單元一：「應用 MATLAB 於 RC 電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RC 電路之一階微分方程式，並且瞭解電容之能量轉換過程，亦即，RC 電路之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RC 電路，

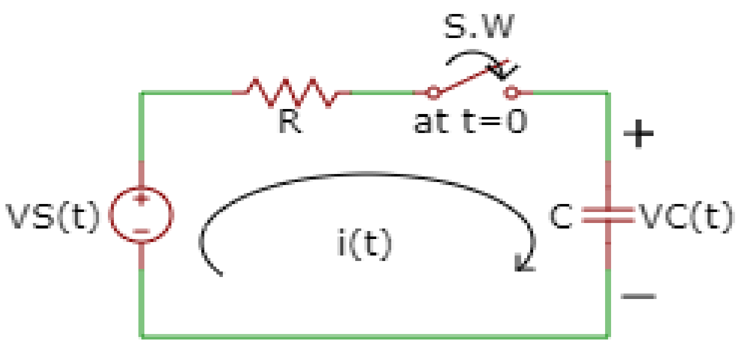


圖 1. RC 電路

假設，電容 C 的初始電壓為 $V_C(t=0)$，

電阻 R 之端電壓為 $V_R(t) = R \cdot i(t)$，

電容 C 之端電壓為 $V_C(t) = V_C(t=0) + \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'$，

其中，流過元件電容 C 的電流為 $i(t) = C \cdot \frac{d}{dt}V_C(t)$。

在圖 1.之電路中(for t>0)應用 KVL 的觀念，可以得到：

總升壓 $= V_S(t)$

$=$總降壓

$= V_R(t) + V_C(t)$

$= R \cdot i(t) + V_C(t)$

$= R \cdot C \cdot \frac{d}{dt}V_C(t) + V_C(t)$，

亦即，上述之圖 1.RC 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式:

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_C(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_S(t) \cdots (1)$$

範例：

請參閱圖 2.範例之電路圖所示，

for $t < 0$ 時，開關 SW 的位置在 A 處，
受到長時間之直流 $V_1 = 24V$ 電源的影響，
電容元件 C 可以視同斷路 (open)，
此時，圖 2.之等效電路可以改畫成圖 3.

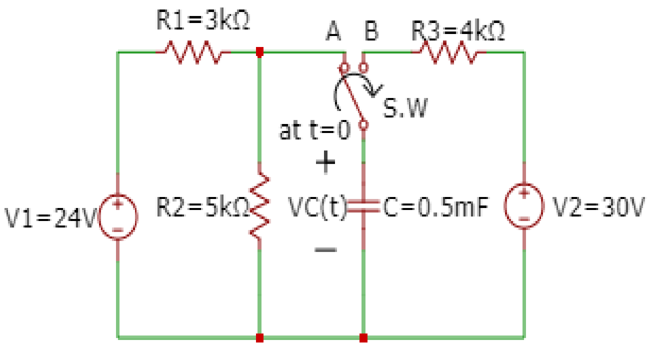


圖 2. 範例之電路圖

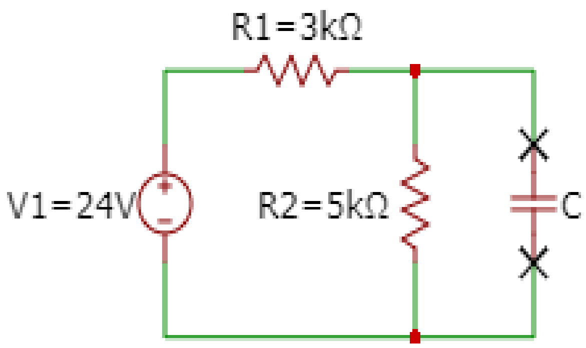


圖 3. 開關 SW 的位置長時間放在 A 處時，圖 2.之等效電路

故，此時 $V_C(t < 0) = V_{R2} = 24V \cdot \frac{5K}{(3K+5K)} = 15V$，

亦即，可以求得電容 C 之初值條件為：
$V_C(t < 0) = 15V$。

當 $t > 0$ 時，開關 SW 的位置撥到 B 處，

此時，圖 2.的電路可以改畫成圖 4.所示。
從時域(time-domain)來看，
應用 KVL 的性質，可以得到:

$V_c(t) = R_3 \cdot i(t) + V_2$,

又 $\mathrm{i(t)} = -\mathrm{C} \cdot \frac{dV_c(t)}{dt}$，

那麼，我們可以得到 ：

$V_c(t) = -R_3 \cdot C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} + V_2$，

亦即，此時之 RC 電路，可以使用數學表示成下方的一階微分方程式，

$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_3 \cdot C} \cdot V_C(t) = \frac{1}{R_3 \cdot C} \cdot V_2$…(2)

代入元件值 $R_3 = 4k\Omega$；C=0.5mF；V_2=30^v，

可以得到 ：$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot V_C(t) = 15$，

使用 Matlab 撰寫程式來求解(2)式，我們可以得到 ：

$V_C(t) = 30 - 15 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$， for $t \geq 0$。

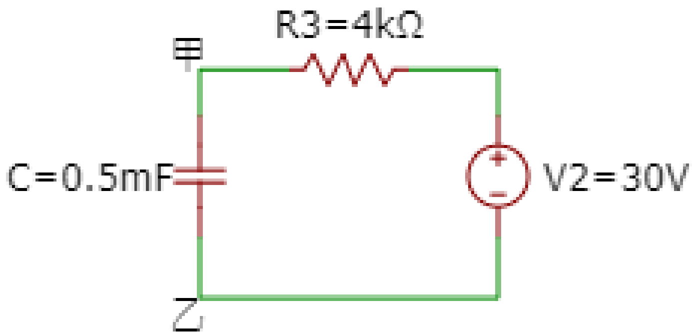


圖 4.開關 SW 的位置撥到 B 處時，圖 2.之等效電路

又，另外從頻域(frequency-domain)來看，
此時，
對圖 4.之電路進行"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
則，可以將圖 4.之電路轉換成圖 5.

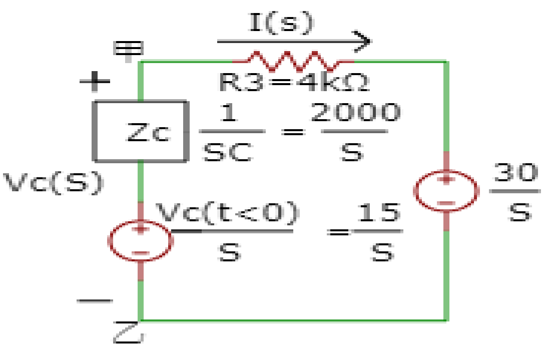


圖 5.經過拉氏轉換之後，圖 2 之等效電路

此時，升壓$=\frac{15}{s}$，

降壓$=\frac{2000}{s} \cdot I(s) + 4 \cdot 10^3 \cdot I(s) + \frac{30}{s}$，

根據 KVL，可以知道：

$$升壓=\frac{15}{s}=降壓=\frac{2000}{s}\cdot I(s)+4\cdot 10^3\cdot I(s)+\frac{30}{s}，$$

移項之後，

$$I(s)=\frac{-\frac{15}{s}}{\frac{2000}{s}+4\cdot 10^3}=\frac{-15}{4000\cdot s+2000}，$$

$$而V_C(s)=V_{跨C}=\frac{15}{s}-I(s)\cdot Z_C$$

$$=\frac{15}{s}-\frac{(-15)}{4000\cdot s+2000}\cdot\frac{2000}{s}$$

$$=\frac{15}{s}+\frac{15}{s\cdot(2s+1)}$$

$$=\frac{30}{s}-\frac{15}{s+\frac{1}{2}}，$$

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

便可以求解出電容元件 C 的端電壓$V_C(t)$為:

$$\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=V_C(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s}-\frac{15}{s+\frac{1}{2}}\right]=30-15\cdot e^{-\frac{1}{2}t}，\quad \text{for } t>0。$$

