

5.1 פ3

משתנה מקרי דו-ממדי בדיד

1. מטילים מטבע סימטרי 3 פעמים. נסמן ב- X את מספר העצים בשתי הטלות הראשונות, ב- Y את מספר העצים בכל שלוש הטלות. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X, Y) ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
2. אמנון ותמר בוחרים באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה, ספרה מבין הספרות 1,2,3,4. נגדיר X – מספר האנשים שבחרו במספר 2. Y – מספר האנשים שבחרו בספרה אי-זוגית.
 - א. מהי פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ?
 - ב. חשב $P(Y=0 | X=1)$.
 - ג. האם X ו- Y בלתי תלויים?
 - ד. האם X ו- Y בלתי מתואמים?
 - ה. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?
3. ביבול תפוזים 30% מהפירות הם פגומים. כדי לבדוק איכות של משלוח תפוזים מיבול זה, בודקים מתוכו תפוזים באופן מקרי, בזה אחר זה, ועם החזרה, עד שמגלים 2 תפוזים פגומים או עד שמוציאים 5 בסה"כ. יהיו: X – מספר התפוזים שנבדקו. Y – מספר התפוזים הפגומים שהוצאו.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות של X ושל Y .
 - ב. מצא את פונקציית ההסתברות של $X|Y=2$.
 - ג. חשב את $E(X|Y=2)$.
4. משה משתתף בשני משחקי מזל: במשחק הראשון עליו לסובב סביבון (הוגן) שעליו המספרים 0,1,2,3 ובמשחק השני הוא מטיל מטבע שעליו המספרים 0,1. יהיו: X – תוצאת ההטלה במשחק הראשון. Y – סכום תוצאות ההטלות בשני המשחקים.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו- Y ואת ההסתברויות השוליות.
 - ב. האם X ו- Y בלתי-תלויים?
 - ג. האם X ו- Y בלתי-מתואמים?
 - ד. חשב את מקדם המתאם בין X ו- Y .
 - ה. חשב $E(X|Y=0)$, $E(Y|X=1)$.
5. מטילים מטבע שלוש פעמים. יהיו X מספר העצים בשתי הטלות הראשונות ו- Y מספר העצים בשתי הטלות האחרונות.
 - א. מצא פונקציית ההסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השוליות של X , Y .
 - ב. האם X , Y בלתי תלויים?
 - ג. חשב את $P(X=Y)$.
 - ד. חשב את מקדם המתאם $\rho(X, Y)$.
 - ה. חשב את $Var(X-Y)$.
 - ה. חשב את ההסתברויות $P(X=2 | Y=1)$, $P(X=1 | Y=1)$, $P(X=0 | Y=1)$.
6. יהיו X ו- Y מ"מים פואסוניים בלתי תלויים עם פרמטרים λ_1 ו- λ_2 , בהתאמה.
 - א. מצא את פונקציית ההסתברות של מיימ $Z = X + Y$.
 - ב. מצא את פונקציית ההסתברות המותנית של X בהינתן $X + Y = n$ לכל $n = 1, 2, \dots$.
7. מטילים קובייה 20 פעמים. יהיו: X – מספר הפעמים שהתקבלה תוצאה זוגית. Y – מספר הפעמים שהתקבל 3. חשב את תוחלת ושונות הסכום $X+Y$.

8. נתונות שתי חפיסות קלפים, בכל אחת n קלפים ממוספרים מ-1 עד n . חפיסה אחת מסודרת בשורה לפי סדר עולה וחפיסה השנייה מסודרת באופן מקרי מתחת לחפיסה הראשונה. יהי X מספר התלכדויות. מצא את $E[X]$, $Var(X)$.

9. מטילים קובייה סימטרית שוב ושוב. יהיו X מספר הטלות עד לראשונה יתקבל ו- Y מספר ההטלות עד אשר לראשונה יתקבל מספר זוגי קטן מ-6.
 א. מצא פונקצית הסתברות משותפת של (X, Y) .
 ב. חשב $P(X + Y = 4)$.
 ג. מהי התפלגות של $W = \min(X, Y)$? חשב $E[X]$, $Var(X)$.

