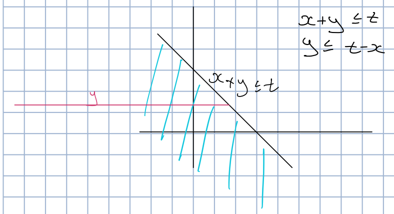
מ"מ דו-מימדי:

נתונים $X \sim f_X$, $Y \sim f_Y$ ב"ת נרצה למצוא את $f_S = ?$ כאשר $S = X+Y$

$$f_S = f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy$$ ⇐ קונבולוציה של f_X ו- f_Y נכון גם ש- $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t-x)\, f_X(x)\,dx$

הוכחה:

$$F_{X+Y}(t) = P(X+Y \le t) = \iint_{x+y\le t} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{ב"ת}}{=} \iint_{x+y\le t} f_X(x)\, f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{t-y} f_X(x)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy$$

$$f_{X+Y}(t) = \left(F_{X+Y}(t)\right)' \Rightarrow f_{X+Y}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_X(t-y)\, \underbrace{f_Y(y)}_{\text{קבוע לפי } t\ (\text{לפי הנגזרת})}\right)'_t\,dy =$$

מכניסים את הגזירה פנימה לפי t של ההתפלגויות

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t)\, \underbrace{f_X(t-y)}_{\text{נגזרת חיצונית}} \cdot \underbrace{1}_{\text{נגזרת פנימית}}\,dy$$

דוגמה:

נתון כי: $X \sim f_X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, $Y \sim f_Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$ ב"ת

אזי $S = X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$. (נוכיח כעת)

תזכורת: $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , x>0 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$

$$\begin{cases} x>0 \\ t-x>0 \end{cases} \qquad 0<x<t$$

עבור $t>0$:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(t-x)\,dx = \int_0^t \frac{\lambda^\alpha e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda^\beta e^{-\lambda(t-x)} (t-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}\,dx = \begin{bmatrix} y=\frac{x}{t} \Rightarrow x=ty \Rightarrow dx = t\,dy \\ x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=t \Rightarrow y=1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} y^{\alpha-1} (t-ty)^{\beta-1}\, t\,dy = t^{\alpha+\beta-1} \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy =$$

$(t(1-y))^{\beta-1} = t^{\beta-1}(1-y)^{\beta-1}$ y לא תלוי ב- t

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t} t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t} t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = 1$$

"פונקציית בטא"

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

סיכום:

(1) אם $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ ו- $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$ ב"ת, אזי $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$

(2) אם $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ ו- $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ ב"ת, אזי $X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

(3) אם $X \sim B(n_1, p)$ ו- $Y \sim Bin(n_2, p)$ ב"ת, אזי $X+Y \sim Bin(n_1+n_2, p)$

(4) אם $X \sim P(\lambda_1)$ ו- $Y \sim P(\lambda_2)$ ב"ת, אזי $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

* יש אינטגרלים נוספים שימושיים

פונקציה יוצרת מומנטים : Moment Generating Function (MGF)

הגדרה: מהגדרת מ"מ X , נגדיר פונקציה $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$\underset{t \text{ מקודם}}{x \text{ של } m.g.f} \Rightarrow M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x) & \text{אם } X \text{ בדיד} - \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{אם } X \text{ רציף מוחלט} - \end{cases}$$

שימו לב ש- $M_X(t)$ היא פונקציה של t התלויה בהתפלגות של X

דוגמאות: מצא $M_X(t) = ?$

(1) $X \sim Ber(p) \iff X = \begin{cases} 1 & , p \\ 0 & , q = 1-p \end{cases}$

X בדיד לכן:

$$M_X(t) = e^{t\cdot 1} P(X=1) + e^{t\cdot 0} P(X=0) = e^t p + q$$

(2) $X \sim B(n,p) \iff P(X=t) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

X בדיד לכן:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k q^{n-k} = (e^t p + q)^n$$

בינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

הערה: $Ber(p) \equiv Bin(n=1, p)$

שימו לב כי מתקיים $X = \underbrace{Y_1 + \ldots + Y_n}_{Y_i \sim Ber(p) \text{ ב"ת}}$

כלומר אפשר להסתכל על X כסכום של מ"מ ב"ת מתפלגים ברנולי.

(3) $X \sim Exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$ $\iff$ $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x > 0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$

X רציף לכן:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \frac{1}{\lambda - t} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} (\lambda - t)\,dx}_{=1} = \begin{pmatrix} \lambda - t > 0 \\ t < \lambda \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{\lambda - t} , \; t < \lambda$$

הגדרה: $E(X^k)$ נקרא מומנט מסדר k, $k = 1, 2, \ldots$

דוגמה: אם $k=1$ נקבל $\underset{\text{תוחלת}}{E(X^1) = E(X)}$

מדוע פונקציה יוצרת מומנטים נקראת כך?

נזכר כי: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. אז נקבל:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E\left[t + \frac{tX}{1!} + \frac{(tX)^2}{2!} + \frac{(tX)^3}{3!} + \dots\right] = 1 + \frac{t}{1!}E(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \dots$$

$$M_X'(t) = 0 + 1 \cdot E(X) + \frac{2t}{2!}E(X^2) + \dots$$

$$M_X'(0) = E(X^1)$$

באופן דומה: $M_X''(0) = E(X^2)$

וכך באותו אופן $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$

מומנט מסדר k

דוגמה:

$X \sim Exp(\lambda)$

נראה ע"פ פונקציה יוצרת מומנטים שמתקיים: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ $\quad t < \lambda$

$$E(X) = (M_X(t))'|_{t=0} = (\lambda(\lambda-t)^{-1})'|_{t=0} = \lambda \frac{1}{(\lambda-t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$