



Salı, 16 Temmuz 2024

Soru 1. Aşağıdaki şartı sağlayan tüm α gerçel sayılarını bulunuz:

Her n pozitif tam sayısı için

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

tam sayısı n sayısının bir katıdır. ($\lfloor z \rfloor$ ifadesi, z sayısından küçük veya ona eşit olan en büyük tam sayıyı göstermektedir. Örneğin, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ve $\lfloor 2 \rfloor = \lfloor 2.9 \rfloor = 2$.)

Soru 2. Aşağıdaki koşulu sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz:

(a, b) ikilisi için, öyle g ve N pozitif tam sayıları vardır ki, tüm $n \geq N$ tam sayıları için

$$\text{ebob}(a^n + b, b^n + a) = g$$

eşitliği sağlanır. ($\text{ebob}(x, y)$ ifadesi, x ve y tam sayılarının en büyük ortak bölenini göstermektedir.)

Soru 3. Pozitif tam sayılardan oluşan a_1, a_2, a_3, \dots sonsuz dizisi ve N pozitif tam sayısı verilmiştir. Bu dizide her $n > N$ için a_n terimi; a_1, a_2, \dots, a_{n-1} terimlerinden a_{n-1} terimine eşit olanların sayısına eşittir.

a_1, a_3, a_5, \dots ve a_2, a_4, a_6, \dots dizilerinin en az bir tanesinin bir yerden sonra periyodik olduğunu ispatlayınız.

(b_1, b_2, b_3, \dots) sonsuz dizisi; her $m \geq M$ için $b_{m+p} = b_m$ olacak şekilde p and M pozitif tam sayıları varsa *bir yerden sonra periyodiktir.*)



Çarşamba, 17 Temmuz 2024

Soru 4. ABC üçgeninde $AB < AC < BC$ ve iç teğet çember merkezi ile iç teğet çemberi sırasıyla I ile ω olsun. BC kenarı üzerinde C noktasından farklı X noktası, X noktasından AC doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. Benzer şekilde BC kenarı üzerinde B noktasından farklı Y noktası, Y noktasından AB doğrusuna çizilen paralel ω çemberine teğet olacak şekilde alınıyor. AI doğrusu, ABC üçgeninin çevrel çemberini ikinci kez $P \neq A$ noktasında kesiyor. AC ve AB kenarlarının orta noktaları sırasıyla K ve L olsun.

$\angle KIL + \angle YPX = 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.

Soru 5. Salyangoz Turbo, 2024 satır ve 2023 sütundan oluşan bir satranç tahtasında bir oyun oynuyor. Tahtanın 2022 adet birim karesinde birer canavar saklanmıştır. Başlangıçta Turbo, hangi birim karelerde canavar bulunduğunu bilmiyor fakat ilk ve son satır dışındaki her satırda tam olarak bir canavar bulunduğunu ve her sütunda en fazla bir canavar bulunduğunu biliyor. Turbo, ilk satırdan son satıra ulaşmak için birkaç deneme yapıyor. Her bir denemede, ilk satırdaki istediği bir birim kareden başlıyor ve her adımda, bulunduğu birim kareyle ortak kenar paylaşan komşu bir birim kareye geçiyor (Turbo'nun daha önceden ziyaret ettiği bir birim kareye dönme hakkı vardır). Turbo, içinde canavar bulunan bir birim kareye ulaştığı an o anki denemesi sonlanıyor ve yeni bir denemeye başlamak için ilk satıra geri ışınlanıyor. Canavarlar yer değiştirmiyor ve Turbo, daha önceden ziyaret ettiği birim karelerde canavar olup olmadığını aklında tutuyor. Turbo, son satırdaki herhangi bir kareye ulaştığı an oyun bitiyor.

n sayısının en küçük hangi değeri için Turbo, canavarların tahtadaki konumları nasıl olursa olsun en fazla n deneme yaparak oyunu bitirmeyi garantileyebilir?

Soru 6. Rasyonel sayıların kümesi \mathbb{Q} ile gösterilsin. Bir $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ fonksiyonu, her $x, y \in \mathbb{Q}$ için

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ve} \quad f(f(x) + y) = x + f(y)$$

eşitliklerinden en az birini sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna *iyi* diyelim.

Öyle bir c tam sayısının bulunduğunu gösteriniz ki her f iyi fonksiyonu için r rasyonel sayı olmak üzere $f(r) + f(-r)$ şeklinde ifade edilebilen birbirinden farklı rasyonel sayıların sayısı en fazla c dir. c sayısının alabileceği en küçük değeri bulunuz.