作　业

	内容	作业
1	绪论，样本空间和随机事件	习题1　1.3
2	频率与概率定义，概率的主要性质	习题1　13~15
3	古典概型，几何概型	习题1　1.4 1.7, 1.8 1.9
4	乘法定理，全概率公式与贝叶斯公式	习题2　8，11，12
5	事件的独立性 小结	习题2　2~5，18

计算古典概率注意事项

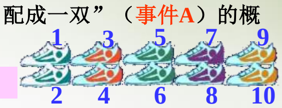
1、在应用古典概型时必须注意“等可能性”的条件.

“等可能性”是一种假设，在实际应用中,应该根据实际情况去判断是否可以认为各基本事件或样本点是等可能的。

在许多场合，由对称性和均衡性，一般就可以认为基本事件是等可能的，并在此基础上计算事件的概率。


2、在用排列组合公式计算古典概率时，必须注意不要重复计数，也不要遗漏.

例如：从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中“至少有两只配成一双”（事件A）的概率是多少?



下面的算法错在哪里？

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2}{C_{10}^4}$$

从 5 双中取 1 双，从剩下的 8 只中取 2 只

错在同样的“4 只配成两双”算了两次

从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋中“至少有两只配成一双”（事件A）的概率是多少？

正确的答案是：

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}$$

二、几何概型

定义　若随机试验满足下述两个条件：

(1) 它的样本空间是一个大小可以度量的几何区域（如线段、平面区域、立体空间）；

(2) 向区域内任意投一点，落在区域内任意度量相同的子区间内是等可能的.

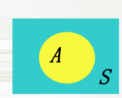
称这种试验为几何概型。

几何概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{S\text{的度量}}$$

例如

$$P(A)=\frac{\text{图形A的面积}}{\text{图形S的面积}}$$



应用一 会面问题

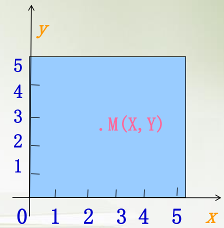
甲、乙二人约定在 12 点到17点之间在某地会面，先到者等一个小时后即离去，设二人在这段时间内的各时刻到达是等可能的，且二人互不影响．求二人能会面的概率.

解： 以 X， Y 分别表示甲乙二人到达的时刻，于是

$0\le X\le 5,\ 0\le Y\le 5.$

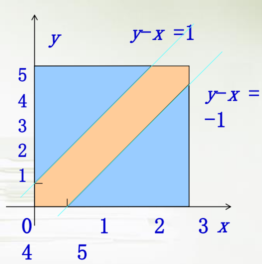
即点 M 落在图中的阴影部分．所有的点构成一个正方形，即有无穷多个结果.

由于每人在任一时刻到达都是等可能的，所以落在正方形内各点是等可能的.



二人会面的条件是： $|X-Y|\le 1,$

$$P=\frac{\text{阴影部分的面积}}{\text{正方形的面积}}=\frac{25-2\times\frac{1}{2}\times 4^2}{25}=\frac{9}{25}.$$



应用二 蒲丰投针试验

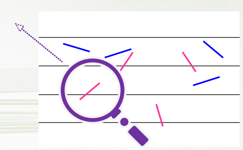
在间距为 d 的平行线上随意投掷长度为 l 的针，设事件A表示针与任一直线相交．求：A发生的概率 $P(A)$

解 设： x 为针的中点到线的最短距离

φ 为针与线的夹角

易知 $0\le x\le\frac{d}{2}$ $0\le\varphi\le\pi$

事件A发生的充要条件： $x\le\frac{l}{2}\sin\varphi$



应用二 蒲丰投针试验

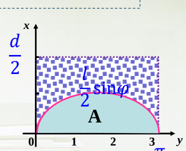
在间距为 d 的平行线上随意投掷长度为 l 的针，设事件A表示针与任一直线相交．求：A发生的概率 $P(A)$

解 设： x 为针的中点到线的最短距离

φ 为针与线的夹角

易知 $0\le x\le\frac{d}{2}$ $0\le\varphi\le\pi$

事件A发生的充要条件： $x\le\frac{l}{2}\sin\varphi$



由此：
$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\text{矩形的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\,d\varphi}{\frac{d}{2}\pi}=\frac{2l}{d\pi}$$

