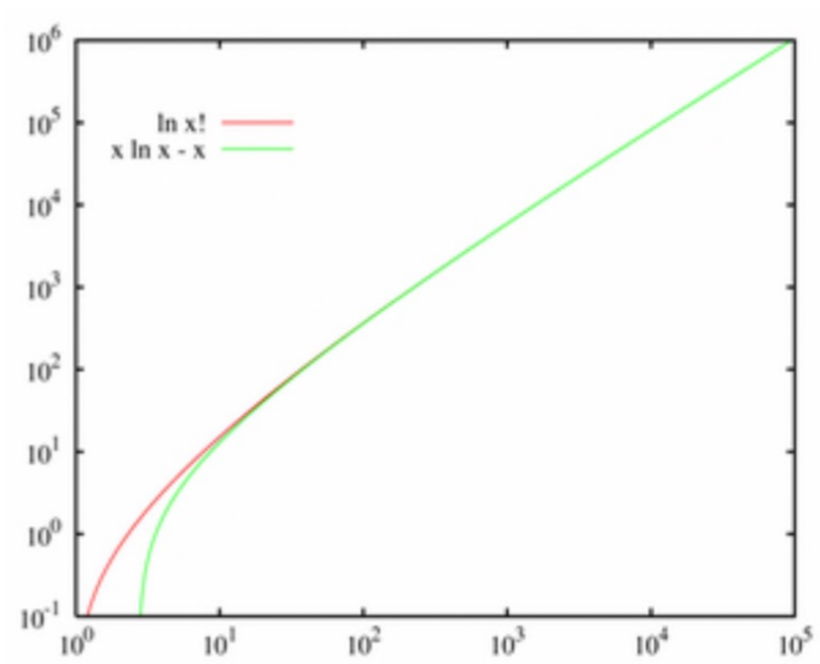
תרגול 12

נוסחת סטירלינג

נוסחת סטירלינג היא קירוב מתמטי לערך של $n!$ (במילים: n עצרת) עבור ערכים גדולים של n. הנוסחה קרויה על שם המתמטיקאי הסקוטי, ג'יימס סטירלינג.



עבור x גדול, $\ln(x!)$ מתקרב ל $x\ln(x) - x$

נוסחת סטירלינג קובעת ש-

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

זוהי נוסחה אסימפטוטית בשימוש בסימון אסימפטוטי, ופירושה שבגבול $n \to \infty$ היחס שואף לאחד:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 .$$

כתוצאה מכך (כפי שיפורט להלן), $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$.

① לחשב בקירוב $20!$
לפי סטירלינג:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$n=20 \Rightarrow \quad 20! = \sqrt{2\pi\cdot 20}\cdot\left(\frac{20}{e}\right)^{20} = 2.4228\cdot 10^{18}$$

הערה: לפי חישוב ישיר $20! = 2.4329\cdot 10^{18}$

② להוכיח:

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{מונה}} \quad (2n)! \approx \sqrt{2\cdot\pi\cdot 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} = 2\sqrt{\pi n}\,(2^2)^n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} =$$

$$= 2\cdot\sqrt{\pi n}\cdot 4^n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

$$\xrightarrow{\text{מכנה}} \quad (n!)^2 \approx \left(\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2 \; 2\pi n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}$$

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{\cancel{2\sqrt{\pi n}}\cdot 4^n\cdot\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\cancel{2}\underbrace{\pi n}_{\cancel{\sqrt{\pi n}}\cdot\sqrt{\pi n}}\cdot\cancel{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

מ.ש.ל.

תרגיל מהמבחן

נתון מ"מ X כך ש- $E(X)=0$, $E(X^2)=\sigma^2$

להוכיח ש- $P(X>t) \le \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$

א"ש / צ'בישב:

נוסחה כללית: לכל $c>0$

$$P(|X|\ge c) \le \frac{E(X^2)}{c^2}$$

אם נציב במקום X $X-E(X)$ אז

$$P(|X-E(X)|\ge c)\le \frac{E((X-E(X))^2)}{c^2}=\frac{V(X)}{c^2}$$

$$V(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$$

אם נשתמש בהגבלה ישירה באי שוויון צ'בישב אז

$$P(X>t)\le P(X\ge t)\le P(|X|\ge t)\le \frac{E(X^2)}{t^2}=\frac{\sigma^2}{t^2}\ne\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$$

לכן הגבלה ישירה לא מתאימה

הוכחה:

$$P(X>t)=P(X+c>t+c)\le P(X+c\ge t+c)$$

$$\le P(X+c\ge t+c\ \cup\ X+c\le -(t+c))=$$

$$=P(|X+c|\ge t+c)\overset{\text{לפי צ'בישב}}{\le}\frac{E((X+c)^2)}{(t+c)^2}=$$

$$=\frac{E(X^2+2Xc+c^2)}{(t+c)^2}=\frac{\overbrace{E(X^2)}^{\sigma^2\text{ נתון}}+\cancel{2c\cdot\overbrace{E(X)}^{0\text{ נתון}}}+c^2}{(t+c)^2}=$$

$$=\frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2}\left\{\text{נציב } c=\frac{\sigma^2}{t}\right\}=\frac{\sigma^2+\left(\frac{\sigma^2}{t}\right)^2}{\left(t+\frac{\sigma^2}{t}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sigma^2+\frac{\sigma^4}{t^2}}{\frac{(t^2+\sigma^2)^2}{t^2}}=\frac{\frac{t^2\sigma^2+\sigma^4}{\cancel{t^2}}}{\frac{(t^2+\sigma^2)^2}{\cancel{t^2}}}=\frac{\sigma^2\cancel{(t^2+\sigma^2)}}{(t^2+\sigma^2)^{\cancel{2}}}=\frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$$

מ.ש.ל.

