

תרגול 5-6

1. במשפחה ישנם n ילדים. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A — {במשפחה ישנם ילדים משני המינים}
 B — {יש לכל היותר ילדה אחת במשפחה}
האם המאורעות A ו- B תלויים?
2. אם A ו- B הינם מאורעות זרים, האם ניתן להגיד ש- A ו- B בהכרח:
א. הינם בלתי תלויים.
ב. הינם תלויים.
3. אם A ו- B הינם מאורעות בלתי תלויים, האם ניתן בוודאות להגיד ש- A ו- B הינם זרים?
4. יהי A מאורע בלתי תלוי ב- B . יהי A' מאורע כלשהו חלקי של A . האם גם A' בלתי תלוי ב- B ?
5. האם אי-תלות בזוגות גוררת אי-תלות?
6. אם A, B הינם בלתי תלויים ו- C, A הינם בלתי תלויים האם $B \cup C$ ו- A בלתי תלויים, כאשר:
א. C, B הם זרים?
ב. C, B אינם זרים?
6. נתבונן בבעית המזכירה הרשלנית עבור n מכתבים באשר $n \geq 3$. עבור $1 \leq i \leq n$ נסמן ב- C_i את המאורע שהמכתב ה- i לא הוכנס למעטפה ה- i . עבור $1 \leq i, j \leq n$ נסמן ב- $B_{i,j}$ את המאורע שהמכתב ה- i הוכנס למעטפה ה- j .
- 6.1. לכל $1 \leq i \neq i' \leq n$ המאורעות C_i ו- $C_{i'}$ אינם זרים אך הם ב"ת. לכל $1 \leq i, j, j' \leq n, j \neq j'$ המאורעות $B_{i,j}$ ו- $B_{i,j'}$ הינם ב"ת.
- 6.2. לכל $1 \leq i \neq i' \leq n$ המאורעות C_i ו- $C_{i'}$ אינם זרים ואינם ב"ת. לכל $1 \leq i, j, j' \leq n, j \neq j'$ המאורעות $B_{i,j}$ ו- $B_{i,j'}$ הינם ב"ת.
- 6.3. לכל $1 \leq i \neq i' \leq n$ המאורעות C_i ו- $C_{i'}$ אינם זרים אך הם ב"ת. לכל $1 \leq i, j, j' \leq n, j \neq j'$ המאורעות $B_{i,j}$ ו- $B_{i,j'}$ הינם זרים.
- 6.4. לכל $1 \leq i \neq i' \leq n$ המאורעות C_i ו- $C_{i'}$ אינם זרים ואינם ב"ת. לכל $1 \leq i, j, j' \leq n, j \neq j'$ המאורעות $B_{i,j}$ ו- $B_{i,j'}$ הינם זרים.
- 6.5. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.
7. לנסוי n תוצאות אפשריות; התוצאה i מתקבלת בהסתברות P_i לכל $i=1,2,\dots,n$, ומתקיים $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. כאשר מבצעים שתי חזרות בלתי תלויות על הנסוי, מהי ההסתברות שבפעם השנייה התקבלה תוצאה גדולה מאשר בפעם הראשונה?

8. יהי X מ"מ בעל פונקציית הסתברות

$$P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

מצא את:

א) c .

ב) $P(5 \leq X \leq 10)$.

9. יורים במטרה 5 פעמים. ההסתברות לפגוע במטרה בכל ירי היא 0.8 ללא תלות ביריות אחרות. מצא את ההסתברות לפגוע במטרה (א) לפחות 4 פעמים (ב) לפחות 4 פעמים בתנאי שיש פגיעה אחת לפחות.

10. צוללת יורה באניה n פצצות טורפדו שכל אחת פוגעת באניה בהסתברות p ללא תלות בפצצות האחרות. באניה יש ארבעה תאים. האניה תטבע אם לפחות שני תאים נפגעים. פצצת הפוגעת באניה "בוחרת" בכל אחד מהתאים בהסתברות שווה. מצא את ההסתברות שהאניה תטבע.

