單元二：「應用 MATLAB 於 RL 電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RL 電路之一階微分方程式，並且瞭解電感之能量轉換過程，亦即，RL 電路之充放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RL 電路，

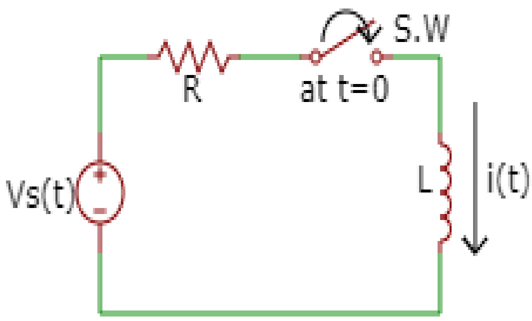


圖 1.RL 電路圖

假設，電感 L 的初始電流為 $i(t<0)=I_S$，
電阻 R 之端電壓為 $V_R(t)=R\cdot i(t)$，
電感 L 之端電壓為 $V_L(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$，

在圖 1.之電路中(for t>0)應用 KVL 的觀念，可以得到：

總升壓 $=V_S(t)$
= 總降壓
$=V_R(t)+V_L(t)$
$=R\cdot i(t)+L\cdot\frac{di(t)}{dt}$，

亦即，上述之圖 1. RL 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式：

$$\frac{di(t)}{dt}+\frac{R}{L}\cdot i(t)=\frac{1}{L}\cdot V_S(t)\cdots(1)$$

範例：

請參閱圖 2.範例之電路圖所示，
在 $t<0$ 的時段，圖 2.可以簡化成圖 3.
因為，開關 SW1.和 SW2.都是斷路(open)的，

因此，

可以知道電感之初值條件為：

$i(t<0)=0A$。

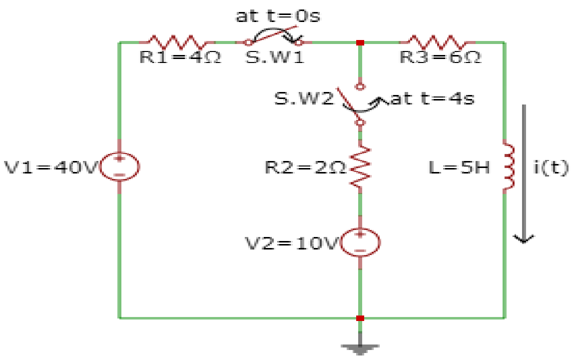


圖 2.範例之電路圖

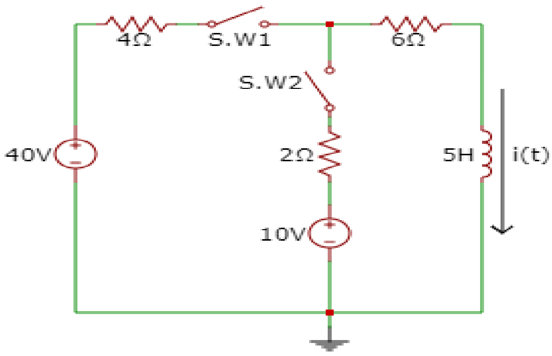


圖 3.簡化圖 2.後之等效電路(開關 SW1.和 SW2.都是斷路的)

在 $4s \geq t \geq 0s$ 的時段，

開關 SW1.是閉合(close)的；開關 SW2.仍然是斷路(open)的，

於是，圖 2.可以再簡化成圖 4.

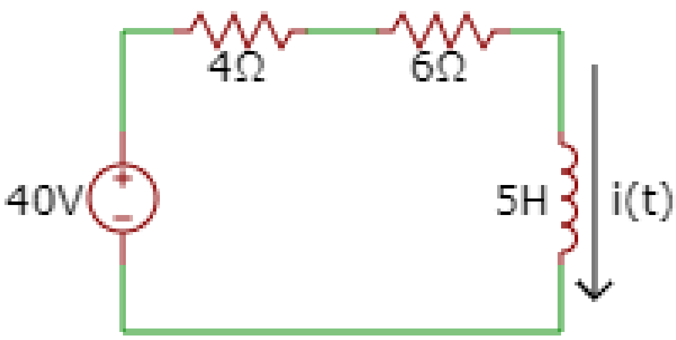


圖 4.簡化圖 2.後之等效電路(在 $4s \geq t \geq 0s$ 的時段)

