單元四：「應用 MATLAB 於 RLC 串聯臨界阻尼電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RLC 串聯臨界阻尼(Critical-damping)電路之二階微分方程式，並且瞭解電容與電感之能量轉換過程，亦即，RLC 串聯臨界阻尼電路中電容與電感元件之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RLC 串聯電路，

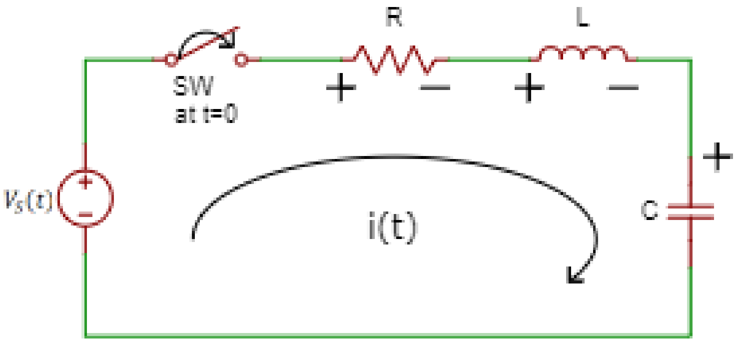


圖 1. RLC 串聯電路

令開關(SW)在$t=0$時閉合(close)之後，

$V_R(t)=R\cdot i(t)$，

$V_L(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$，

$V_C(t)=V_C(t=0)+\frac{1}{C}\cdot\int_0^t i(t')dt'$，

在$t>0$時，應用 KVL 性質，可以得知：

$V_R(t)+V_L(t)+V_C(t)=V_S(t)$，

亦即：

$$R\cdot i(t)+L\cdot\frac{di(t)}{dt}+V_C(t=0)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'=V_S(t)\cdots(1)$$

也可以表示成:

$R\cdot i(t)+L\cdot\frac{di(t)}{dt}+V_C(t)=V_S(t)$，

然而，$i(t)=C\cdot\frac{dV_C(t)}{dt}$，

將$i(t)$代入(1)式，可以得到：

$$R \cdot C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + V_C(t) = V_S(t)$$

亦即，前述圖 1.之 RLC 串聯電路可以表示成下方之二階微分方程式：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right) \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + \left(\frac{1}{L \cdot C}\right) \cdot V_C(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot [V_S(t)] \cdots (2)$$

狀況(一)：過阻尼(Over-damping case)

電路條件：電源電壓$V_S(t) = 24$ 伏特，

電容初始電壓$V_C(t = 0) = 4$ 伏特，

電阻元件值$R = 5\Omega$，

電感元件值$L = 1H$，

電容元件值$C = \frac{1}{4}F$，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + 5 \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} + 4 \cdot V_C(t) = 96 \cdots (3)$$

又 $i(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}$，

在$t = 0$時，

$$\frac{dV_C(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{C} \cdot i(t)\Big|_{t=0}$$

而電感 L 的存在，

使得$i(t)|_{t=0} = 0A$，

因此，可以得知：(電容電壓的初值條件)

$V_C(t = 0) = 4V$，

$V_C'(t = 0) = 0$V，

接下來對(3)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$$\mathcal{L}[V_C''(t) + 5 \cdot V_C'(t) + 4 \cdot V_C(t)] = \mathcal{L}[96]$$

$$[S^2 \cdot V_C(s) - S \cdot V_C(t = 0) - V_C'(t = 0)] + 5 \cdot [S \cdot V_C(s) - V_C(t = 0)] + 4 \cdot V_C(s) = 96 \cdot \frac{1}{S}$$

$$V_C(s) \cdot [S^2 + 5 \cdot S + 4] = \frac{96}{S} + 4 \cdot S + 20 = \frac{4S^2 + 20 \cdot S + 96}{S}$$

移項整理之後，可以得到:

$$V_C(s) = \frac{4S^2 + 20 \cdot S + 96}{S \cdot (S^2 + 5 \cdot S + 4)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S + 1} + \frac{C}{S + 4}$$

其中，$A=24$；$B=-\frac{80}{3}$；$C=\frac{20}{3}$，

亦即，

$V_C(s)=\frac{24}{s}-\frac{80}{3}\times\frac{1}{s+1}+\frac{20}{3}\times\frac{1}{s+4}$，

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

則 $\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=24+\frac{20}{3}\cdot e^{-4t}-\frac{80}{3}\cdot e^{-t}$ for $t\geq 0$

$=V_C(t)$ for $t\geq 0$

狀況(二)：臨界阻尼(Critical-damping case)

