תרגול 2 : הסתברות בסיסית וקומבינטוריקה

1. כמה מילים באורך n אפשר ליצור מהאותיות A,B,C,D,E, כך ש-E תופיע מספר זוגי של פעמים?

2. בעזרת פונקציה יוצרת הוכח:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$(x+1)^{2n} = ((x+1)^n)^2$$

רמז: $(1+x)^{2n} = ((1+x)^n)^2$.

3. מטילים קוביית משחק 10 פעמים. מצא את ההסתברויות הבאות: א) "4" לא מתקבל אף פעם. ב) "4" מתקבל בדיוק 4 פעמים. ג) "4" מתקבל לפחות פעם אחת. ד) ... לפחות פעמיים. ה) ... לכל היותר פעמיים.

4. n אנשים עומדים בשורה, ביניהם איציק ושמוליק. מצא את ההסתברות שבין איציק ושמוליק יפרידו בדיוק k אנשים.

5. שחקן מרוויח \$1 כאשר בהטלת מטבע מתקבל "עץ" ומפסיד \$1 במקרה השני. לשחקן היו \$2n דולרים לפני המשחק. מצא את ההסתברות שאחרי 2n הטלות לשחקן יהיה אותו הסכום.

6. מטילים קובייה סימטרית 36 פעמים. מצא את ההסתברות לקבל כל מספר על הקובייה שש פעמים.

7. מניחים k צריחים על לוח שחמט בגודל $m \times n$ ($k \le m, n$). מצא אתה הסתברויות ככך ששום זוג צריחים אינם מאימים אחד על השני.

8. מוציאים באופן מקרי תת-קבוצה (אולי ריקה) מהקבוצה $\{1,2,...,n\}$ לפי הכלל הבא: עבור כל איבר מטילים מטבע; אם "עץ" אז האיבר שייך לתת-קבוצה, אחרת -- לא. לאחר שהתת-קבוצה נבחרה בוחרים לפי אותו תהליך את התת-קבוצה השניה. מהי ההסתברות שהשתי התת-קבוצות זרות ?

9. מטילים קוביה הוגנת עד לקבלה הראשונה של תוצאה "4". מהי ההסתברות שזה יקרה: א) בהטלה ה-10 ב) לפני ההטלה ה-10 ג) אחרי ההטלה ה-10 ?

10. נתון כי P(A)=P(B)=0.5. הוכח כי $P(AB) = P(\bar{A}\,\bar{B})$

11. נתון אוסף של שני מאורעות A, B . P(A)=α ; P(B)=β ; P(A∩B)=γ . מצא את ההסתברויות הבאות: א) קורים בדיוק K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2). ב) קורים לפחות K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2). ג) קורים לכל היותר K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2).

תשובות חלקיות:

$$(1)\quad \frac{5^n + 3^n}{2};$$

$$(4)\quad \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}; \quad (5)\quad \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}; \quad (6)\quad \frac{\binom{36}{6,6,6,6,6,6}}{6^{36}}; \quad (7)\quad \frac{\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!}{\binom{m\cdot n}{k}}; \quad (8)\quad \frac{3^n}{4^n};$$

10. נתון כי $P(A)=P(B)=0.5$. הוכח כי $P(AB)=P(\bar{A}\,\bar{B})$

$$P(A\cap B)=P(\bar A\cap \bar B)$$

דרך 1: פורמלית.

$$P(\bar A\cap\bar B)\overset{\text{דה מורגן}}{=}P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=\text{(כלל הכלה והדחה)}$$

$$=1-(\underbrace{P(A)}_{0.5}+\underbrace{P(B)}_{0.5}-P(A\cap B))=\cancel{1}-\cancel{1}+P(A\cap B)=P(A\cap B)$$

טבלת הסתברויות דו-מימדית (שימושית מהינתן 2 מאורעות A, B וקשר ביניהם כמו איחוד, חיתוך וכד')

	A	$\bar A$	סה"כ
B	$P(A\cap B)$ +	$P(\bar A\cap B)$	$=P(B)$ +
$\bar B$	+ $P(A\cap\bar B)$ +	+ $P(\bar A\cap\bar B)$	$=P(\bar B)$
סה"כ	$=P(A)$ +	$=P(\bar A)$	$=1$

דרך 2: ע"ס טבלת הסתברויות דו-מימדית.

