Universidad Autónoma Chapingo

Postgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua

Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola

Curso Control Moderno

Modelación de sistemas con derivadas en la entrada en espacio de estados (Método 1)

8 de junio de 2025

Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)} = \frac{10s+20}{s^3+10s^2+24s} \tag{1}$$

Lo cual es igual a:

$$\left(s^3+10s^2+24s\right) Y(s) = (10s+20)\, U(s) \tag{2}$$

$$s^3Y(s) + 10s^2Y(s) + 24sY(s) = 10sU(s) + 20U(s) \tag{3}$$

Aplicando la TIL en ambos miembros de la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 10\ddot{y} + 24\dot{y} = 10\dot{u} + 20u \tag{4}$$

Comparando esta ecuación con una ecuación diferencial de tercer orden de forma estándar

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3y = \frac{d^3u}{dt^3} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3u \tag{5}$$

Se determinan los coeficientes a_s y b_s.

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 24, \quad a_3 = 0, \qquad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 10, \quad b_3 = 20$$

Si el conjunto de variables de estado se elige como:

$$x_1 = y - \beta_0 u \tag{6}$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \tag{7}$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u \tag{8}$$

Donde

$$\beta_0 = b_0 = 0 \tag{9}$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = 0 \tag{10}$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = 10 \tag{11}$$

Despejando y en la ecuación 6, se obtiene:

$$y = x_1 + \beta_0 u = x_1 \tag{12}$$

Despejando $\dot{x}_1$ en la ecuación 7, se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 \tag{13}$$

Despejando $\dot{x}_2$ en la ecuación 8, se obtiene:

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 + 10u \tag{14}$$

Usando el último renglón de la ecuación de la matriz A asociada con la ecuación diferencial de orden n:

$$\frac{dy^n}{dt^n} + a_1\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = b_0\frac{du^n}{dt^n} + b_1\frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + b_{n-1}\dot{u} + b_n u$$

Ver la página 190 del texto Ogata. 2004. System Dynamics

$$\dot{x}_3 = a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \tag{15}$$

Donde β_3 es:

$$\beta_3 = b_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_3\beta_0 = 20 - 100 = -80$$

La ecuación (15) se escribe como:

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 10x_3 - 80u \tag{16}$$

Entonces, escribiendo las ecuaciones 13, 14 y 16 usando notación vectorial y matricial se obtiene la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix} u \tag{17}$$

Usando la ecuación 12 la ecuación para la salidas es:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \tag{18}$$