Table of content

דו-מימד:

דוגמה: נתון מ"מ דו-מימדי (X,Y) עם פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{-\frac{x}{y}}\,e^{-y}}{y} & 0<x,\ 0<y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכח כי $E(X)=E(Y)$

פתרון:

(1) דרך ישירה:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} x\,\frac{e^{-\frac{x}{y}}\,e^{-y}}{y}\,dx\,dy=\overbrace{\int_0^{\infty} e^{-y}\left(\int_0^{\infty} x\,\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\right)dy}^{\star}=$$

$$=\begin{bmatrix} u=x & du=dx\\ dv=\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx & v=-e^{-\frac{x}{y}}\end{bmatrix}\underset{uv-\int v\,du}{=}\int_0^{\infty} e^{-y}\left[-xe^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{y}}\,dx\right]dy=\int_0^{\infty} e^{-y}[0+y]\,dy=$$

$$=\int_0^{\infty} ye^{-y}\,dy=1$$

$\star$ נשים לב ש- $\int_0^{\infty} e^{-y}\overbrace{\int_0^{\infty} x\,\underbrace{\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}}_{\shortparallel}\,dx}^{*}\,dy$

$T\sim Exp(\lambda)\Rightarrow f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}\qquad E(T)=\frac{1}{\lambda}$

פונקציית צפיפות של $T\sim Exp(\lambda)$ עם $\lambda=\frac{1}{y}$

והתוחלת של מ"מ כזה הוא $E(X)=\frac{1}{\lambda}$

ולכן $*$ זה בעצם חישוב התוחלת של מ"מ כזה

כלומר $y=\frac{1}{\frac{1}{y}}=*$

בך בסה"כ

$$\int_0^{\infty} e^{-y}\int_0^{\infty} x\,\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\,dy=\int_0^{\infty} e^{-y}\,\underbrace{y\,dy}_{E(T)}=\frac{1}{1}=1$$

מאותו אופן עבור $\lambda=1$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} y\,\frac{e^{-\frac{x}{y}}\,e^{-y}}{y}\,dx\,dy=\int_0^{\infty} e^{-y}\left(y\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx\right)dy=\int_0^{\infty} e^{-y}\,y\,1\,dy=1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\,dt=1$$

(2) דרך עקיפה: $E(X)=E[E(X|Y)]$

$E(X)=E[\underbrace{E(X|Y)}_{=h(Y)\ \text{מ"מ}}]$

$$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\underbrace{f_{X|Y=y}(x|y)}_{=?}\,dx$$

$$f_{X|Y=y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{\int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}\,dx}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}e^{-y}}{y}}{e^{-y}\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx}_{=1}}=\frac{\frac{e^{-\frac{x}{y}}\cancel{e^{-y}}}{y}}{\cancel{e^{-y}}}=\begin{cases}\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}, & x>0\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

קיבלנו ש: $X|Y=y\sim Exp(\lambda=\frac{1}{y})$

$E(X|Y=y)=y$

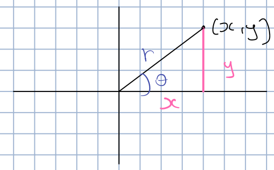
$E(X|Y)=Y$

דוגמה: נתונה פונקציית צפיפות של מ"מ בו-מימדי

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} & , x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

חשב: c , $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$

קואורדינטות פולריות:



$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$
$r > 0 \quad , \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$$I = \begin{vmatrix} x_r' & x_\theta' \\ y_r' & y_\theta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

פתרון:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

עבור θ , עבור r

$$1 = \iint_D \frac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy = c\iint \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy \underset{\text{מעבר לפולארי}}{=} c\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{r^2}}\,r\,dr\,d\theta \underset{\text{משפט אינטגרל חיצוני}}{=} c2\pi\int_0^1 r^{\frac{1}{2}}\,dr = c2\pi \cdot \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4c\pi}{3}$$

$$\frac{4c\pi}{3} = 1 \implies c = \frac{3}{4\pi}$$

תרגיל נוסף:

$$0 = E(X) \underset{\text{סימטריה}}{=} E(Y)$$

$$V(X) = E(X^2) - \underset{0}{E(X)} = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D x^2 \frac{c}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,dx\,dy \underset{\text{מעבר לפולארי}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos^2\theta \frac{c}{r^{\frac{1}{2}}}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= c\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \int_0^1 r^{\frac{5}{2}}\,dr \underset{*}{=} c\frac{2}{7}\pi = \frac{3}{14}$$

