n)}{n} \le C_2$$

-1.2 חסר פירוט או פירוט שגוי לגבי השלב הראשון המבוקש בעבודה - כלומר, אין פירוט למה חלק מהפונקציות נמצאות במקומן בטבלה / חסרים קבועים בהוכחת סדר הגודל / קיימים ניתוחים שאינם מנומקים היטב או לא ברורים (ראו דגש ראשון).

נראה שעבור $C_1 = C_2 = 2$ ו־ $n_0 = 2$, מתקיים אי־השיוויון לכל $n \ge 2$. לכן מתקיים $f_{11}(n) = \log(2^n \cdot n^2) = n + 2 \cdot \log(n) = \Theta(n)$.

...

12. נאמר ש־ $f_{12}(n) = \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = \Theta(\log(n))$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot n \le \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) \le C_2 \cdot n$ לכל $n \ge n_0$.

$$f_{12}(n) = \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$f_{12}(n) = \frac{1}{2}\log(n)$$

נמצא $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot \log(n) \le \frac{1}{2}\log(n) \le C_2 \cdot \log(n)$ **לכל** $n \ge n_0$.

$$0 \le C_1 \cdot \log(n) \le \frac{1}{2}\log(n) \le C_2 \cdot \log(n)$$

$$0 \le C_1 \le \frac{1}{2} \le C_2$$

נראה שעבור $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ **ו־** $n_0 = 2$**, מתקיים אי־השיוויון לכל** $n \ge 2$. **לכן מתקיים** $f_{12}(n) = \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(n) = \Theta(\log(n))$.

...

13. נאמר ש־ $f_{13}(n) = 4^n = \Theta(4^n)$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot 4^n \le 4^n \le C_2 \cdot 4^n$ **לכל** $n \ge n_0$.

$f_{13}(n) = 4^n = \Theta(4^n)$ **מתקיים בהכרח מתכונת הרפלקסיביות** ($C_1 = C_2 = n_0 = 1$).

...

14. נאמר ש־ $f_{14}(n) = \frac{2n}{7} = \Theta(n)$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot n \le \frac{2n}{7} \le C_2 \cdot n$ **לכל** $n \ge n_0$.

נראה כי עבור : $C_1 = C_2 = \frac{2}{7}$ **ו־** $n_0 = 1$**, מתקיים אי־השיוויון לכל** $n \ge 1$. **לכן מתקיים** $f_{14}(n) = \frac{2n}{7} = \Theta(n)$.

...

15. נאמר ש־ $f_{15}(n) = \frac{1}{3n^2} = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{3n^2} \le C_2 \cdot \frac{1}{n^2}$ **לכל** $n \ge n_0$.

נראה כי עבור : $C_1 = C_2 = \frac{1}{3}$ **ו־** $n_0 = 1$**, מתקיים אי־השיוויון לכל** $n \ge 1$. **לכן מתקיים** $f_{15}(n) = \frac{1}{3n^2} = \Theta\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

...

שלב שני :

נוכיח $f_i(n) = \Theta(f_k(n))$**, ומתכונת הסימטריות נובע שמתקיים גם** $f_k(n) = \Theta(f_i(n))$.

1. $f_1(n) = 2022, f_8(n) = 2^{64}$

הוכחנו ש־ $f_1(n) = \Theta(1)$ **ו־** $f_8(n) = \Theta(1)$**, לכן מתכונת הטרנזיטיביות נובע מכך ש־** $f_1(n) = \Theta(f_8(n))$.

...

2. $f_2(n) = \log(n^8), f_{12}(n) = \log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$

הוכחנו ש־ $f_{12}(n) = \Theta(\log(n))$ **ו־** $f_2(n) = \Theta(\log(n))$**, לכן מתכונת הטרנזיטיביות נובע מכך ש־** $f_2(n) = \Theta(f_{12}(n))$.

...

3. $f_{11}(n) = \log(2^n \cdot n^2), f_{14}(n) = \frac{2n}{7}$

הוכחנו ש־ $f_{14}(n) = \Theta(n)$ **ו־** $f_{11}(n) = \Theta(n)$**, לכן מתכונת הטרנזיטיביות נובע מכך ש־** $f_{11}(n) = \Theta(f_{14}(n))$.

...

שלב שלישי :

1. נאמר ש־ $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **אם קיימים** $C > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **כך שמתקיים** $0 \le \frac{1}{n^2} \le C \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ **לכל** $n \ge n_0$.

נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $\frac{1}{n^2}=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

...

2. נאמר ש־ $\frac{1}{\sqrt{n}}=O(1)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\leq C\cdot 1$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $\frac{1}{\sqrt{n}}=O(1)$.

...

3. נאמר ש־ $1=O(\log(n))$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq 1\leq C\cdot\log(n)$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=2$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 2$. לכן $1=O(\log(n))$.

...

4. נאמר ש־ $\log(n)=O(n)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq\log(n)\leq C\cdot n$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $\log(n)=O(n)$.

...

5. נאמר ש־ $n=O(n^2)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq n\leq C\cdot n^2$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $n=O(n^2)$.

...

6. נאמר ש־ $n^2=O(n^3)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq n^2\leq C\cdot n^3$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $n^2=O(n^3)$.

...

7. נאמר ש־ $n^3=O\left(2^{\sqrt{n}}\right)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq n^3\leq C\cdot 2^{\sqrt{n}}$ לכל $n\geq n_0$.

נציב $n_0=4$ ונפתור עבור C :

-2

(1)

-1.7 חסר פירוט או פירוט שגוי לגבי השלב השלישי - עבור חלק מהשורות לא ניתן הסבר מספק או לא פורט כלל (ראו דגש שלישי / חלק מהניתוחים שגויים.

$$0\leq 4^3\leq C\cdot 2^{\sqrt{4}}$$

$$0\leq\left(2^2\right)^3\leq C\cdot 2^2$$

$$0\leq\left(2^2\right)^2\leq C$$

$$0\leq 16\leq C$$

נראה שעבור $C=16$ ו־ $n_0=4$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 10$. לכן $n^3=O\left(2^{\sqrt{n}}\right)$.

...

8. נאמר ש־ $2^{\sqrt{n}}=O(4^n)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq 2^{\sqrt{n}}\leq C\cdot 4^n$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=1$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 1$. לכן $2^{\sqrt{n}}=O(4^n)$.

...

9. נאמר ש־ $4^n=O(n^n)$ אם קיימים $C>0$ ו־ $n_0>0$ כך שמתקיים $0\leq 4^n\leq C\cdot n^n$ לכל $n\geq n_0$.
נראה שעבור $C=1$ ו־ $n_0=4$ מתקיים אי־השוויון לכל $n\geq 4$. לכן $4^n=O(n^n)$.

...

10. נאמר ש־ $n^n = O\left(4^{(2^n)}\right)$ **אם קיימים** $C > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **כך שמתקיים** $0 \le n^n \le C \cdot 4^{(2^n)}$ **לכל** $n \ge n_0$.

