

單元二：「應用 MATLAB 於 RL 電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RL 電路之一階微分方程式，並且瞭解電感之能量轉換過程，亦即，RL 電路之充放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RL 電路，

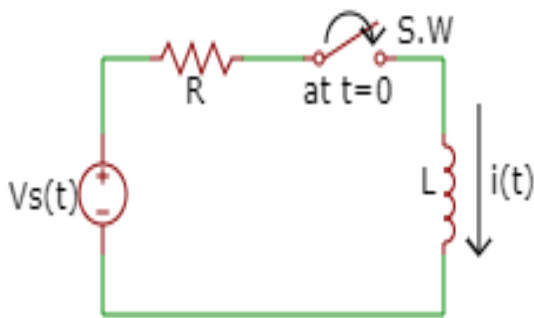


圖 1.RL 電路圖

假設，電感 L 的初始電流為 $i(t < 0) = I_s$ ，

電阻 R 之端電壓為 $V_R(t) = R \cdot i(t)$ ，

電感 L 之端電壓為 $V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ ，

在圖 1.之電路中(for $t > 0$)應用 KVL 的觀念，可以得到：

$$\begin{aligned} \text{總升壓} &= V_S(t) \\ &= \text{總降壓} \\ &= V_R(t) + V_L(t) \\ &= R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}, \end{aligned}$$

亦即，上述之圖 1. RL 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式：

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot V_S(t) \cdots (1)$$

範例：

請參閱圖 2.範例之電路圖所示，

在 $t < 0$ 的時段，圖 2.可以簡化成圖 3.

因為，開關 SW1.和 SW2.都是斷路(open)的，

因此，

可以知道電感之初值條件為：

$$i(t < 0) = 0A。$$

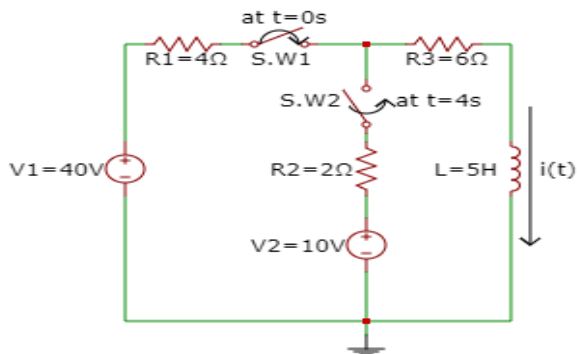


圖 2.範例之電路圖

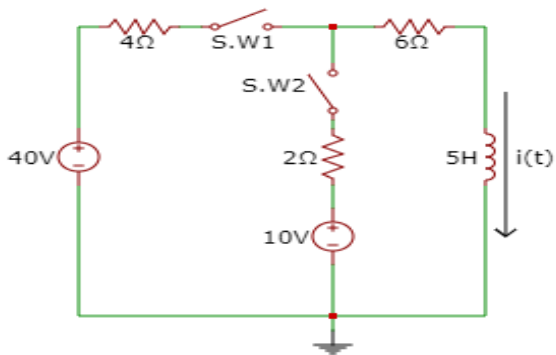


圖 3.簡化圖 2.後之等效電路(開關 SW1.和 SW2.都是斷路的)

在 $4s \geq t \geq 0s$ 的時段，

開關 SW1.是閉合(close)的；開關 SW2.仍然是斷路(open)的，

於是，圖 2.可以再簡化成圖 4.

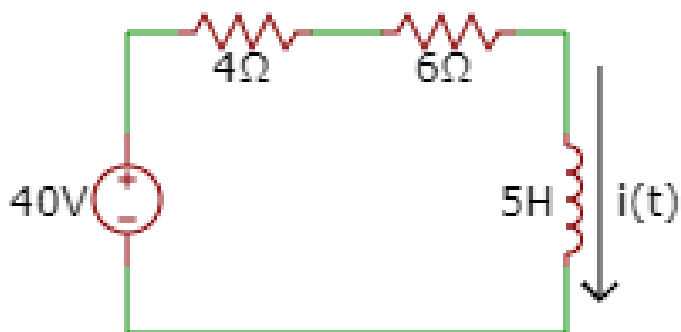


圖 4.簡化圖 2.後之等效電路(在 $4s \geq t \geq 0s$ 的時段)