$*$ $2\cos^2\theta = 1 + \cos(2\theta)$

- בגלל הסימטריה מתקיים: $var(X) = var(Y)$

נתונים מ"מ ב"ת $X_1, \dots, X_n$ שווי התפלגות F_X

נסמן ב- $W = \max(X_1, \dots, X_n)$, $T = \min(X_1, \dots, X_n)$

שקול $\Rightarrow$ $F_T = ?$, $F_W = ?$

$$F_W(t) = P(W \le t) = P(\max(X_1, \dots, X_n) \le t) = P(X_1 \le t, X_2 \le t, \dots, X_n \le t) \underset{\text{ב"ת}}{=} P(X_1 \le t) \cdot P(X_2 \le t) \dots P(X_n \le t) =$$

$$= F_{X_1}(t)F_{X_2}(t)\dots F_{X_n}(t) \underset{\text{שווי התפלגות}}{=} F_X(t)F_X(t)\dots F_X(t) = (F_X(t))^n$$

סכום של מ"מ ב"ת:

$$\text{ב"ת}\quad \begin{matrix} F_X & X \\ F_Y & Y \end{matrix}$$

$$\text{מ"מ} \Rightarrow S = X+Y \qquad F_S = ?$$

עבור מ"מ בדיד:

$$\text{ב"ת}\quad \begin{matrix} P_X & X \\ P_Y & Y \end{matrix}$$

$$S = X+Y \,, \quad P_S = ?$$

$$P(S=t) = \sum_y P(X=t-y \,,\, Y=y) \underset{\text{ב"ת}}{=} \sum_y P(X=t-y)\,P(Y=y)$$

עבור מ"מ רציף:

$$\text{ב"ת}\quad \begin{matrix} F_X & X \\ F_Y & Y \end{matrix}$$

$$\text{מ"מ} \Rightarrow S = X+Y \qquad F_S = ?$$

$$f_S(t) = f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_X(t-y)\, dy$$

דוגמה: נתון $X \sim Exp(\lambda)$ ו- $Y \sim Exp(\lambda)$ ב"ת.

נוכיח $S = X+Y \sim \Gamma(\alpha=2,\, \lambda)$

$$T \sim \Gamma(\alpha, \lambda) \Leftrightarrow f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} & , x>0 \\ 0 & \text{, אחרת} \end{cases}$$

$$T' \sim \Gamma(2, \lambda) \Leftrightarrow f_{T'}(x) = \begin{cases} \lambda^2 x^1 e^{-2\lambda} & , x>0 \\ 0 & \text{, אחרת} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} y>0 \\ t-y>0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0<y<t \qquad X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x>0 \\ 0 & \text{, אחרת} \end{cases}$$

$$f_{X+Y}(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda y}\, \lambda e^{-\lambda(t-y)}\, dy = \int_0^t \lambda^2 e^{-\lambda t}\, dy = \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t 1 \cdot dy = \lambda^2 e^{-\lambda t}\, t$$

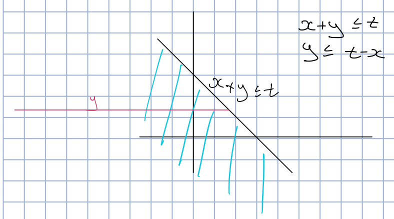
מ"מ דו-מימדי:

מתקיים $X \sim f_X$, $Y \sim f_Y$ בלתי תלויים אזי $f_S = ?$ כאשר $S = X+Y$

$$f_S = f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy$$ ⇐ קונבולוציה של f_X ו- f_Y וגם שווה ל- $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t-x)\, f_X(x)\,dx$

הוכחה:

$$F_{X+Y}(t) = P(X+Y \le t) = \iint_{x+y\le t} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy \underset{\text{ב"ת}}{=} \iint_{x+y\le t} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{t-y} f_X(x)\,dx\,dy =$$



$$= \int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy$$

$$f_{X+Y}(t) = \left(F_{X+Y}(t)\right)' \Rightarrow f_{X+Y}(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} F_X(t-y)\, f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \big(F_X(t-y)\, \underbrace{f_Y(y)}_{\text{קבוע לפי } t \text{ (נכנס לחישוב)}}\big)'_t\,dy =$$