נציב $n_0 = 1$ **ונפתור עבור** C **:**

$$0 \le 1^1 \le C \cdot 4^{\left(2^1\right)}$$

$$0 \le 1 \le C \cdot 16$$

נראה שעבור $C = 1$ **ו־** $n_0 = 1$ **מתקיים אי־השוויון לכל** $n \ge 1$. **לכן** $n^n = O\left(4^{(2^n)}\right)$.

...

11. נאמר ש־ $4^{(2^n)} = O\left(2^{(4^n)}\right)$ **אם קיימים** $C > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **כך שמתקיים** $0 \le 4^{(2^n)} \le C \cdot 2^{(4^n)}$ **לכל** $n \ge n_0$.

נציב $n_0 = 1$ **ונפתור עבור** C **:**

$$0 \le 4^{\left(2^1\right)} \le C \cdot 2^{\left(4^1\right)}$$

$$0 \le 16 \le C \cdot 16$$

נראה שעבור $C = 1$ **ו־** $n_0 = 1$ **מתקיים אי־השוויון לכל** $n \ge 1$. **לכן** $4^{(2^n)} = O\left(2^{(4^n)}\right)$.

...

שאלה 2 - תכונות של חסמים אסימפטוטיים

א. נניח שמתקיים $f(n) = \Theta(g(n))$ **ו־** $g(n) = \Theta(h(n))$, **נוכיח שמתקיים** $f(n) = \Theta(h(n))$.

$f(n) = \Theta(g(n))$, **אזי קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot g(n) \le f(n) \le C_2 \cdot g(n)$ **לכל** $n \ge n_0$.

$g(n) = \Theta(h(n))$, **אזי קיימים** $K_1, K_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le K_1 \cdot h(n) \le g(n) \le K_2 \cdot h(n)$ **לכל** $n \ge n_0$.

עבור $C_1 \cdot g(n) \le f(n)$ **נקבל את** $g(n) \le \frac{f(n)}{C_1}$. +4

כך שעבור $g(n) \le \frac{f(n)}{C_1}$ **ו־** $K_1 \cdot h(n) \le g(n)$ **נקבל** $K_1 \cdot h(n) \le \frac{f(n)}{C_1}$. **כלומר,** $C_1 \cdot K_1 \cdot h(n) \le f(n)$. (2.1)

עבור $f(n) \le C_2 \cdot g(n)$ **נקבל את** $\frac{f(n)}{C_2} \le g(n)$.

כך שעבור $\frac{f(n)}{C_2} \le g(n)$ **ו־** $g(n) \le K_2 \cdot h(n)$ **נקבל** $\frac{f(n)}{C_2} \le K_2 \cdot h(n)$. **כלומר,** $f(n) \le C_2 \cdot K_2 \cdot h(n)$. יפה

משילוב אי־שיוויונות אלו נקבל : $0 \le C_1 \cdot K_1 \cdot h(n) \le f(n) \le C_2 \cdot K_2 \cdot h(n)$. **ובכך נקבל את** $f(n) = \Theta(h(n))$.

...

ב. a. **נאמר ש־** $f(n) = \Theta(f(n))$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le C_1 \cdot f(n) \le f(n) \le C_2 \cdot f(n)$ **לכל** $n \ge n_0$.

נראה כי עבור $n_0 = C_1 = C_2 = 1$, **האי־שיוויון מתקיים. לכן** $f(n) = \Theta(f(n))$.

...

b. **נאמר ש־** $f(n) = \Omega(f(n))$ **אם קיימים** $c > 0$ **ו־** $n_0 > 0$ **המקיימים** $0 \le c \cdot f(n) \le f(n)$ **לכל** $n \ge n_0$.

נראה כי עבור $n_0 = c = 1$, **האי־שיוויון מתקיים. לכן** $f(n) = \Omega(f(n))$.

...

+4

(2.2)

יפה

+4
(2.3)

ג. נאמר ש־ $f(n) = O(f(n))$ אם קיימים $c > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le f(n) \le c \cdot f(n)$ לכל $n \ge n_0$.
יפה
נראה כי עבור $n_0 = c = 1$, האי־שיוויון מתקיים. לכן $f(n) = O(f(n))$.

...

ג. $\Leftarrow$: נניח שמתקיים $f(n) = \Theta(g(n))$, נוכיח שמתקיים $g(n) = \Theta(f(n))$.
$f(n) = \Theta(g(n))$, אזי קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot g(n) \le f(n) \le C_2 \cdot g(n)$ לכל $n \ge n_0$.
עבור $C_1 \cdot g(n) \le f(n)$ נראה ש־ $g(n) \le \frac{f(n)}{C_1}$.
עבור $f(n) \le C_2 \cdot g(n)$ נראה ש־ $g(n) \ge \frac{f(n)}{C_2}$.
משילוב אי־שיוויונות אלו נקבל : $0 \le \frac{f(n)}{C_2} \le g(n) \le \frac{f(n)}{C_1}$. כלומר, $g(n) = \Theta(f(n))$.
$\Rightarrow$: נניח שמתקיים $g(n) = \Theta(f(n))$, נוכיח שמתקיים $f(n) = \Theta(g(n))$.
$g(n) = \Theta(f(n))$, אזי קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot f(n) \le g(n) \le C_2 \cdot f(n)$ לכל $n \ge n_0$.
עבור $C_1 \cdot f(n) \le g(n)$ נראה ש־ $f(n) \le \frac{g(n)}{C_1}$.
עבור $g(n) \le C_2 \cdot f(n)$ נראה ש־ $f(n) \ge \frac{g(n)}{C_2}$.
משילוב אי־שיוויונות אלו נקבל : $0 \le \frac{g(n)}{C_2} \le f(n) \le \frac{g(n)}{C_1}$. כלומר, $f(n) = \Theta(g(n))$.

...

ד. $\Leftarrow$: נניח שמתקיים $f(n) = O(g(n))$, נוכיח שמתקיים $g(n) = \Omega(f(n))$.
$f(n) = O(g(n))$, אזי קיימים $c > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le f(n) \le c \cdot g(n)$ לכל $n \ge n_0$.
+4
(2.4)
עבור $f(n) \le c \cdot g(n)$ נראה ש־ $g(n) \ge \frac{f(n)}{c}$. כלומר, $g(n) \ge \frac{f(n)}{c} \ge 0$. לכן $g(n) = \Omega(f(n))$.
$\Rightarrow$: נניח שמתקיים $g(n) = \Omega(f(n))$, נוכיח שמתקיים $f(n) = O(g(n))$.
יפה
$g(n) = \Omega(f(n))$, אזי קיימים $c > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le c \cdot f(n) \le g(n)$ לכל $n \ge n_0$.
עבור $c \cdot f(n) \le g(n)$ נראה ש־ $f(n) \le \frac{g(n)}{c}$. כלומר, $0 \le f(n) \le \frac{g(n)}{c}$. לכן $f(n) = O(g(n))$.

...

