單元七：「應用 MATLAB 於 RLC 並聯臨界阻尼電路之計算與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RLC 並聯臨界阻尼(Critical-damping)電路之二階微分方程式，並且瞭解電容與電感之能量轉換過程，亦即，RLC 並聯臨界阻尼電路中電容與電感元件之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RLC 並聯電路，

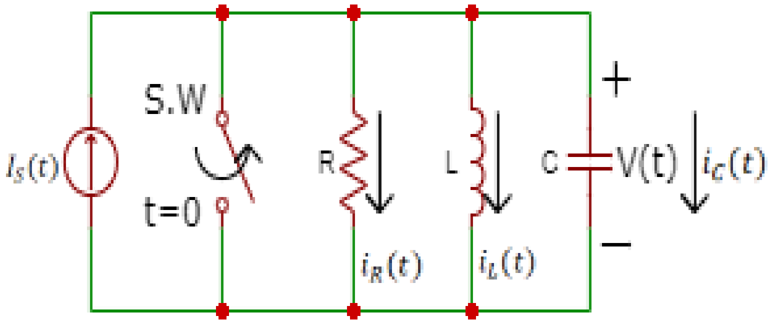


圖 1. RLC 並聯電路

令開關(SW)在$t=0$時閉合(close)之後，

在$t\geq 0$時，應用 KCL 可以得到：

$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=I_S(t)$，

但是，$V(t)=L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$，

而且 $i_R(t)=\frac{1}{R}\cdot V(t)=\frac{L}{R}\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$，

又 $i_C(t)=C\cdot\frac{dV_C(t)}{dt}=L\cdot C\cdot\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$，

故： $\frac{L}{R}\cdot\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)+L\cdot C\cdot\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}=I_S(t)$，

亦即，前述圖 1.之 RLC 並聯電路可以表示成下方之二階微分方程式：

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}+\frac{1}{R\cdot C}\cdot\frac{di_L(t)}{dt}+\frac{1}{L\cdot C}\cdot i_L(t)=\frac{1}{L\cdot C}\cdot I_S(t)\cdots(1)$$

範例：(無驅動電源之 RLC 並聯電路)

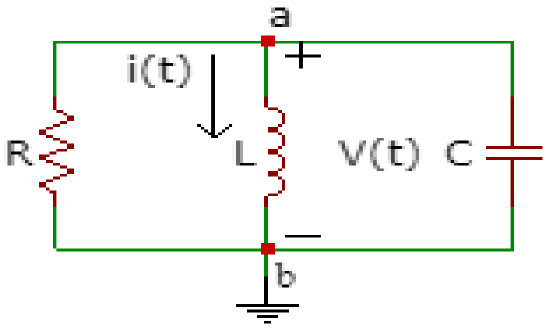


圖 2.範例之電路圖

從範例之電路圖 2.中，可以知道:

$i_R(t)=\frac{1}{R}\cdot V(t)$，

$i_L(t)=i_L(t=0)+\frac{1}{L}\cdot\int_0^t V(t')dt'$，

$i_C(t)=C\cdot\frac{dV(t)}{dt}$，

在圖 2.之 a 點應用 KCL，可以得到：

$i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$

亦即:

$$\frac{1}{R}\cdot V(t)+i_L(t=0)+\frac{1}{L}\cdot\int_0^t V(t')dt'+C\cdot\frac{dV(t)}{dt}=0\cdots(1)$$

假設，電感元件的初值電流 $i_L(t=0)=0A$，

則，針對(1)式微分之後，可以得到：

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}+\frac{1}{R\cdot C}\cdot\frac{dV(t)}{dt}+\frac{1}{L\cdot C}\cdot V(t)=0\cdots(2)$$

再令$t=0$，並且代入(1)式，

可知：

$$\frac{1}{R}\cdot V(t=0)+i_L(t=0)+C\cdot\frac{dV(t)}{dt}|_{t=0}=0$$

又

電感元件的初值電流 $i_L(t=0)=0A$，

故，可知:

$$\frac{dV(t)}{dt}|_{t=0}=-\frac{1}{R\times C}\cdot V(t=0)$$

亦即，範例之電路圖 2.的初始值條件為：$\begin{cases} V(t=0) \\ V'(t=0)=-\frac{V(t=0)}{R\cdot C}\cdots(3)\end{cases}$

綜合上述的討論，可以知道:

聯立求解(2)式和(3)式:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2}+\frac{1}{R\cdot C}\cdot\frac{dV(t)}{dt}+\frac{1}{L\cdot C}\cdot V(t)=0\cdots(2)$$

$$\begin{cases} V(t=0) \\ V'(t=0)=-\dfrac{V(t=0)}{R\cdot C}\cdots(3) \end{cases}$$

