Practical session 4: Constrained Optimization

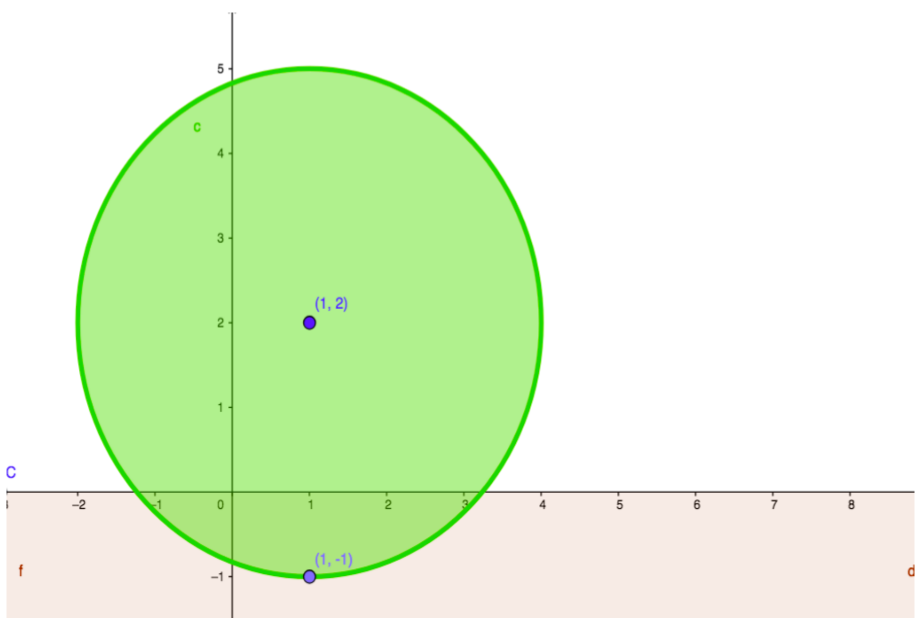
JALAL DOUIRI | FERRAN DALMAU
Optimization Techniques, UPF

30 de mayo de 2019

1. Karush-Kuhn-Tucker (KKT) optimally conditions

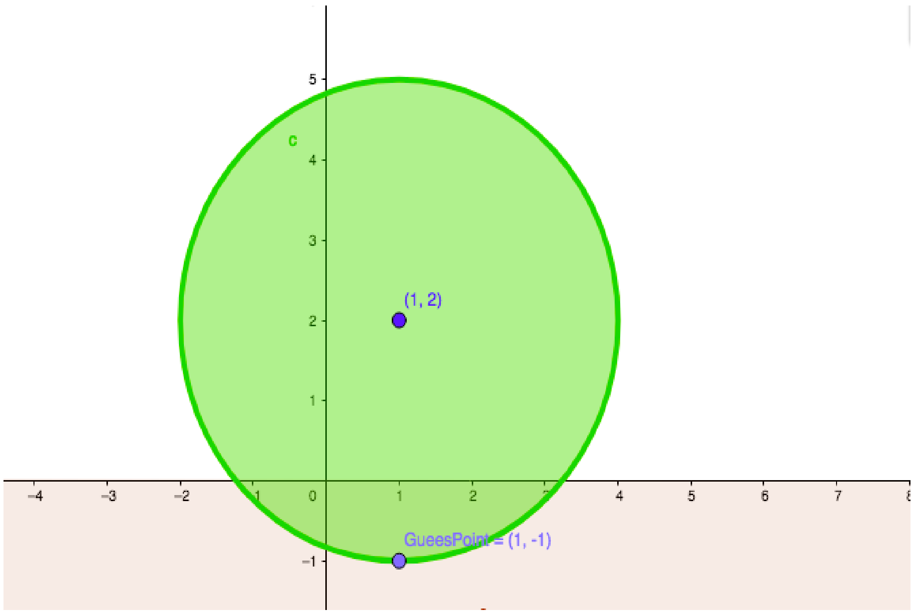
1.1. Toy Problem

- Sketch the set of constrains of the problem and the level lines of the objective function.



La zona verde es la restriccion de la circumferencia de radio 3 y centro (1,2), y la zona de color naranja es $x_2 \geq 0$.

- Guess from your sketch the solution of the problem.



El punto estimado para que sea minimo es el (1,-1).

- Find the solution using the function fmincon from Matlab.

```
f = @(x1,x2) x2;
zhandle = fcontour(f)

fun = @(x) x(2)
x0=[1,-2];
A= [0,1];
b = 0;
lb = [];
ub = [];
Aeq = [];
beq = [];
S = @circle;
options = optimoptions('fmincon', 'Display' , 'iter', 'Algorithm', 's
x = fmincon(fun,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,S,options)
fprintf("\n(%.2f,%.2f)\n",x(1),x(2))
```

El resultado de compilar el codigo anterior retorna:

$$(x_1 = 1 x_2 = -1)$$

- Write the KKT optimality conditions and check if the minimum satisfy these conditions. Find the solution of the dual variable/s from the KKT conditions. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

  on la funció es defineix com $f(x_1, x_2) = x_2$
  Miniminizarem la funció f(x) que esta subjecte a les seguents restriccions.