כאשר נגזור את פונקציית ההתפלגות עפ"י t

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(t)\, \underbrace{f_X(t-y)}_{\text{נגזרת חיצונית}} \cdot \underbrace{1}_{\text{נגזרת פנימית}}\,dy$$

דוגמה: נתון כי: $X \sim f_X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, $Y \sim f_Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$ ב"ת

אזי $S = X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$. (נוכיח זאת)

תזכורת: $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & , x>0 \\ 0 & \text{אחרת.} \end{cases}$

$\begin{cases} x>0 \\ t-x>0 \end{cases}$ $\quad 0<x<t$

עבור $t>0$:

$$f_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(t-x)\,dx = \int_0^t \frac{\lambda^{\alpha} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\lambda^{\beta} e^{-\lambda(t-x)} (t-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,dx =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t x^{\alpha-1}(t-x)^{\beta-1}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{t} \Rightarrow x = ty \Rightarrow dx = t\,dy \\ x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=t \Rightarrow y=1 \end{array}\right] =$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 t^{\alpha-1} y^{\alpha-1} (t-ty)^{\beta-1}\, t\,dy = t^{\alpha+\beta-1} \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy =$$

$(t(1-y))^{\beta-1} = t^{\beta-1}(1-y)^{\beta-1}$, t לא תלוי ב- y

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1}$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = 1$$

"פונקציית בטא"

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

סיכום:

(1) אם $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$ ו- $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$ ב"ת , אזי $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$

(2) אם $X \sim N(\mu_X,\sigma_X^2)$ ו- $Y \sim N(\mu_Y,\sigma_Y^2)$ ב"ת , אזי $X+Y \sim N(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

(3) אם $X \sim B(n_1,p)$ ו- $Y \sim Bin(n_2,p)$ ב"ת , אזי $X+Y \sim Bin(n_1+n_2,p)$

(4) אם $X \sim P(\lambda_1)$ ו- $Y \sim P(\lambda_2)$ ב"ת , אזי $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

* יש אינסוף דוגמאות נוספות

פונקציה יוצרת מומנטים : Moment Generating Function (MGF)

הגדרה: תהיה מ"מ X, נגדיר הפונקציה $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$\underset{\text{m.g.f של } X \text{ בנקודה } t}{M_X(t)} = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} P(X=x) & \text{אם } X \text{ בדיד} - \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{אם } X \text{ רציף (מוחלט)} - \end{cases}$$

שימו לב ש- $M_X(t)$ היא פונקציה של t התלויה בהתפלגות של X

דוגמאות: מצא $M_X(t) = ?$

(1) $X \sim Ber(p) \iff X = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1-p \end{cases}$

X בדיד ולכן:

$$M_X(t) = e^{t\cdot 1}P(X=1) + e^{t\cdot 0}P(X=0) = e^t p + q$$

(2) $X \sim B(n,p) \iff P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

X בדיד ולכן:

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k q^{n-k} = (e^t p + q)^n$$

בינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

הערה: $Ber(p) \equiv Bin(n=1, p)$

שימו לב כי כאשר $X = \underbrace{Y_1 + \dots + Y_n}_{Y_i \sim Ber(p) \text{ ב"ת}}$

כלומר אפשר להסתכל על X כסכום של מ"מ ב"ת מתפלגים ברנולי.

(3) $X \sim Exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0 \iff f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

X רציף ולכן:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \frac{1}{\lambda - t}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x}(\lambda-t)\,dx}_{=1} = \left(\begin{matrix}\lambda - t > 0 \\ t < \lambda\end{matrix}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda$$

הגדרה: $E(X^k)$ נקרא מומנט מסדר k, $k = 1, 2, \dots$

דוגמה: עבור $k=1$ נקבל $E(X^1) = \underset{\text{תוחלת}}{E(X)}$

מדוע פונקציה יוצרת מומנטים נקראת כך?