從時域(time-domain)來看，

應用 KVL 的性質，可以得到:

$V_1 = R_1 \cdot i(t) + R_3 \cdot i(t) + V_L(t)$,

又 $V_L(\mathrm{t}) = \mathrm{L} \cdot \frac{di(t)}{dt}$，

則

$$V_1 = R_1 \cdot i(t) + R_3 \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} ,$$

亦即，此時之 RL 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式：

$\frac{di(t)}{dt} + \frac{(R_1+R_3)}{L} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot V_1$ …(2)

代入$R_1 = 4\Omega$；$R_3 = 6\Omega$；L=5H；V_1=40^v，

可以得到 ：$\frac{di(t)}{dt} + 2 \cdot i(t) = 8$，

求解上式，則可以得知:

$i(t) = 4 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$ ， for $\mathrm{t} \geq 0\mathrm{s}$。

從頻域(frequency-domain)來看，
圖 4.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
可以將圖 4.之電路轉換成圖 5.

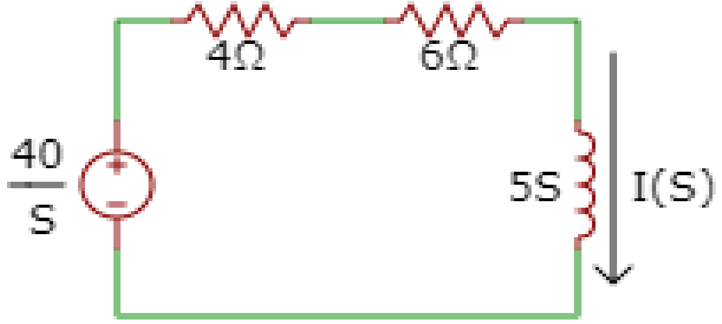


圖 5.將圖 4.經過拉氏轉換之等效電路

利用 KVL，可以得到：

$\frac{40}{s} = 4 \cdot I(s) + 6 \cdot I(s) + 5 \cdot s \cdot I(s) = (10 + 5 \cdot s) \cdot I(s)$，

移項之後重新整理，我們可以得到:

$I(s) = \frac{40}{s \cdot (5 \cdot s + 10)} = \frac{8}{s \cdot (s+2)} = \frac{4}{s} + \frac{(-4)}{s+2}$,

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，
便可以求解出流經電感元件 L 的電流 $i(t)$ 為 ：

$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t) = (4 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t})$，for $t \geq 0$。

接下來，
在 $t \geq 4s$的時段，
開關 SW1.和 SW2.都是閉合(close)的，
因此，圖 2.可以再簡化成圖 6.

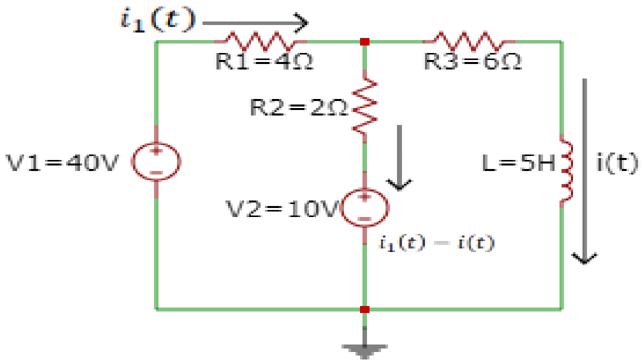


圖 6.簡化圖 2.後之等效電路(在 $t \geq 4s$ 的時段)

此時，電感電流 $i(t)$ 之初始值 $i(t=4) = \left(4 - 4 \cdot e^{-8}\right)A \cong 4A$。
從時域(time-domain)來看，
圖 6.中，左迴路應用 KVL 可以得到：

$$V_1 = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot [i_1(t) - i(t)] + V_2\ ,$$

代入$R_1 = 4\Omega$；$R_2 = 2\Omega$；V_1=40^v；V_2=10^v，
經過化簡之後，可以得到:

$$i_1(t) = 5 + \frac{i(t)}{3}\ ,$$

圖 6.中，右迴路應用 KVL，則可以得到:

$$V_2 + R_2 \cdot [i_1(t) - i(t)] = R_3 \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}\ ,$$