從時域(time-domain)來看，

應用 KVL 的性質，可以得到：

$$V_1 = R_1 \cdot i(t) + R_3 \cdot i(t) + V_L(t) ,$$

$$\text{又 } V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} ,$$

則

$$V_1 = R_1 \cdot i(t) + R_3 \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} ,$$

亦即，此時之 RL 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式：

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{(R_1+R_3)}{L} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot V_1 \dots(2)$$

代入 $R_1 = 4\Omega$; $R_3 = 6\Omega$; $L=5H$; $V_1=40^v$,

可以得到： $\frac{di(t)}{dt} + 2 \cdot i(t) = 8$,

求解上式，則可以得知：

$$i(t) = 4 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t} , \text{ for } t \geq 0s .$$

從頻域(frequency-domain)來看，

圖 4.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以將圖 4.之電路轉換成圖 5.

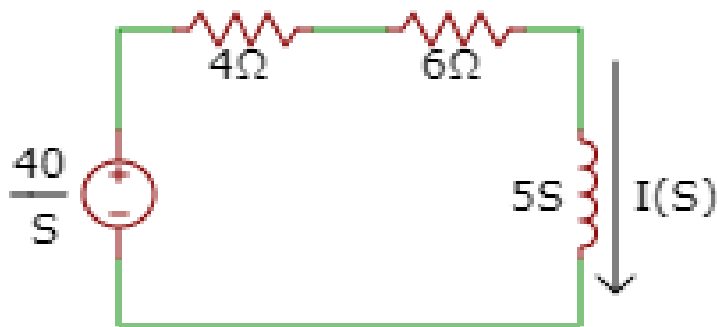


圖 5.將圖 4.經過拉氏轉換之等效電路

利用 KVL，可以得到：

$$\frac{40}{s} = 4 \cdot I(s) + 6 \cdot I(s) + 5 \cdot s \cdot I(s) = (10 + 5 \cdot s) \cdot I(s) ,$$

移項之後重新整理，我們可以得到：

$$I(s) = \frac{40}{s \cdot (5 \cdot s + 10)} = \frac{8}{s \cdot (s + 2)} = \frac{4}{s} + \frac{(-4)}{s + 2} ,$$

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

便可以求解出流經電感元件 L 的電流 $i(t)$ 為：

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t) = (4 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}), \text{ for } t \geq 0.$$

接下來，

在 $t \geq 4s$ 的時段，

開關 SW1 和 SW2 都是閉合(close)的，

因此，圖 2. 可以再簡化成圖 6.

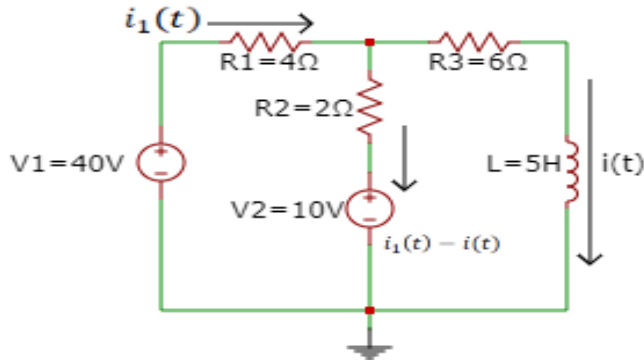


圖 6. 簡化圖 2. 後之等效電路(在 $t \geq 4s$ 的時段)

此時，電感電流 $i(t)$ 之初始值 $i(t=4) = (4 - 4 \cdot e^{-8})A \cong 4A$ 。

從時域(time-domain)來看，

圖 6. 中，左迴路應用 KVL 可以得到：

$$V_1 = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot [i_1(t) - i(t)] + V_2,$$

代入 $R_1 = 4\Omega$; $R_2 = 2\Omega$; $V_1 = 40^v$; $V_2 = 10^v$,

經過化簡之後，可以得到：

$$i_1(t) = 5 + \frac{i(t)}{3},$$

圖 6. 中，右迴路應用 KVL，則可以得到：

$$V_2 + R_2 \cdot [i_1(t) - i(t)] = R_3 \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

