פונקציה יוצרת מומנטים:

הגדרה: $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

המוגדרת ע"י: $M_X = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(t=x) & X \text{ בדיד} - \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & X \text{ רציף} - \end{cases}$

(1) $X \sim Ber(p) \Leftrightarrow M_X(t) = e^t p + q$

$q = p-1$, $t \in \mathbb{R}$

(2) $X \sim B(n,p) \Leftrightarrow M_X(t) = (e^t p + q)^n$

$t \in \mathbb{R}$

(3) $X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$t < \lambda$

הגדרה: $K = 1, 2, 3, \dots$ $E(X^K) \Rightarrow$ מומנט מספר K

★ $M_X^{(K)}(0) = E(X^K)$

נגזרת מספר K
בנקודה $t=0$

תרגיל שיקו: האם פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ X יכולה להיות מוגדרת $\cos(t)$ $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$?

תשובה: לא!

נשים לב שמתקיים $E(X^{2K}) \ge 0$ תמיד

$E(X) = (M_X(t))'|_{t=0} = -\sin(t)|_{t=0} = 0$

סתירה! $E(X^2) = (M_X(t))''|_{t=0} = -\cos(t)|_{t=0} = -1$

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

טענה: יהיו X, Y מ"מ בעלי פונקציה יוצרת מומנטים: $M_X(t)$, $M_Y(t)$ בהתאמה
אם $Y = aX + b$ אז $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

הוכחה:

$M_Y(t) = E(e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{tb} \cdot e^{taX}] = e^{tb} E[e^{atX}] = e^{tb} M_X(at)$

פונקציה יוצרת מומנטים של X בנקודה at
אפשר להסתכל על זה גם כ-
פונקציה יוצרת מומנטים של aX בנקודה t

טענה: יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת בעלי פונקציות יוצרות המומנטים $M_{X_1}(t), \dots, M_{X_n}(t)$ בהתאמה.
יהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

אז לכל נקודה t שבה כל הפונקציות $M_{X_i}(t)$ קיימות, קיימת גם פונקציה יוצרת המומנטים של X
ומתקיים: $M_X(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=0}^{n} M_{X_i}(t)$

הוכחה:

$M_X(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = E[e^{t\sum_{i=1}^{n} X_i}] = E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdot \dots \cdot e^{tX_n}] \underset{\text{ב"ת}}{=} \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$

★ נשים לב שמ"מ בינומי X זה למעשה סכום של מ"מ ברנולי כלומר $\underset{\text{בינומי}}{X} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ $Y_i \sim Ber(p)$
ולכן אם נתבונן בפונקציה יוצרת המומנטים שלהם, נקבל את הטענה שהוכחנו!

משפט: פונקציה יוצרת המומנטים קובעת באופן יחיד את ההתפלגות של מ"מ.

כלומר אם $M_X(t)=M_Y(t)$ לכל t בסביבת 0, אז מ"מ X ו-Y מתפלגים לפי אותה פונקציית התפלגות.

(הם לא שווים!! פעמים יש להם אותה פונקציית התפלגות - B, Exp, Bin וכדומה)

פרופוזיציה: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ בת"ל, $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$

הוכח כי $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ כאשר:

$$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b \quad , \quad \sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$$

פתרון:

אני נעבוד לפי השלבים הבאים:

(1) עבור מ"מ $Z \sim N(0,1)$ נחשב $M_Z(t)$

(2) אם $Z \sim N(0,1)$ ו- $X=\sigma Z+\mu$ אז $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

(3) נחשב $M_X(t)$ עבור $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

(4) נוכיח את הטענה.

(1):

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \iff f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$\star\ M_X(t) = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$$

$$Z \sim N(0,1) \iff f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$M_Z(t) = E[e^{tZ}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Z(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2-t^2)}\,dx =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx}_{=1} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

פונקציית צפיפות של מ"מ שמתפלג נורמלי עם $\sigma^2=1$ ו- $\mu=t$

(2): כבר הוכחנו בעבר.