利用前述 $i_1(t) = 5 + \frac{i(t)}{3}$ 之關係式，

並且代入 $R_2 = 2\Omega$；$R_3 = 6\Omega$；V_2=10^v；L=5H，
再經過化簡之後，可以得到:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{22}{15} \cdot i(t) = 4\ ，\ldots(3)$$

求解上式則可以得到:

$i(t)=\frac{30}{11}+\frac{14}{11}\cdot e^{-\frac{22}{15}\cdot t}$ ， for t ≥ 4s；

或是

$i(t)=\frac{30}{11}+\frac{14}{11}\cdot e^{-\frac{22}{15}\cdot(t-4)}$ ， for t ≥ 0s。

從頻域(frequency-domain)來看，
圖 6.經過"拉氏轉換"(Laplace Transform)，
可以將圖 6.之電路轉換成圖 7.

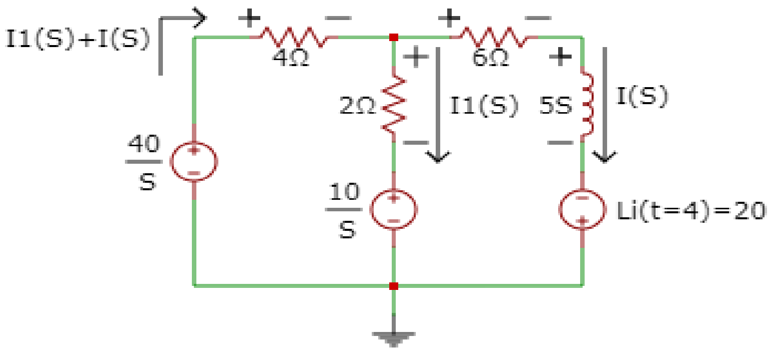


圖 7.將圖 6.經過拉氏轉換之等效電路

在圖 7.中，左迴路應用 KVL，可以得到：

$\frac{40}{s}=4\cdot(I_1(s)+I(s))+2\cdot I_1(s)+\frac{10}{s}$，

亦即，

$6\cdot I_1(s)+4\cdot I(s)=\frac{30}{s}\cdots(4)$

在圖 7.中，右迴路應用 KVL，可以得到：

$20+\frac{10}{s}+2\cdot I_1(s)=6\cdot I(s)+5\cdot s\cdot I(s)$，

亦即

$2\cdot I_1(s)-(6+5\cdot S)\cdot I(s)=-20-\frac{10}{s}\cdots(5)$

此時，(4)式$-(5)$式$\times 3$，則可以得到：

$[4+3\cdot(6+5\cdot s)]\cdot I(s)=\frac{30}{s}+60+\frac{30}{s}$，

$(15\cdot s+22)\cdot I(s)=\frac{60\cdot S+60}{s}$，

$I(s)=\frac{60\cdot S+60}{S\cdot(15\cdot S+22)}=\frac{4\cdot S+4}{S\cdot(S+\frac{22}{15})}=\frac{(\frac{30}{11})}{S}+\frac{(\frac{14}{11})}{S+\frac{22}{15}}$，

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

便可以求解出流經電感元件 L 的電流 $i(t)$ 為:

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = i(t) = \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15}t}\text{，for } t > 4\text{s}$$

$$= \frac{30}{11} + \frac{14}{11} \cdot e^{-\frac{22}{15}\cdot(t-4)}\text{，for } t > 0\text{s。}$$

整體而言，

$$i(t) = \begin{cases} 0A\text{，}t < 0 \\ 4\cdot(1 - e^{-2t})A\text{，}0 \le t \le 4s \\ \frac{30}{11} + \frac{14}{11}\cdot e^{-\frac{22}{15}\cdot(t-4)}A\text{，}t \ge 4s \end{cases}$$

從上式可以知道:

(1) 圖 2.範例之電路圖中的電感元件(for t<0 時，開關 SW1.和 SW2.都是斷路的時候)，其初始電流$i(t<0)$為 0 安培。

(2) 接下來，讓開關 SW1.是閉合(close)的；開關 SW2.仍然是斷路(open)的時候，此時，流經電感元件的電流$i(t)$逐漸升高，亦即，電感元件進入"充電"的狀態之中。

(3) 後續，再讓開關 SW1.和 SW2.都是閉合(close)的時候，此時，流經電感元件的電流$i(t)$轉而逐漸降低，亦即，電感元件進入"放電"的狀態之中。