ה. נניח שמתקיים $p_1(p_2(n)) = \Theta(g(n))$אזי קיימים $C_1, C_2 > 0$ ו־ $n_0 > 0$ המקיימים $0 \le C_1 \cdot g(n) \le p_1(p_2(n)) \le C_2 \cdot g(n)$ לכל $n \ge n_0$.
נראה שעבור הפולינום $p_1(p_2(n))$, הביטוי בעל החזקה הגבוהה ביותר היא $n^{n_1 \cdot n_2}$.
+4
(2.5)
לכן עבור הפונקציה החיובית $g(n) = n^{n_1 \cdot n_2}$, מתקיים $p_1(p_2(n)) = \Theta(g(n))$.

...

יפה

שאלה 3 - פתרון נוסחאות נסיגה

א. נפתור בשיטת האיטראציה :

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1 =$$

$$T\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + 1 =$$

$$\left(T\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + 1\right) + 1 =$$

-1

(3.1)

3.1.8- חסר ביטוי מפורש לקבועים/ ביטוי שגוי/ אין חיתוך בין הקבועים בצעד האינדוקציה לקבועים בבסיס האינדוקציה.

$$\left(T\left(n^{\frac{1}{8}}\right)+1\right)+2=$$

$$\dots$$

$$T\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right)+i$$

לאחר i איטראציות אנו מגיעים לתנאי העצירה של נוסחת הנסיגה.

על מנת למצוא את הערך i, נבצע השוואה באופן הבא $2=n^{\frac{1}{2^i}}$ (תנאי העצירה של נוסחת נסיגה זו היא $T(2)=k$).

$$2=n^{\frac{1}{2^i}}$$

$$\log_n(2)=\frac{1}{2^i}$$

$$2^i=\frac{1}{\log_n(2)}$$

$$\log\left(\frac{1}{\log_n(2)}\right)=i$$

$$\log\left(\frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(n)}}\right)=i$$

$$\log(\log(n))=i$$

נציב בנוסחת הנסיגה את הערך i :

$$T(n)=T\left(n^{\frac{1}{2^i}}\right)+i=$$

$$T\left(n^{\frac{1}{2^{\log(\log(n))}}}\right)+\log(\log(n))=$$

$$T(2)+\log(\log(n))=$$

$$k+\log(\log(n))=$$

$$\Theta(1)+\Theta(\log(\log(n)))$$

לכן הניחוש שלנו יהיה : $T(n)=\Theta(\log(\log(n)))$ ונוכיח זאת באמצעות אינדוקציה :

...

בסיס האינדוקציה : $(n=4)$

נאמר ש־ $T(4)=\Theta(\log(\log(4)))$ אם קיימים $C_1,C_2>0$ כך שמתקיים :

$0\le C_1\cdot\log(\log(4))\le T(4)\le C_2\cdot\log(\log(4))$.

$$0 \le C_1 \cdot \log(\log(4)) \le T(4) \le C_2 \cdot \log(\log(4))$$

$$0 \le C_1 \cdot \log(2) \le T\left(\sqrt{4}\right) + 1 \le C_2 \cdot \log(2)$$

$$0 \le C_1 \cdot 1 \le T(2) + 1 \le C_2 \cdot 1$$

$$0 \le C_1 \le k + 1 \le C_2$$

נראה שעבור הערכים $C_1 = C_2 = k + 1$ **האי שיוויון מתקיים, לכן** $T(4) = \log(\log(4))$.

...

הנחת האינדוקציה :

יהי n **כך שלכל** $m < n$ **מתקיים :** $T(m) = \Theta(\log(\log(m)))$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \le C_1 \cdot \log(\log(m)) \le T(m) \le C_2 \cdot \log(\log(m))$.

נוכיח שמתקיים : $T(n) = \Theta(\log(\log(n)))$.

...

צעד האינדוקציה :

$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$

$n > \sqrt{n}$ **לכן** $T(\sqrt{n}) = \Theta(\log(\log(\sqrt{n})))$ **מהנחת האינדוקציה.**

אז קיימים $C_1, C_2 > 0$ **כך ש־** $0 \le C_1 \cdot \log(\log(\sqrt{n})) \le T(\sqrt{n}) \le C_2 \cdot \log(\log(\sqrt{n}))$.

$$0 \le C_1 \cdot \log(\log(\sqrt{n})) \le T(\sqrt{n}) \le C_2 \cdot \log(\log(\sqrt{n}))$$

$$0 \le C_1 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right) \le T(n) - 1 \le C_2 \cdot \log\left(\log\left(n^{\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$0 \le C_1 \cdot \log\left(\tfrac{1}{2} \cdot \log(n)\right) \le T(n) - 1 \le C_2 \cdot \log\left(\tfrac{1}{2} \cdot \log(n)\right)$$

$$0 \le C_1 \cdot \left(\log\left(\tfrac{1}{2}\right) + \log(\log(n))\right) \le T(n) - 1 \le C_2 \cdot \left(\log\left(\tfrac{1}{2}\right) + \log(\log(n))\right)$$

$$0 \le C_1 \cdot (-1 + \log(\log(n))) \le T(n) - 1 \le C_2 \cdot (-1 + \log(\log(n)))$$

$$0 \le -C_1 + C_1 \cdot \log(\log(n)) \le T(n) - 1 \le -C_2 + C_2 \cdot \log(\log(n))$$

נראה שעבור הערכים $C_1 = C_2 = 1$ **מתקיים :**

$0 \le C_1 \cdot \log(\log(n)) \le T(n) \le C_2 \cdot \log(\log(n))$**, אזי** $T(n) = \Theta(\log(\log(n)))$.

...

ב. נפתור בשיטת המאסטר (לפי כלל 2) :

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

+3

$$a = 2, b = 2, f(n) = n$$

(3.2)

יפה

נשים לב שמתקיים :

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

$$n = \Theta\left(n^{\log_2(2)}\right)$$

$$n = \Theta(n)$$

$n = \Theta(n)$ מתקיים לפי תכונת הרפלקסיביות של חסמים אסימפטוטיים, אזי לפי הכלל השני של שיטת המאסטר :

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n)\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_2(2)} \cdot \log(n)\right)$$

$$T(n) = \Theta(n \cdot \log(n))$$

...

ג. נפתור בשיטת המאסטר (לפי כלל 3) :

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \cdot \log(n)$$

$$a = 4, b = 2, f(n) = n^3 \cdot \log(n)$$

נשים לב שמתקיים :

$$f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)$$

$$n^3 \cdot \log(n) = \Omega\left(n^{\log_2(4)+\epsilon}\right)$$

$$n^3 \cdot \log(n) = \Omega\left(n^{2+\epsilon}\right)$$

נראה שעבור הערכים $1 \leq \epsilon$ מתקיים : $n^3 \cdot \log(n) = \Omega(n^{2+\epsilon})$.

נשים לב גם כן :

$$a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) < c \cdot f(n)$$

$$4 \cdot \left(\left(\frac{n}{2}\right)^3 \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

$$4 \cdot \left(\left(\frac{n^3}{2^3}\right) \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)\right) < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

$$\left(\frac{n^3}{2}\right) \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right) < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

$$\left(\frac{n^3}{2}\right) \cdot (\log(n) - \log(2)) < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

$$\left(\frac{n^3}{2}\right) \cdot (\log(n) - 1) < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

$$\frac{n^3}{2} \cdot \log(n) - \frac{n^3}{2} < c \cdot n^3 \cdot \log(n)$$

+3
(3.3)
יפה

נראה שעבור הערך $c = \frac{1}{2}$ האי־שיוויון מתקיים, לכן לפי הכלל השלישי של שיטת המאסטר :

$$T(n) = \Theta(f(n))$$

$$T(n) = \Theta(n^3 \cdot \log(n))$$

...

