單元十一：「應用 MATLAB 於旋度之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解並且繪圖某一個具有方向性的物理量(向量)對應之旋度(curl)(向量)函數，同時瞭解旋度(curl)在"外力"、"電場"或"磁場"等物理量函數其專業領域之實際應用與其對應之物理意義。

2. 原理說明

(1) 旋度(curl)的計算

假設向量$\vec{A}$代表某一個具有方向性的物理量，
例如："外力"、"電場"或"磁場"等物理量，
則向量$\vec{A}$可以表示成：
$\vec{A}=\vec{A}(x，y，z)$ 垂直座標系統
$=\vec{A}(r，\emptyset，z)$ 圓柱座標系統
$=\vec{A}(R，\theta，\emptyset)$ 球體座標系統。
向量$\vec{A}$的旋度(curl)，定義如下：(將向量轉成向量)
$\vec{A}$的旋度(curl)$=\nabla\times\vec{A}$

$$\cong\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_C \vec{A}\cdot d\vec{l}}{\Delta S}，$$

其中，ΔS代表空間中某一個封閉區域的所有表面積，
而 C 則代表圍繞ΔS的封閉路徑(contour)。

討論不同之座標系統，

a. 對垂直座標系統 (Cartesian Coordinate System)而言，
$\vec{A}=\vec{A}(x，y，z)$
$=A_x\overrightarrow{a_x}+A_y\overrightarrow{a_y}+A_z\overrightarrow{a_z}$，
則向量$\vec{A}$的旋度(curl)
$=\nabla\times\vec{A}(x，y，z)$
$=curl(\vec{A})$

$$=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z}\\ \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ A_y & A_z\end{vmatrix}\overrightarrow{a_x}-\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ A_x & A_z\end{vmatrix}\overrightarrow{a_y}+\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y}\\ A_x & A_y\end{vmatrix}\overrightarrow{a_z}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{a_x}-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{a_y}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{a_z}\text{。}$$

b. 對圓柱座標系統 (Cylindrical Coordinate System)而言，

$\vec{A}=\vec{A}(r，\emptyset，z)$

$=A_r\overrightarrow{a_r}+A_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}+A_z\overrightarrow{a_z}$

則向量$\vec{A}$的旋度(curl)

$=\nabla\times\vec{A}(r，\emptyset，z)$

$=curl(\vec{A})$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_r} & r\overrightarrow{a_\emptyset} & \overrightarrow{a_z}\\ \frac{\partial()}{\partial r} & \frac{\partial()}{\partial\emptyset} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ A_r & rA_\emptyset & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left\{\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial\emptyset} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ rA_\emptyset & A_z\end{vmatrix}\overrightarrow{a_r}-r\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial r} & \frac{\partial()}{\partial z}\\ A_r & A_z\end{vmatrix}\overrightarrow{a_\emptyset}+\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial r} & \frac{\partial()}{\partial\emptyset}\\ A_r & rA_\emptyset\end{vmatrix}\overrightarrow{a_z}\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial\emptyset}-\frac{\partial(rA_\emptyset)}{\partial z}\right)\right]\overrightarrow{a_r}-\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial z}\right)\right]\overrightarrow{a_\emptyset}+\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial(rA_\emptyset)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\emptyset}\right)\right]\overrightarrow{a_z}\text{。}$$

c. 對球體座標系統 (Spherical Coordinate System)而言，

$\vec{A}=\vec{A}(R、\theta、\emptyset)$

$=A_R\overrightarrow{a_R}+A_\theta\overrightarrow{a_\theta}+A_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}$，

則向量$\vec{A}$的旋度(curl)

$=\nabla\times\vec{A}(R、\theta、\emptyset)$

$=curl(\vec{A})$

$$=\left(\frac{1}{R^2\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\begin{vmatrix}\overrightarrow{a_R} & R\overrightarrow{a_\theta} & R\cdot\sin(\theta)\cdot\overrightarrow{a_\emptyset}\\ \frac{\partial()}{\partial R} & \frac{\partial()}{\partial\theta} & \frac{\partial()}{\partial\emptyset}\\ A_R & R\cdot A_\theta & R\cdot\sin(\theta)\cdot A_\emptyset\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{R^2\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial\theta} & \frac{\partial()}{\partial\emptyset}\\ R\cdot A_\theta & R\cdot\sin(\theta)\cdot A_\emptyset\end{vmatrix}\overrightarrow{a_R}-\left(\frac{R}{R^2\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial R} & \frac{\partial()}{\partial\emptyset}\\ A_R & R\cdot\sin(\theta)\cdot A_\emptyset\end{vmatrix}\overrightarrow{a_\theta}+\left(\frac{R\cdot\sin(\theta)}{R^2\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial()}{\partial R} & \frac{\partial()}{\partial\theta}\\ A_R & R\cdot A_\theta\end{vmatrix}\overrightarrow{a_\emptyset}$$

