

單元七：「應用 MATLAB 於 RLC 並聯臨界阻尼電路之計算與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RLC 並聯臨界阻尼(Critical-damping)電路之二階微分方程式，並且瞭解電容與電感之能量轉換過程，亦即，RLC 並聯臨界阻尼電路中電容與電感元件之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RLC 並聯電路，

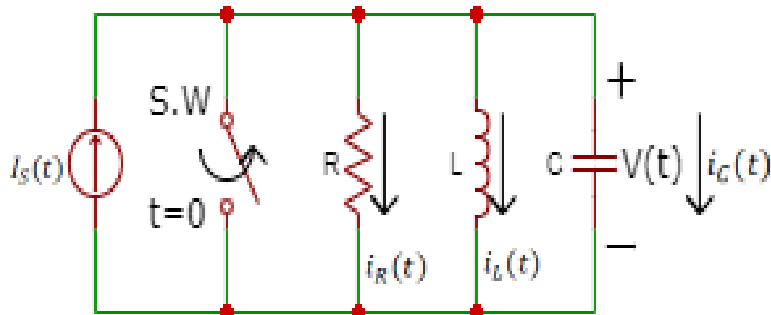


圖 1. RLC 並聯電路

令開關(SW)在 $t = 0$ 時閉合(close)之後，

在 $t \geq 0$ 時，應用 KCL 可以得到：

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = I_S(t),$$

但是， $V(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ ，

而且 $i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot V(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$ ，

又 $i_C(t) = C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt} = L \cdot C \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2}$ ，

故： $\frac{L}{R} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + i_L(t) + L \cdot C \cdot \frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = I_S(t)$ ，

亦即，前述圖 1.之 RLC 並聯電路可以表示成下方之二階微分方程式：

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot i_L(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot I_S(t) \cdots (1)$$

範例：(無驅動電源之 RLC 並聯電路)

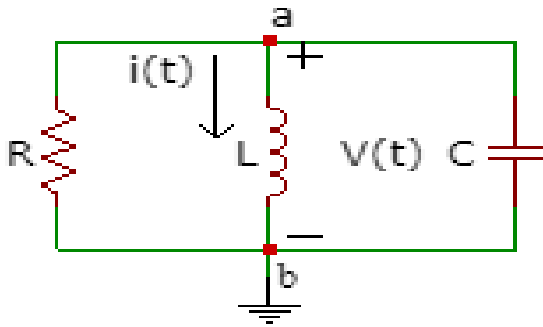


圖 2.範例之電路圖

從範例之電路圖 2.中，可以知道：

$$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot V(t),$$

$$i_L(t) = i_L(t=0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t V(t') dt',$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dV(t)}{dt},$$

在圖 2.之 a 點應用 KCL，可以得到：

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = 0$$

亦即：

$$\frac{1}{R} \cdot V(t) + i_L(t=0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t V(t') dt' + C \cdot \frac{dV(t)}{dt} = 0 \cdots (1)$$

假設，電感元件的初值電流 $i_L(t=0) = 0A$ ，

則，針對(1)式微分之後，可以得到：

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V(t) = 0 \cdots (2)$$

再令 $t = 0$ ，並且代入(1)式，

可知：

$$\frac{1}{R} \cdot V(t=0) + i_L(t=0) + C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

又

電感元件的初值電流 $i_L(t=0) = 0A$ ，

故，可知：

$$\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{R \times C} \cdot V(t=0)$$

亦即，範例之電路圖 2.的初始值條件為：

$$\begin{cases} V(t=0) \\ V'(t=0) = -\frac{V(t=0)}{R \cdot C} \end{cases} \cdots (3)$$

綜合上述的討論，可以知道：

聯立求解(2)式和(3)式:

$$\frac{d^2V(t)}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot V(t) = 0 \dots (2)$$

$$\begin{cases} V(t=0) \\ V'(t=0) = -\frac{V(t=0)}{R \cdot C} \end{cases} \dots (3)$$

便可以從時域(time-domain)中，求解出電壓訊號 $V(t)$ 。

狀況(一)：過阻尼(Over-damping case)

