Universidad Autónoma Chapingo

Postgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua

Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola

Curso Control Moderno

Modelación de sistemas con derivadas en la entrada en espacio de estados (Método 2)

8 de junio de 2025

Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)} = \frac{10s+20}{s^3+10s^2+24s} \tag{1}$$

Multiplicando y dividiendo el lado derecho de la (1) por $Z(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10s+20}{s^3+10s^2+24s}\frac{Z(s)}{Z(s)} \tag{2}$$

Re escribiendo la ecuación (2) como:

$$\frac{Y(s)Z(s)}{Z(s)U(s)} = (10s+20)\,\frac{1}{s^3+10s^2+24s} \tag{3}$$

Entonces:

$$\frac{Y(s)}{Z(s)} = 10s+20 \tag{4}$$

Y

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3+10s^2+24s} \tag{5}$$

Re escribiendo la ecuación (4)

$$Y(s) = (10s + 20)Z(s) = 10sZ(s) + 20Z(s) \tag{6}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación (6) se obtiene la ecuación diferencial de primer orden:

$$y(t) = 10\dot{z} + 20z \tag{7}$$

En forma similar se re escribe la ecuación

$$\left(s^3 + 10s^2 + 24s\right) Z(s) = U(s) = s^3 Z(s) + 10s^2 Z(s) + 24sZ(s) \tag{8}$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación (8) se obtiene la ecuación diferencial de tercer orden:

$$\frac{d^3 z}{dt^3} + 10\ddot{z} + 24\dot{z} = u(t) \tag{9}$$

Se definen las variables de estado:

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad x_3 = \ddot{z} \tag{10}$$

Entonces las ecuación (9) se puede escribir como:

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 10x_3 + u \tag{11}$$

Y la ecuación (7) se escribe como:

$$y(t) = 20x_1 + 10x_2 \tag{12}$$

De las ecuaciones (10) y (11) se obtienen las ecuaciones de estado

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 10x_3 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{13}$$

Reescribiendo la ecuación 12 para la variable de salida:

$$y = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{14}$$