利用前述 $i_1(t) = 5 + \frac{i(t)}{3}$ 之關係式，

並且代入 $R_2 = 2\Omega$; $R_3 = 6\Omega$; $V_2 = 10^v$; $L = 5H$,

再經過化簡之後，可以得到：

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{22}{15} \cdot i(t) = 4, \dots(3)$$

求解上式則可以得到：

$$i(t) = \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15} \cdot t}, \quad \text{for } t \geq 4s;$$

或是

$$i(t) = \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15} \cdot (t-4)}, \quad \text{for } t \geq 0s。$$

從頻域(frequency-domain)來看，

圖 6.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以將圖 6.之電路轉換成圖 7.

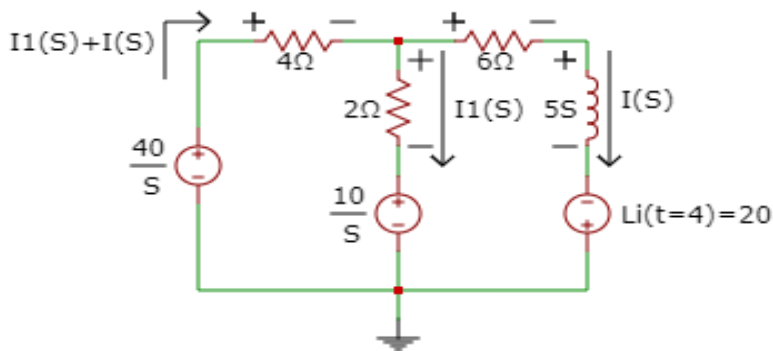


圖 7.將圖 6.經過拉氏轉換之等效電路

在圖 7.中，左迴路應用 KVL，可以得到：

$$\frac{40}{s} = 4 \cdot (I_1(s) + I(s)) + 2 \cdot I_1(s) + \frac{10}{s},$$

亦即，

$$6 \cdot I_1(s) + 4 \cdot I(s) = \frac{30}{s} \cdots (4)$$

在圖 7.中，右迴路應用 KVL，可以得到：

$$20 + \frac{10}{s} + 2 \cdot I_1(s) = 6 \cdot I(s) + 5 \cdot s \cdot I(s),$$

亦即

$$2 \cdot I_1(s) - (6 + 5 \cdot s) \cdot I(s) = -20 - \frac{10}{s} \cdots (5)$$

此時，(4)式 - (5)式 $\times 3$ ，則可以得到：

$$[4 + 3 \cdot (6 + 5 \cdot s)] \cdot I(s) = \frac{30}{s} + 60 + \frac{30}{s},$$

$$(15 \cdot s + 22) \cdot I(s) = \frac{60 \cdot s + 60}{s},$$

$$I(s) = \frac{60 \cdot s + 60}{s \cdot (15 \cdot s + 22)} = \frac{4 \cdot s + 4}{s \cdot (s + \frac{22}{15})} = \frac{(\frac{30}{11})}{s} + \frac{(\frac{14}{11})}{s + \frac{22}{15}},$$

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

便可以求解出流經電感元件 L 的電流 $i(t)$ 為：

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t) = \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15}t}, \text{ for } t > 4s$$

$$= \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15} \cdot (t-4)}, \text{ for } t > 0s。$$

整體而言，

$$i(t) = \begin{cases} 0A, & t < 0 \\ 4 \cdot (1 - e^{-2t})A, & 0 \leq t \leq 4s \\ \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15} \cdot (t-4)} A, & t \geq 4s \end{cases}$$

從上式可以知道：

- (1) 圖 2.範例之電路圖中的電感元件(for $t < 0$ 時，開關 SW1.和 SW2.都是斷路的時候)，其初始電流 $i(t < 0)$ 為 0 安培。
- (2) 接下來，讓開關 SW1.是閉合(close)的；開關 SW2.仍然是斷路(open)的時候，此時，流經電感元件的電流 $i(t)$ 逐漸升高，亦即，電感元件進入"充電"的狀態之中。
- (3) 後續，再讓開關 SW1.和 SW2.都是閉合(close)的時候，此時，流經電感元件的電流 $i(t)$ 轉而逐漸降低，亦即，電感元件進入"放電"的狀態之中。
- (4) 根據求解得到的電感元件電流 $i(t)$ 之方程式，我們可以知道，電感至多"充電"大約達到 $i(t)=4$ 安培，此時，SW2.閉合(close)的時候，反而使得電感元件無法繼續"充電"，而是轉為"放電"的狀態，而且，流經電感元件的電流 $i(t)$ 會"放電"到大約 $i(t)=\frac{30}{11}$ 安培。