便可以從時域(time-domain)中，求解出電壓訊號 V(t)。

狀況(一)：過阻尼(Over-damping case)

電路條件：

電容初始電壓$V(t=0)=5V$，

電感初始電流$i(t=0)=0A$，

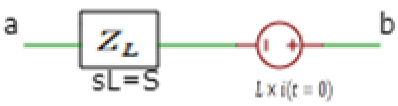
電阻元件值$R=2\Omega$，

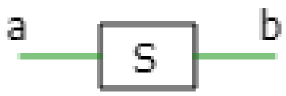
電感元件值$L=1H$，

電容元件值$C=10mF$，

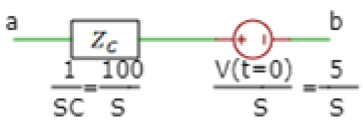
將電路中各個元件做"拉氏轉換"(Laplace Transform)：

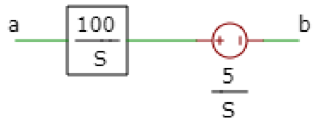
$R=2\Omega\xrightarrow{\mathcal{L}}R=2\Omega$，

$L=1H\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 

$=$ 

，

$C=10mF\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 

$=$ 

，

亦即：

時域中，在過阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路如圖 3.所示，

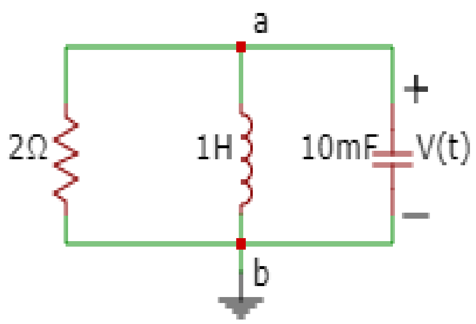


圖 3.過阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 3.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 4.

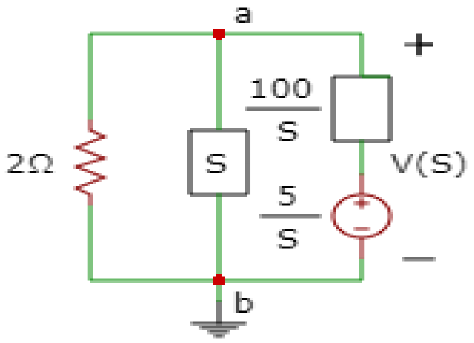


圖 4.經過"拉氏轉換"，圖 3.在頻域之等效電路

接下來，在圖 4.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V_{(S)}}{2}+\frac{V_{(S)}}{S}+\frac{V_{(S)}-\frac{5}{S}}{\frac{100}{S}}=0,$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{S}+\frac{S}{100}\right]=\frac{1}{20},$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{50\cdot S+100+S}{100\cdot S}\right]=\frac{1}{20}=\frac{5\cdot S}{100\cdot S},$$

移項整理之後，可以得到:

$$V_{(S)}=\frac{5\cdot S}{S^2+50\cdot S+100}=\frac{A}{S+25+5\sqrt{21}}+\frac{B}{S+25-5\sqrt{21}}$$

$$=\frac{\frac{25+5\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}}{S+(25+5\sqrt{21})}+\frac{\frac{-25+5\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}}{S+(25-5\sqrt{21})}=\frac{5.23}{S+47.913}+\frac{-0.23}{S+2.087},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，
則，在過阻尼(Over-damping case)之狀況下，

$\mathcal{L}^{-1}[V_{(S)}]=V(t)=5.23\cdot e^{-47.913\cdot t}-0.23\cdot e^{-2.087\cdot t}$，fort >0。

狀況(二)：臨界阻尼(Critical-damping case)

電路條件：

電容初始電壓$V(t=0)=5V$，
電感初始電流$i(t=0)=0A$，
電阻元件值$R=5\Omega$，
電感元件值$L=1H$，
電容元件值$C=10mF$，

時域中，在臨界阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路如圖 5.所示，

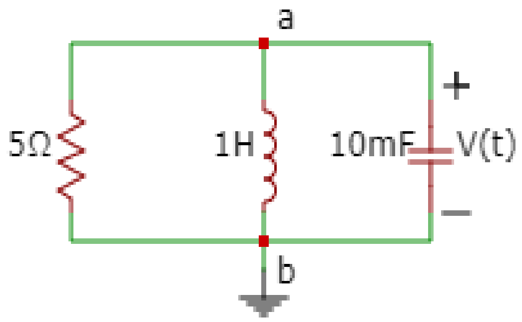


圖 5.臨界阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 5.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 6.