הסבר: איך הגענו להצבת $c=\frac{\sigma^2}{t}$?

במהלך הוכחה קיבלנו:

$$P(X>t)=P(X+c>t+c)\le P(X+c\ge t+c)$$

$$\le P\left(X+c\ge t+c\ \cup\ X+c\le-(t+c)\right)=$$

לפי צ'בישב

$$=P\left(|X+c|\ge t+c\right)\le\frac{E\left((X+c)^2\right)}{(t+c)^2}=$$

$$=\frac{E(X^2+2Xc+c^2)}{(t+c)^2}=\frac{\underbrace{E(X^2)}_{\text{נתון }\sigma^2}+\cancel{2c\cdot\underbrace{E(X)}_{\text{נתון }0}}+c^2}{(t+c)^2}=$$

$$=\frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$P(X>t)\le\frac{\sigma^2+c^2}{(t+c)^2}$$

$$=$$

$$P(X>t)\le\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$$

צ"ל:

צריך להתקיים:

$$\frac{\sigma^2+c^2}{t^2+2ct+c^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$$

$$\sigma^2(t^2+2ct+c^2)=(\sigma^2+c^2)(\sigma^2+t^2)$$

$$\cancel{\sigma^2t^2}+2\sigma^2ct+\cancel{\sigma^2c^2}=\sigma^4+\cancel{\sigma^2t^2}+\cancel{\sigma^2c^2}+c^2t^2$$

$$2\sigma^2ct=\sigma^4+(ct)^2$$

$$\sigma^4-2\sigma^2ct+(ct)^2=0$$

$$(\sigma^2-ct)^2=0\ \Big|\ \sqrt{\cdots}$$

$$\sigma^2-ct=0$$

$$c=\frac{\sigma^2}{t}.$$

תרגיל מהמבחן

נניח ש- $\lambda>0$ קבוע.

נניח שלכל מספר טבעי k מתקיים $X_k=k^\lambda$ או $X_k=-k^\lambda$

בהסתברות $\frac{1}{2}$.

סמנו את התחום הגדול ביותר שעבורו מתקיים החוק החלש של המספרים הגדולים עבור הסדרה $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$

א) $\lambda<\frac{1}{3}$ ב) $\lambda\geq\frac{1}{3}$ ג) $\lambda<\frac{1}{2}$ ד) $\lambda\geq\frac{1}{2}$

ה) התשובות שלמעלה אינן נכונות.

<u>פתרון:</u> החוק החלש של המספרים הגדולים:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)|\geq\varepsilon\right)=0$$

$$\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

<u>תזכורת:</u> אם $X_1,X_2,\dots,X_n$ ב"ת ש"ה אז

$$E(\overline{X}_n)=E(X_i) \qquad V(\overline{X}_n)=\frac{V(X_i)}{n}$$

נתון: $P(X_k=k^\lambda)=P(X_k=-k^\lambda)=\frac{1}{2}$.

X_k	k^λ	$-k^\lambda$
$P(X_k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$E(X_k)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k\cdot P(X_k)=k^\lambda\cdot\frac{1}{2}+(-k^\lambda)\cdot\frac{1}{2}=0$$

$$E(X_k^2)=\sum_{k=1}^{\infty}X_k^2\cdot P(X_k)=(k^\lambda)^2\frac{1}{2}+(-k^\lambda)^2\cdot\frac{1}{2}=k^{2\lambda}$$

$$V(X_k)=E(X_k^2)-(E(X_k))^2=k^{2\lambda}-0^2=k^{2\lambda}$$

$$P\left(|\overline{X}_n-E(\overline{X}_n)|\geq\varepsilon\right)\overset{\text{לפי צ'בישב}}{\leq}\frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2}=\frac{k^{2\lambda}}{n\varepsilon^2}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ הח"ח מתקיים

כלומר: חייב להתקיים: $\frac{k^{2\lambda}}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{k\to\infty} 0$

(k זה מס' סדורי של X מסדרה אינסופית)

$$\left[\frac{(\infty)^{2\cdot\lambda}}{\infty^1}\right] \xrightarrow[\text{רק אם חזקת מונה קטנה מחזקת מכנה}]{} 0$$

לכן חייב להתקיים: $2\lambda < 1$

$$\underline{\underline{\lambda < \frac{1}{2}}}.$$

לכן תשובה (ג) נכונה.