נזכיר כי: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. אז נקבל:

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = E\left[t + \frac{tx}{1!} + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots\right] = 1 + \frac{t}{1!}E(X) + \frac{t^2}{2!}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \dots$$

$$M_x'(t) = 0 + 1 \cdot E(X) + \frac{2t}{2!}E(X^2) + \dots$$
$$M_x'(0) = E(X)$$

באופן דומה: $M_x''(0) = E(X^2)$

ובכלל באותו אופן $M_x^{(k)}(0) = E(X^k)$

מומנט מסדר k

דוגמה: $X \sim Exp(\lambda)$

נראה ע"פ פונקציה יוצרת מומנטים שמתקיים: $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ $\quad t < \lambda$

$$E(X) = (M_x(t))'\big|_{t=0} = (\lambda(\lambda-t)^{-1})'\big|_{t=0} = \lambda\frac{1}{(\lambda-t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = M_x''(0) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

פונקציה יוצרת מומנטים:

הגדרה: $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

המוגדרת ע"י:
$$M_X = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(t=x) & \text{בדיד } X - \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx & \text{רציף } X - \end{cases}$$

(1) $X \sim Ber(p) \Leftarrow M_X(t) = e^t p + q$

$q = p-1$, $t \in \mathbb{R}$

(2) $X \sim B(n,p) \Leftarrow M_X(t) = (e^t p + q)^n$

$t \in \mathbb{R}$

(3) $X \sim Exp(\lambda) \Leftarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$t < \lambda$

הגדרה: $K = 1,2,3,\ldots$ $E(X^K)$ ← מומנט מסדר K

★ $M_X^{(K)}(0) = E(X^K)$

נגזרת מסדר K
בנקודה $t=0$

תרגיל שוקי: האם פונקציה יוצרת מומנטים של מ"מ X יכולה
להיות מוגדרת $\cos(t)$ ל- $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$?

תשובה: לא!

נשים לב שמתקיים $E(X^{2K}) \ge 0$ תמיד

$E(X) = (M_X(t))'|_{t=0} = -\sin(t)|_{t=0} = 0$

$E(X^2) = (M_X(t))''|_{t=0} = -\cos(t)|_{t=0} = -1$ סתירה!

תכונות של פונקציה יוצרת מומנטים:

טענה: יהיו X, Y מ"מ בעלי פונקציה יוצרת מומנטים: $M_X(t)$, $M_Y(t)$ בהתאמה
אם $Y = aX + b$ אז $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

הוכחה:
$$M_Y(t) = E(e^{tY}] = E[e^{t(aX+b)}] = E[e^{tb} \cdot e^{taX}] = e^{tb} E[e^{atX}] = e^{tb} M_X(at)$$

פונקציה יוצרת מומנטים של X בנקודה at
אפשר להסתכל על זה גם כ-
פונקציה יוצרת מומנטים של aX בנקודה t

טענה: יהיו $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת בעלי פונקציות יוצרות המומנטים $M_{X_1}(t), \ldots, M_{X_n}(t)$ בהתאמה.
יהי $X = \sum_{i=1}^n X_i$
אז לכל נקודה t בה כל הפונקציות $M_{X_i}(t)$ קיימות, קיימת גם פונקציה יוצרת המומנטים של X
ומתקיים: $M_X(t) = M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=0}^n M_{X_i}(t)$

הוכחה:
$$M_X(t) = M_{\sum X_i}(t) = E[e^{t\sum_{i=1}^n X_i}] = E[e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \cdots e^{tX_n}] \underset{\text{ב"ת}}{=} \prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

★ נשים לב שמ"מ X בינומי הוא סכום של מ"מ ברנולי כלומר $\underset{\text{בינומי}}{X} = \sum_{i=1}^n Y_i$ $Y_i \sim Ber(p)$
ולכן אם נתון פונקציה יוצרת המומנטים שלהם, נקבל את הטענה שהוכחנו.

משפט: פונקציה יוצרת המומנטים קובעת באופן יחיד את ההתפלגות של מ"מ.

כלומר אם $M_X(t)=M_Y(t)$ לכל t בסביבת 0, אז מ"מ X ו-Y מתפלגים לפי אותה פונקציית התפלגות.

(הם לא שווים!! פשוט יש להם אותה פונקציית התפלגות - B, Exp, Bin וכדומה)

טענה: $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ב"ת, $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$,

הוכח כי $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ כאשר:

$\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$, $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2$

פתרון:

נעבוד לפי השלבים הבאים:

(1) עבור מ"מ $Z\sim N(0,1)$ נמצא $M_Z(t)$

(2) אם $Z\sim N(0,1)$ ו- $X=\sigma Z+\mu$ אז $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

(3) נמצא $M_X(t)$ עבור $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

(4) נוכיח את הטענה.