ד. נפתור בשיטת המאסטר (לפי כלל 2) :

$$T(n) = T\left(\frac{2}{5}n\right) + 1$$

+3
(3.4)
יפה

$$a = 1, b = 5, f(n) = 1$$

נשים לב שמתקיים :

$$f(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

$$1 = \Theta\left(n^{\log_5(1)}\right)$$

$$1 = \Theta\left(n^0\right)$$

$$1 = \Theta\left(1\right)$$

$1 = \Theta(1)$ מתקיים לפי תכונת הרפלקסיביות של חסמים אסימפטוטיים, אזי לפי הכלל השני של שיטת המאסטר :

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)} \cdot \log(n)\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_5(1)} \cdot \log(n)\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(1 \cdot \log(n)\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(\log(n)\right)$$

...

ה. נפתור בשיטת עץ הרקורסיה :

$$0 < c < 1, T(n) = T(cn) + T((1-c)n) + 1$$

העבודה הנלווית עבור קריאה אחת היא 1, לכן נרצה למצוא את כמות הקריאות. כלומר, נרצה למצוא את כמות הצמתים בעץ הרקורסיבי (שורש, צמתים פנימים ועלים) :

נעריך את סכום הצמתים באמצעות חסם עליון וחסם תחתון.

נניח ש־ $c > 1 - c$.

אזי מספר רמות העץ המלא של קריאות רקורסיביות ל־ $T((1-c)n)$ בלבד הוא כ־ $1 + \log_{\frac{1}{(1-c)}}(n)$ (העץ המלא בעל הגובה הקצר ביותר).

נראה שמספר הצמתים בעץ זה הוא :

$$.\sum_{i=0}^{\log_{\frac{1}{(1-c)}}(n)} 2^i$$

כלומר, מספר הצמתים לפי נוסחת סדרה הנדסית הוא :

$$\frac{a_1 \cdot \left(q^L - 1\right)}{q-1} =$$

$$\frac{1 \cdot \left(2^{\log_{\frac{1}{(1-c)}}(n)} - 1\right)}{2-1} =$$

$$2^{\log_{\frac{1}{(1-c)}}(n)} - 1 =$$

$$n^{\log_{\frac{1}{(1-c)}}(2)}-1$$

לפי ההנחה, נסיק ש־ $0 < 1-c \leq \frac{1}{2}$ כך שעבור הערך $\frac{1}{1-c}$ נקבל את $1 < \frac{1}{1-c} \leq 2$.
אזי עבור הערך $\log_{\frac{1}{(1-c)}}(2)$ נקבל את $0 < \log_{\frac{1}{(1-c)}}(2) \leq 1$.
נקח את המקרה שבו $\log_{\frac{1}{(1-c)}}(2) = 1$. כלומר, החסם האסימפטוטי התחתון הגדול ביותר (על מנת להדק את החסימה האסימפטוטית) ונציב ב־ $n^{\log_{\frac{1}{(1-c)}}(2)}-1$.

כך נקבל את הערך הבא :

$$n^1-1=$$

$$n-1=$$

$$\Theta(n)+\Theta(1)$$

לכן הניחוש שלנו יהיה : $T(n)=\Theta(n)$ ונוכיח זאת באמצעות אינדוקציה עבור חסם עליון ועבור חסם תחתון :

...

חסם תחתון :

...

בסיס האינדוקציה : $(n=1)$
עבור $n=1$, נקבל $T(1)=k$.
נאמר ש־ $T(1)=\Omega(1)$ אם קיים $c>0$ כך שמתקיים : $0 \leq c\cdot 1 \leq T(1)$.
נראה כי עבור $0 \leq c \leq k$ האי־שיוויון מתקיים, אזי $T(1)=k=\Omega(1)$.

...

הנחת האינדוקציה :
יהי n כך שלכל $m<n$ מתקיים : $T(m)=\Omega(m)$.
כלומר, קיים $c>0$ כך שמתקיים : $0 \leq c\cdot m \leq T(m)$.
נוכיח שמתקיים : $T(n)=\Omega(n)$.

...

צעד האינדוקציה :
$T(n)=T(cn)+T((1-c)n)+1$
$0<c<1$, אז $0<(1-c)n \leq cn < n$.
לכן, לפי הנחת האינדוקציה : $T(cn)=\Omega(cn)$ ו־ $T((1-c)n)=\Omega((1-c)n)$.
אז קיים $C_1>0$ כך ש־ $0 \leq C_1\cdot cn \leq T(cn)$ ו־ $0 \leq C_1\cdot(1-c)n \leq T((1-c)n)$.

נחבר את האי־שיוויונות :

$$0 \leq C_1\cdot(1-c)n + C_1\cdot cn \leq T((1-c)n)+T(cn)$$

$$0 \leq C_1 \cdot ((1-c)\,n + cn) \leq T\,((1-c)\,n) + T\,(cn)$$

$$0 \leq C_1 \cdot (n) \leq T\,((1-c)\,n) + T\,(cn)$$

$$0 \leq C_1 \cdot n + 1 \leq T\,((1-c)\,n) + T\,(cn) + 1$$

$$0 \leq C_1 \cdot n + 1 \leq T\,(n)$$

$$0 \leq C_1 \cdot n \leq C_1 \cdot n + 1 \leq T\,(n)$$

$$0 \leq C_1 \cdot n \leq T\,(n)$$

לפיכך, מתקיים $T\,(n) = \Omega\,(n)$.

...

חסם עליון :

...

בסיס האינדוקציה : $(n = 1)$

עבור $n = 1$**, נקבל** $T\,(1) = k$.

נאמר ש־ $T\,(1) = O\,(1)$ **אם קיים** $c > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq T\,(1) \leq c \cdot 1$.

נראה כי עבור $k \leq c$ **האי־שיוויון מתקיים, אזי** $T\,(1) = k = O\,(1)$.

...

הנחת האינדוקציה :

יהי n **כך שלכל** $m < n$ **מתקיים :** $T\,(m) = O\,(m)$.

כלומר, קיים $c > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq T\,(m) \leq c \cdot m$.

נוכיח שמתקיים : $T\,(n) = O\,(n)$.

...

צעד האינדוקציה :

$T\,(n) = T\,(cn) + T\,((1-c)\,n) + 1$

$0 < c < 1$**, אז** $0 < (1-c)\,n \leq cn < n$.

לכן, לפי הנחת האינדוקציה : $T\,(cn) = O\,(cn)$ **ו־** $T\,((1-c)\,n) = O\,((1-c)\,n)$.

אז קיים $C_1 > 0$**כך ש־** $0 \leq T\,(cn) \leq C_1 \cdot cn$ **ו־** $0 \leq T\,((1-c)\,n) \leq C_1 \cdot (1-c)\,n$.

