

Universidad Autónoma Chapingo
Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola
Curso Control Moderno

2 de junio de 2025

Caso 1. Considere la ecuación 10-14 del Texto de Ogata (Control Moderno)

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{x} \quad (1)$$

Calculando la Transformada de Laplace a la Ec. (1)

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{X}(s) \quad (2)$$

Agrupando términos semejantes y haciendo las condiciones iniciales igual a cero.

$$s\mathbf{X}(s) - (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \mathbf{X}(s) = 0 \quad (3)$$

Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (3)

$$(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})) \mathbf{X}(s) = 0 \quad (4)$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) \mathbf{X}(s) = 0 \quad (5)$$

La ecuación característica es el determinante de la matriz diferencia:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = 0 \quad (6)$$

Caso 2. Considere la ecuación 10-59 del texto de Ogata (Control Moderno)

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}) \mathbf{e} \quad (7)$$

Calculando la Transformada de Laplace a la Ec. (7)

$$s\mathbf{E}(s) - \mathbf{E}(0) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}) \mathbf{E}(s) \quad (8)$$

Agrupando términos semejantes y haciendo las condiciones iniciales igual a cero.

$$s\mathbf{E}(s) - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C}) \mathbf{E}(s) = 0 \quad (9)$$

Factorizando el lado izquierdo de la ecuación (9)

$$(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})) \mathbf{E}(s) = 0 \quad (10)$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}) \mathbf{E}(s) = 0 \quad (11)$$

La ecuación característica es el determinante de la matriz diferencia:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}) = 0 \quad (12)$$

Caso 3. La ecuación 10-71 (Texto Control Moderno Ogata)

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}) \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_e y \quad (13)$$

Calculando la Transformada de Laplace a la Ec. (13)

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}) \tilde{\mathbf{X}}(s) + \mathbf{K}_e Y(s) \quad (14)$$

$$s\tilde{\mathbf{X}}(s) - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK}) \tilde{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{K}_e Y(s) \quad (15)$$

$$(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} - \mathbf{BK})) \tilde{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{K}_e Y(s) \quad (16)$$

Y despejando $\tilde{\mathbf{X}}(s)$

$$\tilde{\mathbf{X}}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} + \mathbf{BK})^{-1} \mathbf{K}_e Y(s) \quad (17)$$

Caso 4. Ecuación 10-70 (Texto Control Moderno Ogata)

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Aplicando transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación (18) y haciendo las condiciones iniciales igual a cero

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) \\ s\mathbf{E}(s) - \mathbf{E}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{E}(s) \end{bmatrix} \quad (19)$$

Entonces se obtienen las ecuaciones:

$$[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{BK})] \mathbf{X}(s) = \mathbf{BKE}(s) \quad (20)$$

$$[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})] \mathbf{E}(s) = \mathbf{0} \quad (21)$$

Lo cual es equivalente a las ecuaciones siguientes:

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}] \mathbf{X}(s) - \mathbf{BKE}(s) = \mathbf{0} \quad (22)$$

$$[s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C}] \mathbf{E}(s) = \mathbf{0} \quad (23)$$

Escribiendo las ecuaciones (22) y (23) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(s) \\ \mathbf{E}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (24)$$

El determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ \mathbf{0} & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{K}_e\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Es el correspondiente a la Ecuación 10-70 del texto Control Moderno de Ogata.