電路條件：

電容初始電壓 $V(t=0) = 5V$,

電感初始電流 $i(t=0) = 0A$,

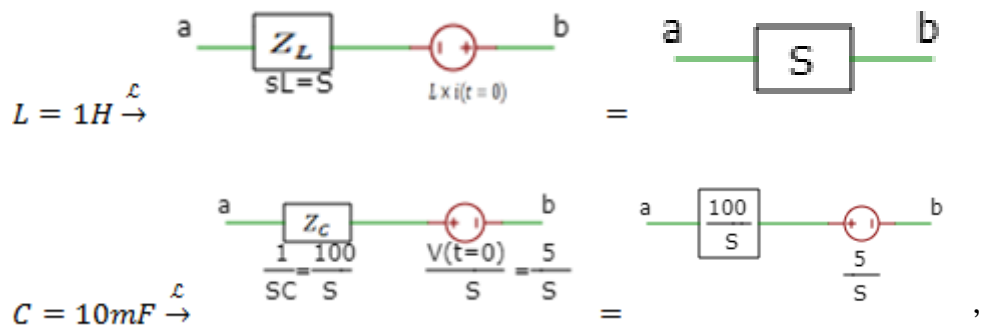
電阻元件值 $R = 2\Omega$,

電感元件值 $L = 1H$,

電容元件值 $C = 10mF$,

將電路中各個元件做"拉氏轉換" (Laplace Transform)：

$$R = 2\Omega \xrightarrow{\mathcal{L}} R = 2\Omega ,$$



亦即：

時域中，在過阻尼之狀況下，圖 2 之等效電路如圖 3 所示，

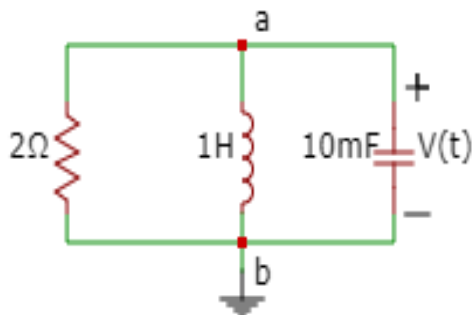


圖 3.過阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 3.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 4.

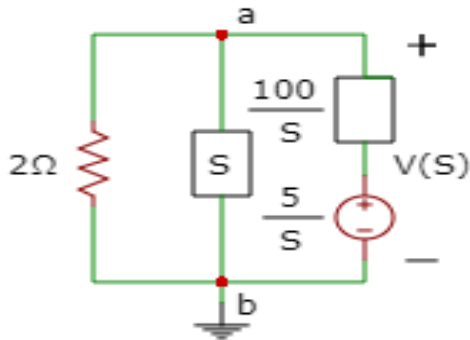


圖 4.經過"拉氏轉換"，圖 3.在頻域之等效電路

接下來，在圖 4.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V(s)}{2} + \frac{V(s)}{s} + \frac{V(s) - \frac{5}{s}}{\frac{100}{s}} = 0,$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{s} + \frac{s}{100} \right] = \frac{1}{20},$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{50 \cdot s + 100 + s}{100 \cdot s} \right] = \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot s}{100 \cdot s},$$

移項整理之後，可以得到：

$$V(s) = \frac{5 \cdot s}{s^2 + 50 \cdot s + 100} = \frac{A}{s + 25 + 5\sqrt{21}} + \frac{B}{s + 25 - 5\sqrt{21}}$$

$$= \frac{\frac{25 + 5\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}}{s + (25 + 5\sqrt{21})} + \frac{\frac{-25 + 5\sqrt{21}}{2\sqrt{21}}}{s + (25 - 5\sqrt{21})} = \frac{5.23}{s + 47.913} + \frac{-0.23}{s + 2.087},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

則，在過阻尼(Over-damping case)之狀況下，

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = V(t) = 5.23 \cdot e^{-47.913 \cdot t} - 0.23 \cdot e^{-2.087 \cdot t}, \text{ for } t > 0.$$

狀況(二)：臨界阻尼(Critical-damping case)

電路條件：

電容初始電壓 $V(t = 0) = 5V$ ，

電感初始電流 $i(t = 0) = 0A$ ，

電阻元件值 $R = 5\Omega$ ，

電感元件值 $L = 1H$ ，

電容元件值 $C = 10mF$ ，

時域中，在臨界阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路如圖 5.所示，

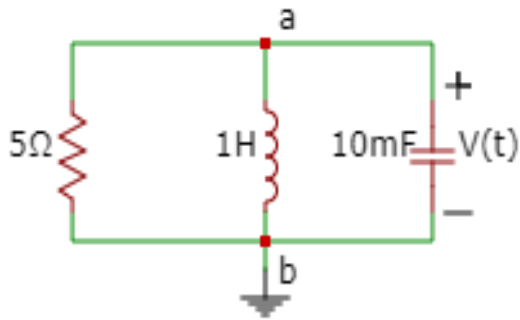


圖 5.臨界阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 5.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 6.