נחבר את האי־שיוויונות :

$$0 \leq T\,((1-c)\,n) + T\,(cn) \leq C_1 \cdot (1-c)\,n + C_1 \cdot cn$$

$$0 \leq T\,((1-c)\,n) + T\,(cn) \leq C_1 \cdot ((1-c)\,n + cn)$$

$$0 \leq T\left(\left(1-c\right)n\right)+T\left(cn\right) \leq C_1 \cdot \left(n\right)$$

$$0 \leq T\left(\left(1-c\right)n\right)+T\left(cn\right)+1 \leq C_1 \cdot n+1$$

$$0 \leq T\left(n\right) \leq C_1 \cdot n+1$$

+3

(3.5)

קיים $C_2 > 0$ **כך ש־** $C_2 \cdot n \geq C_1 \cdot n + 1$.

נקבל $0 \leq T\left(n\right) \leq C_2 \cdot n$. **כלומר,** $T\left(n\right) = O\left(n\right)$.

יפה

...

קיבלנו $T\left(n\right) = O\left(n\right)$ **וגם** $T\left(n\right) = \Omega\left(n\right)$**, לכן** $T\left(n\right) = \Theta\left(n\right)$.

...

ו. נפתור בשיטת ההצבה :

$$T\left(n\right) = T\left(\frac{n}{4}\right) + T\left(\frac{3n}{4}\right) + n$$

הניחוש שלנו יהיה : $T\left(n\right) = \Theta\left(n \cdot \log\left(n\right)\right)$ **ונוכיח זאת באמצעות אינדוקציה :**

...

בסיס האינדוקציה : $\left(n=2\right)$

עבור $n=2$**, נקבל** $T\left(2\right) = k$.

נאמר ש־ $T\left(2\right) = \Theta\left(2 \cdot \log\left(2\right)\right)$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq C_1 \cdot 2 \cdot \log\left(2\right) \leq T\left(2\right) \leq C_2 \cdot 2 \cdot \log\left(2\right)$.

$$0 \leq C_1 \cdot 2 \cdot \log\left(2\right) \leq T\left(2\right) \leq C_2 \cdot 2 \cdot \log\left(2\right)$$

$$0 \leq C_1 \cdot 2 \cdot 1 \leq T\left(2\right) \leq C_2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0 \leq C_1 \cdot 2 \leq k \leq C_2 \cdot 2$$

$$0 \leq C_1 \leq \frac{k}{2} \leq C_2$$

נראה כי עבור $C_1 = C_2 = \frac{k}{2}$ **האי־שיוויון מתקיים, אז** $T\left(2\right) = \Theta\left(2 \cdot \log\left(2\right)\right)$.

...

הנחת האינדוקציה :

יהי n **כך שלכל** $m < n$ **מתקיים :** $T\left(m\right) = \Theta\left(m \cdot \log\left(m\right)\right)$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq C_1 \cdot m \cdot \log\left(m\right) \leq T\left(m\right) \leq C_2 \cdot m \cdot \log\left(m\right)$.

נוכיח שמתקיים : $T\left(n\right) = \Theta\left(n \cdot \log\left(n\right)\right)$.

...

צעד האינדוקציה :

$T\left(n\right)=T\left(\frac{n}{4}\right)+T\left(\frac{3n}{4}\right)+n$

נראה ש־ $0\geq\frac{n}{4}\geq\frac{3n}{4}\geq n$, **לכן מהנחת האינדוקציה :** $T\left(\frac{3n}{4}\right)=\Theta\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)\right)$ **ו־** $T\left(\frac{n}{4}\right)=\Theta\left(\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)\right)$.

כלומר, קיימים $C_1,C_2>0$ **כך שמתקיים :**

$0\leq C_1\cdot\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)\leq C_2\cdot\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)$ **ו־** $0\leq C_1\cdot\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)\leq T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)$

נחבר את האי־שיוויונות :

$$0\leq C_1\cdot\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)+C_1\cdot\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)+C_2\cdot\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$0\leq C_1\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)+\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3n}{4}\right)+\frac{n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right)\right)$$

$$0\leq C_1\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\left(\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)\right)+\frac{n}{4}\cdot\left(\log\left(n\right)-\log\left(4\right)\right)\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq$$
$$C_2\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\left(\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)\right)+\frac{n}{4}\cdot\left(\log\left(n\right)-\log\left(4\right)\right)\right)$$

$$0\leq C_1\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\left(\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)\right)+\frac{n}{4}\cdot\left(\log\left(n\right)-2\right)\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq$$
$$C_2\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\left(\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)\right)+\frac{n}{4}\cdot\left(\log\left(n\right)-2\right)\right)$$

$$0\leq C_1\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3n}{4}\cdot\log\left(n\right)+\frac{n}{4}\cdot\log\left(n\right)-\frac{n}{2}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq$$
$$C_2\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{3n}{4}\cdot\log\left(n\right)+\frac{n}{4}\cdot\log\left(n\right)-\frac{n}{2}\right)$$

$$0\leq C_1\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+n\cdot\log\left(n\right)-\frac{n}{2}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot\left(\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+n\cdot\log\left(n\right)-\frac{n}{2}\right)$$

$$0\leq C_1\cdot n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)-\frac{1}{2}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)+\log\left(n\right)-\frac{1}{2}\right)$$

$$0\leq C_1\cdot n\cdot\log\left(n\right)+C_1\cdot n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot n\cdot\log\left(n\right)+C_2\cdot n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\right)$$

$$0\leq C_1\cdot n\cdot\log\left(n\right)-0.811C_1\cdot n\leq T\left(\frac{3n}{4}\right)+T\left(\frac{n}{4}\right)\leq C_2\cdot n\cdot\log\left(n\right)-0.811C_2\cdot n$$

$$0\leq C_1\cdot n\cdot\log\left(n\right)-0.811C_1\cdot n\leq T\left(n\right)-n\leq C_2\cdot n\cdot\log\left(n\right)-0.811C_2\cdot n$$

נראה שעבור הערכים $C_1=C_2=1.233$ **מתקיים :** $0\leq C_1\cdot n\cdot\log\left(n\right)\leq T\left(n\right)\leq C_2\cdot n\cdot\log\left(n\right)$, +3

אז נקבל $T\left(n\right)=\Theta\left(n\cdot\log\left(n\right)\right)$. (3.6)

... יפה

ז. נפתור בשיטת המאסטר (לפי כלל 1) :

$$T(n) = 6T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 6, b = 3, f(n) = n$$

נשים לב שמתקיים :

$$f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$$

$$n = O\left(n^{\log_3(6)-\epsilon}\right)$$

$$n = O\left(n^{1.63-\epsilon}\right)$$

נראה שעבור הערכים $\epsilon \leq 0.63$ מתקיים : $n = O\left(n^{1.63-\epsilon}\right)$.

אזי מתקיים :

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_b(a)}\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log_3(6)}\right)$$

+3

(3.7)

$$T(n) = \Theta\left(n^{1.63}\right)$$

יפה

...

