作 业

	内容	作业
1	绪论，样本空间和随机事件	习题1　1.3
2	频率与概率定义，概率的主要性质	习题1　13~15
3	古典概型，几何概型	习题1　1.4 1.7, 1.8 1.9
4	乘法定理，全概率公式与贝叶斯公式	习题2　8，11，12
5	事件的独立性 小结	习题2　2~5，18

全概率公式

1. 样本空间的划分
2. 全概率公式

设 *i)* S 为试验 E 的样本空间，$A \subset S$；

ii) $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，

且 $P(B_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots n$.

则 $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$

全概率公式

全概率公式

1. 样本空间的划分
2. 全概率公式

$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$

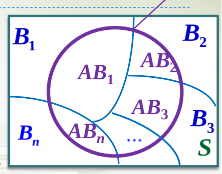
证：$A = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$

且 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 两两不相容.

$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$

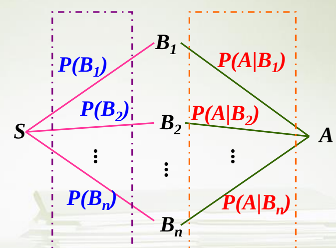
$= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$

$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$



化整为零
各个击破

▲ **解题框图：**



一定要找全 $\sum P(B_i) = 1$

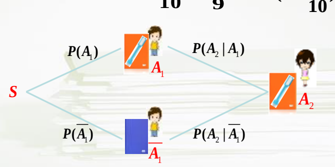
应用一　抽签问题

$P(A_1) = \boxed{\frac{2}{10}}$，$P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{2}{10}$

求：后抽的人确实比先抽的人吃亏吗?

解　$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 | \overline{A_1})$

$= \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + (1 - \frac{2}{10}) \times \frac{2}{9} = \boxed{\frac{2}{10}}$



抽签结果与顺序无关

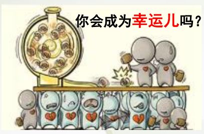
应用二　小客车指标摇号

2011 年

限牌治堵　　每月摇号一次　　等可能中签

应用二 小客车指标摇号

2014 年



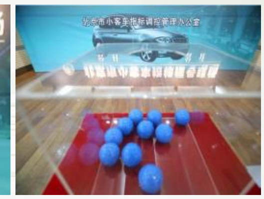
累计摇号次数	阶段	中签率
1-24	第一阶段	基准中签率
25-36	第二阶段	基准中签率2倍
37-48	第三阶段	基准中签率3倍

“久摇不中“者中签　两月摇号一次　阶梯中签

应用二 小客车指标摇号

截止到2015年2月8日，普通小客车指标申请人共有227.5万，将共同竞争1.84万个指标，第一、二、三阶段人数分别为170万、40.3万和17.2万人.

问：当期基准中签率 r 是多少？



应用二 小客车指标摇号

申请人227.5万，指标1.84万，第一、二、三阶段人数分别为170万、40.3万和17.2万人. 问：当期基准中签率 r 是多少？

分析

设：A ——某人中签

B_i ——第 i 阶段的人 $i=1,2,3$

由题意：$P(B_1)=\dfrac{170}{227.5}$　$P(B_2)=\dfrac{40.3}{227.5}$　$P(B_3)=\dfrac{17.2}{227.5}$

$$P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1.84}{227.5}=0.0081$$

欲求：$r=P(A\mid B_1)$

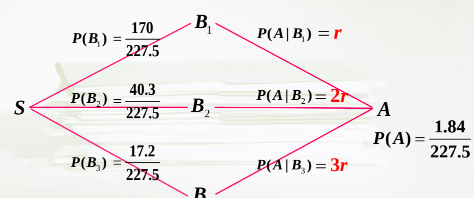
应用二 小客车指标摇号

申请人227.5万，指标1.84万，第一、二、三阶段人数分别为170万、40.3万和17.2万人.问：当期基准中签率 r 是多少？

解

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

$$\frac{1.84}{227.5}=\frac{170}{227.5}\times r+\frac{40.3}{227.5}\times 2r+\frac{17.2}{227.5}\times 3r$$