11. מטילים קובייה עד אשר תתקבל תוצאה זוגית בפעם הרביעית. מצא את ההסתברות שמספר ההטלות הכולל עד לכך (א) שווה 6 (ב) קטן מ 8.

12. יהי X מ"מ המפולג לפי ההתפלגות הגיאומטרית. הוכח את התכונה של חוסר זיכרון:

$$P(X > m + n | X > n) = P(X > m), \quad m, n \geq 1.$$

13. יהי מ"מ X בעל ערכים טבעיים בלבד ומקיים לתנאי

$$P(X > m + n | X > n) = P(X > m), \quad \text{עבור כל } m, n \text{ טבעיים.}$$

הוכח: $X \sim G(p)$ עם פרמטר p מסוים.

14. ראובן ושמעון משחקים את המשחק הבא. בכל סיבוב, כל אחד מהם מטיל קובייה שוב ושוב עד לקבלת המספר 6. המשחק מסתיים כאשר בסיבוב מסוים הם מטילים את הקובייה אותו מספר פעמים. יהי R מספר הסיבובים במשחק, X_i מספר ההטלות של ראובן בסיבוב ה- i , Y_i מספר ההטלות של שמעון בסיבוב ה- i . (לדוגמא, אם בסיבוב הראשון ראובן קבל 6 לראשונה בהטלה החמישית ושמעון בהטלה השנייה-עשרה, בסיבוב השני – ראובן בראשונה ושמעון בששית, בסיבוב השלישי – ראובן בעשירית ושמעון בשניה ובסיבוב הרביעי שניהם בתשיעית, אזי

$$R = 4, X_1 = 5, Y_1 = 12, X_2 = 1, Y_2 = 6, X_3 = 10, Y_3 = 2, X_4 = Y_4 = 9.$$

R מפולג:

א. בינומית.

ב. היפרגיאומטרית.

ג. גיאומטרית.

- ד. בינומית שלילית, אך לא גיאומטרית.
ה. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

לכל i מתקיים $P(Y_i = X_i + 1 | R > i) =$

ו. $\cdot \frac{1}{72}$

ז. $\cdot \frac{1}{36}$

ח. $\cdot \frac{1}{24}$

ט. $\cdot \frac{1}{12}$

- י. אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.

תרגול 6

משתנה מקרי (נ"מ)

משתנה מקרי נקרא הוא מ"מ העד ערכים (נקודות) באשר
ה' א' ערכים סמליים א' ערכים נוספים, וכך הערכים זלים כמובן.

$$P: \Omega \rightarrow [0, 1]$$

פונקציה הסתברות:

$$P_x(k) = P(X=k)$$

נ"מ \rightarrow x \rightarrow ערך

תכונות של הסתברות:

$$\forall k \in \mathbb{R}: P_x(k) \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_k P_x(k) = 1 \quad (2)$$

$$\forall k_1 \neq k_2 \in \mathbb{R}: P_x(k_1 \cup k_2) = P_x(k_1) + P_x(k_2) \quad (3)$$

תרגיל: נתונה פונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5-x}{10}, & x \in \{1, 2, 3, 4\} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

(1) להוכיח $f(x) \geq 0$ הסתברות.

x	1	2	3	4	אחרת
$f(x)$	0.4	0.3	0.2	0.1	0

(1) מתק"ר של סכמה:
($f(x) \geq 0$ לכל x)

$$f(1) = \frac{5-1}{10} = 0.4 > 0$$

$$f(3) = \frac{5-3}{10} = 0.2 > 0$$

$$f(2) = \frac{5-2}{10} = 0.3 > 0$$

$$f(4) = \frac{5-4}{10} = 0.1 > 0$$

$$\sum_x f(x) = 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0 = 1 \quad (2)$$

(3) מתן / סכמה.