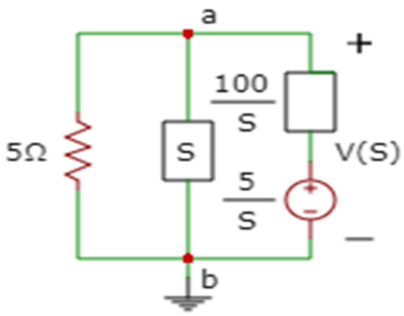


圖 6.經過"拉氏轉換"，圖 5.在頻域之等效電路

接下來，在圖 6.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V_{(S)}}{5}+\frac{V_{(S)}}{S}+\frac{V_{(S)}-\frac{5}{S}}{\frac{100}{S}}=0，$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{S}+\frac{S}{100}\right]=\frac{1}{20}，$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{20\cdot S+100+S^2}{100\cdot S}\right]=\frac{1}{20}=\frac{5\cdot S}{100\cdot S}，$$

移項整理之後，可以得到:

$$V_{(S)}=\frac{5\cdot S}{S^2+20\cdot S+100}=\frac{5\cdot S}{(S+10)^2}=\frac{5}{S+10}-\frac{50}{(S+10)^2}，$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，
則，在臨界阻尼(Critical-damping case)之狀況下，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[V_{(S)}\right]=V(t)=(5-50\cdot t)\cdot e^{-10\cdot t}，t\geq 0。$$

狀況(三)：欠阻尼(Under-damping case)
電路條件：

電容初始電壓$V(t=0)=5V$，
電感初始電流$i(t=0)=0A$，
電阻元件值$R=\frac{25}{4}\Omega$，
電感元件值$L=1H$，
電容元件值$C=10mF$，

時域中，欠阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路如圖 7.所示，

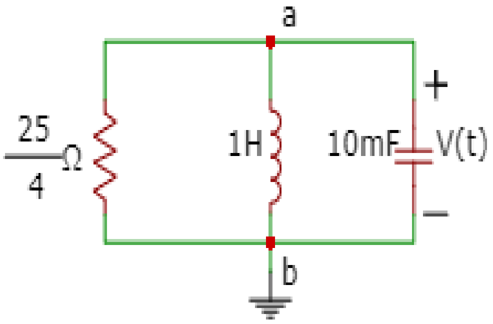


圖 7.欠阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 7.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 8.

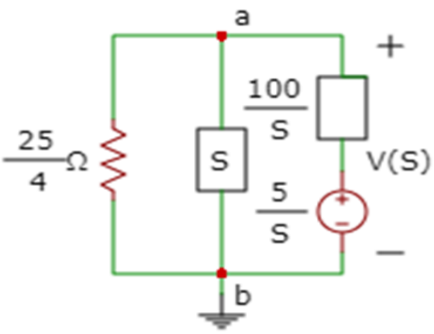


圖 8.經過"拉氏轉換"，圖 7.在頻域之等效電路

接下來，在圖 8.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V_{(S)}}{\frac{25}{4}}+\frac{V_{(S)}}{S}+\frac{V_{(S)}-\frac{5}{S}}{\frac{100}{S}}=0,$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{4}{25}+\frac{1}{S}+\frac{S}{100}\right]=\frac{1}{20},$$

$$V_{(S)}\cdot\left[\frac{16\cdot S+100+S^2}{100\cdot S}\right]=\frac{1}{20}=\frac{5\cdot S}{100\cdot S},$$

移項整理之後，可以得到:

$$V_{(S)}=\frac{5\cdot S}{S^2+16\cdot S+100}=\frac{5\cdot S}{(S+8)^2+6^2}=\frac{5\cdot(S+8)}{(S+8)^2+6^2}-\frac{40}{6}\times\frac{6}{(S+8)^2+6^2},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

則，欠阻尼阻尼(Under-damping case)之狀況下，

$\mathcal{L}^{-1}[V_{(s)}] = V(t) = [5 \cdot \cos(6 \cdot t) - \frac{20}{3} \cdot \sin(6 \cdot t)] \cdot e^{-8 \cdot t}$，for$t \geq 0$。

從前述之分析可以知道:(在臨界阻尼之狀況下)