应用二

北京晨报网首页 > 汽车 > 热点新闻 > 正文

北京购车摇号指标中签难度再创新高 基准中签率0.6%

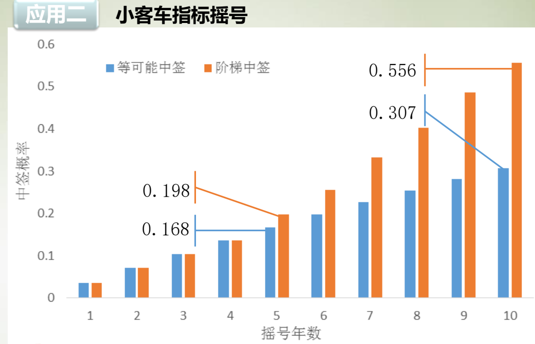
2015-02-26 07:59　文章来源：北京晨报　我要评论 0　扫描到手持设备　字号：T

核心提示：今日，本年度首期购车指标摇号结果将公布。

今日，本年度首期购车指标摇号结果将公布。根据昨日小客车指标办发布的数据显示，期普通车指标中签难度再创新高，基准中签率仅为0.6%，而新能源车本期能提供4526个个人指标是历次指标最多的一次，这意味着，2139位申请者本期无需摇号能够直接获得指标。

阶段	累计参加摇号次数	中签率
第一阶段	1-24	0.0061
第二阶段	25-36	0.0122
第三阶段	37-48	0.0183

应用二 小客车指标摇号



以90%的概率“摇中”，至少需要多少年？

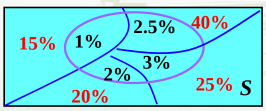
例6. 某工厂有四条流水线生产同一种产品，四条流水线的产量分别占该产品总产量的 15%, 20%, 25%, 40%，且四条流水线生产产品的次品率分别是：0.01，0.02，0.03，0.025，

求： 从出厂的这种产品中任取一件恰是次品的概率

解： 因为抽出的产品只能出自这四条流水线，故设：

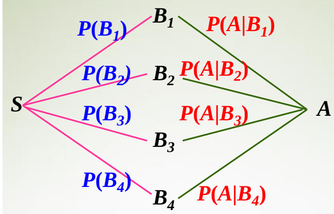
A： 取出的一件是次品

B_i： 取出的一件次品恰出自第 i 条流水线 $i=1,2,3,4$



显然：$S=\bigcup_{i=1}^{4} B_i$，且 $B_iB_j=\varnothing$，

$i \neq j,\quad i,j=1,2,3,4$



$P(B_1)=0.15,$
$P(B_2)=0.2,$
$P(B_3)=0.25,$
$P(B_4)=0.40$

$P(A|B_1)=0.01,$
$P(A|B_2)=0.02,$
$P(A|B_3)=0.03,$
$P(A|B_4)=0.025$

从而：$P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i)$

四条流水线产量(率)：15%，20%，25%，40%
四条流水线次品(率)：0.01，0.02，0.03，0.025

例9. 设甲袋中有3个白球，5个红球，乙袋中有4个白球，6个红球，现从甲袋中任取一个球放入乙袋中，再从乙袋中任取一球。

甲：

求：从乙袋中取得白球的概率。

乙：

解： 设 A：从乙袋中取得白球

因为：取球只有两种情况，要么白球要么红球

所以设：B： 从甲袋中任取一球是白球

$\bar{B}$： 从甲袋中任取一球是红球

显然：$B, \bar{B}$ 构成一个互斥事件完备组

即 $S=\{B \cup \bar{B}\}$，$B\bar{B}=\Phi$

甲：

$\therefore P(A)=P(A|B)\cdot P(B)+P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B})$

$=\frac{5}{11}\cdot\frac{3}{8}+\frac{4}{11}\cdot\frac{5}{8}=\frac{35}{88}=0.398$

乙：

逆问题：

若事件A已经发生（结果已经出现）问各种原因对结果出现所作的“贡献”各有多大？

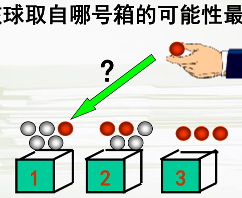
这一类问题在实际中更为常见，它所求的是条件概率，是已知结果发生条件下，求各原因发生可能性大小.

即：求 $P(B_i|A)$ ——由结果反思原因

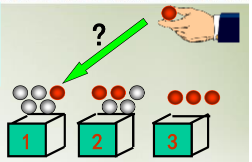
引例 有三个箱子，分别编号为1, 2, 3，1号箱装有1个红球4个白球，2号箱装有2个红球3个白球，3号箱装有3个红球. 某人从三箱中任取一箱，从中任意摸出一球，发现是红球。

求： 该球是取自1号箱的概率

或者问： 该球取自哪号箱的可能性最大？



某人从任一箱中任意摸出一球，发现是红球，求该球是取自1号箱的概率.