	A	$\bar A$	סה"כ
B	P	$0.5-P$	0.5
$\bar B$	$0.5-P$	$0.5-(0.5-P)$ P	$1-0.5$ 0.5
סה"כ	0.5	$1-0.5$ 0.5	1

לפי טבלה ניתן לראות ש-

$$P(A\cap B)=P(\bar A\cap\bar B)=p$$

11. נתון אוסף של שני מאורעות A, B . $P(A)=\alpha$; $P(B)=\beta$; $P(A\cap B)=\gamma$. מצא את ההסתברויות הבאות: א) קורים בדיוק K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2). ב) קורים לפחות K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2). ג) קורים לכל היותר K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2).

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	γ	$\beta-\gamma$	β
$\bar{B}$	$\alpha-\gamma$	$1-\alpha-\beta+\gamma$	$1-\beta$
סה"כ	α	$1-\alpha$	1

נשלים משבצת של $P(\bar{A}\cap\bar{B})$

1) לפי שורה:

$1-\beta-(\alpha-\gamma) =$

$= 1-\beta-\alpha+\gamma =$

$= 1-\alpha-\beta+\gamma$

2) לפי עמודה:

$1-\alpha-(\beta-\gamma) = 1-\alpha-\beta+\gamma$

א) קורים בדיוק K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2).

$$P(K=0) = P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1-\alpha-\beta+\gamma$$

$$P(K=1) \overset{\text{זרים}}{=} P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = \alpha-\gamma+\beta-\gamma = \alpha+\beta-2\gamma$$

$$P(K=2) = P(A\cap B) = \gamma.$$

ב) קורים לפחות K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2).

$$P(K\geq 0) \overset{\text{זרים}}{=} P(K=0)+P(K=1)+P(K=2) = P(\Omega)=1$$

$$1-\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}+\cancel{\gamma} + \cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{2\gamma} + \cancel{\gamma}$$

$$P(K\geq 1) = P(K=1)+P(K=2) = \alpha+\beta-2\gamma+\gamma = \alpha+\beta-\gamma$$

$$P(K\geq 2) = P(K=2) = \gamma$$

ג) קורים לכל היותר K מאורעות מהאוסף (K=0,1,2).

$$P(K\leq 0) = P(K=0) = 1-\alpha-\beta+\gamma$$

$$P(K\leq 1) = P(K=0)+P(K=1) = 1-\cancel{\alpha}-\cancel{\beta}+\gamma+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-2\gamma = 1-\gamma$$

$$P(K\leq 2) = P(K=0)+P(K=1)+P(K=2) = P(\Omega) = 1$$

תרגול 4---3

1. מתוך הקבוצה $\{1,2,...,n\}$ בוחרים k תתי-קבוצות, לפי התהליך הבא: עבור כל איבר מטילים מטבע; אם "עץ" אז האיבר שייך לתת-קבוצה, אחרת-- לא. חוזרים על התהליך k פעמים לגבי כל איבר. מצא את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

א. כל תתי-קבוצות אלה זרות.

ב. כל תתי-הקבוצות זרות בזוגות.

2. 5 קלפים מתקבלות מחפיסה של 52 קלפים. מהי ההסתברות שיש לפחות קלף אחד מכל אחת מארבה הצורות?

3. הוכח את אי-השוויון Boole

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

למת הרציפות:

א. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ הינה סדרה יורדת של מאורעות ז"א $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ אזי

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

ב. . אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ הינה סדרה עולה של מאורעות ז"א $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ אזי

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

4. מהי ההסתברות שהספרה 5 לא מופיעה בשבר עשרוני אין-סופי $0.a_1a_2a_3\ldots \in [0,1]$?

5. נתונים $P(A) = 0.4, P(B) = 0.25, P(A \bigcap B) = 0.15$ מצא

$P(\bar{A} \mid B),\ P(B \mid A),\ P(\bar{A} \bigcap \bar{B})$.

6. מתוך קבוצה $\{1,2\ldots n\}$ בוחרים שתי תתי-קבוצות B,A לפי התהליך משאלה 1. מצא $P(|A| = k \cap |B| = m \mid A \cap B = \varnothing)$.

