

單元五：「應用 MATLAB 於 RLC 串聯欠阻尼電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RLC 串聯欠阻尼(Under-damping)電路之二階微分方程式，並且瞭解電容與電感之能量轉換過程，亦即，RLC 串聯欠阻尼電路中電容與電感元件之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RLC 串聯電路，

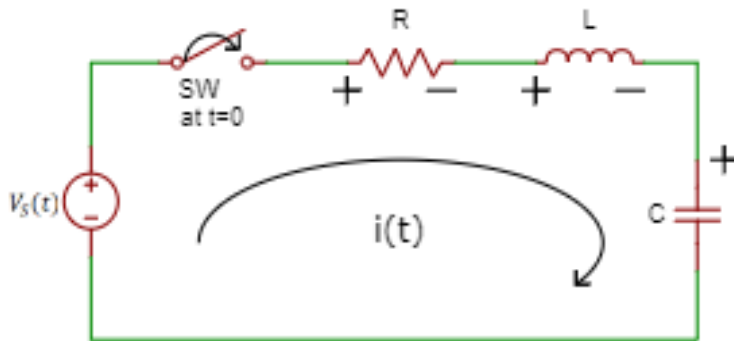


圖 1. RLC 串聯電路

令開關(SW)在 $t = 0$ 時閉合(close)之後，

$$V_R(t) = R \cdot i(t),$$

$$V_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt},$$

$$V_C(t) = V_C(t=0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(t') dt',$$

在 $t > 0$ 時，應用 KVL 性質，可以得知：

$$V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) = V_S(t),$$

亦即：

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + V_C(t=0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = V_S(t) \cdots (1)$$

也可以表示成：

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + V_C(t) = V_S(t),$$

$$\text{然而，} i(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt},$$

將 $i(t)$ 代入(1)式，可以得到：

$$R \cdot C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + V_C(t) = V_S(t)$$

亦即，前述圖 1.之 RLC 串聯電路可以表示成下方之二階微分方程式：

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + \left(\frac{1}{L \cdot C}\right) \cdot V_C(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot [V_S(t)] \cdots (2)$$

狀況(一)：過阻尼(Over-damping case)

電路條件：電源電壓 $V_S(t) = 24$ 伏特，

電容初始電壓 $V_C(t = 0) = 4$ 伏特，

電阻元件值 $R = 5\Omega$ ，

電感元件值 $L = 1H$ ，

電容元件值 $C = \frac{1}{4}F$ ，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + 4 \cdot V_C(t) = 96 \cdots (3)$$

$$\text{又 } i(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt},$$

在 $t = 0$ 時，

$$\frac{dV_C(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{C} \cdot i(t) \Big|_{t=0}$$

而電感 L 的存在，

使得 $i(t) \Big|_{t=0} = 0A$ ，

因此，可以得知：(電容電壓的初值條件)

$$V_C(t = 0) = 4V,$$

$$V'_C(t = 0) = 0V,$$

接下來對(3)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$$\mathcal{L}[V''_C(t) + 5 \cdot V'_C(t) + 4 \cdot V_C(t)] = \mathcal{L}[96]$$

$$[S^2 \cdot V_C(s) - S \cdot V_C(t = 0) - V'_C(t = 0)] + 5 \cdot [S \cdot V_C(s) - V_C(t = 0)] + 4 \cdot V_C(s) = 96 \cdot \frac{1}{S}$$

$$V_C(s) \cdot [S^2 + 5 \cdot S + 4] = \frac{96}{S} + 4 \cdot S + 20 = \frac{4S^2 + 20 \cdot S + 96}{S}$$

移項整理之後，可以得到：

$$V_C(s) = \frac{4S^2 + 20 \cdot S + 96}{S \cdot (S^2 + 5 \cdot S + 4)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1} + \frac{C}{S+4}$$

其中， $A = 24$ ； $B = -\frac{80}{3}$ ； $C = \frac{20}{3}$ ，

亦即，

$$V_C(s) = \frac{24}{s} - \frac{80}{3} \times \frac{1}{s+1} + \frac{20}{3} \times \frac{1}{s+4}，$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] &= 24 + \frac{20}{3} \cdot e^{-4t} - \frac{80}{3} \cdot e^{-t} \quad \text{for } t \geq 0 \\ &= V_C(t) \quad \text{for } t \geq 0\end{aligned}$$

狀況(二)：臨界阻尼(Critical-damping case)