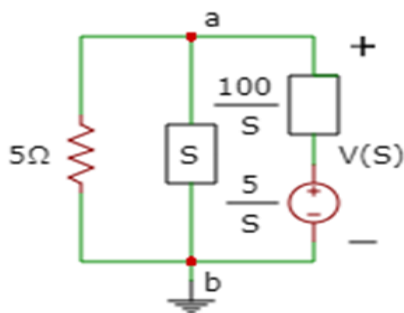


圖 6.經過"拉氏轉換"，圖 5.在頻域之等效電路

接下來，在圖 6.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V(s)}{5} + \frac{V(s)}{S} + \frac{V(s) \cdot \frac{S}{100}}{\frac{100}{S}} = 0,$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{S} + \frac{S}{100} \right] = \frac{1}{20},$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{20 \cdot S + 100 + S^2}{100 \cdot S} \right] = \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot S}{100 \cdot S},$$

移項整理之後，可以得到：

$$V(s) = \frac{5 \cdot S}{S^2 + 20 \cdot S + 100} = \frac{5 \cdot S}{(S+10)^2} = \frac{5}{S+10} - \frac{50}{(S+10)^2},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，
則，在臨界阻尼(Critical-damping case)之狀況下，

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = V(t) = (5 - 50 \cdot t) \cdot e^{-10 \cdot t}, t \geq 0.$$

狀況(三)：欠阻尼(Under-damping case)

電路條件：

電容初始電壓 $V(t=0) = 5V$,

電感初始電流 $i(t=0) = 0A$,

電阻元件值 $R = \frac{25}{4}\Omega$,

電感元件值 $L = 1H$,

電容元件值 $C = 10mF$,

時域中，欠阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路如圖 7.所示，

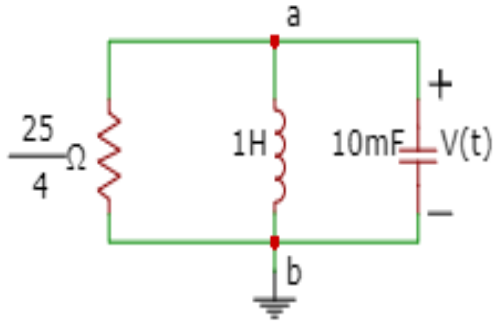


圖 7.欠阻尼之狀況下，圖 2.之等效電路

再將圖 7.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
便可以得到圖 8.

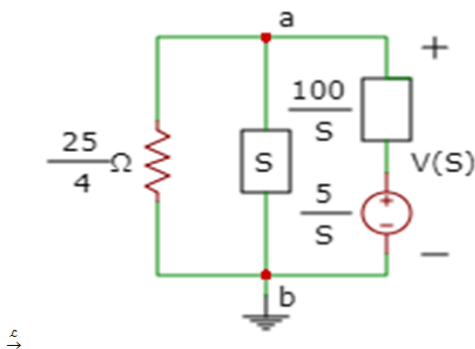


圖 8.經過"拉氏轉換"，圖 7.在頻域之等效電路

接下來，在圖 8.的 a 處應用 KCL，可以得到：

$$\frac{V(s)}{\frac{25}{4}} + \frac{V(s)}{s} + \frac{V(s) - \frac{5}{s}}{\frac{100}{s}} = 0,$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{4}{25} + \frac{1}{s} + \frac{s}{100} \right] = \frac{1}{20},$$

$$V(s) \cdot \left[\frac{16 \cdot s + 100 + s^2}{100 \cdot s} \right] = \frac{1}{20} = \frac{5 \cdot s}{100 \cdot s},$$

移項整理之後，可以得到：

$$V(s) = \frac{5 \cdot s}{s^2 + 16 \cdot s + 100} = \frac{5 \cdot s}{(s+8)^2 + 6^2} = \frac{5 \cdot (s+8)}{(s+8)^2 + 6^2} - \frac{40}{6} \times \frac{6}{(s+8)^2 + 6^2},$$

對上式再取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，
 則，欠阻尼阻尼(Under-damping case)之狀況下，

$$\mathcal{L}^{-1}[V(s)] = V(t) = [5 \cdot \cos(6 \cdot t) - \frac{20}{3} \cdot \sin(6 \cdot t)] \cdot e^{-8 \cdot t}, \text{ for } t \geq 0.$$

從前述之分析可以知道:(在臨界阻尼之狀況下)

