

Universidad Autónoma Chapingo
Postgrado en Ingeniería Agrícola y Uso Integral del Agua
Departamento de Ingeniería Mecánica Agrícola
Curso Control Moderno
**Modelación de sistemas con derivadas en la entrada en
espacio de estados (Método 1)**

20 de julio de 2023

Dada la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \frac{10(s+2)}{s(s+4)(s+6)} = \frac{10s+20}{s^3+10s^2+24s} \quad (1)$$

Lo cual es igual a:

$$(s^3 + 10s^2 + 24s) Y(s) = (10s + 20) U(s) \quad (2)$$

$$s^3 Y(s) + 10s^2 Y(s) + 24s Y(s) = 10s U(s) + 20U(s) \quad (3)$$

Aplicando la TIL en ambos miembros de la ecuación (3) se obtiene:

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 10\ddot{y} + 24\dot{y} = 10\dot{u} + 20u \quad (4)$$

Comparando esta ecuación con una ecuación diferencial de tercer orden de forma estándar

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_1 \ddot{y} + a_2 \dot{y} + a_3 y = \frac{d^3 u}{dt^3} + b_1 \ddot{u} + b_2 \dot{u} + b_3 u \quad (5)$$

Se determinan los coeficientes a_s y b_s .

$$a_1 = 10, \quad a_2 = 24, \quad a_3 = 0, \quad b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 10, \quad b_3 = 20$$

Si el conjunto de variables de estado se elige como:

$$x_1 = y - \beta_0 u \quad (6)$$

$$x_2 = \dot{x}_1 - \beta_1 u \quad (7)$$

$$x_3 = \dot{x}_2 - \beta_2 u \quad (8)$$

Donde

$$\beta_0 = b_0 = 0 \quad (9)$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0 = 0 \quad (10)$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 = 10 \quad (11)$$

Despejando y en la ecuación 6, se obtiene:

$$y = x_1 + \beta_0 u = x_1 \quad (12)$$

Despejando \dot{x}_1 en la ecuación 7, se obtiene:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 \quad (13)$$

Despejando \dot{x}_2 en la ecuación 8, se obtiene:

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u = x_3 + 10u \quad (14)$$

Usando el último renglón de la ecuación de la matriz A asociada con la ecuación diferencial de orden n :

$$\frac{dy^n}{dt^n} + a_1 \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 \frac{du^n}{dt^n} + b_1 \frac{du^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

Ver la página 190 del texto Ogata. 2004. System Dynamics

$$\dot{x}_3 = a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3 + \beta_3 u \quad (15)$$

Donde β_3 es:

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 = 20 - 100 = -80$$

La ecuación (15) se escribe como:

$$\dot{x}_3 = -24x_2 - 10x_3 - 80u \quad (16)$$

Entonces, escribiendo las ecuaciones 13, 14 y 16 usando notación vectorial y matricial se obtiene la ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -80 \end{bmatrix} u \quad (17)$$

Usando la ecuación 12 la ecuación para la salidas es:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \beta_0 u \quad (18)$$