记　A ={取得红球}

B_i={球取自i号箱}，

$i=1,2,3;$

求: $P(B_1|A)$

$$P(B_1\mid A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A\mid B_k)}$$

运用全概率公式计算$P(A)$

将这里得到的公式一般化，就得到：贝叶斯公式

四、贝叶斯公式(逆概公式)

定理3. 设试验E的样本空间为S，A为E的事件，$B_1,B_2\cdots B_n$ 是S的一个划分，且 $P(A)>0,\ P(B_i)>0,$

$$\text{则: } P(B_i|A)=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},\ i=1,2\cdots n$$

称为贝叶斯（Bayes）公式

证明:
$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A|B_j)P(B_j)},$$

$i=1,2,\cdots,n.$

▲在贝叶斯公式中，$P(B_i)$ 和 $P(B_i|A)$分别称为原因的先验概率和后验概率.

先验概率

$P(B_i)$ 是在没有进一步信息（不知道事件A是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识。

后验概率

当有了新的信息（知道A发生），人们对诸事件发生可能性大小 $P(B_i|A)$有了新的估计.

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}$$

化

▲ 贝叶 概率”

例6. 某工厂有四条流水线生产同一种产品，四条流水线的产量分别占该产品总产量的 15%, 20%, 25%, 40%　且四条流水线生产产品的次品率分别是 0.01, 0.02, 0.03, 0.025,

求：从出厂的这种产品中任取一件恰是次品的概率

解：

A：取出的一件是次品

B_i：取出的一件次品恰出自第i 条流水线

$i=1,2,3,4$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A|B_i)=0.023$$

例8. 在例6中已知任取一件产品是次品

问：此次品出自哪条的流水线的可能性大?

解:
$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{\sum_{j=1}^{4}P(B_j)P(A|B_j)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.15\times0.01}{0.023}=0.065$$

$$P(B_2|A)=\frac{0.2\times0.02}{0.023}=0.174$$

$$P(B_3|A)=\frac{0.25\times0.03}{0.023}=0.326$$

$$P(B_4|A)=\frac{0.4\times0.025}{0.023}=0.435$$

出自第四条流水线可能性大

四条流水线产量(率)：15%，20%，25%，40%

四条流水线次品(率)：0.01，0.02，0.03，0.025

例9. 某一地区患有癌症的人占0.005，患者对一种试验反应为阳性的概率为0.95，正常人对这种试验反应为阳性的概率为0.04，现随机的抽查了一个人，试验反应是阳性。

问：此人是癌症患者的概率有多大 ?

解：设　C =｛ 抽查的人患有癌症 ｝，

A =｛ 试验结果是阳性 ｝，

则 $\overline{C}$ 表示“抽查的人不患有癌症”

已知：$P(C)$=0.005，$P(\overline{C})$=0.995，

$P(A|C)$=0.95，$P(A|\overline{C})$=0.04

此例即为求 $P(C|A)$

由贝叶斯公式，可得:

$$P(C \mid A)=\frac{P(C)P(A \mid C)}{P(C)P(A \mid C)+P(\bar{C})P(A \mid \bar{C})}$$

代入数据计算得:

$P(C \mid A) = 0.1066$

提出两个问题:

1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

2. 检出阳性是否一定患有癌症?

分析问题1. 这种试验对于诊断一个人是否患有癌症有无意义?

如果不做试验，随机抽查一人, 他是患者的概率:

$P(C) = 0.005$

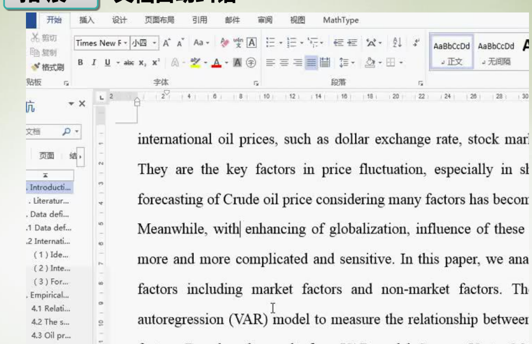
患者阳性反应的概率是 0.95，若试验后得阳性反应，则根据试验得来的信息，此人是患者的概率为:

$P(C \mid A) = 0.1066$

★ 从0.005 增加到0.1066，将近增加约 21 倍。

这说明：这种试验对于诊断一个人是否患有癌症是有意义的

拓 展 文档自动纠错



思考题

假设有两枚硬币，一枚是均匀的，一枚以3/4的概率正面朝上（有偏），随机地选一枚并连续投掷3次，发现3次都是正面朝上。给定这些信息，第4次投掷正面朝上的概率?