

單元一：「應用 MATLAB 於 RC 電路之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解代表 RC 電路之一階微分方程式，並且瞭解電容之能量轉換過程，亦即，RC 電路之充、放電效應。

2. 原理說明

請參閱圖 1.所示之 RC 電路，

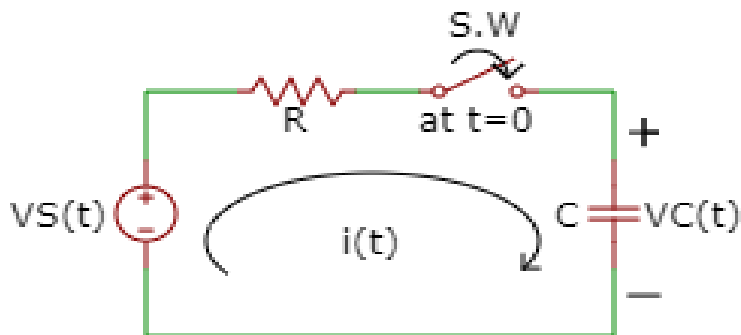


圖 1. RC 電路

假設，電容 C 的初始電壓為 $V_C(t=0)$ ，

電阻 R 之端電壓為 $V_R(t) = R \cdot i(t)$ ，

電容 C 之端電壓為 $V_C(t) = V_C(t=0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$ ，

其中，流過元件電容 C 的電流為 $i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} V_C(t)$ 。

在圖 1.之電路中(for $t>0$)應用 KVL 的觀念，可以得到：

$$\begin{aligned} \text{總升壓} &= V_S(t) \\ &= \text{總降壓} \\ &= V_R(t) + V_C(t) \\ &= R \cdot i(t) + V_C(t) \\ &= R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} V_C(t) + V_C(t), \end{aligned}$$

亦即，上述之圖 1.RC 電路，可以使用數學表示成下方之一階微分方程式：

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_C(t) = \frac{1}{R \cdot C} \cdot V_S(t) \cdots (1)$$

範例：

請參閱圖 2.範例之電路圖所示，

for $t < 0$ 時，開關 SW 的位置在 A 處，
受到長時間之直流 $V_1 = 24V$ 電源的影響，
電容元件 C 可以視同斷路 (open)，
此時，圖 2.之等效電路可以改畫成圖 3.

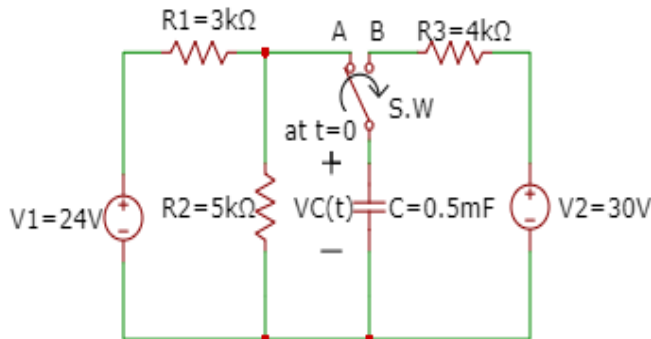


圖 2. 範例之電路圖

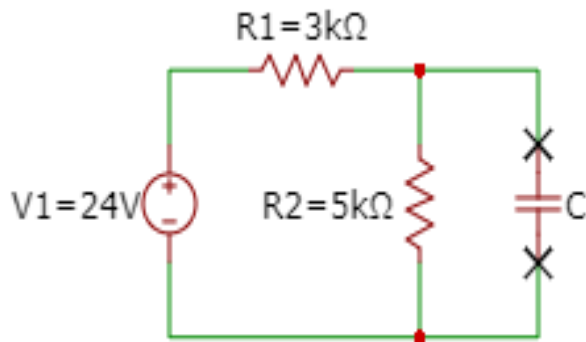


圖 3. 開關 SW 的位置長時間放在 A 處時，圖 2.之等效電路

故，此時 $V_C(t < 0) = V_{R2} = 24V \cdot \frac{5K}{(3K+5K)} = 15V$ ，

亦即，可以求得電容 C 之初值條件為：

$$V_C(t < 0) = 15V。$$

當 $t > 0$ 時，開關 SW 的位置撥到 B 處，

此時，圖 2.的電路可以改畫成圖 4.所示。

從時域(time-domain)來看，

應用 KVL 的性質，可以得到：

$$V_C(t) = R_3 \cdot i(t) + V_2，$$

$$\text{又 } i(t) = -C \cdot \frac{dV_C(t)}{dt}，$$

那麼，我們可以得到：

$$V_c(t) = -R_3 \cdot C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt} + V_2,$$

