單元十：「應用 MATLAB 於散度之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解並且繪圖某一個具有方向性的物理量(向量)對應之散度(divergence)(純量)函數，同時瞭解散度(divergence)在"外力"、"電場"或"磁場"等物理量函數其專業領域之實際應用與其對應之物理意義。

2. 原理說明

(1) 散度(divergence)的計算

假設向量$\vec{A}$代表某一個具有方向性的物理量，
例如：外力、電場或磁場等物理量，
則向量$\vec{A}$可以表示成：
$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$ 垂直座標系統
$=\vec{A}(r,\emptyset,z)$ 圓柱座標系統
$=\vec{A}(R,\theta,\emptyset)$ 球體座標系統。

向量$\vec{A}$的散度(divergence)，定義如下：(將向量轉成純量)
向量$\vec{A}$的散度$=\nabla\cdot\vec{A}$

$$\cong \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\Delta V},$$

其中，S 代表空間中某一個封閉區域的所有表面積，
而ΔV則代表 S 所包涵之封閉區域的總體積。

就不同之座標系統，

a. 對垂直座標系統 (Cartesian Coordinate System)而言，

$$\vec{A}=\vec{A}(x,y,z)$$
$$=A_x\overrightarrow{a_x}+A_y\overrightarrow{a_y}+A_z\overrightarrow{a_z},$$

則 $\nabla\cdot\vec{A}(x,y,z)$

$$=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)。$$

b. 對圓柱座標系統 (Cylindrical Coordinate System)而言，

$$\vec{A}=\vec{A}(r,\emptyset,z)$$
$$=A_r\overrightarrow{a_\gamma}+A_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}+A_z\overrightarrow{a_z},$$

則 $\nabla\cdot\vec{A}(r,\emptyset,z)$

$$=\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left[\frac{\partial(r\cdot A_r)}{\partial r}\right]+\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(\frac{\partial A_\emptyset}{\partial\emptyset}\right)+\frac{\partial(A_z)}{\partial z}。$$

c. 對球體座標系統 (Spherical Coordinate System)而言，

$\vec{A}=\vec{A}(R,\theta,\emptyset)$

$=A_R\overrightarrow{a_R}+A_\theta\overrightarrow{a_\theta}+A_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset}$，

則 $\nabla\cdot\vec{A}(R,\theta,\emptyset)$

$$=\left(\frac{1}{R^2}\right)\cdot\left[\frac{\partial(R^2\cdot A_R)}{\partial R}\right]+\left(\frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\left\{\frac{\partial[\sin(\theta)\cdot A_\theta]}{\partial\theta}\right\}+\left(\frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\right)\cdot\left[\frac{\partial(A_\emptyset)}{\partial\emptyset}\right]。$$

(2) 散度(divergence)的物理意義

對於某一個具有方向性的物理量$\vec{A}$而言，

a. 如果$\nabla\cdot\vec{A}>0$，則代表對待測位置而言，
向外射出的總通量(flux)大於(多於)向內射入的總通量(flux)。

b. 如果$\nabla\cdot\vec{A}<0$，則代表對待測位置而言，
向外射出的總通量(flux)小於(少於)向內射入的總通量(flux)。

(3) 散度定理(Divergence Theorem)

對於某一個具有方向性的物理量$\vec{A}$而言，下式成立：

$$\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{A}\,dv，$$

其中，S 代表空間中某一個封閉區域的所有表面積，
而 V 則代表 S 所涵蓋之封閉區域的總體積。
從幾何的角度來看「散度定理」，
可以知道：散度定理提供我們一個轉換方法，
讓我們可以在二維(面)積分和三維(體)積分之間作相互的轉換計算。

範例.請求解

$$\int_S\int(x\cdot z^2)dydz+(x^2\cdot y-z^2)dxdz$$
$$+(2\cdot x\cdot y+y^2\cdot z)dxdy=?$$

其中，$S:z=\sqrt{1-x^2-y^2}\geq 0$之所有表面積。

解：已知積分面積為$S:z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，

上式兩側都平方之後再移項，
亦即 $x^2+y^2+z^2=1$ 而且 $z\geq 0$，
($x^2+y^2+z^2=1$ 而且 $z\geq 0$ 代表一個半徑為 1 的半個圓球體)
所以積分面積 S 包括半個圓球體之球表面積，
再加上一個半徑為 1 的$x-y$平面上之圓面積。

令向量$\vec{A}(x,y,z)$

$= (x \cdot z^2)\overrightarrow{a_x} + (x^2 \cdot y - z^2)\overrightarrow{a_y} + (2 \cdot x \cdot y + y^2 \cdot z)\overrightarrow{a_z}$，