שאלה 4 - ניתוח זמן ריצה

a. נראה שבמקרה הגרוע ביותר הפונקציה תיאלץ לעבור על כל איברי המערך שבאורך n תאים. כלומר, הפונקציה תבצע כ־ n השוואות.

-2

(4.1)

לכן סיבוכיות זמן הריצה עבור פונקציה זו היא $T(n) = \Theta(n)$.

-4.1.3 חישוב לא נכון של זמן הריצה של שורות קוד / אין חישוב עלות פר שורה

...

b. נראה שבפונקציה זו אין פקודת $break$, לכן עבור כל איטראציה של לולאת i מתבצעות כ־ n איטרציות של לולאת j.

שורה

אזי עבור n איטרציות עבור לולאת i, נקבל כ־ n^2 פעולות השוואה ו־ n^2 פעולות השמה. $2n^2$ פעולות סך הכל.

-2

(4.2)

מכך נקבל ש־ $T(n) = 2n^2 = \Theta(n^2)$.

-4.2.3 חישוב לא נכון של זמן הריצה של שורות קוד / אין חישוב עלות פר שורה.

...

c. נראה שמדובר בפונקציה רקורסיבית, לכן ננסח נוסחת נסיגה שמתארת את סיבוכיות זמן הריצה של פונקציה זו.

מקרה 1 : עבור $n = 0$ ו־ $n = 1$, ישנה עבודה נלווית בגודל c_1 (השוואה).

מקרה 2 : עבור $n > 1$, ישנה קריאה רקורסיבית לפלט מוקטן ועבודה נלווית בגודל c_2 (כפל).

-2

(4.3)

אזי נוסחת הנסיגה תוגדר כך :

-4.3.3 חישוב לא נכון של זמן הריצה של שורות קוד / אין חישוב עלות פר שורה.

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & n=0, n=1 \\ T(n-1)+c_2 & otherwise \end{cases}$$

נפתור בשיטת האיטראציה:

$$T(n) = T(n-1) + c_2 =$$

$$(T(n-2) + c_2) + c_2 =$$

$$(T(n-3) + c_2) + 2c_2 =$$

$$\cdots$$

$$T(n-i) + \cdot i \cdot c_2$$

לאחר i איטראציות אנו מגיעים לתנאי העצירה של נוסחת הנסיגה.
על מנת למצוא את הערך i, נבצע השוואה באופן הבא $n - i = 1$ (תנאי העצירה של נוסחת נסיגה זו היא $T(1) = c_1$).
נקבל ש־ $i = n - 1$ ונציב בנוסחת הנסיגה את הערך i.

$$T(n) = T(n-i) + i \cdot c_2$$

$$T(n) = T(1) + nc_2 - c_2$$

$$T(n) = c_1 + nc_2 - c_2$$

$$T(n) = nc_2 - c_2 + c_1$$

לכן הניחוש שלנו יהיה : $T(n) = \Theta(n)$ ונוכיח זאת באינודקציה :
...
בסיס האינדוקציה : $(n = 1)$
נאמר ש־ $T(1) = \Theta(1)$ אם קיימים $C_1, C_2 > 0$ כך שמתקיים האי־שיוויון : $0 \leq C_1 \cdot 1 \leq T(1) \leq C_2 \cdot 1$.

$$0 \leq C_1 \cdot 1 \leq T(1) \leq C_2 \cdot 1$$

$$0 \leq C_1 \cdot 1 \leq c_1 \leq C_2 \cdot 1$$

נראה שעבור $C_1 = C_2 = c_1$ האי־שיוויון מתקיים, אזי נקבל $T(1) = \Theta(1)$.

...

הנחת האינדוקציה :

יהי n כך שלכל $m < n$ מתקיים : $T(m) = \Theta(m)$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ כך שמתקיים : $0 \le C_1 \cdot m \le T(m) \le C_2 \cdot m$.

נוכיח שמתקיים : $T(n) = \Theta(n)$.

...

צעד האינדוקציה :

$T(n) = T(n-1) + c_2$

נראה ש־ $n - 1 < n$, לכן מהנחת האינדוקציה מתקיים $T(n-1) = \Theta(n-1)$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ כך שמתקיים : $0 \le C_1 \cdot (n-1) \le T(n-1) \le C_2 \cdot (n-1)$.

$$0 \le C_1 \cdot (n-1) \le T(n-1) \le C_2 \cdot (n-1)$$

$$0 \le C_1 \cdot (n-1) \le T(n) - c_2 \le C_2 \cdot (n-1)$$

$$0 \le C_1 \cdot n - C_1 \le T(n) - c_2 \le C_2 \cdot n - C_2$$

נראה שעבור $C_1 = C_2 = c_2$, נקבל $0 \le C_1 \cdot n \le T(n) \le C_2 \cdot n$.

אזי מתקיים : $T(n) = \Theta(n)$.

...

d. נראה שמדובר בפונקציה רקורסיבית, לכן ננסח נוסחת נסיגה שמתארת את סיבוכיות זמן הריצה של פונקציה זו.

נשים לב שהפונקציה מחולקת לשלוש אפשרויות שונות

כך ש־ $\mod (n,3) = 0$, $\mod (n,3) = 1$ ו־ $\mod (n,3) = 2$.

לכן ננסח נוסחת נסיגה עבור כל אחת מן האפשרויות כך שבסופו נאחד את שלושת נוסחאות הנסיגה לנוסחת נסיגה אחת.

...

מקרה 1 : $\mod (n,3) = 0$, מתקיים $T_0(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + k_0$.

במקרה זה n מתחלק ב־ 3, אזי מתבצעת קריאה רקורסיבית עם הפרמטר $\frac{n}{3}$ וישנה גם עבודה נלווית בגודל k_0 (השוואה, מודולו, השמה וכפל).

-2

(4.4)

...

מקרה 2 : $\mod (n,3) = 1$, מתקיים $T_1(n) = T_0(n-1) + k_1$.

במקרה זה, n מתחלק ב־3 עם שארית 1. כלומר, $n-1$ מתחלק ב־3 ללא שארית.

אזי ישנה קריאה אחד ל־ $T_0(n-1)$ על מנת להשיג את הקריאה ל־ $T\left(\frac{n-1}{3}\right)$.

-4.4.3 חישוב לא נכון של זמן הריצה לשורת קוד / אין חישוב עלות פר שורה.

עבור מקרה זה ישנה עבודה נלווית בגודל k_1 (כפל).

$$T_1(n) = T_0(n-1) + k_1$$

$$T_1(n) = T\left(\frac{n-1}{3}\right) + k_0 + k_1$$

...

מקרה 3 : $\bmod (n,3) = 2$ **, מתקיים** $T_2(n) = T_1(n-1) + k_2$**.**

במקרה זה, n **מתחלק ב־**3 **עם שארית** 2**.כלומר,** $n-1$ **מתחלק ב־**3 **עם שארית** 1**.**

אזי נבצע קריאה ל־ $T_1(n-1)$ **על מנת להשיג את הקריאה ל־** $T_0(n-2)$ **ובכך לקריאה ל־** $T\left(\frac{n-2}{3}\right)$**.**

עבור מקרה זה ישנה עבודה נלווית בגודל k_2 **(כפל).**

$$T_2(n) = T_1(n-1) + k_2$$

$$T_2(n) = T_0(n-2) + k_1 + k_2$$

$$T_2(n) = T\left(\frac{n-2}{3}\right) + k_0 + k_1 + k_2$$

...