(4) 根據求解得到的電感元件電流$i(t)$之方程式，我們可以知道，電感至多"充電"大約達到$i(t)$=4 安培，此時，SW2.閉合(close)的時候，反而使得電感元件無法繼續"充電"，而是轉為"放電"的狀態，而且，流經電感元件的電流$i(t)$會"放電"到大約$i(t)$=$\frac{30}{11}$安培。

3. MATLAB 程式設計

功能: 求解在 $4s \ge t \ge 0s$的時段，代表圖 4.之一階微分方程式(2)式中流經電感電流$i(t)$的函數。

輸入: (1)電阻值 R1
(2)電阻值 R3
(3)電感值 L
(4)直流電源之電壓值 V1(t)
(5)電感 L 的初始電流值 $i(t<0)$。

輸出: 電感 L 的電流值 $i(t)$(在 $4s \ge t \ge 0s$ 的時段)，並且繪出 $i(t)$ 對時間參數 t 的波形圖。

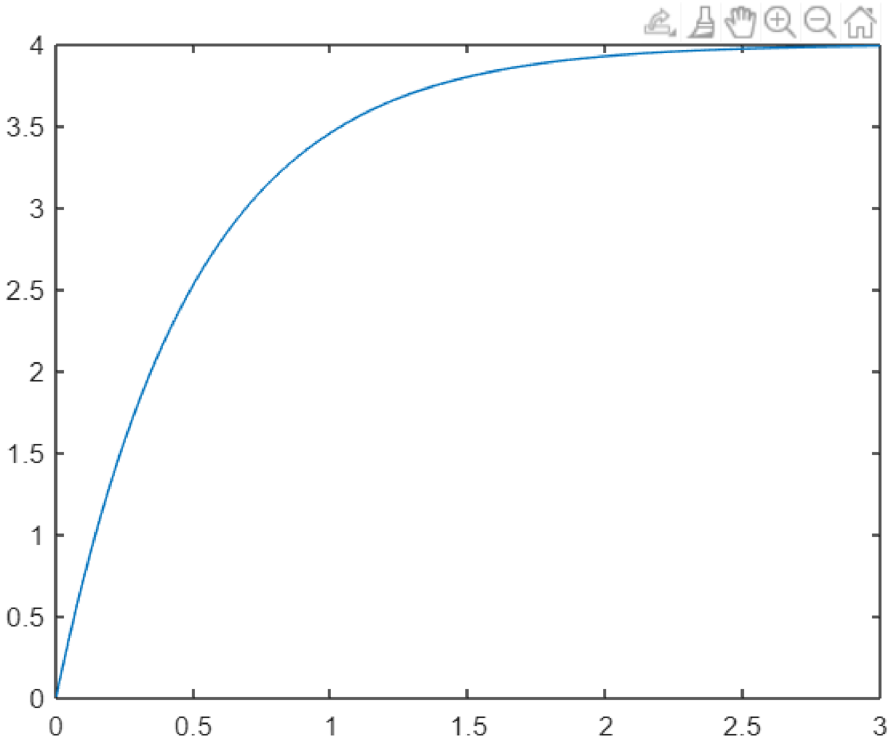
程式碼:

```
syms i(t) R R1 R3 L V1(t)
syms C1 C2 t
V1=40;R1=4;R3=6;L=5
R=R1+R3
```

```
eqn=diff(i,t)+(R/L)*i(t)==(1/L)*V1
cond=[i(0)==0]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:0.01:3
plot(t,4 - 4*exp(-2*t))
```

4. MATLAB 程式執行結果

```
ySol(t) =
4 - 4*exp(-2*t)
```



5. 練習題

(1) 假設圖 1.中電感的初值電流為 $i(t \le 0) = 10A$、$V_S(t) = 15V$，請寫撰寫 MatLab 程式求解 $i(t)$ =? for $t \ge 0$，並請繪出 $i(t)$，for $t \ge 0$ 之波形圖?

(2) 同上題，但是 $V_S(t) = \cos(3 \times t)\,V$。

(3) 參考圖 2. 請撰寫 MatLab 程式求解 $i(t)$ =? for $t \ge 4s$，並請繪出圖 6.之 $i(t)$，for $t \ge 4s$ 之波形圖?