而且 $d\vec{S} = (dydz)\overrightarrow{a_x} + (dxdz)\overrightarrow{a_y} + (dxdy)\overrightarrow{a_z}$，

於是，

原題 $\int_S \int (x \cdot z^2)dydz + (x^2 \cdot y - z^2)dxdz$

$+(2 \cdot x \cdot y + y^2 \cdot z)dxdy$

$= \int_S \vec{A} \cdot \vec{S}$ (根據「散度定理」)

$= \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dv$。

首先，計算 $\nabla \cdot \vec{A} = ?$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial(A_x)}{\partial x} + \frac{\partial(A_y)}{\partial y} + \frac{\partial(A_z)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot y - z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2 \cdot x \cdot y + y^2 \cdot z)$$

$= x^2 + y^2 + z^2$ (垂直座標系統)

$= R^2$ (球體座標系統)。

再求解 $dv = ?$

$dv = (dx)(dy)(dz)$ (垂直座標系統)

$= R^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dR \cdot d\theta \cdot d\emptyset$ (球體座標系統)

由此可知：

原題$= \int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ (根據「散度定理」)

$= \int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dv$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{R=0}^{R=1} R^2 \cdot R^2 \cdot \sin(\theta)\, dR d\theta\, d\emptyset$$

$= \frac{2\pi}{5}$。

範例.一個圓柱筒以 Z 軸為軸，$0 \le z \le 4$，而且圓柱筒的半徑為 5，圓柱筒所在位置之電場強度$\vec{E}(r\text{、}\emptyset\text{、}z) = r^2\overrightarrow{a_r} + 2 \cdot z\overrightarrow{a_z}$，

(1)請求解$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$ (通過圓柱筒表面之所有電通量)

其中 S：代表圓柱筒的所有表面積。

(2)請求解$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dv = ?$ (通過圓柱筒體積之所有電通量)

其中 V：代表圓柱筒的總體積。

解：(1)先求解 $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = ?$

S 代表圓柱筒的所有表面積
$= S_1$ (圓柱筒在$z = 4$之上蓋面積)
$+S_2$ (圓柱筒在$z = 0$之下蓋面積)
$+S_3$ (圓柱筒在$r = 5$之圓柱筒側面面積)
此時，

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S_1} + \int_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S_2} + \int_{S3} \vec{E} \cdot d\vec{S_3}$$

$$= \int_{S1} (r^2\overrightarrow{a_r} + 2 \cdot z\overrightarrow{a_z}) \cdot (r\, dr d\emptyset \overrightarrow{a_z}|_{at\ z=4}$$

$$+ \int_{S2} (r^2\overrightarrow{a_r} + 2 \cdot z\overrightarrow{a_z}) \cdot (-r\, dr d\emptyset \overrightarrow{a_z}|_{at\ z=0}$$

$$+ \int_{S3} (r^2\overrightarrow{a_r} + 2 \cdot z\overrightarrow{a_z}) \cdot (r\, dr d\emptyset \overrightarrow{a_r}|_{at\ r=5}$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} 100 d\emptyset + 0 + \int_{z=0}^{z=4} 250\pi dz$$

$$= 1200 \cdot \pi \text{。}$$

(2)再求解 $\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv = ?$

$$\nabla \cdot \vec{E}(r, \emptyset, z) = \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial r}[r \cdot E_\gamma] + \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \emptyset}[E_\emptyset] + \frac{\partial}{\partial z}[E_z] \text{，}$$

其中 $\vec{E}(r, \emptyset, z) = E_r\overrightarrow{a_r} + E_\emptyset\overrightarrow{a_\emptyset} + E_z\overrightarrow{a_z}$

$$= (r^2)\overrightarrow{a_\gamma} + (0)\overrightarrow{a_\emptyset} + (2 \cdot z)\overrightarrow{a_z} \text{，}$$

亦即 $E_r = r^2$；$E_\emptyset = 0$；$E_z = 2z$。
故 $\nabla \cdot \vec{E}(r, \emptyset, z) = 3r + 2$，
而且 $dv = r dr d\emptyset dz$，

亦即 $\int_v \nabla \cdot \vec{E} dv$

$$= \int_{z=0}^{z=4} \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{r=0}^{r=5} (3r + 2)(r dr d\emptyset dz)$$

$$= 1200 \cdot \pi \text{。}$$

由(1)和(2)的計算結果可以得知:

$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv$ 成立，

亦即，驗證「散度定理」成立!

