單元九：「應用 MATLAB 於梯度之求解與分析」

1. 學習目標

撰寫 MatLab 程式碼，藉以求解並且繪圖某一個物理量(純量)對應之梯度(gradient)(向量)函數，同時瞭解梯度(gradient)在"一般物理量(純量)"函數、"幾何"函數、"電位/電場"函數等專業領域之實際應用與其對應之物理意義。

2. 原理說明

(1) 梯度(gradient)的計算

假設函數 F 代表某一個物理量(純量，scalar)，
例如：溫度分佈之物理量函數、
空汙 PM2.5 之濃度分佈函數、
電位之分佈函數，
則，該物理量函數 F 可以表示成：

$F = F(x,y,z)$ 垂直座標系統 (Cartesian Coordinate System)
$= F(r,\emptyset,z)$ 圓柱座標系統 (Cylindrica1 Coordinate System)
$= F(R,\theta,\emptyset)$ 球體座標系統 (Spherical Coordinate System)
$= K$ (常數)

就不同之座標系統，

a. 對垂直座標系統 (Cartesian Coordinate System)而言，

$F = F(x,y,z)$的梯度$\cong \nabla F(x,y,z)$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{a_x} + \frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{a_y} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{a_z}$$

b. 對圓柱座標系統 (Cylindrica1 Coordinate System)而言，

$F = F(r,\emptyset,z)$的梯度$\cong \nabla F(r,\emptyset,z)$

$$= \frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{a_r} + \left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial \emptyset}\overrightarrow{a_\emptyset} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{a_z}$$

c. 對球體座標系統 (Spherical Coordinate System)而言，

$F = F(R,\theta,\emptyset)$的梯度$\cong \nabla F(R,\theta,\emptyset)$

$$= \frac{\partial F}{\partial R}\overrightarrow{a_R} + \left(\frac{1}{R}\right)\cdot\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{a_\theta} + \frac{\partial F}{\partial \emptyset}\overrightarrow{a_\emptyset}$$

(2) 梯度(gradient)的物理意義

a. 如果$F(x,y,z) = K$代表一個曲線(曲面)，
而且$P(x_0,y_0,z_0)$位在$F(x,y,z) = K$之曲線(曲面)上，

則

$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\Big|_{at\,P(x_0,y_0,z_0)}$ 代表通過$\mathrm{P}(x_0,y_0,z_0)$ 這個點，

對$F(x,y,z)=K$這個曲線(或曲面)之切平面的單位法向量(unit normal vector)。

b. 如果$F(x,y,z)=K$代表某一物理量在空間中的分佈情形，

則：

$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ 代表物理量具有最大量"變化率/增加率"(最急遽增加)的方向，

$-\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$ 代表物理量有最大量"變化率/減少率"(最急遽減少)的方向。

c. 如果$F(x,y,z)=K$代表空間中電位分佈的情形，

則：

$-\nabla F(x,y,z)=\vec{E}(x,y,z)$代表空間中對應之電場強度的大小及方向。

範例：金屬薄板的表面攝氏溫度，可以用函數$T(x,y)$表示之，

$T(x,y)=20-4x^2-y^2$，

其中 x、y 的單位為公分，

試問：在位置$\mathrm{P}(2,-3)$處，溫度增加最快的方向為何?

溫度的增加率為何?

解：溫度$T(x,y)$的梯度函數為

$$\nabla T(x,y)=\frac{\partial T}{\partial x}\overrightarrow{a_x}+\frac{\partial T}{\partial y}\overrightarrow{a_y}=(-8\cdot x)\overrightarrow{a_x}+(-2\cdot y)\overrightarrow{a_y}$$

在位置 $\mathrm{P}(2,-3)$處，

其溫度增加最快之方向為

$$\frac{\nabla T}{|\nabla T|}\Big|_{atP(2,-3)}=\frac{-16\overrightarrow{a_x}+6\overrightarrow{a_y}}{\left|-16\overrightarrow{a_x}+6\overrightarrow{a_y}\right|}=\frac{-16\overrightarrow{a_x}+6\overrightarrow{a_y}}{\sqrt{(-16)^2+(6)^2}}=-\frac{16}{\sqrt{292}}\overrightarrow{a_x}+\frac{6}{\sqrt{292}}\overrightarrow{a_y}\text{，}$$

而且最大的增加率為

$$|\nabla T|_{atP(2,-3)}=\left|-16\overrightarrow{a_x}+6\overrightarrow{a_y}\right|=\sqrt{(-16)^2+(6)^2}=\sqrt{292}\,{}^{\circ}\mathrm{C}/\text{公分}\text{。}$$

範例：幾何空間中$F=F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=9$代表一個半徑為 3 的球殼面，

請求解通過點 $\mathrm{P}(3,0,0)$對球殼$F(x,y,z)$之切平面的單位法向量?