$$=\left(\frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\emptyset\cdot\sin(\theta))-\frac{\partial A_\theta}{\partial\emptyset}\right]\overrightarrow{a_R}-\left(\frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial R}(R\cdot A_\emptyset\cdot\sin(\theta))-\frac{\partial A_R}{\partial\emptyset}\right]\overrightarrow{a_\theta}+\left(\frac{1}{R}\right)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial R}(R\cdot A_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]\overrightarrow{a_\emptyset}$$

旋度的物理意義:

旋度是用來衡量某個封閉向量場的旋轉力量之強度，

$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{S}$代表向量場$\vec{A}$沿著封閉路徑 C 的"環量(ring amount)"，

環量越大則意味旋轉的力量愈大。
而環量不等於零，
則代表向量場$\vec{A}$"環繞"某一個封閉路徑的旋轉特性存在。
也可以將 curl($\vec{A}$)視為是在 C 所包圍的一個待測點上，
在 curl($\vec{A}$)方向上之旋轉強度。

(2) 旋轉定理(又稱史托克定理，Stoke's Theorem)

對三維空間而言，

$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$。

對二維(平面)空間而言，
假設$\vec{A} = \vec{A}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{a_x} + Q(x,y)\overrightarrow{a_y}$，

則$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right] dxdy$，

上式又稱為格林定理(Green's Theorem)。
從幾何的角度來看「旋度定理」,
可以知道：旋度定理提供我們一個轉換方法，
讓我們可以在一維(線)積分和二維(面)積分之間作相互的轉換運算。

範例.請求解

$$\int_C (Z^2 \cdot e^{x^2})dx + (x \cdot y^2)dy + [\tan^{-1}(z)]dz = ?$$

其中 C：$x^2 + y^2 = 3^2, z = 0$之圓周，且沿著逆時鐘方向積分。

解：令向量$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$

$$= A_x\overrightarrow{a_x} + A_y\overrightarrow{a_y} + A_z\overrightarrow{a_z}$$

$$= (z^2 \cdot e^{x^2})\overrightarrow{a_x} + (x \cdot y^2)\overrightarrow{a_y} + [\tan^{-1}(z)]\overrightarrow{a_z}$$

亦即，

$A_x = z^2 \cdot e^{x^2}$，

$A_y = x \cdot y^2$，

$A_z = \tan^{-1}(z)$，

而且

$d\vec{l} = (dx)\overrightarrow{a_x} + (dy)\overrightarrow{a_y} + (dz)\overrightarrow{a_z}$，

則，原題

$$\int_C (Z^2 \cdot e^{x^2})dx + (x \cdot y^2)dy + [\tan^{-1}(z)]dz$$

$= \int_C \vec{A} \cdot d\vec{l}$　　(又根據旋度定理)

$= \int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$。

因此，先求解$\nabla \times \vec{A} =?$

本題中，$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_x} & \overrightarrow{a_y} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ z^2 \cdot e^{x^2} & x \cdot y^2 & tan^{-1}(z) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial()}{\partial y} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ x \cdot y^2 & tan^{-1}(z) \end{vmatrix} \overrightarrow{a_x} - \begin{vmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ z^2 \cdot e^{x^2} & tan^{-1}(z) \end{vmatrix} \overrightarrow{a_y} +$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} & \frac{\partial()}{\partial y} \\ z^2 \cdot e^{x^2} & x \cdot y^2 \end{vmatrix} \overrightarrow{a_z}$$

$$= (y^2)\overrightarrow{a_z}$$

而且 $d\vec{S} = (dxdy)\overrightarrow{a_z} + (dydz)\overrightarrow{a_x} + (dxdz)\overrightarrow{a_y}$，
故，可以知道：

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_S (y^2\overrightarrow{a_z}) \cdot (dxdy\overrightarrow{a_z} + dydz\overrightarrow{a_x} + dxdz\overrightarrow{a_y})$$

$$= \int_S \int y^2 dxdy$$，

將積分區域 S 視為在 z=0 之圓柱座標系統，
而且，令 $x = r \cdot \cos(\emptyset)$，
$y = r \cdot \sin(\emptyset)$，
$ds = r \cdot dr d\emptyset$，

則：$\int_S \int y^2 dxdy$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{r=0}^{r=3} r^2 \cdot sin^2(\emptyset) \cdot r dr d\emptyset$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{r=0}^{r=3} r^3 \cdot [\frac{1-\cos(2\emptyset)}{2}] dr d\emptyset$$

$=\frac{81}{4}\pi$。

範例.