נראה ששלושת נוסחאות הנסיגה מסתכמות בנוסחה : $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + c$**.**

אזי נוסחאת הנסיגה היא :

$$T(n) = \begin{cases} c_0 & n = 0, n = 1 \\ T\left(\frac{n}{3}\right) + c_1 & otherwise \end{cases}$$

נפתור בשיטת האיטראציה :

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + c_1 =$$

$$T(n) = \left(T\left(\frac{n}{9}\right) + c_1\right) + c_1 =$$

$$T(n) = \left(T\left(\frac{n}{27}\right) + c_1\right) + 2c_1 =$$

$$\cdots$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3^i}\right) + i \cdot c_1$$

לאחר i **איטראציות אנו מגיעים לתנאי העצירה של נוסחת הנסיגה.**

על מנת למצוא את הערך i**, נבצע השוואה באופן הבא** $\frac{n}{3^i} = 1$ **(תנאי העצירה של נוסחת נסיגה זו היא** $T(1) = c_0$**).**

נקבל ש־ $i = \log_3(n)$ **ונציב בנוסחת הנסיגה את הערך** i**.**

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3^i}\right) + i \cdot c_1$$

$$T(n) = T(1) + \log_3(n) \cdot c_1$$

$$T(n) = c_0 + \log_3(n) \cdot c_1$$

לכן הניחוש שלנו יהיה : $T(n) = \Theta(\log_3(n))$ **ונוכיח זאת באינודקציה :**

...

בסיס האינדוקציה : $(n = 3)$

נאמר ש־ $T(3) = \Theta(\log_3(3))$ **אם קיימים** $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים האי־שיוויון :**

$0 \leq C_1 \cdot \log_3(3) \leq T(3) \leq C_2 \cdot \log_3(3)$.

$$0 \leq C_1 \cdot 1 \leq T(3) \leq C_2 \cdot 1$$

$$0 \leq C_1 \leq T\left(\frac{3}{3}\right) + c_1 \leq C_2$$

$$0 \leq C_1 \leq T(1) + c_1 \leq C_2$$

$$0 \leq C_1 \leq c_0 + c_1 \leq C_2$$

נראה שעבור $C_1 = C_2 = c_0 + c_1$**האי־שיוויון מתקיים, אזי נקבל** $T(3) = \Theta(\log_3(3))$.

...

הנחת האינדוקציה :

יהי n **כך שלכל** $m < n$ **מתקיים :** $T(m) = \Theta(\log_3(m))$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq C_1 \cdot \log_3(m) \leq T(m) \leq C_2 \cdot \log_3(m)$.

נוכיח שמתקיים : $T(n) = \Theta(\log_3(n))$.

...

צעד האינדוקציה :

$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + c_1$

נראה ש־ $\frac{n}{3} < n$**, לכן מהנחת האינדוקציה מתקיים** $T\left(\frac{n}{3}\right) = \Theta\left(\log_3\left(\frac{n}{3}\right)\right)$.

כלומר, קיימים $C_1, C_2 > 0$ **כך שמתקיים :** $0 \leq C_1 \cdot \log_3\left(\frac{n}{3}\right) \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq C_2 \cdot \log_3\left(\frac{n}{3}\right)$.

$$0 \leq C_1 \cdot \log_3\left(\frac{n}{3}\right) \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq C_2 \cdot \log_3\left(\frac{n}{3}\right)$$

$$0 \leq C_1 \cdot (\log_3(n) - \log_3(3)) \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq C_2 \cdot (\log_3(n) - \log_3(3))$$

$$0 \leq C_1 \cdot (\log_3(n) - 1) \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq C_2 \cdot (\log_3(n) - 1)$$

$$0 \leq C_1 \cdot \log_3(n) - C_1 \leq T\left(\frac{n}{3}\right) \leq C_2 \cdot \log_3(n) - C_2$$

$$0 \leq C_1 \cdot \log_3(n) - C_1 \leq T(n) - c_1 \leq C_2 \cdot \log_3(n) - C_2$$

נראה שעבור $C_1 = C_2 = c_1$**, נקבל** $0 \leq C_1 \cdot \log_3(n) \leq T(n) \leq C_2 \cdot \log_3(n)$.
אזי מתקיים : $T(n) = \Theta(\log_3(n))$.

...

e. **נראה שמדובר בפונקציה רקורסיבית, לכן ננסח נוסחת נסיגה שמתארת את סיבוכיות זמן הריצה של פונקציה זו.**
נשים לב שהפונקציה מחולקת ל־ c **אפשרויות שונות**
כך ש־ $\mod(n,c) = 0$ **,** $\mod(n,c) = 1$ **,** $\mod(n,c) = 2$ **ו־** $\mod(n,c) = c-1$
לכן ננסח נוסחת נסיגה עבור כל אחת מן האפשרויות כך שבסופו נאחד את כלל הנוסחאות הנסיגה לנוסחת נסיגה אחת.

...

מקרה 1 : $\mod(n,c) = 0$ **, מתקיים** $T_0(n) = T\left(\frac{n}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1))$.
במקרה זה n **מתחלק ב־** c**, אזי מתבצעת קריאה רקורסיבית עם הפרמטר** $\frac{n}{c}$. **בנוסף לקריאה הרקורסיבית ישנה לולאה המבצעת כ־** c **איטראציות** $(\Theta(c))$ **ועבודה נלווית (השמה) בגודל קבוע** $(\Theta(1))$.

...

מקרה 2 : $\mod(n,c) = 1$ **, מתקיים** $T_1(n) = T_0(n-1) + (\Theta(1))$.
במקרה זה, n **מתחלק ב־**c **עם שארית** 1.**כלומר,** $n-1$ **מתחלק ב־**c **ללא שארית.**
אזי ישנה קריאה אחד ל־ $T_0(n-1)$ **על מנת להשיג את הקריאה ל־** $T\left(\frac{n-1}{c}\right)$.

עבור מקרה זה ישנה עבודה נלווית (כפל) בגודל קבוע $(\Theta(1))$.

$$T_1(n) = T_0(n-1) + (\Theta(1))$$

$$T_1(n) = T\left(\frac{n-1}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1)) + (\Theta(1))$$

$$T_1(n) = T\left(\frac{n-1}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1))$$

...

מקרה 3 : $\mod(n,c) = 2$ **, מתקיים** $T_2(n) = T_1(n-1) + (\Theta(1))$.
במקרה זה, n **מתחלק ב־**c **עם שארית** 2.**כלומר,** $n-1$ **מתחלק ב־**c **עם שארית** 1.
אזי נבצע קריאה ל־ $T_1(n-1)$ **על מנת להשיג את הקריאה ל־** $T_0(n-2)$ **ובכך לקריאה ל־** $T\left(\frac{n-2}{c}\right)$.

