1 Quadratic functions basics

1.1 Which of the following matrices are positive definite:

$$D_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad D_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea una matrix A cuadrada nxn. Sea la transpuesta de A, A^T, y su conjugado transpuesto A^*, entonces cumplira con una y por lo tanto todas las siguentes condiciones

- Para un vector no nulo z entonces $z^* A z > 0$.
- Todos los valores poropios de A són positivos, $\lambda_i > 0$
- A és una matriz simetrica, es decir $A = A^T$
- Todos los menores principales de A son positivos. O lo que es equivalente; todas las matrices tienen determinantes positivos.

$$D_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \rightarrow det\,[D_1 - \lambda I] = 0$$

$$det\,[D_1 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda) = (\lambda^2 - 2\lambda - 8) = 0$$

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2$$

Podemos definir que no es definifa positiva ya que sus valores propios hay uno que no es positivo.

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow det\,[D_2 - \lambda I] = 0$$

$$\det[D_2 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\lambda = 0 \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

Podemos definir que no es definifa positiva ya que sus valores propios hay uno que no es positivo.

$$D_3 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \rightarrow det\,[D_3 - \lambda I] = 0$$

$$\det[D_3 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} 0.5-\lambda & 0 \\ 0 & 1.5-\lambda \end{bmatrix} = (0.5-\lambda)(1.5-\lambda) = 0.75 - 2\lambda + \lambda^2$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Podemos decir que es definifa positiva ya que sus valores propios son positivos.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det\,[A_1 - \lambda I] = 0$$

$$\det[A_1 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

Podemos definir que no es definifa positiva ya que sus valores propios hay uno que no es positivo.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det\,[A_2 - \lambda I] = 0$$

$$\det[A_2 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

Podemos definir que no es definifa positiva ya que sus valores propios hay uno que no es positivo.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det\,[A_1 - \lambda I] = 0$$

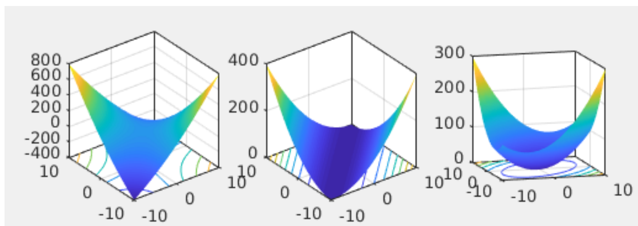
$$\det[A_1 - \lambda I] = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -0.5 \\ -0.5 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{2} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

Podemos decir que es definida positiva ya que sus valores propios son positivos.

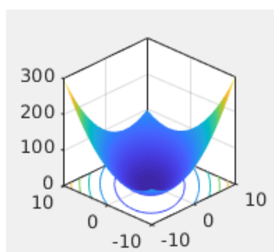
1.2 The Matlab Script quad_fun_main plots contours of the quadratic functions $g_i(x) =< x, D_i x >$ and $f_i(x) =< x, A_i x >$ for the above matrices. How many minima does each function have? Which is the relation between the g_i and f_i? Answer the questions asked in the code.

- How many minima does each function have?. *Como podememos apreciar solo hay una funcion que tinene minimo, la funcion numero 3,las otras dos tienen un minimo infinito o un punto de silla.*



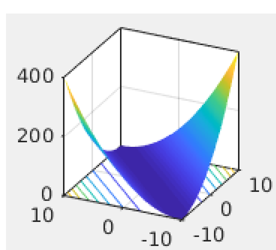
- Which is the relation between the g_i and f_i? *Como podemos ver, en los calculos anteriores, calculamos los valores propios de cada matriz, de lo que podemosd deducir que g_i, hace el calculo con la matriz diagonal de las matrizes A_1, A_2,A_3*

- Which matrix is positive definite? *La matriz A_3*

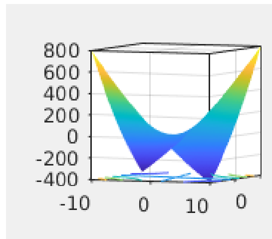


- How many minima does it quadratic function have? *Tiene un minimo, que es el minimo global.*

- Which matrix is semipositive definite? *La matriz A_2*



- How many minima does it quadratic function have? *No tiene ningun minimo.*
- Which matrix is indefinite? *La matriz A_1*



- How many minima does it quadratic function have? *No tienen, ningun minimo ya que es un punto silla*

1.3 Suppose that v_i, λ_i are the eigenvector, eigenvalue pairs of a symmetric 2 2 matrix A. The eigenvectors have unit norm (and are orthogonal). Let us consider a quadratic function $f(x) =< x, Ax >$. Suppose that $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Compute f(x) in terms of the eigenvalues λ_i and the coordinates i. Can you relate what you obtain with the contours of f_1, f_2 and f_3? For example, can you tell by looking at the contours which are the eigenvectors?