解：$F=F(x,y,z,)$為垂直座標系統

$F=F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=K(\text{常數})=9$

則：

通過點 $\mathrm{P}(3,0,0)$之球殼面的切平面其單位法向量為

$$\frac{\nabla F}{|\nabla F|}\Big|_{at\ P(3,0,0)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{a_x}+\frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{a_y}+\frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{a_z}}{\left|\frac{\partial F}{\partial x}\overrightarrow{a_x}+\frac{\partial F}{\partial y}\overrightarrow{a_y}+\frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{a_z}\right|}\Bigg|_{at\ P(3,0,0)}$$

$$= \frac{(2x)\overrightarrow{a_x}+(2y)\overrightarrow{a_y}+(2z)\overrightarrow{a_z}}{\left|(2x)\overrightarrow{a_x}+(2y)\overrightarrow{a_y}+(2z)\overrightarrow{a_z}\right|}\Big|_{at\ P(3,0,0)}$$

$$= \frac{(2x)\overrightarrow{a_x}+(2y)\overrightarrow{a_y}+(2z)\overrightarrow{a_z}}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}}\Big|_{at\ P(3,0,0)}$$

$= 1\overrightarrow{a_x} + 0\overrightarrow{a_y} + 0\overrightarrow{a_z} = +x$軸方向。

範例：兩個圓柱殼半徑分別是 a 和 b 而且$b > a$，圓柱高度均為 L，內半徑之圓柱殼上之帶電量為+Q 庫倫，電位為V_a伏特，外半徑之圓柱殼上之帶電量為-Q 庫倫，電位為V_b伏特，兩個圓柱殼之間的電場$\vec{E}(r,\emptyset,z) = \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\frac{1}{r}\overrightarrow{a_r}$，請求解兩個圓柱殼之間的電容效應$C_T$ =?

解：假設兩個圓柱殼之間的電位分佈函數為$V(r,\emptyset,z)$，

則：$\vec{E}(r,\emptyset,z) = -\nabla V(r,\emptyset,z)$

本題中，

$$\vec{E}(r,\emptyset,z) = \left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\frac{1}{r}\overrightarrow{a_r} + [0]\overrightarrow{a_\emptyset} + [0]\overrightarrow{a_z}$$

$$= -\left[\frac{\partial(\,)}{\partial r}\overrightarrow{a_r} + \left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{\partial(\,)}{\partial\emptyset}\overrightarrow{a_\emptyset} + \frac{\partial(\,)}{\partial z}\overrightarrow{a_z}\right]V(r,\emptyset,z)$$

$$= -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\overrightarrow{a_r} - \left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial\emptyset}\right)\overrightarrow{a_\emptyset} - \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\overrightarrow{a_z}$$

亦即，

$\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma}\right) = -\frac{\partial V}{\partial r}$，

而且 $\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial\emptyset}\right) = 0$，

而且 $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0$。

於是，我們得到：

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\left(\frac{1}{r}\right)$$

亦即，

$$dV = -\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma}\right)d\gamma$$

上式左右兩側同時積分，可以寫出:

$$\int_{V_b}^{V_a} dV = -\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot\int_{r=b}^{r=a}\frac{1}{r}dr$$

$V_a - V_b = \Delta V$ (兩個圓柱殼之間的電位差)

$$= -\left(\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\right)\cdot[\ln(a) - \ln(b)]$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon L}\cdot\ln\left[\frac{b}{a}\right]$$

此時，

電容效應

$$C_T = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon L}\times\ln\left[\frac{b}{a}\right]} = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left[\frac{b}{a}\right]}$$

範例：空間中電位分佈函數$V(R,\theta,\emptyset) = E_0\cdot R\cdot\cos(\theta)$，

其中，Eo 是一項常數，

請求解在$P(1,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})$處的電場強度$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)$ =?