(1):

$$X\sim N(\mu,\sigma^2) \iff f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , -\infty<x<\infty$$

$$Z\sim N(0,1) \iff f_Z(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , -\infty<x<\infty$$

$$\bigstar\ M_X(t)=e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$$

$$M_Z(t)=E[e^{tZ}]=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Z(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2-t^2)}\,dx=$$

$$=e^{\frac{t^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx}_{=1}=e^{\frac{t^2}{2}}$$

פונקציית צפיפות של מ"מ שמתפלג נורמלי עם $\sigma^2=1$ ו- $\mu=t$

(2): כבר הוכחנו בעבר.

(3):

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$X=\sigma Z+\mu$

מהטענה נקבל את $M_X(t)$:

$$\bigstar\ M_X(t)=M_{\sigma Z+\mu}(t)\underset{\substack{b=\mu\\ a=\sigma}}{=}e^{t\mu}M_Z(\sigma t)=e^{t\mu}e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}=e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}+\mu t}$$

(4):

$$Y=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}a_iX_i}_{T}+b=T+b$$

$$M_T(t)=M_{\sum_{i=1}^{n} a_iX_i}(t)\underset{\text{עפ"י הגדרה}}{=}\prod_{i=1}^{n}M_{a_iX_i}(t)\underset{\substack{\text{עפ"י הטענה}\\ \text{עבור } b=0}}{=}\prod_{i=1}^{n}\underbrace{e^{0\cdot t}}_{=1}M_{X_i}(a_it)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(a_it)\underset{\substack{\text{מה שהוכחנו}\\ \text{ב-(3)}\\ \text{עם } t=a_it}}{=}\prod_{i=1}^{n}e^{\frac{\sigma_i^2a_i^2t^2}{2}+\mu_ia_it}=$$

$$=e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+t\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i}$$

קיבלנו ש: $T\sim N\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2\right)$

נחזור ל- Y:

$Y=\sum_{i=1}^{n}a_iX_i+b=T+b$ ולכן $M_Y(t)\underset{\text{עפ"י הטענה}}{=}e^{tb}M_T(t)$

נציב את $M_T(t)$ שקיבלנו:

$$M_Y(t)=e^{tb}M_T(t)=e^{tb}\cdot e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+t\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i}=e^{\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2+t\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_ia_i+b\right)}$$

תרגיל שוקו:

התפלגות $\chi^2(K)$ עם K דרגות חופש

מצג אחד: $T\sim \chi^2(K) \equiv \Gamma(\alpha=\frac{K}{2}\ ,\ \lambda=\frac{1}{2})$

מצג שני: $T = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_K^2 \sim \chi^2(K)$ $Z_i \sim N(0,1)$ ב״ת

הוכח את השקילות הנ״ל ע״י פונקציה יוצרת מומנטים.

מספר תכונות של $\chi^2(K)$:

(1) אם $X\sim \chi^2(K_1)$ ו- $Y\sim \chi^2(K_2)$ ב״ת

אז $S = X+Y \sim \chi^2(K_1+K_2)$

(2) אם $K\to\infty$ אז לפי משפט הגבול המרכזי, התפלגות $\chi^2(K)$

תהיה "דומה" להתפלגות נורמלית.

$T\sim\chi^2(K)$ אז $E(T)=K$ ו- $V(T)=\frac{K}{2}4 = 2K$

$$\frac{T-K}{\sqrt{2K}} \underset{K\to\infty}{\overset{\text{בקירוב}}{\sim}} N(0,1)$$

התפלגות $student(K)$ $\equiv$ התפלגות t עם K דרגות חופש

$X\sim student(K)$

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{K}}}\ ,\quad \left.\begin{matrix} Z\sim N(0,1) \\ Y\sim \chi^2(K)\end{matrix}\right\} \text{ב״ת}$$

אי שוויונים:

אי שוויון מרקוב: (עבור מ"מ $X\geq 0$)

יהי $X\geq 0$ מ"מ בעל תוחלת $\mu = E(X)$ סופית

אז לכל קבוע $a>0$ מתקיים: $P(X\geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

הוכחה:

נגדיר: $Y = \begin{cases} a & ; X\geq a \\ 0 & ; \text{אחרת} \end{cases}$

לכל $\omega\in\Omega$: $X(\omega) \geq Y(\omega)$ (כלומר שמ"מ X קטן/שווה ממ"מ Y פר לכל Ω)

$Y\leq X$

ברור כי $E(X) \geq E(Y)$

$E(X)= \;\; E(Y) = aP(X\geq a)+0P(X<a) = aP(X\geq a)$

כאשר קיבלנו $E(X) = aP(X\geq a)$

$\Downarrow$

$P(X\geq a) = \frac{E(X)}{a}$

אי שוויון צ'בישב:

יהי X מ"מ בעל $\mu = E(X)$ ו- $\sigma^2 = V(X)$ סופיים.