(1) 圖 2.範例之 RLC 並聯電路圖中的電容元件，其初始電壓為 5 伏特。

(2) 圖 2.範例之 RLC 並聯電路，可以表示成電容端電壓 V(t)的二階微分方程式。

(3) 隨著電路的開始運作(t>0)，電容元件的端電壓$V_C(t)$=V(t)逐漸降低，亦即，電容元件進入"放電"的狀態之中。

(4) 根據求解得到的電容元件端電壓$V_C(t)$=V(t)之方程式，我們可以知道:在臨界阻尼(Critical -damping case)之電路條件下，電容至多"放電"到$V_C(t)$=V(t)=0 伏特。

(5) 和"過阻尼"(Over-damping)的狀況相互比較，"臨界阻尼"(Critical -damping case)的狀況，比"過阻尼"(Over-damping)的狀況，可以在比較短的時間內，讓電容之電壓"放電"到$V_C(t)$=V(t)=0 伏特的穩定末狀態。

3. MATLAB 程式設計

功能:求解代表圖 2.之二階微分方程式(2)式，在"臨界阻尼"(Critical -damping case)的狀況下之電容端電壓 Vc(t)=V(t)的方程式及對應之訊號波形。

輸入:(1)電容初始電壓 $V_C(t=0)$=V(t=0)

(2)電感初始電流 $i(t=0)$，

或是，

電容電壓微分之初始值 $\frac{dV(t)}{dt}|_{t=0} = -\frac{1}{R \times C} \cdot V(t=0)$

(3)電阻元件值R

(4)電感元件值L

(5)電容元件值C。

輸出:電容端電壓 Vc(t)=V(t)的方程式，並且繪出 Vc(t)=V(t)對時間參數 t 的訊號波形圖。

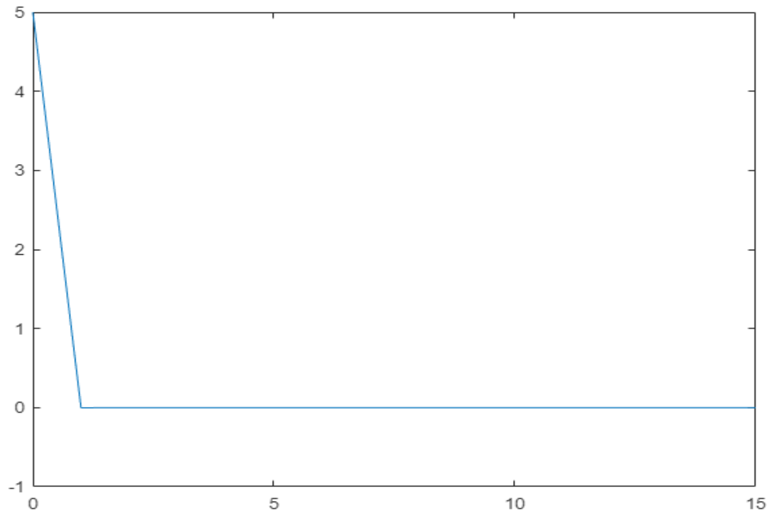
程式碼:

```
syms V(t) R L C i(t)
syms C1 C2 t
R=5;L=1;C=0.01
eqn=C*diff(V(t),t,2)+(1/R)*diff(V(t),t)+(1/L)*V(t)==0
DV=diff(V,t)
cond=[V(0)==5,DV(0)==-V(0)/(R*C)]
```

```
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:15
plot(t,-5.*exp(-10*t).*(10*t - 1))
```

4. MATLAB 程式執行結果

```
ySol(t) =
-5*exp(-10*t)*(10*t - 1)
```



5. 練習題

(1) 請撰寫 MatLab 程式求解圖 9.中電容之電壓方程式$V_C(t)$=V(t)，並且繪出電容電壓方程式$V_C(t)$=V(t)之波形？

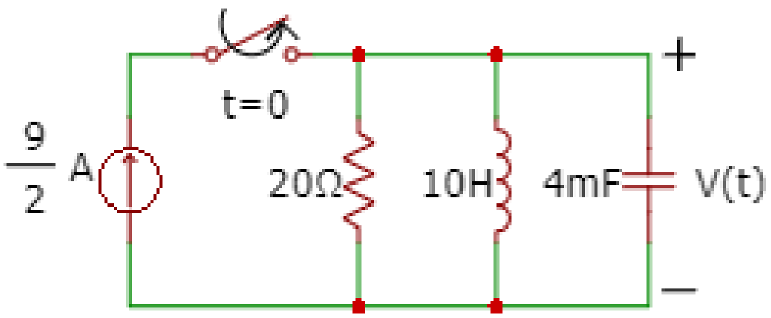


圖 9.練習題 1.的電路圖

解答：$V(t) = 150 \cdot \left(e^{-10 \cdot t} - e^{-25 \cdot t}\right) V$