解：因為電場強度$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)$可以表示成：

$$\vec{E}(R,\theta,\emptyset) = -\nabla V(R,\theta,\emptyset)$$

$$= -\left[\frac{\partial(\,)}{\partial R}\overrightarrow{a_R} + \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial(\,)}{\partial\theta}\overrightarrow{a_\theta} + \frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\cdot\frac{\partial(\,)}{\partial\emptyset}\overrightarrow{a_\emptyset}\right]V(R,\theta,\emptyset)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial R}[E_0\cdot R\cdot\cos(\theta)]\overrightarrow{a_R} - \frac{1}{R}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}[E_0\cdot R\cdot\cos(\theta)]\overrightarrow{a_\theta} - \frac{1}{R\cdot\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\emptyset}\cdot[E_0\cdot R\cdot\cos(\theta)]\overrightarrow{a_\emptyset}$$

at $P(1,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6})$處，電場$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)|_{at\ P(1,\pi/4,\pi/6)} = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}\overrightarrow{a_R} + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\overrightarrow{a_\theta} + 0\overrightarrow{a_\emptyset}$

3. MATLAB 程式設計

功能:計算一個二維之平面物理量函數 $Z(x,y) = x\cdot e^{-(x^2+y^2)}$ 的梯度。

輸入:(1)變數 x 的計算範圍。
(2)變數 y 的計算範圍。
(3)變數 x 的變化量。
(4)變數 y 的變化量。

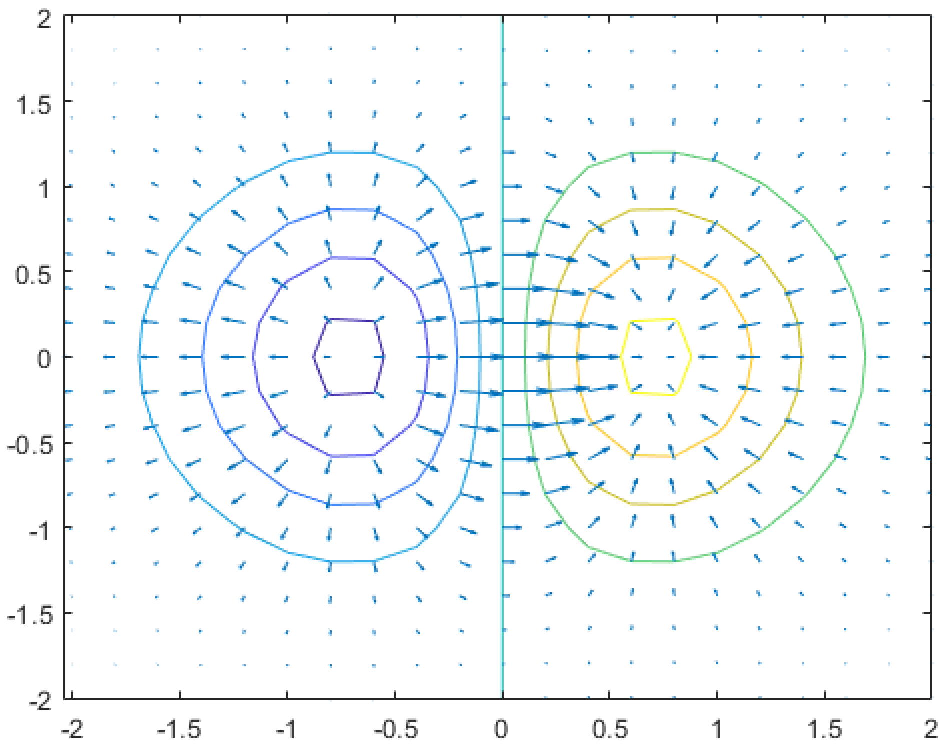
輸出:物理量函數 $Z(x,y) = x\cdot e^{-(x^2+y^2)}$ 的二維平面梯度圖形。

程式碼:

```
x = -2:0.2:2;
y = x';
z = x .* exp(-x.^2 - y.^2);
[px,py] = gradient(z);

figure
contour(x,y,z)
hold on
quiver(x,y,px,py)
hold off
```

4. MATLAB 程式執行結果



5. 練習題

空間中帶電量為+Q之帶電體，

在距離 R 處之電位分佈函數為$V(R,\theta,\emptyset)=(\frac{Q}{4\pi\epsilon})\cdot(\frac{1}{R})$

請撰寫 Matlab 程式，繪出：

(1) 電位分佈函數$V(R,\theta,\emptyset)$的等位線圖？

(2) 電場分佈函數$\vec{E}(R,\theta,\emptyset)$之圖形？