導線的半徑為 a，通過之電流為 I，電流方向為+z 軸之方向，而且導線之軸心為+z 軸，請計算下列條件下之磁場$\vec{H}$及磁場旋度$\nabla\times\vec{H}=?$

(1) 半徑為$r<a$。

(2) 半徑為$r>a$。

解.

對圓柱座標系統而言，

磁通密度$\vec{B}(r,\emptyset,z)$之函數

$\vec{B}(r,\emptyset,z)=B_r\overrightarrow{a_r}+B_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}+B_z\overrightarrow{a_z}$，

根據右手定則，

可知：拇指為電流方向，則四指切線方向即為磁場$\vec{H}$之方向。

故可知道：磁通密度$\vec{B}=\mu\vec{H}$只有$\overrightarrow{a_\emptyset}$方向之成份，

因此，我們假設:

磁通密度$\vec{B}(r,\emptyset,z)=B_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}$(只有$\emptyset$方向才有磁通密度$\vec{B}$之分量)，

而且 $d\vec{l}=(dr)\overrightarrow{a_r}+(rd\emptyset)\overrightarrow{a_\emptyset}+(dz)\overrightarrow{a_z}$，

故$\int_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu\cdot I_{net}$ (安培定律)，

其中，I_{net} 為線積分封閉路徑 C 內之淨電流，

μ 則為導磁係數。

$$\int_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=\int_C(B_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset})\cdot(dr\overrightarrow{a_r}+rd\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}+dz\overrightarrow{a_z})$$

$$=\int B_\emptyset\, rd\emptyset。$$

再假設$B_\emptyset$分量和變數$\emptyset$不相關，

則 $\int_C\vec{B}\cdot d\vec{l}=B_\emptyset\cdot r\cdot\int_0^{2\pi}d\emptyset$

$$=2\pi\cdot r\cdot B_\emptyset=\mu\cdot I_{net}，$$

亦即， $B_\emptyset=\frac{\mu\cdot I_{net}}{2\pi\cdot r}$。

(1) 在導線內(半徑為$r<a$)

此時導線橫截面流通之淨電流$I_{net}=?$

根據比例原則，可知：

$\pi a^2:I=\pi r^2:I_{net}$

故 $I_{net}(for\ r<a)=\frac{r^2}{a^2}\cdot I$

亦即：磁通密度$\vec{B}(r,\emptyset,z)=B_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}$

$$= (\frac{\mu}{2\pi \cdot r} \cdot I_{net})\overrightarrow{a_\emptyset}$$

$$= (\frac{\mu I}{2\pi a^2} \cdot r)\overrightarrow{a_\emptyset}。$$

此時，

for $r < a$，磁場強度$\vec{H}(r,\emptyset,z) = \frac{\vec{B}(r,\emptyset,z)}{\mu} = (\frac{I}{2\pi a^2} \cdot r)\overrightarrow{a_\emptyset}$

而且，$\nabla \times \vec{H}(r < a)$

$$= \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_r} & r\overrightarrow{a_\emptyset} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial()}{\partial r} & \frac{\partial()}{\partial \emptyset} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ 0 & \frac{I \cdot r^2}{2\pi a^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$= (\frac{I}{\pi a^2})\overrightarrow{a_z}$，for $r < a$。

(2) 在導線外(半徑為$r > a$)

此時導線橫截面流通之淨電流

$I_{net} = I$，

而且，$\vec{B}(r,\emptyset,z) = B_\emptyset \overrightarrow{a_\emptyset}$

$$= (\frac{\mu}{2\pi r} \cdot I_{net})\overrightarrow{a_\emptyset}$$

$$= (\frac{\mu \cdot I}{2\pi r})\overrightarrow{a_\emptyset}。$$

此時，

for $r > a$，磁場強度$\vec{H}(r,\emptyset,z) = \frac{1}{\mu}\vec{B}(r,\emptyset,z) = (\frac{I}{2\pi r})\overrightarrow{a_\emptyset}$

而且，

$\nabla \times \vec{H}(r > a)$

$$= \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{a_r} & r\overrightarrow{a_\emptyset} & \overrightarrow{a_z} \\ \frac{\partial()}{\partial r} & \frac{\partial()}{\partial \emptyset} & \frac{\partial()}{\partial z} \\ 0 & r \cdot \frac{I}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix}$$