אז לכל $\varepsilon>0$ מתקיים: $P(|X-E(X)|\geq\varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$

הוכחה:

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon) = P(\omega\in\Omega : |X(\omega)-\mu|\geq\varepsilon) = P(\underbrace{(X-\mu)^2}_{Y\geq 0}\geq\varepsilon^2) \underset{\text{עפ"י מרקוב}}{\leq} \frac{E(Y)}{\varepsilon^2} = \frac{E[(X-\mu)^2]}{\varepsilon^2} \overset{\star}{=} \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

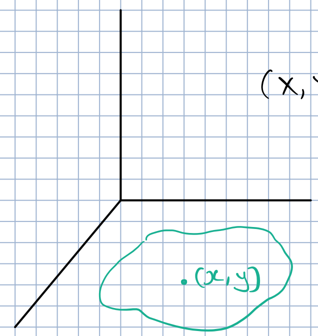
$\star$ $(X-\mu)^2 = X^2-2X\mu+\mu^2$

$E(X^2-2\mu X+\mu^2) = E(X^2)-2\mu E(X)+E(\mu^2) =$

$= E(X^2)-2E(X)E(X)+\mu^2 = E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2 =$

$= E(X^2)-E(X)^2 = V(X)$

משתנה מקרי רציף דו-מימדי:



$(X,Y)=(x,y)$

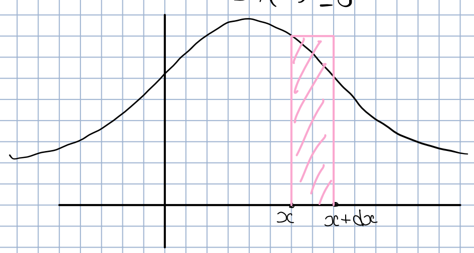
הערה: אם (X,Y) רציף $\Leftarrow$ $P((X,Y)=(x,y))=0$

X רציף $P(X=x)=0 : \forall x\in\mathbb{R}$

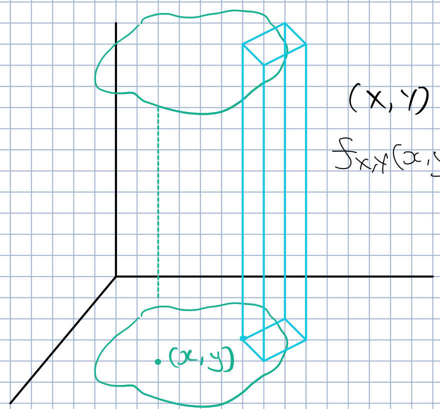
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

$\|$ שטח מתחת לפונקציית צפיפות

$f_X(x)\geq 0$



$P(X\in[x,x+dx])\approx f_X(x)\,dx$



$(X,Y)=(x,y)$

$f_{X,Y}(x,y)\geq 0$

$f_{X,Y}(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

כמו במקרה החד-ממדי: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$

טבלת הפונקציות עבור מ"מ דו-מימדי - בין מקרה בדיד ורציף:

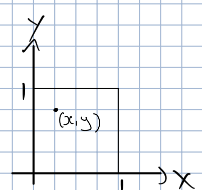
בדיד	רציף (מהחומר)
$\underbrace{P_{X,Y}(x,y)}$	$P_{X,Y}(x,y)=0 \quad \forall(x,y)$ $P(x\le X\le x+dx\,,\ y\le Y\le y+dy)\cong \underbrace{f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}$ זה נראה קרוב לנפח. (מאחר ואין מקומות שטח, אין נקודה נפח)
$F_{X,Y}(a,b)=P(X\le a\,,\ Y\le b)=\sum\limits_{\substack{y\\ x\le a\\ y\le b}}\sum\limits_{x}P(X=x\,,\ Y=y)$	$F_{X,Y}(a,b)=P(X\le a\,,\ Y\le b)=\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
$P_X(x)=\sum\limits_{y}P(X=x\,,\ Y=y)$	$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dy$ שוליים:
$P_{X\mid Y=y}(X=x\,,\ Y=y)=\frac{P(X=x\,,\ Y=y)}{P(Y=y)}$	$f_{X\mid Y=y}(x,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
X ו-Y ב"ת $\iff$ לכל x,y: $P(X=x\cap Y=y)=P(X=x)=P(Y=y)$	X ו-Y ב"ת $\iff$ לכל x,y: $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
$E(X)=\sum\limits_{x}\sum\limits_{y}x\,P(X=x\,,\ Y=y)$	$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
$E(X)=\sum\limits_{x}\sum\limits_{y}g(x)\,P(X=x\,,\ Y=y)$	$E(g(X))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$
$E(X)=\sum\limits_{x}\sum\limits_{y}g(x,y)\,P(X=x\,,\ Y=y)$	$E(g(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$