電路條件：電源電壓 $V_S = 24$ 伏特，

電容初始電壓 $V_C(t=0) = \frac{24}{5}$ 伏特，

電阻元件值 $R = 4\Omega$ ，

電感元件值 $L = 1H$ ，

電容元件值 $C = \frac{1}{4}F$ ，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + 4 \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + 4 \cdot V_C(t) = 96 \cdots (4)$$

電容電壓的初值條件為： $V_C(t=0) = \frac{24}{5}V$ ，

$$V_C'(t=0) = 0V，$$

接下來，對(4)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$$\mathcal{L}[V_C''(t) + 4 \cdot V_C'(t) + 4 \cdot V_C(t)] = \mathcal{L}[96]，$$

$$[S^2 \cdot V_C(s) - S' \cdot V_C(t=0) - V_C'(t=0)] + 4 \cdot [S \cdot V_C(s) - V_C(t=0)] + 4 \cdot V_C(s) = 96 \cdot \frac{1}{s}，$$

$$V_C(s) \cdot [S^2 + 4 \cdot S + 4] = 96 \cdot \frac{1}{s} + \frac{24}{5} \cdot S + \frac{96}{5} = \frac{24}{5s} \cdot S^2 + \frac{96}{5s} \cdot S + \frac{480}{5s}，$$

移項整理之後，可以得到：

$$V_C(s) = \frac{\frac{24}{5} \cdot S^2 + \frac{96}{5} \cdot S + \frac{480}{5}}{S(S^2 + 4 \cdot S + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+2)^2} = 24 \cdot \frac{1}{s} - \frac{96}{5} \cdot \frac{1}{(s+2)} - \frac{192}{5} \cdot \frac{1}{(s+2)^2}，$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

$$\text{則 } \mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = V_C(t) = 24 - \frac{96}{5} \cdot e^{-2t} - \frac{192}{5} \cdot t \cdot e^{-2t}， \quad \text{for } t \geq 0，$$

$$= 24 - \left(\frac{96}{5} + \frac{192}{5} \cdot t\right) \cdot e^{-2t}， \quad \text{for } t \geq 0。$$

狀況(三)：欠阻尼(Under-damping case)

電路條件：電源電壓 $V_S = 24$ 伏特，

電容初始電壓 $V_C(t=0) = 8$ 伏特，

電阻元件值 $R = 2\Omega$ ，

電感元件值 $L = 1H$ ，

電容元件值 $C = \frac{1}{4}F$ ，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + 4 \cdot V_C(t) = 96 \cdots (5)$$

初值條件為： $V_C(t=0) = 8V$

$$V_C'(t=0) = 0V$$

接下來，對(5)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 V_C(t)}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + 4 \cdot V_C(t)\right] = 96 \cdot \mathcal{L}[1],$$

$$[s^2 \cdot V_C(s) - s' \cdot V_C(t=0) - V_C'(t=0)] + 2 \cdot [s \cdot V_C(s) - V_C(t=0)] + 4 \cdot [V_C(s)] = \frac{96}{s},$$

$$V_C(s) \cdot [s^2 + 2 \cdot s + 4] = \frac{96}{s} + 8 \cdot s + 16 = \frac{8 \cdot s^2 + 16 \cdot s + 96}{s},$$

移項整理之後，可以得到：

$$V_C(s) = \frac{8 \cdot s^2 + 16 \cdot s + 96}{s \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 4)} = \frac{A}{s} + \frac{B \cdot s + C}{s^2 + 2 \cdot s + 4} = \frac{24}{s} + \frac{-16 \cdot s - 32}{s^2 + 2 \cdot s + 4} = \frac{24}{s} - \frac{16 \cdot (s+1)}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2} - \frac{16}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

$$\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = V_C(t) = 24 - [16 \cdot \cos(\sqrt{3} \cdot t) + \frac{16}{\sqrt{3}} \cdot \sin(\sqrt{3} \cdot t)] \cdot e^{-t}, \text{ for } t \geq 0.$$

從前述之分析可以知道：

- (1) 圖 1.範例之 RLC 串聯電路圖中的電容元件，其初始電壓為 8 伏特。
- (2) 圖 1.範例之 RLC 串聯電路，可以表示成電容端電壓 $V_C(t)$ 的二階微分方程式。
- (3) 隨著開關 SW 的位置由 open 撥到 close，電容元件的端電壓 $V_C(t)$ 逐漸升高，亦即，電容元件進入"充電"的狀態之中。
- (4) 根據求解得到的電容元件端電壓 $V_C(t)$ 之方程式，我們可以知道：在欠阻尼(Under-damping case)之電路條件下，電容"充電"會超過 $V_C(t)=24$ 伏特而達到大約 27 伏特，經過一段時間的電壓振盪現象，電容元件端電壓 $V_C(t)$ 之值會逐漸收斂穩定達到 $V_C(t)=24$ 伏特。