小结

1. 古典概型的定义
2. 古典概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{k}{n}$$

3. 几何概型的定义
4. 几何概型概率的计算公式

$$P(A)=\frac{A\text{的度量}}{S\text{的度量}}$$

第4节 条件概率及全概率公式

一、条件概率

设 $A\subset S$, $B\subset S$

记 $P(B\mid A)$ ——事件A发生的条件下，事件B发生的概率

引例1

某人有两个孩子， 令A——老大是男孩，

求：$P(B|A)$.　　B——有两个男孩，

解： E——生两个孩子　　是否为古典概型？

$\because$ $S=\{bb,bg,gb,gg\}$　　b—表示男孩　g—表示女孩

因而 $A=\{bb,bg\}$　　$B=\{bb\}$

$\therefore$ $P(B\mid A)=\dfrac{1}{2}$　　若直接求P(B)? $P(B)=\dfrac{1}{4}$

$S=\{bb,bg,gb,gg\}$

$A=\{bb,bg\}$　　$B=\{bb\}$

$AB\subset A$

分析：

$$P(B\mid A)=\frac{1}{2}=\frac{1/4}{2/4}=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(BA)}{P(A)}$$

1.定义： 设A,B是两个事件则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

为在事件B发生的条件下事件A发生的

条件概率． 其中 $P(B)>0$

注

▲ 类似可以定义: $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$, $(P(A)>0)$

▲ 条件概率符合概率定义中的三个条件：

★ 对每个事件B,有: $P(B|A)\ge 0$　　非负性

★ $P(S|A)=1$　　规范性

★ 设有 $B_1,B_2,\cdots\cdots$ 是两两互不相容的,

则有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i|A)$　　可列可加性

条件概率也是一种概率

---

2. 性质

在第三节中概率的性质1至性质6对条件概率都成立

常用的有：

(1) $P(\varnothing|B)=0$

(2) $P(A|B)=1-P(\overline{A}|B)$

(3) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$

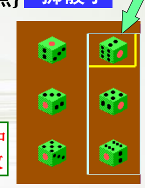
---

3. 条件概率的计算

（1）用定义计算 $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$,　$P(B)>0$

（2）从加入条件后改变了的情况去计算：

例如　A={掷出2点}，　B={掷出偶数点}　掷骰子



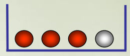
则: $P(A\mid B)=\dfrac{1}{3}$

B发生后的样本空间所含样本点总数

在缩减样本空间中A所含样本点个数

例1 盒中一等品3只，二等品1只，不放回任取两件，求下列事件的概率

1）第二次取到一等品.



2）第一次取到一等品，且第二次也取到一等品.

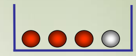
3）第一次取到一等品的条件下，第二次也取到一等品.

解:

设：A_i——第i次取到一等品，i=1,2.

题意求：　1) $P(A_2)$　2) $P(A_1A_2)$　3) $P(A_2|A_1)$

1）第二次取到一等品.　　$P(A_2)$



由抽签原理，分为两类，不放回取两次

$$\therefore\quad P(A_2)=\frac{3}{4}$$

2）第一次取到一等品，且第二次也取到一等品. $P(A_1A_2)$

$$\text{组合:}\ P(A_1A_2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$$

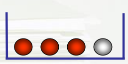
3）第一次取到一等品的条件下，第二次也取到一等品. $P(A_2|A_1)$

法一（定义）：

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1/2}{3/4}=\frac{2}{3}$$

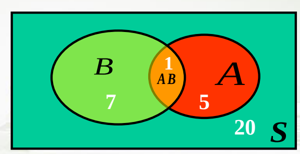
法二（含义）：

$$P(A_2\mid A_1)=\frac{2}{3}$$



无条件概率 $P(A)$、条件概率 $P(A|B)$ 及 $P(AB)$ 的区别

★ 每一个随机试验都是在一定条件下进行的，若设其样本空间为 S



例3 按设计要求，某建筑物使用超过50年的概率为0.8，超过60年的概率为0.7，若该建筑已经使用了50年，求它在10年内倒塌的概率。

解:

A——该建筑物使用超过50年. $P(A)=0.8$

B——该建筑物使用超过60年. $P(B)=0.7$

根据题意，求什么？ $P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A)$

$$\because\quad P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{7}{8}$$

$$\therefore\quad P(\overline{B}\mid A)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

二、乘法定理

由条件概率的定义： $P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$

若已知 $P(B)$, $P(A|B)$ 时, 可以反求 $P(AB)$ 即有：

定理1： 设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(A)P(B|A)$$

乘法原理可推广到多个事件的积事件的情形：

(1) $P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)$

其中：$P(AB)>0$

(2) $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

其中：$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

注

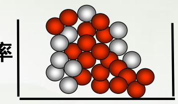
i）事件顺序按试验的进行步骤进行.

ii）条件概率按含义求.

例4 波里亚罐子模型

随机取一个球，观看颜色后放回罐中，并且再加进c个与所抽出的球具有相同颜色的球.

一个罐子中包含b个白球和r个红球. 随机地抽取一个球观看颜色后放回罐中，并且再加进c个与所抽出的球具有相同颜色的球. 这种手续进行四次。



试求：第一、二次取到白球且第三、四次取到红球的概率

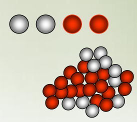
解：设 W_i={第i次取出是白球}, $i=1, 2, 3, 4$

R_j={第j次取出是红球}, $j=1, 2, 3, 4$

b个白球, r个红球

于是：$W_1W_2R_3R_4$表示事件：

连续取四个球,第一、第二个是白球，第三、四个是红球.



用乘法公式容易求出：

$P(W_1W_2R_3R_4)$

$=P(W_1)P(W_2|W_1)P(R_3|W_1W_2)P(R_4|W_1W_2R_3)$

$$=\frac{b}{b+r}\cdot\frac{b+c}{b+r+c}\cdot\frac{r}{b+r+2c}\cdot\frac{r+c}{b+r+3c}$$

问题的引入 抽签问题

10张同样的卡片只有2张上印有“特征签”，其余的什么也没写, 将其洗匀, “无放回”依次抽取.

问：后抽的人比先抽的人吃亏吗?

问题的引入 抽签问题

问：后抽的人比先抽的人吃亏吗?

分析 设 事件A_1——第 1 个人抽到“特征签”

事件A_2——第 2 个人抽到“特征签”

$P(A_1)=\frac{2}{10}$ $\quad P(\overline{A_1})=1-\frac{2}{10}$

$\boxed{P(A_2)}=P((\underbrace{A_1\cup\overline{A_1}}_{S})A_2)$ $\quad A_1\cap\overline{A_1}=\varnothing$

$=P(A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)$

$=\boxed{P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})}$

全概率公式

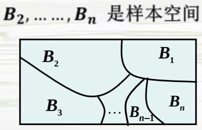
样本空间的划分

设 S 为试验 E 的样本空间，$B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ 为 E 的一组事件, 若:

(1)$B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j, i,j=1,2,\ldots\ldots,n$ 互不相容

(2)$B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n=S$ 充满样本空间

则称 $B_1, B_2, \ldots\ldots, B_n$ 是样本空间 S 的一个划分。



全概率公式

1 样本空间的划分

2 全概率公式

设 i) S 为试验 E 的样本空间，$A \subset S$；

ii) $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 S 的一个划分，

且 $P(B_i) > 0$，$i = 1, 2, \cdots n$.

则 $\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)}$

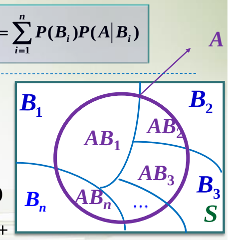
全概率公式

全概率公式

1 样本空间的划分

2 全概率公式

$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)}$



证：$A = AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n$

且 $AB_1, AB_2, \cdots, AB_n$ 两两不相容.

$$P(A) = P(AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n)$$
$$= P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$
$$= P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

化整为零
各个击破