רב-מימד:

דוגמה: נתון מ״מ דו-מימדי (X,Y) עם פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}, & 0<x,\ 0<y\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכח כי $E(X)=E(Y)$

פתרון:

(1) דרך ישירה:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}x\,\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}\,dx\,dy=\overbrace{\int_0^{\infty}e^{-y}\left(\int_0^{\infty}x\,\tfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\right)dy}^{★}=$$

$$=\left[\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx & v=-e^{-\frac{x}{y}}\end{matrix}\right]\underset{uv-\int vdu}{=}\int_0^{\infty}e^{-y}\left[-xe^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\frac{x}{y}}dx\right]dy=\int_0^{\infty}e^{-y}[0+y]\,dy=$$

$$=\int_0^{\infty}ye^{-y}\,dy=1$$

★ נשים לב ש- $\int_0^{\infty}e^{-y}\overbrace{\int_0^{\infty}x\underbrace{\tfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}}\,dx}^{★}\,dy$

$T\sim Exp(\lambda)\Leftrightarrow f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad E(T)=\frac{1}{\lambda}$

פונקציית צפיפות של $T\sim Exp(\lambda)$ עם $\lambda=\frac{1}{y}$

והתוחלת של מ״מ כזה היא $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

ובעצם ★ לכל קבוע חישוב התוחלת של מ״מ מע

שווה $y=\frac{1}{\frac{1}{y}}=$ ★

לכן בסה״כ $\int_0^{\infty}e^{-y}\int_0^{\infty}x\tfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\,dy=\int_0^{\infty}e^{-y}\underbrace{y\,dy}_{E(T)}=\frac{1}{1}=1$

מעריכי עם פרמטר $\lambda=1$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}y\,\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}\,dx\,dy=\int_0^{\infty}e^{-y}\left(y\int_0^{\infty}\tfrac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\right)dy=\int_0^{\infty}e^{-y}\,y\,1\,dy=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_T(t)\,dt=1$$

(2) דרך נוספת: $E(X)=E[E(X|Y)]$

$E(X)=E[\underbrace{E(X|Y)}_{=h(Y)\ \text{מ״מ}}]$

$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}x\underbrace{f_{X|Y=y}(x|y)}_{=?}\,dx$

$$f_{X|Y=y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}dx}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx}_{=1}}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cancel{e^{-y}}}{y}}{\cancel{e^{-y}}}=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}, & x>0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

קיבלנו ש: $X|Y=y\sim Exp(\lambda=\frac{1}{y})$

$E(X|Y=y)=y$

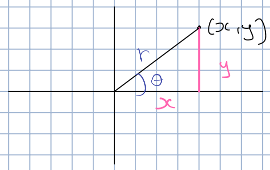
$E(X|Y)=Y$

דוגמה: נתונה פונקציית צפיפות של מ"מ בו-מימדי

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & , x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב: $V(Y)$, $V(X)$, $E(Y)$, $E(X)$, c

קואורדינטות פולריות:



$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$
$r > 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$I = \begin{vmatrix} x_r' & x_\theta' \\ y_r' & y_\theta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

פתרון:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

עבור θ , עבור r

$$1 = \iint_D \frac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy = c\iint \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy \underset{\text{מעבר לפולארי}}{=} c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{r^2}}\,r\,dr\,d\theta \underset{\text{משפט אינטגרל פוביני}}{=} c2\pi\int_0^1 r^{\frac{1}{2}}\,dr = c2\pi \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4c\pi}{3}$$

$$\frac{4c\pi}{3} = 1 \implies c = \frac{3}{4\pi}$$

תוחלת ושונות:

$$0 = E(X) \underset{\text{סימטריה}}{=} E(Y)$$

$$V(X) = E(X^2) - \underbrace{E(X)}_{=0} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D x^2 \frac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy \underset{\text{מעבר לפולארי}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta\,\frac{c}{r^{\frac{1}{2}}}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= c\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^{\frac{5}{2}}\,dr \underset{*}{=} c\frac{2}{7}\pi = \frac{3}{14}$$

$2\cos^2\theta = 1+\cos(2\theta)$

- בגלל הסימטריה מתקיים: $var(X) = var(Y)$

נתונים מ"מ ב"ת $X_1, \dots, X_n$ שווי התפלגות F_X

נסמן ב- $W = \max(X_1, \dots, X_n)$, $T = \min(X_1, \dots, X_n)$

שאלה → $F_T = ?$, $F_W = ?$

$$F_W(t) = P(W \le t) = P(\max(X_1,\dots,X_n) \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t) \underset{\text{ב"ת}}{=} P(X_1 \le t)\cdot P(X_2 \le t) \dots P(X_n \le t) =$$

$$= F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)\dots F_{X_n}(t) \underset{\text{שווי התפלגות}}{=} F_X(t)F_X(t)\dots F_X(t) = (F_X(t))^n$$

סכום של מ"מ ב"ת :

$F_X \quad X$

ב"ת

$F_Y \quad Y$

$$\text{מ"מ} \leftarrow S = X+Y \qquad F_S = ?$$

עבור מ"מ בדיד :

$P_X \quad X$

ב"ת

$P_Y \quad Y$

$$S = X+Y \,, \quad P_S = ?$$

$$P(S=t) = \sum_y P(X=t-y \,,\ Y=y) \underset{\text{ב"ת}}{=} \sum_y P(X=t-y)\,P(Y=y)$$

עבור מ"מ רציף :

$F_X \quad X$

ב"ת

$F_Y \quad Y$

$$\text{מ"מ} \leftarrow S = X+Y \qquad F_S = ?$$

$$f_S(t) = f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_X(t-y)\, dy$$

דוגמה: נתון $X \sim Exp(\lambda)$ ו- $Y \sim Exp(\lambda)$ ב"ת

נקבל $S = X+Y \sim \Gamma(\alpha=2, \lambda)$

$$T \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \Leftrightarrow f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & , x>0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$T' \sim \Gamma(2, \lambda) \Leftrightarrow f_{T'}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x^1 e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y>0 \\ t-y>0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0<y<t$$

$$f_{X+Y}(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda y}\, \lambda e^{-\lambda(t-y)}\, dy = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t}\, dy = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t 1 \cdot dy = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t$$