דוגמה לסעיף 8:

$$cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]=E[\underbrace{g(X,Y)}_{\text{מ"מ}}]$$

$$\mu_X=E(X)$$
$$\mu_Y=E(Y)$$
$$g(x,y)=(x-\mu_x)(y-\mu_y)$$
$$cov(X,Y)=E(XY)-\mu_X\mu_Y$$

דוגמה 1: פונקציית צפיפות משותפת של מ"מ (X,Y) הינה:



$$f_{X,Y}=\begin{cases}cx^2y^3 & ,\ \begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}\\ 0 & ,\ \text{אחרת}\end{cases}$$

מצא:

(א) $c=?$

(ב) $P(X+Y\le 1)$

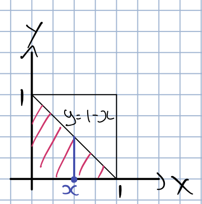
פתרון:

(א) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=1$

$$\int_0^1\int_0^1 cx^2y^3\,dx\,dy=c\int_0^1 x^2\int_0^1 y^3\,dy\,dx=c\int_0^1 x^2\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^1\right)dx=c\int_0^1 x^2\,\frac{1}{4}\,dx=\frac{c}{4}\int_0^1 x^2\,dx=c\,\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{c}{12}\implies c=12$$

(ב)



$$P(X+Y<1)=P(Y<1-X)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x}12x^2y^3\,dy\,dx=$$

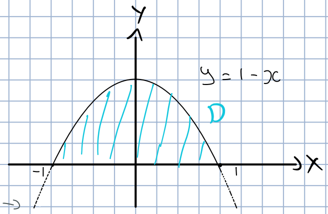
$$=\int_0^1 12x^2\left(\frac{y^4}{4}\Big|_0^{1-x}\right)dx=\int_0^1 3x^2(1-x)^4\,dx=\ldots=\frac{1}{15}$$

דוגמה 2: יהי (X,Y) מ"מ דו-מימדי המתפלג אחיד רציף מעל תחום

התחום ע"י:
$$\begin{cases} y \le 1-x^2 \\ -1 \le x \le 1 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

מצא $P(X,Y) = ?$

פתרון:



← כי $y \ge 0$ ולכן הקו
המקווקו לא נחשב

$X \sim U(a,b)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} &, x \in [a,b] \\ 0 &, \text{אחרת} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c &, (x,y) \in D \\ 0 &, \text{אחרת} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_D c\,dx\,dy = c\iint_D 1\,dx\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{1}{\text{שטח של } D} = \frac{3}{4}$$

$$\text{שטח של } D = \int_{-1}^{1}(1-x)^2\,dx = 2\int_0^1 (1-x^2)\,dx = 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} CORR(X,Y) = \rho(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} \\ cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \end{array}}$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(x,y) = xy$

$$E(XY) = E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \overbrace{f_{X,Y}(x,y)}^{=c}\,dx\,dy = c\iint_{(x,y)\in D} xy\,dx\,dy = c\int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} xy\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} x\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x^2}\right)dx = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} \underbrace{x}_{\text{אי זוגית}}\underbrace{(1-x)^2}_{\text{זוגית}}\,dx = 0$$

$$\text{זוגית} \cdot \text{אי-זוגית} = \text{אי זוגית}$$

$$\int_{-a}^{a} \text{אי זוגית} = 0 \qquad \text{לכן}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \overbrace{f_{x,y}(x,y)}^{=c}\,dx\,dy = c\iint_D x\,dy\,dx = \overbrace{c\int_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx}^{=0} = 0$$

מניעי מערכת צירים חדשה
שמה μ_x, μ_y הם נקודת ה.פ.