תשובות:

1.

$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$	0	1	2	$p_Y(y)$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	1/4	0	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$p_X(x)$	1/4	1/2	1/4	1

2. א.

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/16	1/4	1/4
1	1/8	1/4	0
2	1/16	0	0

ב. $\frac{1}{3}$ ג. תלויים ד. מתואמים ה. -0.577

3. א.

X/Y	0	1	2
2	0	0	0.09
3	0	0	0.126
4	0	0	0.1323
5	0.16807	0.36015	0.12348

ב.

$X Y=2$	2	3	4	5
$P(Y X=2)$	0.191	0.267	0.28	0.262

ג. 3.613

ד. 4.

X/Y	0	1	2	3	4
0	1/8	1/8	0	0	0
1	0	1/8	1/8	0	0
2	0	0	1/8	1/8	0
3	0	0	0	1/8	1/8

ב. תלויים ג. מתואמים ד. 0.913 ה. 1.5, 0

5. א.

$x \backslash y$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$P_X(x)$	1/4	1/2	1/4	1

ב. $\frac{1}{2}$ ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{1}{2}$ ה. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

6. א. $Z \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ ב. $B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$

7. $13\frac{1}{3}, 4\frac{4}{9}$

8. 1, 1

$$W \sim G\left(\frac{1}{2}\right) \text{ א. } P(X=k, Y=l) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{l-k-1} \frac{1}{18}, & k < l \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-l-1} \frac{1}{18}, & k > l \\ 0, & k = l \end{cases} \text{ א.9}$$

משתנה מקרי דו-ממדי בצורה

מ"מ דו-ממדי בצורה הוא משתנה מקרי נקודותי בעל שני ערכים
 (X, Y)

$$P_{X,Y}(u,v) = P(X=u, Y=v)$$

פונקציות הסתברות משותפת:

5. מטילים מטבע שלוש פעמים. יהיו X מספר העצים בשתי ההטלות הראשונות ו- Y מספר העצים בשתי הטלות האחרונות.
- א. מצא פונקציית הסתברות המשותפת ואת פונקציות ההסתברות השוליות של X, Y . האם מ"מ X, Y בלתי תלויים?
- ב. חשב את $P(X=Y)$.
- ג. חשב את מקדם המתאם $\rho(X,Y)$.
- ד. חשב את $Var(X-Y)$.
- ה. חשב את ההסתברויות $P(X=2|Y=1), P(X=1|Y=1), P(X=0|Y=1)$.

2-2
 דפים
 2-2
 דפים
 2-2
 דפים

X \ Y	ס"ס			ס"ס
	0	1	2	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4} = P(Y=0)$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2} = P(Y=1)$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} = P(Y=2)$
ס"ס	$\frac{1}{4}$ $P(X=0)$	$\frac{1}{2}$ $P(X=1)$	$\frac{1}{4}$ $P(X=2)$	

פונקציות
 ההסתברות
 המשותפת
 המקרה הזה
 זה הכמה
 הפעמים

ההסתברות שהקבלו בשום ע"ש הכמה ה/ הסתברות שום ע"ש

$$P_X(u) = \sum_y P_{X,Y}(u,y)$$

$$P_Y(v) = \sum_x P_{X,Y}(x,v)$$

הסתברות שום ע"ש

$$P_{X,Y}(u,v) = P_X(u) \cdot P_Y(v) \Leftrightarrow \text{נ"ח } X, Y$$

$$P(X=u \cap Y=v) = P(X=u) \cdot P(Y=v)$$

$$P_{X,Y}(2,0) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = P_X(2) \cdot P_Y(0)$$

במקרה זה: X, Y לא נ"ח.

ב. חשב את $P(X=Y)$.

$$P(X=Y) = P_{X,Y}(0,0) + P_{X,Y}(1,1) + P_{X,Y}(2,2) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

ג. חשב את מקדם המתאם $\rho(X,Y)$.

$$\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\underbrace{\sqrt{V(X)}}_{\sigma_X} \cdot \underbrace{\sqrt{V(Y)}}_{\sigma_Y}}$$

סטיית התקן

$$\text{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

covariance
זה מודד שילוב
הקשר הע"נאלי בין X ו- Y .