עבור מקרה זה ישנה עבודה נלווית (כפל) בגודל קבוע $(\Theta(1))$.

$$T_2(n) = T_1(n-1) + (\Theta(1))$$

$$T_2(n) = T_0(n-2) + (\Theta(1)) + (\Theta(1))$$

$$T_2(n) = T_0(n-2) + (\Theta(1))$$

$$T_2(n) = T\left(\frac{n-2}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1))$$

...

מקרה $c-1$ **:** $\bmod\ (n,c) = c-1$ **, מתקיים** $T_{c-1}(n) = T_{c-2}(n-1) + (\Theta(1))$.

במקרה זה נבצע כ־ $c-1$ **קריאות שונות** $(T_{c-2}(n-1), T_{c-3}(n-2), T_{c-4}(n-3), \ldots, T_0(n))$ **על מנת להשיג את הקריאה ל־** $T\left(\frac{n}{c}\right)$.

גם כאן ישנה עבודה נלווית (כפל) בגודל קבוע $(\Theta(1))$.

$$T_{c-1}(n) = T_{c-2}(n-1) + (\Theta(1))$$

...

$$T_{c-1}(n) = T\left(\frac{n-c+1}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1))$$

...

אזי נוסחת הנסיגה היא :

$$T(n) = \begin{cases} (\Theta(1)) & n=0, n=1 \\ T\left(\frac{n}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1)) & \bmod\ (n,c) = 0 \\ T\left(\frac{n-c+1}{c}\right) + (\Theta(c)) + (\Theta(1)) & otherwise \end{cases}$$

נחלק ל2 מקרים :

...

מקרה 1 : c **קבוע.**

כאשר c **קבוע, מתקיים** $(\Theta(c)) = (\Theta(1))$. **לכן נקבל את נוסחת הנסיגה הבאה :**

$$T(n) = \begin{cases} (\Theta(1)) & n=0, n=1 \\ T\left(\frac{n}{c}\right) + (\Theta(1)) & \bmod\ (n,c) = 0 \\ T\left(\frac{n-c+1}{c}\right) + (\Theta(1)) & otherwise \end{cases}$$

מאחר ונוסחת נסיגה זו הינה הרחבה ישירה של סעיף d , נניח ש־ $T(n)=\Theta(\log(n))$ (נשנה את בסיס הלוג מ־ 3 ל־ 2 מאחר ומדובר בקבוע בלבד).

...

מקרה **2** : $c=n$.

כאשר $c=n$, מתקיים $T\left(\frac{n}{c}\right)+(\Theta(c))+(\Theta(1))$ בלבד מכיוון ש־ $\mod(n,n)=0$.

האלגוריתם מבצע קריאה רקורסיבית אחת בלבד וניתן לנסח את זמן הריצה בצורה הבאה :

$$T(n)=\begin{cases}(\Theta(1)) & n=0,n=1\\ T\left(\frac{n}{n}\right)+(\Theta(n))+(\Theta(1)) & otherwise\end{cases}$$

מאחר והאלגוריתם מבצע קריאה אחת בלבד, נפתח את נוסחת הנסיגה ונקבל :

$$T\left(\frac{n}{n}\right)+(\Theta(n))+(\Theta(1))=$$

-2

(4.5)

$$T(1)+(\Theta(n))+(\Theta(1))=$$

4.5.3- חישוב לא נכון של זמן הריצה של שורות קוד / אין חישוב עלות פר שורה.

$$(\Theta(1))+(\Theta(n))+(\Theta(1))=$$

$$(\Theta(n))$$

אזי נראה ש־ $T(n)=\Theta(n)$.

...

שאלה 5 ־ פיתוח אלגוריתמים

א.

intersection (A,B):
1. intersection ← an array of 2N boolean values (False)
2. booleanValue ←True
3. for i ←0 to N-1
3.a. intersection[A[i]] ←True
4. for j ←0 to N-1
4.a. if (intersection[B[j]] = True) then booleanValue ←False and break
5. return booleanValue

ניתוח זמן ריצה :

1. אתחול מערך בגודל $2N$ תאים ($2N$ איטראציות בלולאה ־ הגדרת $false$ בכל תאי המערך) ־ $\Theta(n)$
2. הגדרת ערך משתנה (פעולה קבועה) ־ $\Theta(1)$

3. N איטראציות בלולאה - $\Theta(n)$

3.א. הגדרת משתנה כ- N פעמים - $\Theta(n)$

4. N איטראציות בלולאה - $\Theta(n)$

4.א. במקרה הגרוע ביותר שבו הקבוצות זרות, הלולאה תבצע כ- N איטראציות - $\Theta(n)$

5. החזרת ערך משתנה (פעולה קבועה) - $\Theta(1)$

...

+10

(5.1)

יפה

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(1) + \Theta(1) =$$

$$\Theta(n) + \Theta(1) =$$

$$\Theta(n)$$

אזי נראה ש- $T(n) = \Theta(n)$.

...

ב.

key (A,x):
1. if (A[0] $=$ x) then return 0
2. keyValue $\leftarrow$1
3. lengthValue $\leftarrow$|A|
4. while (keyValue $<$ lengthValue and A[keyValue] $<=$ x)
4.a. keyValue $\leftarrow$ keyValue*2
5. return binarySearch(A, keyValue/2, min(keyValue,|A|), x)

ניתוח זמן ריצה :

1. בדיקת תנאי (פעולה קבועה) - $\Theta(1)$

2. הגדרת ערך משתנה (פעולה קבועה) - $\Theta(1)$

3. הגדרת ערך משתנה (פעולה קבועה) - $\Theta(1)$

4. $\log(d)$ איטראציות בלולאה - $\Theta(\log(d))$

4.א. הערך $keyValue$ עולה בצורה מעריכית, לכן מספר האיטראציות קטן בצורה מעריכית (כלומר, עולה בצורה לוגריתמית) - $\Theta(\log(d))$

5. קריאה לפונקציה המבצעת חיפוש בינארי בין שני אינדקסים נבחרים -
ידוע שמחיר חיפוש בינארי הוא $\log(n)$ כאשר n הוא אורך המערך - $\Theta(\log(min(keyValue, |A|) - keyValue/2))$

...

$$T(n) = \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(1) + \Theta(\log(d)) + \Theta(\log(d)) + \Theta(\log(min(keyValue, |A|) - keyValue/2)) =$$

$$\Theta\left(\log\left(d\right)\right)+\Theta\left(\log\left(min(keyValue,|A|)-keyValue/2\right)\right)=$$

במקרה שבו אורך המערך הוא הגדול ביותר, כלומר $min(keyValue,|A|)=keyValue$.

נקבל : $keyValue-keyValue/2=keyValue/2$.

ואנו יודעים כי $d\geq keyValue/2$ **לפי תנאי לולאת** $while$. **לכן נקבל** $d\geq min(keyValue,|A|)-keyValue/2$.

כלומר, $\log\left(d\right)\geq\log\left(min(keyValue,|A|)-keyValue/2\right)$.

אזי נקבל :

$$T\left(n\right)=\Theta\left(\log\left(d\right)\right)$$

+10

(5.2)

יפה