Podemos ver que x, es una composicion de los valores v_i, de la matriz A.Hay una relacion entre las transformaciones liniales y las matrices quadradas (nxn), la cual es el vector n-dimensional, que se consigue por las bases del vector espacio. Mediante $AX = \lambda x$ y sabiendo que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ llegamos a que $Ax = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2$ sabiendo que es una funcion cuadratica entonces podemos escribirla como $f(x) =< \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \lambda_2 \alpha_2 v_2 >$

2 Minimization of quadratic functions

2.1 Gradient descend vs Conjugate gradient method:

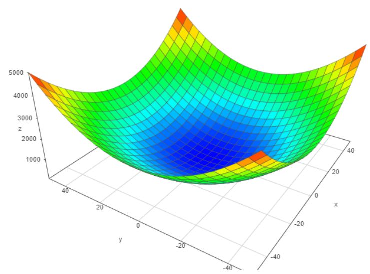


Figure 1: quadratic function example. $A = [10, 01]$

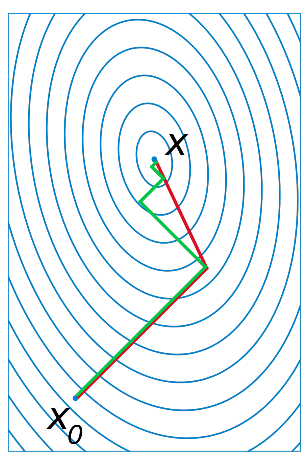


Figure 2: Gradient descend(green) vs Conjugate gradient method(red)

2.2 Gradient Descend

2.3 Exercise 4.

$$f(x) = 1/2\cdot < x, A \cdot x > - < b, x >$$

$$lim(f(x))_{e\to 0} = (f(x + e \cdot v) - f/(x))/e$$

$$(1/2 < x + e \cdot v, A(x + e \cdot v) > - < b, x + e \cdot v > -1/2 < x, Ax > + < b, x >)/e$$

$$(1/2(< x, Ax > + < x, Aev > + < ev, Ax > + < ev, Aev >)- < b, x > - < b, ev > -1/2 < x, Ax > + < b, x >$$

$$(1/2(< x, Aev > + < ev, Ax > + < ev, Aev >) - 2 < b, ev >)/e$$

$$(< x, Av > + < v, Ax > -2 < b, v >)$$

$$(< A^t x, v > + < Ax, v > -2 < b, v >)$$

$$< A^t x + Ax - 2b, v >$$

since matrix A is simetric: $A^t = A$

$$\partial f(x) = A^t x + Ax - 2b$$

$$\partial f(x) = Ax - b = r$$

2.4 Exercise 5.

$$\partial f(x + \alpha p) = A(x + \alpha p) - b$$

$$< A(x + \alpha p) - b, rk >= 0$$

$$\theta(\alpha)' = \partial f(x + \alpha p)_p =< p, \partial f(x + \alpha p) >=< p, A(x + \alpha p) - b >$$

$$\alpha < p, Ap > + < Ax - b, p >= 0$$

$$\alpha = (< Ax - b, p >)/(< p, Ap >)$$

2.5 Exercise 6.

gradient_descent.m

```
while (iter <= max_iters)
    iter=iter+1;
        Ax = Afun(x,Afun_opts);
        x_old = x;
    rk =Ax-b;    %gradiente funcion cuadratica
    step_size =((transpose(d)*rk))/(transpose(d)*(A*d));
    x =x_old - step_size*(rk);
```

2.6 Exercise 7.

conj_grad.m

```
while (iter <= max_iters)
    iter =iter+1;
        fs(iter) = .5*rk(:)'*x(:) - .5*b(:)'*x(:);
    rk_old = rk;
        x_old = x;
    d_old =d;
    Ax = Afun(x,Afun_opts);
    rk =Ax-b;
    beta = (transpose(rk)*rk)/(transpose(rk_old)*rk_old);
    d = -1*rk + beta*d_old;
    step_size =((transpose(d)*rk))/(transpose(d)*(A*d));
    x =x_old - step_size*(d);
```

La funcion implmeneta el metodo de gradiente conjugado.

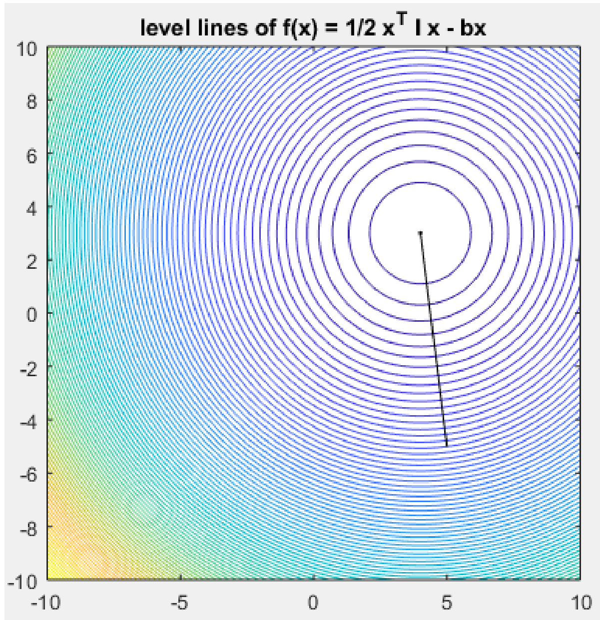


Figure 3: gradient descent

2.7 Ejercicio 8.

2.7.1 conj_grad_test_1:

Como podemos observar entre la figura 3 y 4 no se observan grandes diferencias entre ellas, esto es debido a que el gradiente del punto inicial es sufuciente para alcançar el minimo global, con lo que obtenemos los mismos reusltados con una implementacion de gradient descent que con la implementacion de conjugate gradient.(este fenomeno siempre se cumple si la matriz A es una matriz identidad o proporcionales.)

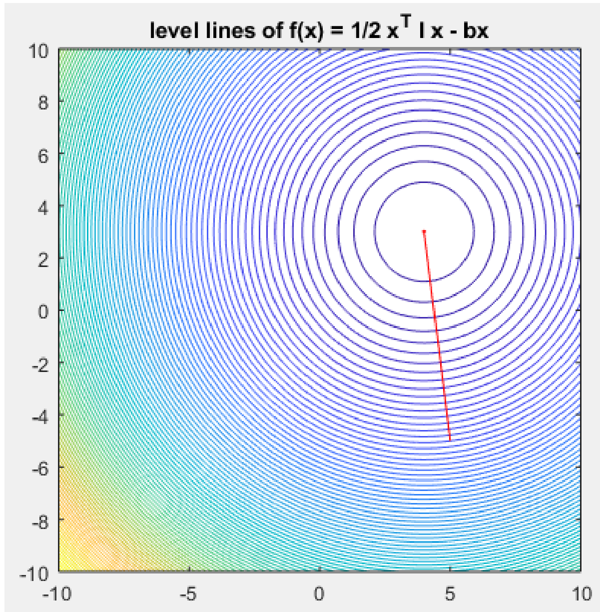


Figure 4: Conjugate Gradient

2.7.2 conj_grad_test_2:

Como podemos observar entre estas dos figuras, el punto inicial determina en gran medida el desempeño de la funcion, aunque el minimos se alcanza igualmente aunque el numero de iteraciones para alcanzarlo varian.

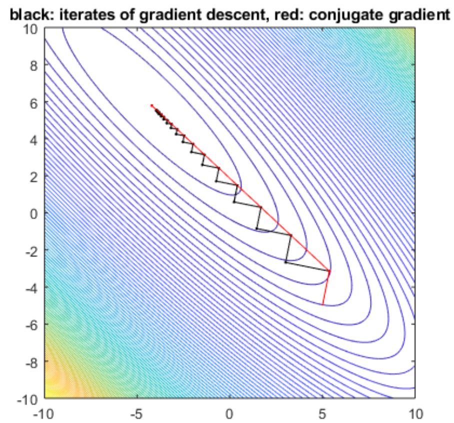


Figure 5: gradient descend(black) vs conjugate gradient(red) starting point[5,-5]

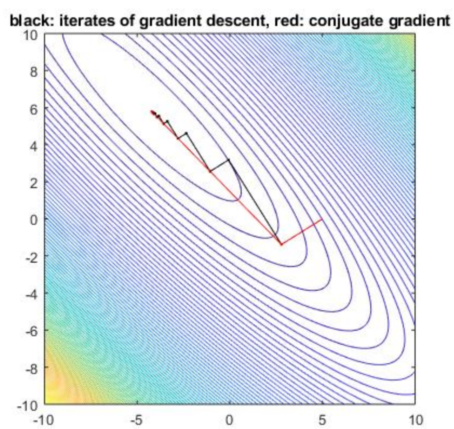
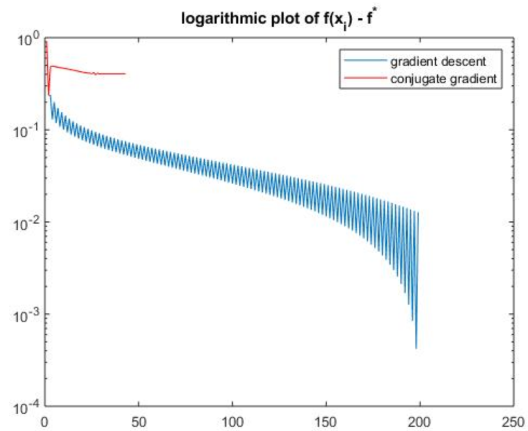


Figure 6: gradient descend(black) vs conjugate gradient(red) starting point[5,0]



2.7.3 conj_grad_test_3:

Si observamos el error entre el descenso de gradiente(azul) y el gradiente conjugado(rojo) observamos que el gradiente conjugado converge con menos iteraciones, mientras que el descenso de gradiente no converge, esto se ejemplifica en la figura5 donde el descenso de gradiente necesita substancialmente mas iteraciones para converger a un mismo minimo.