- $\infty < \text{cov}(X,Y) < \infty$



$$\text{cov}(X,Y) < 0$$

זכור: 'ע' קשר ע"נאלי
X ו- Y

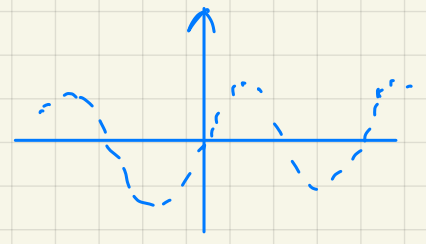


$$\text{cov}(X,Y) > 0$$

זכור: 'ע' קשר ע"נאלי
X ו- Y

$$\text{cov}(X,Y) = 0$$

זכור: 'ע' קשר ע"נאלי
X ו- Y



אם $0 = \text{cov}(X,Y)$ אז X, Y נ"ח (נ"ח) וכן

$$\begin{aligned} X, Y \text{ נ"ח} &\Leftrightarrow X, Y \text{ נ"ח} \\ X, Y \text{ נ"ח} &\Leftrightarrow X, Y \text{ נ"ח} \end{aligned}$$

חסי קורלציה.

5/12 3'30 N"V X p/e

נסח

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P_x(x_i)$$

נסח
הסתברות

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) \cdot P_x(x_i)$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P_x(x_i)$$

נסח $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$ נסח
Var(X) Variance

(ג'מ) $V(X) \geq 0$

$V(aX \pm b) = a^2 \cdot V(X)$

$V(b) = 0$

5/12 3'30 'נ'N -13 N"V (X,Y) p/e

$$E(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y x \cdot y \cdot P(x, y)$$

$E(X \cdot Y) = \cancel{\frac{1}{8} \cdot 0 \cdot 0}_{P_{XY}} + \cancel{\frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 0}_{P_{XY}} + \cancel{0 \cdot 2 \cdot 0} + \dots$ נסח

$+ \cancel{\frac{1}{8} \cdot 0 \cdot 1} + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 1 + \cancel{0 \cdot 0 \cdot 2} + \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{5}{4}$

:Y del X de ו'ס'ל הסתברות ו' ו'נ' (e) -

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2
P(Y)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 = E(Y)$ (נסח ו' X,Y)

$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = E(Y^2)$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2} = V(Y)$

$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{5}{4} - 1 \cdot 1 = \frac{1}{4}$

p"lס' X,Y \Leftarrow p'N'K'N' X,Y $\Leftarrow \text{cov}(X, Y) \neq 0$ נסח

מקדם ההתאם

מקדם ההתאם: $\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ הוא פרמטר שמדיר את חוזק הקשר הליניארי בין Y ו- X
 $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

כמה ע- $\rho(X,Y)$ קרוב ל-0 ככל הקשר הליניארי בין X,Y חזק יותר

$$\rho(X,Y) = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

במקרה של 1:

ד. חשב את $\text{Var}(X-Y)$

$$V(X-Y) = E((X-Y)^2) - (E(X-Y))^2 =$$

$$= E(X^2 - 2XY + Y^2) - (E(X) - E(Y))^2 =$$

$$= E(X^2) - 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 + 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$$

$$= V(X) - 2\text{cov}(X,Y) + V(Y) = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

נוסחאות ליניאריות:

$$V(aX \pm bY) = a^2 V(X) \pm 2ab \text{cov}(X,Y) + b^2 V(Y)$$

$$\text{cov}(X,a) = 0$$

$$\text{cov}(aX, bY) = a \cdot b \cdot \text{cov}(X,Y)$$

$$\text{cov}(X,X) = V(X)$$

$$\text{cov}(X+a, Y+b) = \text{cov}(X,Y)$$

$$\text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$$

$$\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X,Z) + \text{cov}(Y,Z)$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(aX+bY, cW+dU) &= a \cdot c \cdot \text{cov}(X, W) + a \cdot d \cdot \text{cov}(X, U) \\ &\quad + b \cdot c \cdot \text{cov}(Y, W) + b \cdot d \cdot \text{cov}(Y, U)\end{aligned}$$