$= 0\overrightarrow{a_r} + 0\overrightarrow{a_\emptyset} + 0\overrightarrow{a_z} = \vec{0}$，for $r > a$。

3. MATLAB 程式設計

功能:求解二維平面向量 $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = F_x\overrightarrow{a_x} + F_y\overrightarrow{a_y}$ 的旋度，

其中，$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = (-y^2)\overrightarrow{a_x} + (x^2)\overrightarrow{a_y}$

輸入:(1)變數 x 的計算範圍。
(2)變數 y 的計算範圍。
(3)變數 x 的變化量。
(4)變數 y 的變化量。

輸出: 向量函數，$\vec{F}=\vec{F}(x,y)=(-y^2)\overrightarrow{a_x}+(x^2)\overrightarrow{a_y}$的旋度分佈圖形。

程式碼:

Specify 2-D coordinates and the vector field.

[x,y] = meshgrid(-4:4,-4:4);

Fx = -y*2;

Fy = x*2;

Plot the vector field components Fx and Fy.

quiver(x,y,Fx,Fy)

Find the numerical curl and angular velocity of the 2-D vector field. The values of curl and angular velocity are constant at all input coordinates.

For a 2-D vector field of two variables $\mathbf{F}(x,y)=F_x(x,y)\,\hat{\mathbf{e}}_x+F_y(x,y)\,\hat{\mathbf{e}}_y$, the curl is

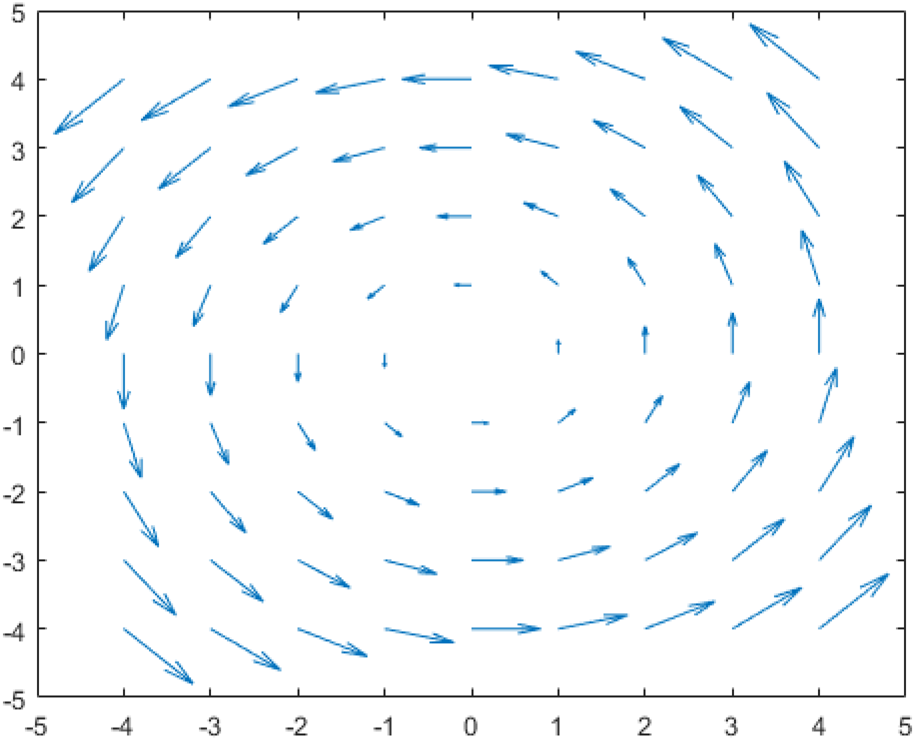
$$\text{curl}\ \mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}=\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_z.$$

The angular velocity is defined as $\omega=\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{F})_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_z$.

[curlz,cav] = curl(x,y,Fx,Fy)

4. MATLAB 程式執行結果

Plot the vector field components Fx and Fy.



Find the numerical curl and angular velocity of the 2-D vector field. The values of curl and angular velocity are constant at all input coordinates.

```
curlz = 9×9

     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
     4     4     4     4     4     4     4     4     4
```

```
cav = 9×9

     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
     2     2     2     2     2     2     2     2     2
```

5. 練習題

空間中有一個帶電量均勻分布之帶電球體，

其電荷密度為 $\rho\, {}^{couls}/_{cm^3}$，

而帶電球體之半徑為 a (cm)，請計算下列條件下之電場$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)$及電場旋度$\nabla \times \vec{E}(R,\theta,\emptyset)$?

(1) 半徑為R＜a。

(2) 半徑為R＞a。