範例.空間中兩個相同球心，但是半徑分別為R_1和R_2的球殼($R_2 > R_1$)，

兩球殼之間存在之電場$\vec{E}(R,\theta,\emptyset) = KR\overrightarrow{a_R}$，

其中，K 為常數。

試求(1)$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ =? (穿過兩球殼表面之所有電通量數目)，

其中 S 代表兩個球殼的所有球殼表面積。

(2) $\int_V \nabla \cdot \vec{E} dv$ =? (進出兩球殼之間體積的所有電通量數目)，

其中 V 代表兩球殼之間的所有體積。

解：(1)先求解$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ =?

假設S_1代表半徑為R_1的球殼表面之面積，

S_2代表半徑為R_2的球殼表面之面積，

則$d\overrightarrow{S_1} = (Rd\theta) \cdot [R\sin(\theta)]d\emptyset\,(-\overrightarrow{a_R})|_{at\ R=R_1}$，

$d\overrightarrow{S_2} = (Rd\theta) \cdot [R\sin(\theta)]d\emptyset\,(\overrightarrow{a_R})|_{at\ R=R_2}$，

此時，

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{S_1} + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\overrightarrow{S_2}$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -K \cdot R^3 \cdot \sin(\theta) d\theta d\emptyset|_{at\ R=R_1}$$

$$+ \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} K \cdot R^3 \cdot \sin(\theta) d\theta d\emptyset|_{at\ R=R_2}$$

$$= \int_{S_1} K \cdot R^3 \cdot \cos(\theta)|_0^{\pi}\, d\emptyset_{at\ R=R_1}$$

$$+ \int_{S_2} K \cdot R^3 \cdot \cos(\theta)|_0^{\pi}\, d\emptyset_{at\ R=R_2}$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} -2 \cdot K \cdot {R_1}^3 d\emptyset + \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} 2 \cdot K \cdot {R_2}^3\, d\emptyset$$

$$= 4 \cdot K \cdot \pi \cdot ({R_2}^3 - {R_1}^3)$$。

(2)再求解$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dv$ =?

因為$\vec{E}(R,\theta,\emptyset) = K \cdot R\overrightarrow{a_R}$，

亦即$E_R = K \cdot R$；$E_\theta = 0$；$E_\emptyset = 0$。

故$\nabla \cdot \overrightarrow{E}(R,\theta,\emptyset) = \left(\frac{1}{R^2}\right)\left[\frac{\partial(R^2 E_R)}{\partial R}\right] = 3 \cdot K$。

對球體座標系統而言，

$dv = R^2 \cdot \sin(\theta) dR d\theta d\emptyset$，

因此，

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dv = \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{R=R_2}^{R=R_1} (3 \cdot K)\ [R \cdot \sin(\theta)] dR d\theta d\emptyset$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} K \cdot R^3 \cdot \sin(\theta) \,|\, _{R=R_1}^{R=R_2}\, d\theta d\emptyset$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} -K \cdot [{R_2}^3 - {R_1}^3] \cdot \cos(\theta) \,|\, _{\theta=0}^{\theta=\pi}\, d\emptyset$$

$$= \int_{\emptyset=0}^{\emptyset=2\pi} 2 \cdot K \cdot [{R_2}^3 - {R_1}^3] d\emptyset$$

$$= 4 \cdot K \cdot \pi \cdot ({R_2}^3 - {R_1}^3)$$。

由(1)和(2)的計算結果可以得知:

$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dv$ 成立，

亦即，驗證「散度定理」成立!

3. MATLAB 程式設計

功能:求解二維平面向量 $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = F_x \overrightarrow{a_x} + F_y \overrightarrow{a_y}$ 的散度，

其中，$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = (200 - x^2 - y^2)\overrightarrow{a_x} + (200 - x^2 - y^2)\overrightarrow{a_y}$。

輸入:(1)變數 x 的計算範圍。
(2)變數 y 的計算範圍。
(3)變數 x 的變化量。
(4)變數 y 的變化量。

輸出: 向量函數，$\vec{F} = \vec{F}(x,y) = (200 - x^2 - y^2)\overrightarrow{a_x} + (200 - x^2 - y^2)\overrightarrow{a_y}$的散度分佈圖形。

