תרגול 10

החוק החלש של המספרים הגדולים

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

כאשר/ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}_n$ ממוצע המדגם בגודל n

$\mu_i=E(X_i)$

<u>תזכורת:</u> אם $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת ש"ה אז $E(\bar{X}_n)=E(X_i)$

$$V(\bar{X}_n)=\frac{V(X_i)}{n}$$

1. נתונה סדרה $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ של מ"מ ב"ת ש"ה בעלי תוחלת $E(X_i)=\mu$ ושונות $V(X_i)=\sigma^2$. נסמן: $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

<u>להוכיח:</u> הסדרה מקיימת את החוק החלש של המספרים הגדולים.

<u>הוכחה:</u>

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i}_{\bar{X}_n}-\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i}_{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu}\Big|\geq\varepsilon\Big)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\bar{X}_n-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\bar{X}_n-E(\bar{X}_n)\right|\geq\varepsilon\right)$$ לפי צ'בישב

$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{V(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{V(X_i)}{n}}{\varepsilon^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}=0$$

<u>תזכורת:</u> א'-שוויון צ'בישב:

$$P(|X-E(X)|\geq c)\leq\frac{V(X)}{c^2}$$

מ.ש.ל.

2. נתון: עבור $\lambda>0$, $n\geq1$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת כאשר $X_i\sim Poiss(\lambda)$ (לכל $1\leq i\leq n$)

נסמן: $\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

ⓔ להציב $P(\bar{X}_n > \lambda + \sqrt{\lambda})$ בסכום.

תזכורת התפלגות פואסון: $X \sim Poiss(\lambda)$ $X \sim P(\lambda)$

$X =$ מס' האירועים תוך יחידת זמן/ (אורך, שטח, נפח)

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\lambda =$ מס' ממוצע של אירועים מאותה היחידה.

הערה: אם $X_1, \dots, X_n$ מ"מ ב"ת $X_i \sim Poiss(\lambda_i)$ אז

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poiss\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

פתרון:

$$P(\bar{X}_n > \lambda + \sqrt{\lambda}) = P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i > \lambda + \sqrt{\lambda}\right) =$$

$X_i \sim Poiss(\lambda)$ ב"ת
$\Downarrow$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poiss(\lambda n)$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > \lambda n + \sqrt{\lambda} \cdot n\right) =$$

$$= 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le \lambda n + \sqrt{\lambda} \cdot n\right) = 1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n + \sqrt{\lambda} n \rfloor} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) =$$

$$= \underline{\underline{1 - \sum_{k=0}^{\lfloor \lambda n + \sqrt{\lambda} n \rfloor} e^{-\lambda n} \cdot \frac{(\lambda n)^k}{k!}}}$$

ⓑ להשתמש באי-שוויון מרקוב כדי למצוא חסם עליון ל-

$$P(\bar{X}_n > \lambda + \sqrt{\lambda})$$

תזכורת: אי-שוויון מרקוב:

$$P(|X| \ge c) \le \frac{E(|X|)}{c}$$

אם $X \ge 0$ אז

$$P(X \ge c) \le \frac{E(X)}{c}$$

$$X_i \sim Poiss(\lambda) \Rightarrow X_i \ge 0 \Rightarrow \bar{X}_n \ge 0$$

$$\underline{P(\bar{X}_n > \lambda + \sqrt{\lambda}) \le} P(\bar{X}_n \ge \lambda + \sqrt{\lambda}) \overset{\text{לפי מרקוב}}{\le} \frac{E(\bar{X}_n)}{\lambda + \sqrt{\lambda}} =$$

$$= \frac{E(X_i)}{\lambda + \sqrt{\lambda}} = \underline{\frac{\lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda}}}.$$

חסם עליון להסתברות:

$$\frac{\lambda}{\lambda + \sqrt{\lambda}}.$$

ד) להשתמש באי-שוויון צ'בישב כדי להעריך חסם עליון ל-

$$P(\bar{X}_n > \lambda+\sqrt{\lambda})$$

תזכורת: אי-שוויון צ'בישב: $P(|X-E(X)|\ge c) \le \frac{V(X)}{c^2}$

תזכורת: אם $X\sim Poiss(\lambda)$ אז $V(X)=\lambda,\ E(X)=\lambda$

$$P(\bar{X}_n > \lambda+\sqrt{\lambda}) = P(\bar{X}_n - \underbrace{\lambda}_{E(X_i)=E(\bar{X}_n)} > \sqrt{\lambda}) = P(\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) > \sqrt{\lambda}) \le$$

$$\le P(\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \ge \sqrt{\lambda}) \le P(\bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \ge \sqrt{\lambda} \cup \bar{X}_n - E(\bar{X}_n) \le -\sqrt{\lambda}) =$$

$$= P(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)| \ge \sqrt{\lambda}) \overset{\text{לפי צ'בישב}}{\le} \frac{V(\bar{X}_n)}{(\sqrt{\lambda})^2} = \frac{\frac{V(X_i)}{n}}{\lambda} =$$

$$= \frac{\cancel{\lambda}}{n\cancel{\lambda}} = \frac{1}{n}.$$

לכן החסם העליון להסתברות: $\frac{1}{n}$

התכנסות בהתפלגות

יהי X מ"מ ו- $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מ"מ. נגיד שסדרת Y_n **שואפת** **(מתכנסת) בהתפלגות** אם לכל $t\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(t) = F_X(t)$$

כלומר: $$P(Y_n\le t) = P(X\le t)$$

סימון: $$Y_n \xrightarrow{d} X$$

3) להוכיח: אם $X_n\sim B(n,\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{p})$ אז $X_n \xrightarrow{d} X$

כאשר $X\sim Poiss(1)$

תזכורת: $X\sim B(n,p) \Leftarrow P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot(1-p)^{n-k}$

$E(X)=n\cdot p \qquad V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$

הוכחה: $X\sim Poiss(\lambda)$, $P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

$$P(X_n=k) = \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k!} e^{-1} = e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} = P(X=k)$$

$X \sim Poiss(1)$

טיעון: (1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n-k)!}(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{\cancel{(n-k)!}\cdot n^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n}{n^k} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}^{k \text{ פעמים}}}{n^k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n^k} = 1$$

תזכורת: (2

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\right)^k} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}}_{e}\Big)^{-1} = e^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$P(X_n=k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X=k)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{t} P(X_n=k)}_{F_{X_n}(t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{\sum_{k=0}^{t} P(X=k)}_{F_X(t)}$$

$$F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$$

$$\Downarrow$$

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

מ.ש.ל.