7. מתוך קבוצה $\{1,2\ldots n\}$ בוחרים באופן מקרי וללא החזרה מספרים x,y,z . מצא $P(x < z < y \mid x < y)$.

למת הרציפות:

א. אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ **הינה סדרה יורדת של מאורעות ז"א** $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ **אזי**

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

ב. . אם $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ **הינה סדרה עולה של מאורעות ז"א** $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ **אזי**

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \longrightarrow \infty} P(A_i).$$

4. מהי ההסתברות $\underbrace{\text{שהספרה 5 לא מופיעה בשבר עשרוני אין-סופי}}_{A\ (\text{סימון})}$ **?** $0.a_1a_2a_3\ldots \in [0,1]$

נגדיר: A_i = 5 לא יופיע עד למקום i (כולל)

כלומר: A_1: 5 לא יופיע עד מקום 1

A_2: 5 לא יופיע עד מקום 2

A_3: 5 לא יופיע עד מקום 3

אם 5 לא הופיע עד מקום $n+1$ אז הוא בוודאות לא יופיע עד מקום n כלומר: $A_n \supseteq A_{n+1}$

כלומר: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq \ldots$

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap \ldots) = P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

לפי למת רציפות (א'):

$$P(A) = \lim_{i\to\infty} P(A_i) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} P\left(\text{אין 5 ב-}i\text{ מקומות ראשונים}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^i = \underline{\underline{0}}$$

8. ישנן 5 תיבות כאשר 2 מסוג א, 2 מסוג ב ו 1 מסוג ג . בכל אחד מהתיבות ישנם 5 כדורים, כאשר החלוקה בין כדורים לבנים ושחורים, בכל סוג תיבה, נתון בטבלה :

סוג	כדורים לבנים	כדורים שחורים
א	2	3
ב	1	4
ג	4	1

- **באפן אקראי נבחרת תיבה אחת, וממנה מוציאים כדור אחד. מהי ההסתברות לכך שהכדור יהיה לבן?**
- **ידוע שהכדור שנבחר הינו לבן, מהי ההסתברות שהוא הוצא מתיבה מסוג א? ב? ג?**

9. בתיבה ישנם 3 כדורים לבנים ו- 2 שחורים.
א. מוציאים מתוכה מספר כדורים ללא החזרה. מהי ההסתברות p_k שהכדור השחור יופיע בפעם הראשונה, בהוצאה ה-k-ית (k=1,2,3,4) .
ב. מוציאים רק שני כדורים ללא החזרה. ידוע שאחד מהם לבן. מהי ההסתברות שגם השני לבן?

10. מטילים מטבע עד שהוא נופל בפעם הראשונה על עץ . לאחר מכן מטילים אותו שוב אותו מספר פעמים כמו קודם. מה ההסתברות לקבל בשלב השני k פעמים עץ, כאשר $k \geq 0$?

11. (לקוח מ-: ע. ארליך, מתמטיקה למדעים – הסתברות, אונ' ת"א). קרב היריות בין הטוב, הרע והמכוער נערך לפי הכללים הבאים: כל אחד יורה כדור אחד בתורו. הסתברות הפגיעה עבור הרע היא 1, עבור המכוער היא 0.8 ועבור הטוב – 0.5 . אולם לכל אחד ישנה הזכות להחליט שהוא יורה באוויר. מקיימים הגרלה לגבי סדר היורים. <u>אסטרטגית היריה:</u> אם תור הרע לירות, ואם גם הטוב וגם המכוער חיים, יירה הרע במכוער (כי הוא יותר מסוכן). אם תור המכוער לירות, וגם הטוב וגם הרע חיים, יירה המכוער ברע, מאותה סיבה. אם תור הטוב לירות, ושני האחרים חיים, הוא יירה באוויר, כדי שהמכוער והרע יהיו עסוקים זה בזה, וכשאחד מהם ייהרג, יגיע תור הטוב ותובטח לו הסתברות של לפחות 0.5 להישאר חי. מהי ההסתברות של כל אחד מהם להישאר בחיים?