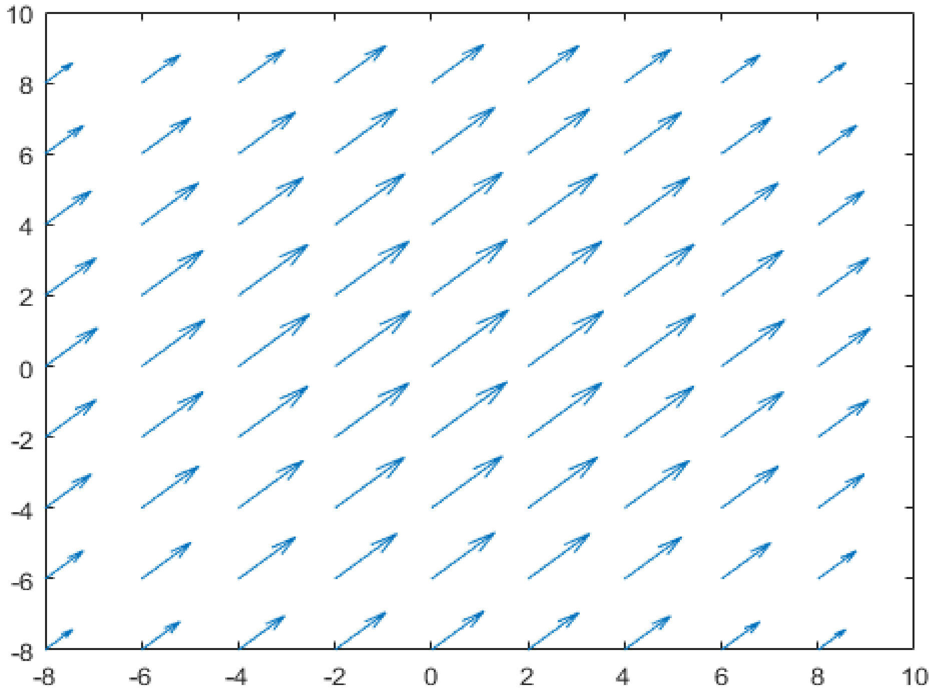
程式碼:

```
Specify 2-D coordinates and a vector field.
[x,y] = meshgrid(-8:2:8,-8:2:8);
Fx = 200 - (x.^2 + y.^2);
Fy = 200 - (x.^2 + y.^2);

Plot the vector field components Fx and Fy.
quiver(x,y,Fx,Fy)

Find the numerical divergence of the 2-D vector field. Plot the contour of the
```

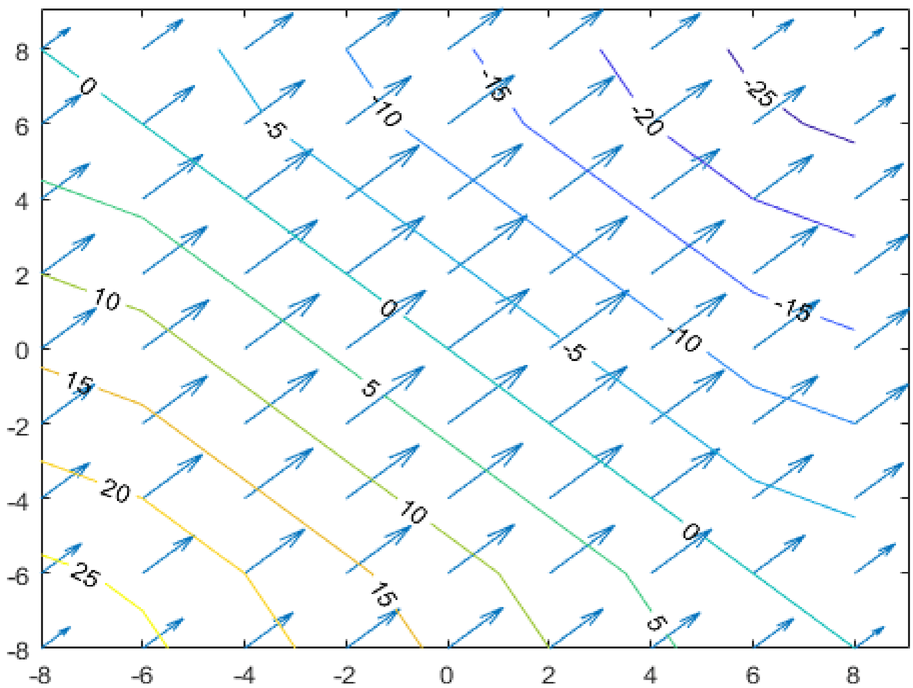
```
    divergence.
D = divergence(x,y,Fx,Fy);
hold on
contour(x,y,D,'ShowText','on')
```

4. MATLAB 程式執行結果

Plot the vector field components Fx and Fy.



Find the numerical divergence of the 2-D vector field. Plot the contour of the divergence.



5. 練習題

空間中帶電量為+Q 之帶電體，

在距離 R 處之電位分佈函數為$V(R,\theta,\emptyset)=(\frac{Q}{4\pi\epsilon})\cdot(\frac{1}{R})$

請撰寫 Matlab 程式，繪出：

(1) 電位分佈函數$V(R,\theta,\emptyset)$的等位線圖？

(2) 電場分佈函數$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)$之圖形？