

(7) בוחרים קוד  $n$  ספרתי באופן מקרי.

א. עבור  $n=10$ , העריכו את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה

מתוחלתו בלפחות 1.

ב. מה אורך הקוד המינימלי ( $n$ ) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%,

ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

התפלגות אחידה בפרט  $X \sim U_d[a, \dots, b]$

$$P(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, & k \in \Omega \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

דוגמה: הטלת קוביה הוסיפה  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

$$X \sim U_d[1, \dots, 6]$$

$X$  = תוצאת הטלה

$$P(X=k) = \frac{1}{6-1+1} = \frac{1}{6}$$

חופרים 8 מ"ס:  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$X_i \sim U_d[0, \dots, 9]$$

$X_i$  = ערך של ספרה  $i$  במספר

$$E(X_i) = \frac{0+9}{2} = 4.5$$

$$V(X_i) = \frac{(9-0+1)^2 - 1}{12} = \frac{99}{12} = \frac{33}{4}$$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i$$

$n=10$

הממוצע הנמצא של  $n$  תוצאות

$$E(\bar{X}_n) = E(X_i), \quad V(\bar{X}_n) = \frac{V(X_i)}{n} \quad \text{עבור } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ בלתי תלויים}$$

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq 1) = ?$$

סטיית בין הממוצע ל-1  
תוחלת

$$n=10 \Rightarrow E(\bar{X}_{10}) = E(X_i) = 4.5$$

$$V(\bar{X}_{10}) = \frac{V(X_i)}{10} = \frac{33}{4 \cdot 10} = \frac{33}{40}$$

פרט,  $X_i$  של התפלגות אחידה,  $\bar{X}_n$  של התפלגות אחידה

ע' יק נחזיק דאס  $E(\bar{X}_n)$ ,  $V(\bar{X}_n)$  און  $\sigma^2$  זיין ווארט, דאס וואס איר האט געקוקט דאס  $\sigma^2$  וואס איז געווען  $\sigma^2 = 33$ .

$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{V(X)}{c^2} \quad \text{צ'ב'עס: וואס איז געווען:}$$

$$P(|\bar{X}_{10} - E(\bar{X}_{10})| \geq 1) \leq \frac{V(\bar{X}_{10})}{1^2} = \frac{33}{40}$$

חוסטן וואס איז געווען (הערט)

ב. מה אורך הקוד המינימלי ( $n$ ) שיבטיח שבהסתברות של לפחות 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75?

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| < 0.75) \geq 0.95$$

$n = ?$

$$E(\bar{X}_n) = E(X_i) = 4.5 \quad \text{דאס (א') :}$$

$$V(\bar{X}_n) = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{33}{4n}$$

$$P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| < 0.75) = 1 - \underbrace{P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \geq 0.75)}_{\leq \frac{V(\bar{X}_n)}{0.75^2}}$$

$$\geq 1 - \frac{\frac{33}{4n}}{0.75^2} \geq 0.95$$

$\Downarrow$

$$\frac{33}{0.75^2 \cdot 4n} \leq 0.05$$

$$n \geq 293 \frac{1}{3}$$

$$\underline{\underline{n_{\min} = 294}}$$

# דוגמה 1.1

(1.8.8) 1.1.1

1.1.1)  $\mu=0$  ו- $\sigma^2=1$  ו- $X_1, X_2, \dots, X_n$  נ"ח

י- $\delta > 0$  ו- $|X_i| \leq 1$  ו- $V_n = \sum_{i=1}^n V(X_i)$  ו- $V(X) = \sigma^2(X)$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon\right) \leq \max\left(e^{-\frac{\epsilon^2}{4V_n}}, e^{-\frac{\epsilon}{2}}\right)$$

1.1.2

$$|X_i| = \frac{1}{i}$$

ו- $X_1, X_2, \dots, X_n \in [-1, 1]$  ו- $V(X) = \sigma^2(X)$

( $V(X) = \sigma^2(X)$ )  $\sigma^2(X_i) = 2$ ,  $E(X_i) = 0$  ו- $V(X) = \sigma^2(X)$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i < 4\right)$$

1.1.3

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i < 4\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq 4\right)$$

$$\leq \max\left(e^{-\frac{4^2}{4V_n}}, e^{-\frac{4}{2}}\right)$$

1.1.4

$$\geq 1 - \max\left(e^{-\frac{4^2}{4 \cdot 4n}}, e^{-2}\right) =$$

$$= 1 - \max\left(e^{-\frac{1}{n}}, e^{-2}\right)$$

$$\begin{aligned} n=1 & e^{-1} > e^{-2} \\ n=2 & e^{-\frac{1}{2}} > e^{-2} \\ & \dots \end{aligned}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{i=1}^n V(X_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n 2 = 4n \end{aligned}$$

## משפט 2 (מה שהיה בהרצאה)

נניח כי  $\{X_i\}_{i=1}^n$  סדרת מש"מ ב"ח בע"ע

$$P(X_i=1) = P(X_i=-1) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > a\right) < e^{-\frac{a^2}{2n}} \quad \text{זכ}$$

דוגמה 2:

החקר משיג מטרות/מטרה 200 מש"מ, כאשר בכל  
השעה הוא ידוע ו"ע"א אם יצא "ע"א", ו"ע"א ו"ע"א  
אם יצא "ז"א" במטרה.

דמיון חסר ע"י דהסתברות שהיווה הכל'ה של החקר  
ה-200 ההשגות 'ע"א של 100 ע"א.

פתרון: נציג  $X_i$  = זווה החקר ההשגה מס' i

$X =$  כולל הכל'ה -200 ההשגות

$$X = \sum_{i=1}^{200} X_i \quad \text{זכ}$$

$X_i$	1	-1
$P(X_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

הקורא של  $X_i$ :

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow V(X_i) = 1 - 0^2 = 1$$

$$E(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

הוכחה:

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i > a\right) < e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

$$P(X > 100) = P\left(\sum_{i=1}^{200} X_i > 100\right) < e^{-\frac{100^2}{2 \cdot 200}} =$$

ש"ה ז"א

$$= e^{-\frac{10000}{400}} = e^{-25}$$

$e^{-25}$  דהסתברות, חסר ע"י

עצרת הונוס: איז חסם עסטאגרוזי הי"ע יוטר 'ע'ע:

חסם עס מיקוק, חסם עס צימ'עס און  
חסם עס צינולף?