12. שחקן דוגם מספר שלם אקראי בין 1 ל-2 בהסתברות שווה. אם המספר הנבחר הינו 1, אזי המשחק נגמר. אחרת, הוא דוגם מספר אקראי נוסף, בין 1 ל-3 בהסתברות שווה. באפן כללי, עבור $n \geq 2$, אם המספר הנבחר בשלב ה- $(n-1)$-י הינו 1, אזי המשחק נגמר. אחרת עוברים לשלב ה-n-י ובוחרים מספר אקראי מ בין 1 ל-$(n+1)$ בהסתברות שווה. נסמן ב- X את אורך המשחק, ז"א מספר הסבבים במשחק. (לדוגמא, נניח שבסיבוב הראשון התקבל המספר 2, בסיבוב השני התקבל 2, בסיבוב השלישי התקבל 4, בסיבוב הרביעי התקבל 3, ובסיבוב החמישי התקבל 1. אזי המשחק מסתיים עם $X=5$.)

חשב $P(X=2 \mid X \text{ זוגי})$.

הסתברות מותנית. כך ש-

$$\underbrace{P(\overbrace{A}^{}}_{\text{מותנית}}\,|\,\overbrace{\underbrace{B}_{\text{תנאי}}}^{\text{בהנתן}}) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$ נוסחה להסתברות מותנית

$$P(\bar{A}\,|\,B) = 1 - P(A\,|\,B)$$ הסתברות מותנית משלימה

7. מתוך קבוצה $\{1,2\ldots n\}$ בוחרים באופן מקרי וללא החזרה מספרים x,y,z . מצא $P(x<z<y\,|\,x<y)$.

$$P(x<z<y\,|\,x<y) = \frac{P(x<z<y \cap x<y)}{P(x<y)} =$$

$$= \frac{P(x<z<y)}{P(x<y)} \quad (*)$$

אם בוחרים 3 מספרים מקבוצת מספרים שונים אז הם בוודאות יהיו שונים. ואז המצב ההדדי שלהם:

$$\Omega = \{(x,y,z),\ (x,z,y),\ (y,x,z),\ (y,z,x),\ (z,x,y),\ (z,y,x)\}$$

$$(*) = \frac{\frac{1}{\cancel{6}}}{\frac{3}{\cancel{6}}} = \frac{1}{3}$$

שימו לב! תנאי זה מרחב מדגם מצומצם לפי דרישות התנאי. לכן אם בוחרים מאורע ממרחב המדגם המצומצם אז הוא כבר יהיה מותנה בתנאי הצמצום.

טיפים: איך לזהות תנאי בתרגילים מילוליים?

מילות מפתח:

1) נתון ש... , ידוע ש... , נמצא ש..., התברר ש...

בהינתן ש... , וכו'

דוגמה: מה ההסתברות שסטודנט מצט"ן בהינתן שיש לו משקפ"ים

P(מצטיי"ן|משקפ"ים)

2) אם... כאשר...

דוגמה: מה ההסתברות שסטודנט מצט"ן, אם יש לו משקפ"ים?

3) אם אומר נבחר מקבוצה חלקית (מצומצמת) אז הקבוצה החלקית היא התנאי.

דוגמה: מתוך כל המשקפופרים של הכיתה נבחר סטודנט. מה ההסתברות שהוא מצטיי"ן?

13) במחלקה למדעי האקראיות באוניברסיטת בן-גוריון רשומים $2n$ סטודנטים, מהם n בנים ו- n בנות. מזכירת המחלקה אמורה לשלוח לכל סטודנט מכתב המפרט את מצבו האקדמי. מזכירת המחלקה מתייחסת למכתבים אלה באותה צורה כמו בבעיית המזכירה הרשלנית שנידונה בכתה. נסמן ב- A את המאורע שכל אחד מהבנים מקבל מכתב המיועד לאיזשהו בן וכל אחת מהבנות מקבלת מכתב המיועד לאיזושהי בת. נסמן ב- B את המאורע שאף אחד מהבנים לא מקבל את המכתב המיועד לו וב- C את המאורע שאף אחת מהבנות לא מקבלת את המכתב המיועד לה.

a) $P(A)=\frac{1}{n!},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ **.**

b) $P(A)=\frac{1}{\binom{2n}{n}},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e^2}$ **.**

c) $P(A)=\frac{1}{\binom{2n}{n}},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\left(1-\frac{1}{e}\right)^2$ **.**

d) $P(A)=\frac{1}{n!},\quad P(B\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e},\quad P(B\cap C\mid A)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e^2}$

e) אף אחת מהטענות דלעיל אינה נכונה.