從前述之分析可以知道:

(1) 圖 2.範例之電路圖中的電容元件，其初始電壓為 15 伏特(開關 SW 的位置長時間放在 A 處時)。

(2) 隨著開關 SW 的位置由 A 處撥到 B 處，電容元件的端電壓$V_C(t)$逐漸升高，亦即，電容元件進入"充電"的狀態之中。

(3) 根據求解得到的電容元件端電壓$V_C(t)$之方程式，我們可以知道:電容至多"充電"到$V_C(t)$=30 伏特，此時，電阻R_3的電流會降到 0 安培，而使得電容元件無法繼續"充電"。

(4) 如果想要觀察電容之"放電"行為的話，在前述的圖 2.及圖 4.中，請將直流電壓源 V2 的電壓值更改為小於 15 伏特之電壓值即可，例如:V2 的值=10 伏特。

3. MATLAB 程式設計

功能:求解代表圖 4.之一階微分方程式(2)式中的電容端電壓 Vc(t)函數。

輸入:(1)電阻值 R3
(2)電容值 C
(3)直流電源之電壓值 V2(t)
(4)電容 C 的初始電壓值 Vc(0)

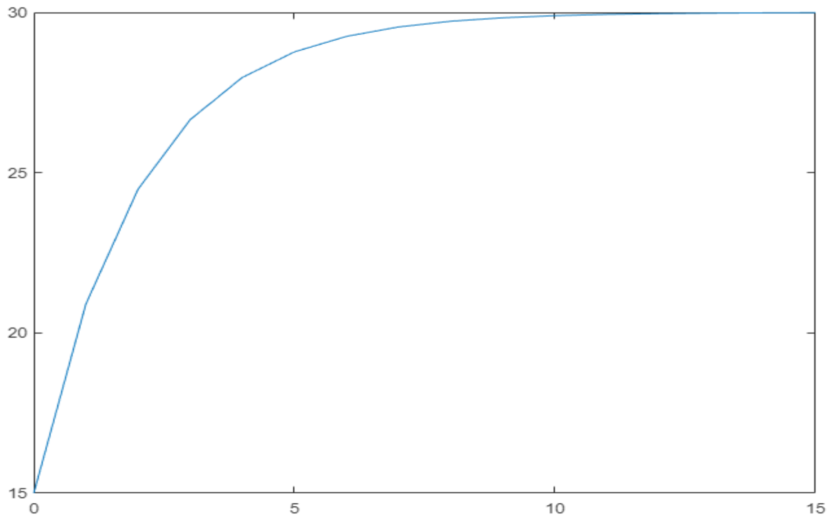
輸出:電容 C 的電壓值 Vc(t)，並且繪出 Vc(t)對時間參數 t 的波形圖。

程式碼:

```
syms Vc(t) R3 C V2(t)
syms C1 C2 t
V2=30;R3=4000;C=0.0005
eqn=diff(Vc,t)+(1/(R3*C))*Vc(t)==(1/(R3*C))*V2
cond=[Vc(0)==15]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:15
plot(t,30-15*exp(-t/2))
```

4. MATLAB 程式執行結果

```
ySol(t) =
30 - 15*exp(-t/2)
```



5. 練習題

(1) 假設圖 1.中電容之初值電壓為 $V_C(t \le 0) = 10V$、$V_S(t) = 15V$，請撰寫 Matlab 程式求解 $V_C(t)$ =?，for $t > 0$，並請繪出 $V_C(t)$，for $t > 0$ 之波形圖？

(2) 同上題，但是 $V_S(t) = \cos(3 \cdot t)\,V$？