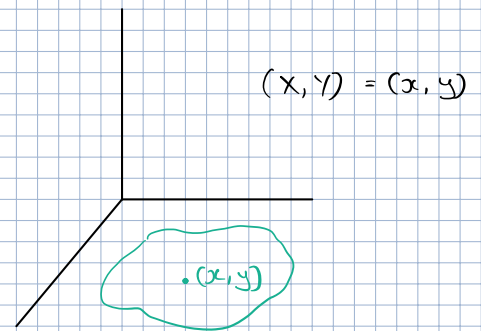


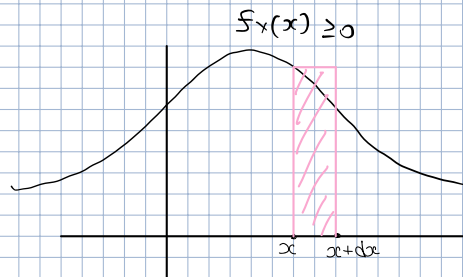
משפט 1.1: (X, Y) היא זוגות אקראיים



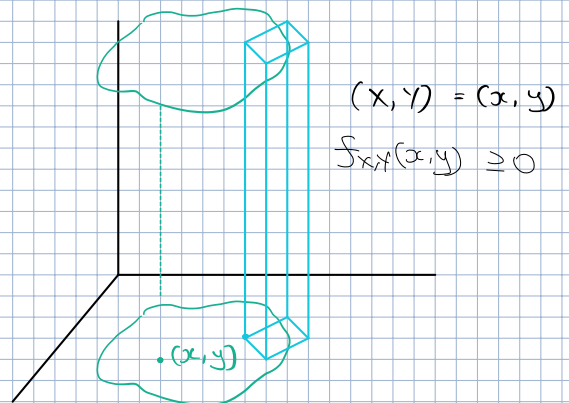
$P((X, Y) = (x, y)) = 0 \Leftrightarrow (X, Y) \text{ is continuous}$

משפט 1.2: $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
 ||
 הנורמליזציה



$P(X \in [x, x+dx]) \approx f_X(x) dx$



$f_{X,Y}(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$: הנורמליזציה

תורת ההסתברות - שאלון 3

שאלה

(עמוד) פ' 31

$$p_{x,y}(x,y)$$

$$p_{x,y}(x,y) = 0 \quad \forall (x,y)$$

$$P(x \leq X \leq x+dx, y \leq Y \leq y+dy) \approx f_{x,y}(x,y) dx dy$$

(הוא סדרון של, נכנס פשוטו של שאלון)

$$F_{x,y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \sum_{\substack{y \\ y \leq b}} \sum_{\substack{x \\ x \leq a}} P(X=x, Y=y)$$

$$F_{x,y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f_{x,y}(x,y) dx dy$$

$$p_x(x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dy$$

$$p_{x|y=y}(X=x, Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$$

$$f_{x|y=y}(x,y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$$

$$P(X=x \cap Y=y) = P(X=x)P(Y=y) : x,y \text{ בלתי תלוי} \Leftrightarrow \text{שני } Y \text{ ו- } X$$

$$f_{x,y}(x,y) = f_x(x)f_y(y) : x,y \text{ בלתי תלוי} \Leftrightarrow \text{שני } Y \text{ ו- } X$$

$$E(X) = \sum_x \sum_y x P(X=x, Y=y)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x,y}(x,y) dx dy$$

$$E(X) = \sum_x \sum_y g(x) P(X=x, Y=y)$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{x,y}(x,y) dx dy$$

$$E(X) = \sum_x \sum_y g(x,y) P(X=x, Y=y)$$

$$E(g(x,y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{x,y}(x,y) dx dy$$

8 שאלות תאוריה

$$\text{cov}(X,Y) = E[(X-M_X)(Y-M_Y)] = E[g(X,Y)]$$

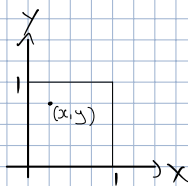
$$M_X = E(X)$$

$$M_Y = E(Y)$$

$$g(x,y) = (x-M_X)(y-M_Y)$$

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - M_X M_Y$$

1 תאוריה : (X,Y) נ"ח עם מרחב המדידה



$$f_{x,y} = \begin{cases} cx^2 y^3, & \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

לכן

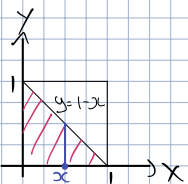
$$c = ? \quad (1)$$

$$P(X+Y \leq 1) \quad (2)$$

12 שאלות

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y) dx dy = 1 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 c x^2 y^3 dx dy &= c \int_0^1 x^2 \int_0^1 y^3 dy dx = c \int_0^1 x^2 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^1 \right) dx = c \int_0^1 x^2 \frac{1}{4} dx = \frac{c}{4} \int_0^1 x^2 dx = \frac{c}{4} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= \frac{c}{12} \Rightarrow c = 12 \end{aligned}$$

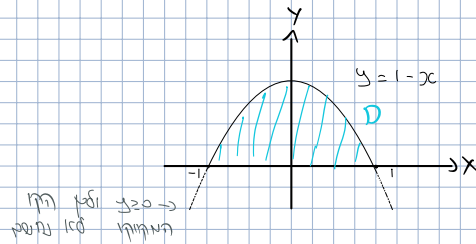


$$\begin{aligned} P(X+Y < 1) &= P(Y < 1-X) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y < 1-x}} f_{x,y}(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} 12 x^2 y^3 dy dx = \\ &= \int_0^1 12 x^2 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \int_0^1 3 x^2 (1-x)^4 dx = \dots = \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (4)$$

פונקציה של צפיפות משותפת של שני משתנים רנדומיים (X, Y) היא: 2 הנקודה

$$\begin{cases} y \leq 1-x^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases} : \text{ "ב" פונקציה}$$

$P(X, Y) = ?$ לצד



: 12 נקודה

$X \sim U(a, b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & , (x,y) \in D \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_D c dx dy = c \int_D 1 dx dy$$

$$c = \frac{1}{\text{שטח } D} = \frac{3}{4}$$

$$D \text{ שטח } = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = 2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{corr}(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)} \sqrt{V(Y)}}$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x, y) = xy$$

$$E(XY) = E(g(x, y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot \overset{=c}{f_{X,Y}(x,y)} dx dy = c \iint_D xy dx dy = c \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} xy dy dx =$$

$$= \int_{-1}^1 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} \right) dx = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 x(1-x^2)^2 dx = 0$$

שטחים * שטחים = שטחים * c

$$\int_{-1}^1 \text{שטחים } x = 0 \quad \text{כי } x \text{ אי-זוגי}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \overset{=c}{f_{X,Y}(x,y)} dx dy = c \iint_D x dy dx = c \int_{-1}^1 x(1-x^2) dx = 0$$

האם פונקציה של צפיפות משותפת של שני משתנים רנדומיים M_X, M_Y שמה