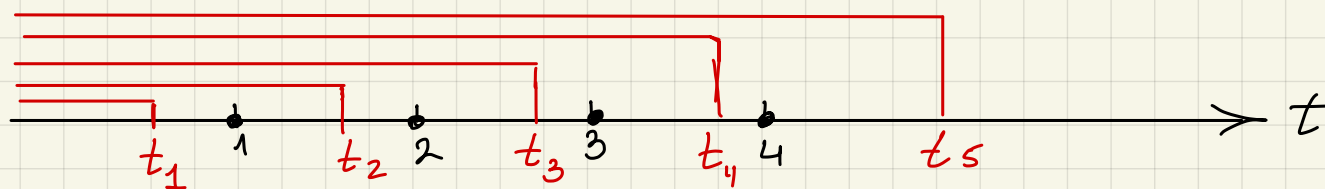
של (1), (2), (3): $f(x)$ הסתברות.

(2) סכמה א' פונקציה ההתפלגות המצטברת.

הצגה: של X נ"מ של ההתפלגות המצטברת:

$$\forall t \in \mathbb{R}: F_x(t) = P(X \leq t)$$

X	1	2	3	4	summe
f(x)	0.4	0.3	0.2	0.1	0



$$1) \underline{t < 1} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = 0$$

$$2) \underline{1 \leq t < 2} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X=1) = 0.4$$

$$3) \underline{2 \leq t < 3} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P((X=1) \cup (X=2)) \stackrel{\text{P'25}}{=} \\ = P(X=1) + P(X=2) = 0.4 + 0.3 = 0.7$$

$$4) \underline{3 \leq t < 4} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$$

$$5) \underline{t \geq 4} \Rightarrow F_X(t) = P(X \leq t) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \\ + P(X=4) = 0.4 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 1$$

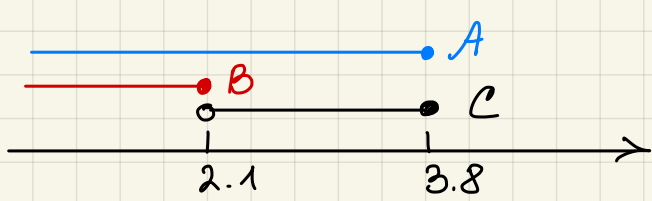
$$P(X \leq t) = F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 0.4, & 1 \leq t < 2 \\ 0.7, & 2 \leq t < 3 \\ 0.9, & 3 \leq t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$$

! beachte auch $F_X(t)$ oder (d)

$$P(X \leq 2 \frac{1}{5}) = F_X(\underbrace{2 \frac{1}{5}}_{2 \leq t < 3}) = 0.7 \quad (1)$$

$$P(X > 4.975) = 1 - P(X \leq 4.975) = 1 - F_X(\underbrace{4.975}_{4 \leq t}) = \\ = 1 - 1 = 0 \quad (2)$$

$$P(2.1 < X \leq 3.8) = P(X \leq 3.8) - P(X \leq 2.1) = \\ = F_X(\underbrace{3.8}_{3 \leq t < 4}) - F_X(\underbrace{2.1}_{2 \leq t < 3}) = 0.9 - 0.7 = 0.2 \quad (3)$$