電路條件：電源電壓$V_S=24$ *伏特*，

電容初始電壓$V_C(t=0)=\frac{24}{5}$ *伏特*，

電阻元件值$R=4\Omega$，

電感元件值$L=1H$，

電容元件值$C=\frac{1}{4}F$，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2}+4\cdot\frac{dV_C(t)}{dt}+4\cdot V_C(t)=96\cdots(4)$$

電容電壓的初值條件為：$V_C(t=0)=\frac{24}{5}V$，

$V_C{}'(t=0)=0\text{V}$，

接下來，對(4)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$\mathcal{L}[V_C''(t)+4\cdot V_C'(t)+4\cdot V_C(t)]=\mathcal{L}[96]$，

$[S^2\cdot V_C(s)-S'\cdot V_C(t=0)-V_C'(t=0)]+4\cdot[S\cdot V_C(s)-V_C(t=0)]+4\cdot V_C(s)=96\cdot\frac{1}{s}$，

$V_C(s)\cdot[S^2+4\cdot S+4]=96\cdot\frac{1}{s}+\frac{24}{5}\cdot S+\frac{96}{5}=\frac{24}{5s}\cdot S^2+\frac{96}{5s}\cdot S+\frac{480}{5s}$，

移項整理之後，可以得到:

$V_C(s)=\frac{\frac{24}{5}\cdot S^2+\frac{96}{5}\cdot S+\frac{480}{5}}{S(S^2+4\cdot S+4)}=\frac{A}{S}+\frac{B}{(S+2)}+\frac{C}{(S+2)^2}=24\cdot\frac{1}{S}-\frac{96}{5}\cdot\frac{1}{(S+2)}-\frac{192}{5}\cdot\frac{1}{(S+2)^2}$，

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

則 $\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)]=V_C(t)=24-\frac{96}{5}\cdot e^{-2t}-\frac{192}{5}\cdot t\cdot e^{-2t}$, for $t\geq 0$，

$=24-(\frac{96}{5}+\frac{192}{5}\cdot t)\cdot e^{-2t}$, for $t\geq 0$。

狀況(三)：欠阻尼(Under-damping case)

電路條件：電源電壓$V_S = 24$ 伏特，

電容初始電壓$V_C(t=0) = 8$ 伏特，

電阻元件值$R = 2\Omega$，

電感元件值$L = 1H$，

電容元件值$C = \frac{1}{4}F$，

將上述電路條件代入(2)式，則可以得到：

$$\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + 2\cdot\frac{dV_C(t)}{dt} + 4\cdot V_C(t) = 96 \cdots (5)$$

初值條件為：$V_C(t=0) = 8V$

$V_C{}'(t=0) = 0\text{V}$

接下來，對(5)式取"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

可以得到：

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2V_C(t)}{dt^2} + 2\cdot\frac{dV_C(t)}{dt} + 4\cdot V_C(t)\right] = 96\cdot\mathcal{L}[1],$$

$$[\mathrm{S}^2\cdot \mathrm{V_C(s)} - \mathrm{S}'\cdot \mathrm{V_C(t=0)} - \mathrm{V_C'(t=0)}] + 2\cdot[\mathrm{S}\cdot\mathrm{V_C(s)} - \mathrm{V_C(t=0)}] + 4\cdot[\mathrm{V_C(s)}] = \frac{96}{\mathrm{s}},$$

$$\mathrm{V_C(s)}\cdot[\mathrm{S}^2 + 2\cdot\mathrm{S} + 4] = \frac{96}{S} + 8\cdot S + 16 = \frac{8\cdot S^2 + 16\cdot S + 96}{S},$$

移項整理之後，可以得到:

$$V_C(s) = \frac{8\cdot S^2+16\cdot S+96}{S\cdot(S^2+2\cdot S+4)} = \frac{A}{S} + \frac{B\cdot S+C}{S^2+2\cdot S+4} = \frac{24}{S} + \frac{-16\cdot S-32}{S^2+2\cdot S+4} = \frac{24}{S} - \frac{16\cdot(S+1)}{(S+1)^2+(\sqrt{3})^2} - \frac{16}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{(S+1)^2+(\sqrt{3})^2},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

$$\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = V_C(t) = 24 - [16\cdot\cos(\sqrt{3}\cdot t) + \frac{16}{\sqrt{3}}\cdot\sin(\sqrt{3}\cdot t)]\cdot e^{-t} \text{ , for } t \geq 0。$$

從前述之分析可以知道:

(1) 圖 1.範例之 RLC 串聯電路圖中的電容元件，其初始電壓為 24/5 伏特。

(2) 圖 1.範例之 RLC 串聯電路，可以表示成電容端電壓 Vc(t)的二階微分方程式。

(3) 隨著開關 SW 的位置由 open 撥到 close，電容元件的端電壓$V_C(t)$逐漸升高，亦即，電容元件進入"充電"的狀態之中。

(4) 根據求解得到的電容元件端電壓$V_C(t)$之方程式，我們可以知道:在"臨界阻尼"(Critical -damping case)之電路條件下，電容至多"充電"到$V_C(t)$=24 伏特，此時，迴路的電流 $i(t)$會降到 0 安培，而使得電容元件無法繼續"充電"。

(5) 和"過阻尼"(Over-damping)的狀況相互比較，"臨界阻尼"(Critical -damping case)的狀況，比"過阻尼"(Over-damping)的狀況，可以在比較短的時間內，讓電容之電壓"充電"到$V_C(t)$=24 伏特的穩定末狀態。

3. MATLAB 程式設計

功能:求解代表圖 1.之二階微分方程式(2)式，在"臨界阻尼"(Critical-damping case)狀況下(對應到二階微分方程式(4)式)之電容端電壓 Vc(t)的方程式及對應之訊號波形。

輸入:(1)電源電壓$V_S(t)$
(2)電容初始電壓$V_C(t=0)$
(3)電容初始電壓一次微分值$V_C'(t=0)$
(4)電阻元件值R
(5)電感元件值L
(6)電容元件值C。

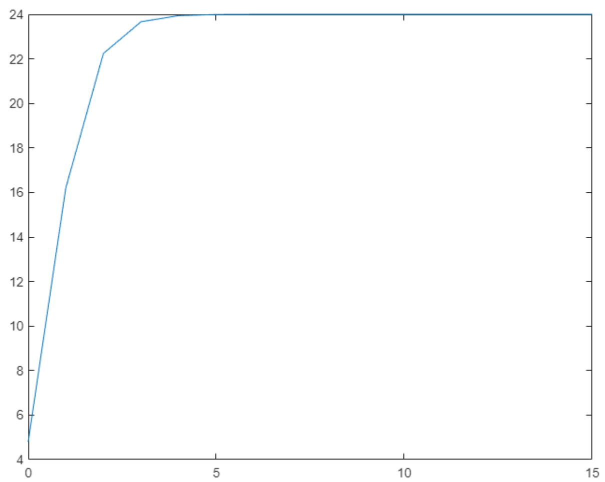
輸出:電容端電壓 Vc(t)的方程式，並且繪出 Vc(t)對時間參數 t 的訊號波形圖。

程式碼:

```
syms Vc(t) R L C Vs(t) Vo
syms C1 C2 t
Vs=24;Vo=24/5;R=4;L=1;C=0.25
eqn=diff(Vc,t,2)+(R/L)*diff(Vc,t)+(1/(L*C))*Vc(t)==(1/(L*C))*Vs
DVc=diff(Vc,t)
cond=[Vc(0)==24/5,DVc(0)==0]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:15
plot(t,24 - (192*t.*exp(-2*t))/5 - (96.*exp(-2*t))/5)
```

4. MATLAB 程式執行結果

ySol(t) =
24 - (192*t*exp(-2*t))/5 - (96*exp(-2*t))/5



5. 練習題

(1) 圖 1.中如果將電路之驅動電源壓$V_S(t)$更改成$V_S(t) = \cos(2 \cdot t)$ *伏特*，請撰寫 MatLab 程式求解電容之電壓方程式$V_C(t)$，並且繪出電容電壓方程式$V_C(t)$之波形？

(2) 請撰寫 MatLab 程式求解圖 2.中電容之電壓方程式$V_C(t)$，並且繪出電容電壓方程式$V_C(t)$之波形？

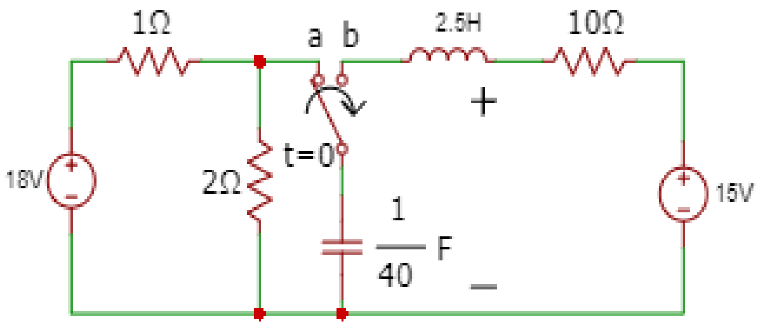


圖 2.練習題 2.的電路圖