- (1) 圖 2.範例之 RLC 並聯電路圖中的電容元件，其初始電壓為 5 伏特。
- (2) 圖 2.範例之 RLC 並聯電路，可以表示成電容端電壓 $V(t)$ 的二階微分方程式。
- (3) 隨著電路的開始運作($t > 0$)，電容元件的端電壓 $V_C(t) = V(t)$ 逐漸降低，亦即，電容元件進入"放電"的狀態之中。
- (4) 根據求解得到的電容元件端電壓 $V_C(t) = V(t)$ 之方程式，我們可以知道:在臨界阻尼(Critical-damping case)之電路條件下，電容至多"放電"到 $V_C(t) = V(t) = 0$ 伏特。
- (5) 和"過阻尼"(Over-damping)的狀況相互比較，"臨界阻尼"(Critical-damping case)的狀況，比"過阻尼"(Over-damping)的狀況，可以在比較短的時間內，讓電容之電壓"放電"到 $V_C(t) = V(t) = 0$ 伏特的穩定末狀態。

3. MATLAB 程式設計

功能: 求解代表圖 2.之二階微分方程式(2)式，在"臨界阻尼"(Critical-damping case)的狀況下之電容端電壓 $V_C(t) = V(t)$ 的方程式及對應之訊號波形。

輸入: (1)電容初始電壓 $V_C(t=0) = V(t=0)$
 (2)電感初始電流 $i(t=0)$ ，
 或是，

$$\text{電容電壓微分之初始值} \quad \left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{R \times C} \cdot V(t=0)$$

- (3)電阻元件值 R
- (4)電感元件值 L
- (5)電容元件值 C 。

輸出: 電容端電壓 $V_C(t) = V(t)$ 的方程式，並且繪出 $V_C(t) = V(t)$ 對時間參數 t 的訊號波形圖。

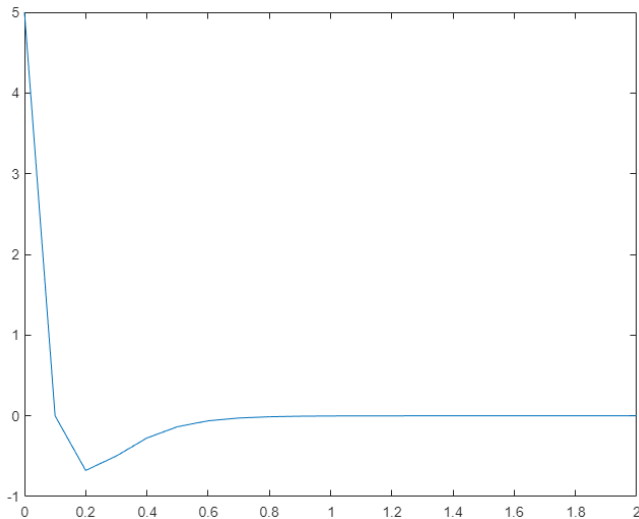
程式碼:

```
syms V(t) R L C i(t)
syms C1 C2 t
R=5;L=1;C=0.01
eqn=C*diff(V(t),t,2)+(1/R)*diff(V(t),t)+(1/L)*V(t)==0
DV=diff(V,t)
cond=[V(0)==5,DV(0)==-V(0)/(R*C)]
```

```
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t= 0:0.1:2.0
plot(t,-5.*exp(-10*t).*(10*t - 1))
```

4. MATLAB 程式執行結果

```
ySol(t) =
-5*exp(-10*t)*(10*t - 1)
```



5. 練習題

- (1) 請撰寫 MatLab 程式求解圖 9.中電容之電壓方程式 $V_C(t)=V(t)$ ，並且繪出電容電壓方程式 $V_C(t)=V(t)$ 之波形？

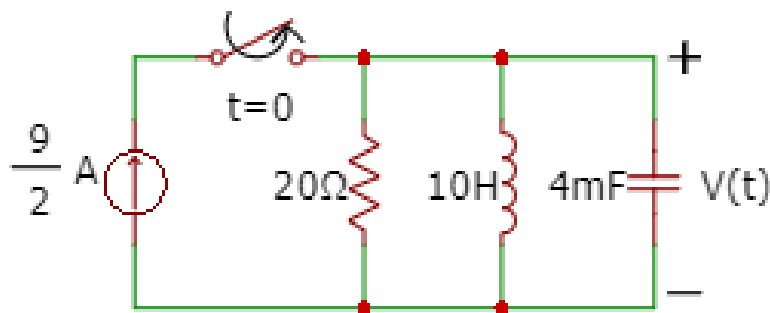


圖 9.練習題 1.的電路圖

解答： $V(t) = 150 \cdot (e^{-10 \cdot t} - e^{-25 \cdot t}) V$

- (2) 請撰寫 MatLab 程式，將圖 9.練習題中的電阻 $R=20\ \Omega$ 調整電阻值，使電阻值變大或是變小，然後再求解圖 2. 範例中電容之電壓方程式 $V_C(t)$ ，並且繪出電容電壓方程式 $V_C(t)$ 之波形？藉以觀察是否也有"過阻尼"、"臨界阻尼"、"欠阻尼"等現象的出現？