(3):

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$X = \sigma Z + \mu$$

מהלמה נוכל לחשב את $M_X(t)$:

$$\star\ M_X(t) = M_{\sigma Z+\mu}(t) \underset{\substack{b=\mu \\ a=\sigma}}{=} e^{t\mu} M_Z(\sigma t) = e^{t\mu} e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$$

(4):

$$Y = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}_{T} + b = T + b$$

$$M_T(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} a_i X_i}(t) \underset{\text{לפי התכונה}}{=} \prod_{i=1}^{n} M_{a_i X_i}(t) \underset{\substack{\text{לפי התכונה} \\ b=0 \text{ עבור}}}{=} \prod_{i=1}^{n} \underbrace{e^{0 \cdot t}}_{=1} M_{X_i}(a_i t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t) \underset{\substack{\text{מה שהוכחנו} \\ \text{ב-(3)} \\ t=a_i t \text{ עם}}}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{\frac{\sigma_i^2 a_i^2 t^2}{2}+\mu_i a_i t} =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + t\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_i}$$

קיבלנו ש: $T \sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$

נחזור ל-Y:

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b = T + b$ ולכן $M_Y(t) \underset{\text{לפי התכונה}}{=} e^{tb} M_T(t)$

נציב את $M_T(t)$ שקיבלנו:

$$M_Y(t) = e^{tb} M_T(t) = e^{tb} \cdot e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + t\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_i} = e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2 + t\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i a_i + b\right)}$$

תרגיל שוקו:

התפלגות $\chi^2(K)$ עם K דרגות חופש

מצב אחד: $T \sim \chi^2(K) \equiv \Gamma\left(\alpha = \frac{K}{2}, \lambda = \frac{1}{2}\right)$

מצב שני: $T = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_K^2 \sim \chi^2(K)$ $\quad Z_i \sim N(0,1)$ ב"ת

הוכח את השקילות הנ"ל ע"י פונקציה יוצרת מומנטים.

מספר תכונות של $\chi^2(K)$:

(1) אם $X \sim \chi^2(K_1)$ ו- $Y \sim \chi^2(K_2)$ ב"ת

אז $S = X + Y \sim \chi^2(K_1 + K_2)$

(2) אם $K \to \infty$ אז לפי משפט הגבול המרכזי, התפלגות $\chi^2(K)$

תהיה "דומה" להתפלגות נורמלית.

$T \sim \chi^2(K)$ אז $E(T) = K$ ו- $V(T) = \frac{K}{2} 4 = 2K$

$$\frac{T-K}{\sqrt{2K}} \underset{\substack{\text{מקורב} \\ K \to \infty}}{\sim} N(0,1)$$

התפלגות $student(K) \equiv$ התפלגות t עם K דרגות חופש

$X \sim student(K)$

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{K}}}, \quad \left.\begin{array}{l} Z \sim N(0,1) \\ Y \sim \chi^2(K) \end{array}\right\} \text{ב"ת}$$

אי שוויונים :

אי שוויון מרקוב : (עבור מ"מ $X \geq 0$)

יהי $X \geq 0$ בעל תוחלת $\mu = E(X)$ סופית

אז לכל קבוע $a > 0$ מתקיים : $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

הוכחה :

נגדיר : $Y = \begin{cases} a ; & X \geq a \\ 0 ; & \text{אחרת} \end{cases}$

לכל $\omega \in \Omega$: $Y(\omega) \geq X(\omega)$ (כלומר שמ"מ X גדול/שווה ממ"מ Y על כל Ω)

$Y \leq X$

ברור כי $E(X) \geq E(Y)$

$E(X) = E(Y) = aP(X \geq a) + 0P(X < a) = aP(X \geq a)$

כאשר קיבלנו $E(X) = aP(X \geq a)$

$\Downarrow$

$P(X \geq a) = \frac{E(X)}{a}$

אי שוויון צ'בישב :

יהי X מ"מ בעל $\mu = E(X)$ ו- $\sigma^2 = V(X)$ סופיים.

אז לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים : $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

הוכחה :

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) = P(\omega \in \Omega : |X(\omega) - \mu| \geq \varepsilon) = P(\underbrace{(X-\mu)^2}_{Y \geq 0} \geq \varepsilon^2) \underset{\text{עפ"י מרקוב}}{\leq} \frac{E(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{E[(X-\mu)^2]}{\varepsilon^2} \overset{\star}{=} \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$\star$ $(X-\mu)^2 = X^2 - 2X\mu + \mu^2$

$E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + E[\mu^2] =$

$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 =$

$= E(X^2) - E(X)^2 = V(X)$