3. MATLAB 程式設計

功能: 求解代表圖 1.之二階微分方程式(2)式，在"欠阻尼"(Under-damping case)狀況下(對應到二階微分方程式(5)式)之電容端電壓 $V_c(t)$ 的方程式及對應之訊號波形。

輸入: (1)電源電壓 $V_s(t)$
 (2)電容初始電壓 $V_c(t=0)$
 (3)電容初始電壓一次微分值 $V'_c(t=0)$
 (4)電阻元件值 R
 (5)電感元件值 L
 (6)電容元件值 C 。

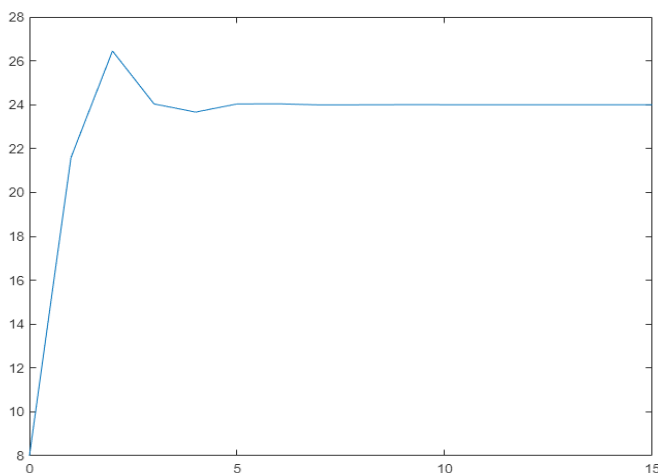
輸出: 電容端電壓 $V_c(t)$ 的方程式，並且繪出 $V_c(t)$ 對時間參數 t 的訊號波形圖。

程式碼:

```
syms Vc(t) R L C Vs(t) Vo
syms C1 C2 t
Vs=24;Vo=8;R=2;L=1;C=0.25
eqn=diff(Vc,t,2)+(R/L)*diff(Vc,t)+(1/(L*C))*Vc(t)==(1/(L*C))*Vs
DVc=diff(Vc,t)
cond=[Vc(0)==8,DVc(0)==0]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:15
plot(t,24 - (16*3^(1/2).*exp(-t).*sin(3^(1/2)*t))/3 - 16.*exp(-t).*cos(3^(1/2)*t))
```

4. MATLAB 程式執行結果

$ySol(t) =$
 $24 - (16*3^{1/2}*exp(-t)*sin(3^{1/2}*t))/3 - 16*exp(-t)*cos(3^{1/2}*t)$



5. 練習題

- (1) 圖 1. 中如果將電路之驅動電源壓 $V_S(t)$ 更改成 $V_S(t) = \cos(2 \cdot t)$ 伏特，請撰寫 MatLab 程式求解電容之電壓方程式 $V_C(t)$ ，並且繪出電容電壓方程式 $V_C(t)$ 之波形？
- (2) 請撰寫 MatLab 程式求解圖 2. 中電容之電壓方程式 $V_C(t)$ ，並且繪出電容電壓方程式 $V_C(t)$ 之波形？

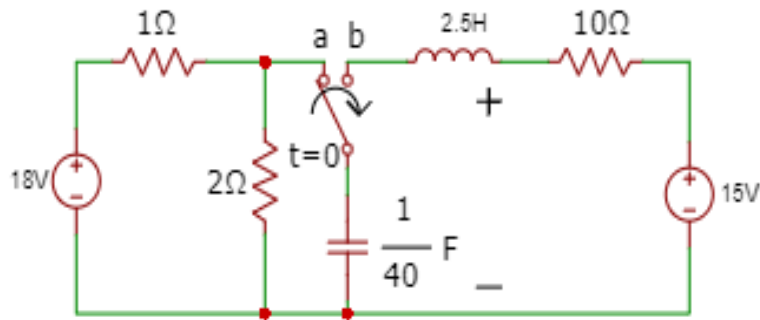


圖 2. 練習題 2. 的電路圖