3. MATLAB 程式設計

功能：求解代表圖 4.之一階微分方程式(2)式中流經電感電流 $i(t)$ 的函數。

輸入：(1)電阻值 R1
 (2)電阻值 R3
 (3)電感值 L
 (4)直流電源之電壓值 V1(t)
 (5)電感 L 的初始電流值 $i(t < 0)$ 。

輸出：電感 L 的電流值 $i(t)$ (在 $4s \geq t \geq 0s$ 的時段)，並且繪出 $i(t)$ 對時間參數 t 的波形圖。

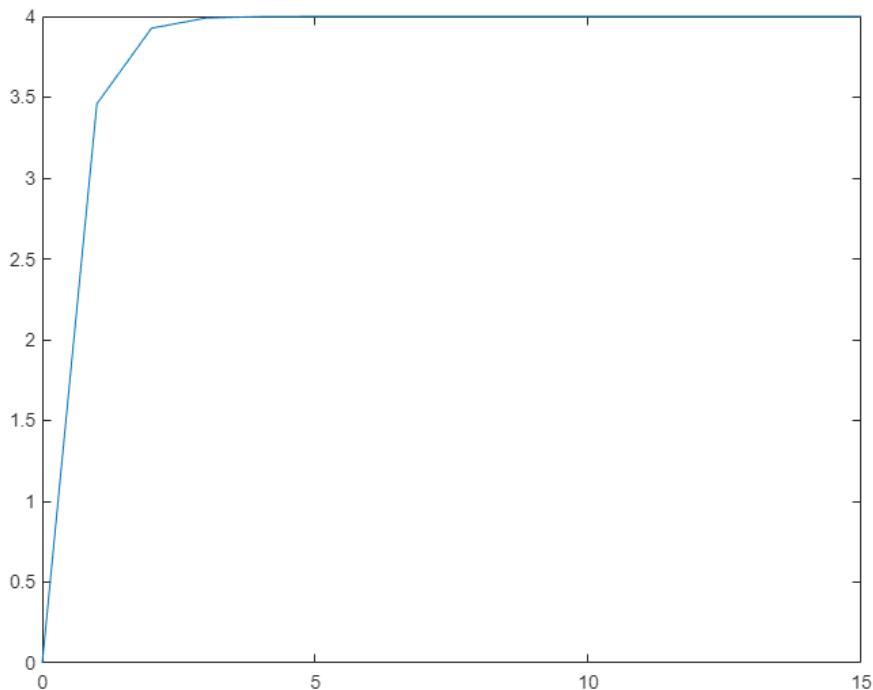
程式碼：

```
syms i(t) R R1 R3 L V1(t)
syms C1 C2 t
V1=40;R1=4;R3=6;L=5
R=R1+R3
```

```
eqn=diff(i,t)+(R/L)*i(t)==(1/L)*V1
cond=[i(0)==0]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:15
plot(t,4 - 4*exp(-2*t))
```

4. MATLAB 程式執行結果

ySol(t) =
4 - 4*exp(-2*t)



5. 練習題

- (1) 假設圖 1.中電感的初值電流為 $i(t \leq 0) = 10A$ 、 $V_S(t) = 15V$ ，請寫撰寫 MatLab 程式求解 $i(t) = ?$ for $t \geq 0$ ，並請繪出 $i(t)$ ，for $t \geq 0$ 之波形圖？
- (2) 同上題，但是 $V_S(t) = \cos(3 \times t)V$ 。
- (3) 參考圖 2. 請撰寫 MatLab 程式求解 $i(t) = ?$ for $t \geq 4s$ ，並請繪出 $i(t)$ ，for $t \geq 4s$ 之波形圖？