亦即，此時之 RC 電路，可以使用數學表示成下方的一階微分方程式，

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{R_3 \cdot C} \cdot V_c(t) = \frac{1}{R_3 \cdot C} \cdot V_2 \dots (2)$$

代入元件值 $R_3 = 4k\Omega$; $C=0.5mF$; $V_2=30^v$,

可以得到： $\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{2} \cdot V_c(t) = 15$,

使用 Matlab 撰寫程式來求解(2)式，我們可以得到：

$$V_c(t) = 30 - 15 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}, \text{ for } t \geq 0.$$

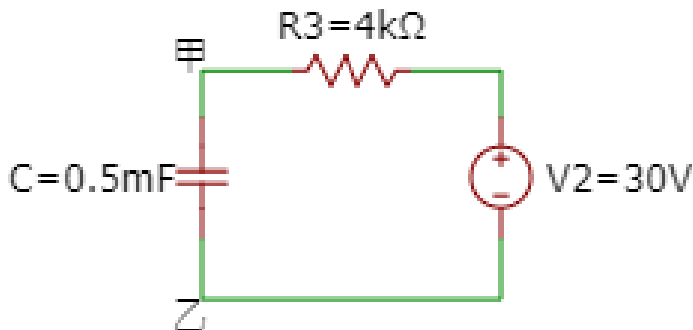


圖 4.開關 SW 的位置撥到 B 處時，圖 2.之等效電路

又，另外從頻域(frequency-domain)來看，

此時，

對圖 4.之電路進行"拉氏轉換"(Laplace Transform)，

則，可以將圖 4.之電路轉換成圖 5.

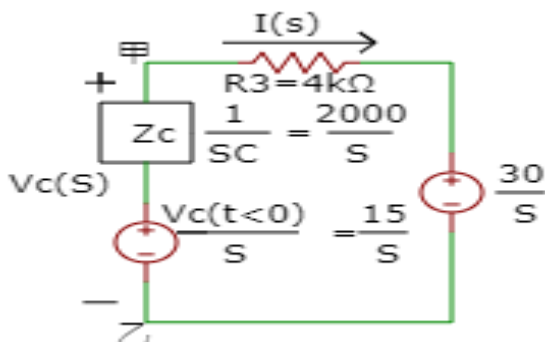


圖 5.經過拉氏轉換之後，圖 2 之等效電路

此時，升壓 = $\frac{15}{s}$,

$$\text{降壓} = \frac{2000}{s} \cdot I(s) + 4 \cdot 10^3 \cdot I(s) + \frac{30}{s},$$

根據 KVL，可以知道：

$$\text{升壓} = \frac{15}{s} = \text{降壓} = \frac{2000}{s} \cdot I(s) + 4 \cdot 10^3 \cdot I(s) + \frac{30}{s},$$

移項之後，

$$I(s) = \frac{\frac{-15}{s}}{\frac{2000}{s} + 4 \cdot 10^3} = \frac{-15}{4000 \cdot s + 2000},$$

$$\begin{aligned} \text{而 } V_C(s) &= V_{\text{降}} = \frac{15}{s} - I(s) \cdot Z_C \\ &= \frac{15}{s} - \frac{(-15)}{4000 \cdot s + 2000} \cdot \frac{2000}{s} \\ &= \frac{15}{s} + \frac{15}{s \cdot (2s + 1)} \\ &= \frac{30}{s} - \frac{15}{s + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

再對上式取"反拉氏轉換"(Inverse Laplace Transform)，

便可以求解出電容元件 C 的端電壓 $V_C(t)$ 為：

$$\mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = V_C(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{30}{s} - \frac{15}{s + \frac{1}{2}}\right] = 30 - 15 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}, \text{ for } t > 0.$$