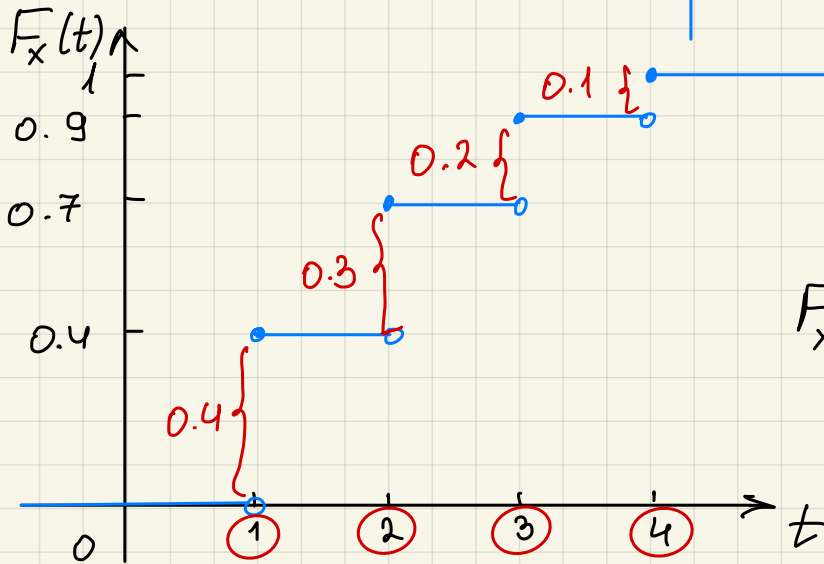


$$B \cap C = \emptyset$$

$$A = B \cup C$$

$$P(A) = P(B) + P(C)$$

$$P(C) = P(A) - P(B)$$



$$P(X \leq c) = F_x(c)$$

$$P(X > c) = 1 - F_x(c)$$

$$P(a < X \leq b) = F_x(b) - F_x(a)$$

$F_x(t)$ של X נכתב (3)

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 0.4, & 1 \leq t < 2 \\ 0.7, & 2 \leq t < 3 \\ 0.9, & 3 \leq t < 4 \\ 1, & t \geq 4 \end{cases}$$

הערות על $F_x(t)$

(1) ערכי $F_x(t)$ הם כ"פ' X ממוצע

(2) הערכים הנמוכים ביותר תמיד נמצאים בטווח $[0, 1]$, והערכים הגבוהים

הם (כ"פ קטן) - בטווח $[0, 1]$

(3) ניתן לספר $P_x(k)$ ע"י $F_x(t)$ כ"פ עונה של המדגם העדיוני

ע"י $P_x(k) = F_x(k) - F_x(k-1)$ שזה ההסתברות לקבל את k

$$P_x(k_n) = F_x(k_n) - F_x(k_{n-1})$$

8. יהי X מ"מ בעל פונקציית הסתברות

$$P(X=k) = \frac{c}{k(k+1)}, \quad k=1,2,\dots$$

מצא את:

א) c

ב) $P(5 \leq X \leq 10)$

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) \quad (א)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{k(k+1)} =$$

$$= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} =$$

סדר פירוק דשברים חלקיים

$$= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = c \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots \right)$$

$$= c \cdot 1 = c$$

$$\Rightarrow \underline{c=1}$$

$$P(X=k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$P(5 \leq X \leq 10) = P(X=5) + P(X=6) + \dots + P(X=10) \quad (ב)$$

$$= \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} = \frac{6}{55}$$

חידה 8: משחק נהג 5 אש"פ נבחרת מתוך

3 כלי נוסעים -! 5 כלי נוסעים.

נאמר X = כמות הכלי נוסעים במשחק.

סמכות פ' הסתברות של X .

נבחרת 5

פתרון: 3 כלי נוסעים
8
5 כלי נוסעים
אש"פ

$$1521 = \binom{8}{5}$$

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

/ 1
היחסים

כ'ס'ס'ס' →

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{0} \binom{5}{5}}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{4}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{30}{56}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{3}{3} \binom{5}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{10}{56}$$

התפלגות היפרגאומטרית

$$X \sim H(A, B, n)$$

A מס' א'ס'ס'ס'
מ'ס'ס'ס'

B מס' א'ס'ס'ס' נ'ס'ס'

n מס' א'ס'ס'ס' נ'ס'ס'.

$$X \sim H(N, D, n)$$

N מס' ס'ס'ס'ס'
D מס' א'ס'ס'ס' מ'ס'ס'ס'

אם יש קבוצה שס'ס'ס' א'ס'ס'ס' מ'ס'ס'ס' וא'ס'ס'ס' נ'ס'ס'ס'

ומתוכה נ'ס'ס'ס' n א'ס'ס'ס' א'ס'

$$P(X=k) = \frac{\binom{A}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

X = מס' א'ס'ס'ס' מ'ס'ס'ס' ש'ס'ס'ס'.

$$P(X=k) = \frac{\binom{D}{k} \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

היסקה נכונה

$$X \sim H(\underset{A}{3}, \underset{B}{5}, \underset{n}{5})$$

$$X \sim H(\underset{n}{8}, \underset{D}{3}, \underset{n}{5})$$