$minf(x_1, x_2)$
subjecte a
$9 \geq (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$
$x_2 \geq 0$

Apliquem la formula de lagrange:
L($x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_2 - \lambda_1(9 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) - \lambda_2(-x_2)$
$Elgradient:$
$\nabla L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = \binom{2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_1}{1 + 2\lambda_1 x_2 - 4\lambda_1 + \lambda_2} = \binom{0}{0}$

$LesKKT:$
$\lambda_1 \geq 0 \quad \lambda_2 \geq 0$
$\lambda_1(9 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) = 0$
$-\lambda_2 x_2 = 0$
$x2 \geq 0$
$(9 - (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 2)^2) \geq 0$
Substituint les lambdas podem trobar $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$

1.2. Water-filling

1.3. Entropy maximization problem

A continuación se presenta la representación gráfica de dos curvas, simultáneamente, cuyas ecuaciones están dadas por:

2. Exercise 1.2

En el codigo los paramentros A2 i b2 son constraints en forma de equaciones, y representan la constraint$x + y + x + t - 1 = 0$. El punto x1 inicial no es determinante, minetras este dentro de las constraints es valido y el resultado no esta afectado por el.

```
%%%SOLUTION FOR EXERCISE 2
fun2 = @(x) (-log(x(1))-log(1+x(2))-log(2+x(3))-log(3+x(4)));
x1 = [1,1,1,1];
A2 = [1,1,1,1];
b2 = 1;
lb = zeros(4);
x2 = fmincon(fun2,x1,[],[],A2,b2,lb,[])
```

El resultado de compilar el codigo anterior retorna:

$$x = 0{,}9995y = 0{,}005z = 0{,}0t = 0{,}0$$

Las KKT son:

$$L(x, y, z, t, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu) = -log(0{,}1+x) - log(0{,}1+y) - log(0{,}1+z) - log(0{,}1+t) - \lambda_1(x) - \lambda_2(y) - \lambda_3(z) - \lambda_4($$

$$.... - \mu(x+y+z+t-1)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu >= 0$$

$$\lambda_1(x) = 0$$
$$\lambda_2(y) = 0$$
$$\lambda_3(z) = 0$$
$$\lambda_4(t) = 0$$
$$\mu(x+y+x+t-1) = 0$$
$$\partial L/\partial x = 1/(0{,}1+x) - \lambda_1 - \mu = 0$$
$$\partial L/\partial y = 1/(0{,}1+y) - \lambda_2 - \mu = 0$$
$$\partial L/\partial z = 1/(0{,}1+z) - \lambda_3 - \mu = 0$$
$$\partial L/\partial t = 1/(0{,}1+t) - \lambda_4 - \mu = 0$$

punto a evaluar

$$x = 0{,}25 y = 0{,}25 z = 0{,}25 t = 0{,}25$$

:

$$\lambda_1(0{,}25) = 0 ergo \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2(0{,}25) = 0 ergo \lambda_2 = 0$$
$$\lambda_3(0{,}25) = 0 ergo \lambda_3 = 0$$
$$\lambda_4(0{,}25) = 0 ergo \lambda_4 = 0$$
$$\mu(1-1) = 0 ergo \mu > 0$$

$$\partial L/\partial x = -1/(0{,}1+0{,}25) - \lambda_1 - \mu = -2{,}8 - \mu = 0$$
$$\mu = -2{,}8$$

Todas las condiciones no se han cumplido($\mu >= 0$) con lo cual podemos concluir que

$$x = 0{,}25 y = 0{,}25 z = 0{,}25 t = 0{,}25$$

no es un minimo.

3. Exercise 1.3

En el codigo los paramentros A3 i b3 son constraints en forma de inequaciones, minetras que A4 i b4 representa la constraint$x + y - 1 = 0$. El punto x1 inicial no es determinante, minetras este dentro de las constraints es valido y el resultado no esta afectado por el.

```
 fun3 = @(x) (x(1)*log(x(1))+x(2)*log(x(2)));
x1 = [1,1];
A3 = [2,0;0,3];
b3 = [7;1];
A4 = [1,1];
b4 = 1;
x3 = fmincon(fun3,x1,A3,b3,A4,b4,[],[])
```

El resultado de compilar el codigo anterior retorna:

$$x = 2/3y = 1/3$$

Las KKT son:

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = xlog(x) + ylog(y) - \lambda_1(-2x + 7) - \lambda_2(-3 * y + 1) - \mu(x + y - 1)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \mu >= 0$$

$$\lambda_1(-2x + 7) = 0$$

$$\lambda_2(-3y + 1) = 0$$

$$\mu(x + y - 1) = 0$$

$$\partial L/\partial x = log(x) + 1 + 2\lambda_1 - \mu = 0$$

$$\partial L/\partial y = log(y) + 1 + 3\lambda_2 - \mu = 0$$

punto a evaluar

$$x = 2/3y = 1/3$$

:

$$\lambda_1(-4/3 + 7) = 0ergo\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2(-1 + 1) = 0ergo\lambda_2 > 0$$

$$\mu(1 - 1) = 0ergo\mu > 0$$

$$\partial L/\partial x = log(x) + 1 + 2\lambda_1 - \mu = 0{,}5845 - \mu = 0$$

$$mu = 0{,}5845$$

$$\partial L/\partial y = -0{,}0986 + 3\lambda_2 - \mu = 0$$

$$\lambda_2 = 0{,}23 > 0$$

Todas las condiciones se han cumplido con lo cual podemos concluir que

$$x = 2/3y = 1/3$$

es un minimo que cumple con las constraints establecidas.