從前述之分析可以知道：

- (1) 圖 2.範例之電路圖中的電容元件，其初始電壓為 15 伏特(開關 SW 的位置長時間放在 A 處時)。
- (2) 隨著開關 SW 的位置由 A 處撥到 B 處，電容元件的端電壓 $V_C(t)$ 逐漸升高，亦即，電容元件進入"充電"的狀態之中。
- (3) 根據求解得到的電容元件端電壓 $V_C(t)$ 之方程式，我們可以知道:電容至多"充電"到 $V_C(t)=30$ 伏特，此時，電阻 R_3 的電流會降到 0 安培，而使得電容元件無法繼續"充電"。
- (4) 如果想要觀察電容之"放電"行為的話，在前述的圖 2.及圖 4.中，請將直流電壓源 V2 的電壓值更改為小於 15 伏特之電壓值即可，例如:V2 的值=10 伏特。

3. MATLAB 程式設計

功能: 求解代表圖 4.之一階微分方程式(2)式中的電容端電壓 $V_C(t)$ 函數。

輸入: (1)電阻值 R3

(2)電容值 C

(3)直流電源之電壓值 V2(t)

(4)電容 C 的初始電壓值 $V_C(0)$

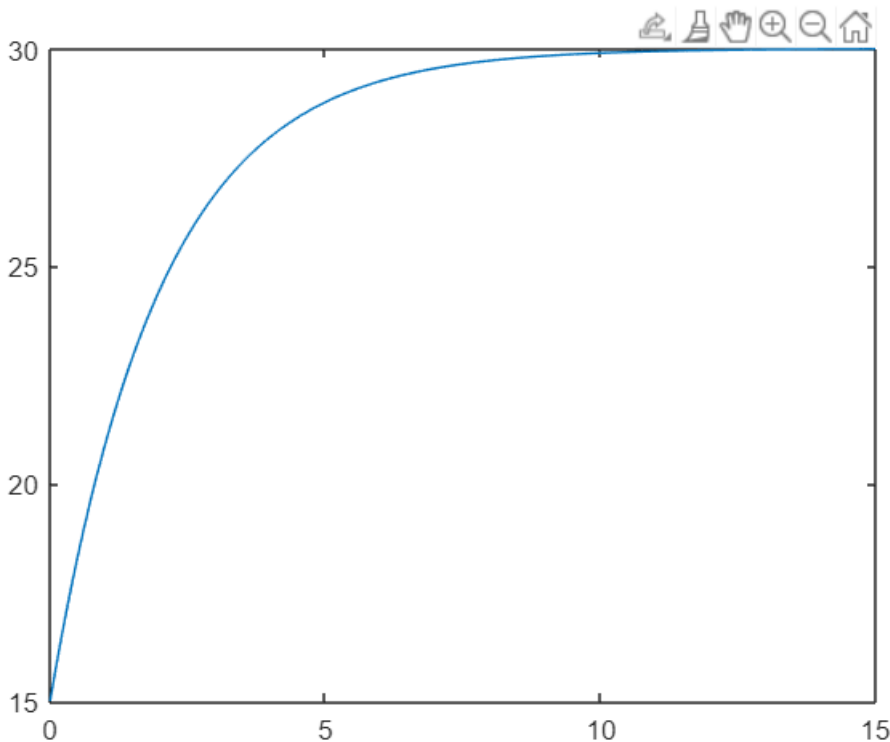
輸出: 電容 C 的電壓值 $V_C(t)$ ，並且繪出 $V_C(t)$ 對時間參數 t 的波形圖。

程式碼：

```
syms Vc(t) R3 C V2(t)
syms C1 C2 t
V2=30;R3=4000;C=0.0005
eqn=diff(Vc,t)+(1/(R3*C))*Vc(t)==(1/(R3*C))*V2
cond=[Vc(0)==15]
ySol(t) = dsolve(eqn,cond)
t=0:0.01:15
plot(t,30-15*exp(-t/2))
```

4. MATLAB 程式執行結果

ySol(t) =
30 - 15*exp(-t/2)



5. 練習題

(1) 假設圖 1.中電容之初值電壓為 $V_C(t \leq 0) = 10V$ 、 $V_S(t) = 15V$ ，請撰寫 Matlab 程式求解

$V_C(t) = ?$ ，for $t > 0$ ，並請繪出 $V_C(t)$ ，for $t > 0$ 之波形圖？

(2) 同上題，但是 $V_S(t) = \cos(3 \cdot t)V$ ？