作 业

	内容	作业
1	绪论，样本空间和随机事件	习题1 1.3
2	频率与概率定义，概率的主要性质	习题1 13~15
3	古典概型，几何概型	习题1 1.4 1.7, 1.8 1.9
4	乘法定理，全概率公式与贝叶斯公式	习题2 8，11，12
5	事件的独立性 小结	习题2 2~5，18

复 习

1. 概率的统计定义

频率 (波动) $\xrightarrow{n\to\infty}$ 概率(稳定).

2. 概率的公理化定义

非负性 ⇨ 规范性 ⇨ 可列可加性

3. 概率的主要性质

（1） $0 \le P(A) \le 1,\quad P(S)=1, P(\varnothing)=0;$

（2） 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

（3） $P(\overline{A}) = 1 - P(A);$

（4） $P(A-B) = P(A) - P(AB);$

（5） $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$

第3节 古典概型（等可能概型）

1. 定义

(1) 试验的样本空间只包含有限个元素；

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验称为等可能概型或古典概型.

样本有限： $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

等可能性： $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$

问题1： 每个基本事件出现的可能性（概率）为大?

因为： $\{e_1\}, \{e_2\}, \cdots \{e_n\}$ 两两不相容

由有限可加性：

$$1 = P(S) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{e_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{e_i\}) = nP(\{e_i\})$$

$$\therefore\quad \boxed{P(\{e_i\}) = \frac{1}{n},}\quad i = 1, 2 \cdots, n$$

问题2： 设 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots e_{i_k}\} \subset S$ ，则 $P(A)$=?

A事件含k个样本点

$$P(A) = \sum_{j=1}^{k} P(\{e_{i_j}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{所包含的样本点的个数}}{\text{样本点的总数}}$$

有利数

可能数

从而，将概率问题转化为计数问题.

古典概型的基本模型

1 赌金分配模型

2 抽样模型

3 抽签模型

4 放球模型

1.合理分配赌金问题

例1. 甲、乙两人连续赌四次，每次双方赢的机会均相同，求乙连赢 4 次的概率？

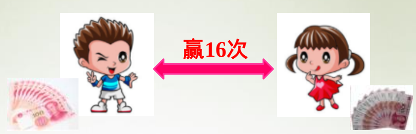
解：

1）审E　　E——两人连比4次　　判断是否为古典概型？

2）设A　　A——乙连赢4次

3）找n　　$n=2^4=16$

4）求k　　$k=1$　　因此：$P(A)=\dfrac{1}{16}$



赢 15次　　　　赢 12次

15：1　　　　15: 12

2.抽样问题

例2.有100件同类型同批次的产品，按性能分成两类：甲40件，乙60件。现从中任取三件，求取出的三件中甲两件，乙一件的概率？

解：

1）审E　　E——从100件中任取三件

2）设A　　A——取出的三件中甲两件，乙一件

考虑两种情形：

i）有放回抽样　　ii）不放回抽样

i）有放回抽样

一次取一件，取后放回，共取3次

此时：$n=100^3$ ——可重复排列

如何求k？　——考虑下列情况：

甲 甲 乙　　甲 乙 甲　　乙 甲 甲

$C_{40}^1 C_{40}^1 C_{60}^1$　　$C_{40}^1 C_{60}^1 C_{40}^1$　　$C_{60}^1 C_{40}^1 C_{40}^1$

因此：$k=3\times40\times40\times60$

$$\therefore P(A)=\frac{3\cdot40^2\cdot60}{100^3}=\frac{36}{125}=0.288$$

ii）不放回抽样

一次取一件，取后不放回，共取3次

此问题可否用组合求解？

此时：$n=100\cdot99\cdot98$

甲 甲 乙　　甲 乙 甲　　乙 甲 甲

$C_{40}^1 C_{39}^1 C_{60}^1$　　$C_{40}^1 C_{60}^1 C_{39}^1$　　$C_{60}^1 C_{40}^1 C_{39}^1$

因此：$k=3\times40\times39\times60$

$$\therefore P(A)=\frac{3\cdot40\cdot39\cdot60}{100\cdot99\cdot98}=\frac{156}{539}=0.289$$

ii’）不放回抽样 ——用组合进行求解

分析：

$$n=100\cdot 99\cdot 98=A_{100}^{3}=C_{100}^{3}\cdot 3!$$

$$k=3\cdot 40\cdot 39\cdot 60=3\cdot A_{40}^{2}\cdot C_{60}^{1}$$

$$=3\cdot C_{40}^{2}\cdot 2!\cdot C_{60}^{1}=C_{40}^{2}\cdot C_{60}^{1}\cdot 3!$$

因此： $P(A)=\dfrac{C_{40}^{2}\cdot C_{60}^{1}\cdot 3!}{C_{100}^{3}\cdot 3!}=\dfrac{C_{40}^{2}\cdot C_{60}^{1}}{C_{100}^{3}}$

可以看出，一次一件无放回，相当于一次取3件！

说明：

1）抽取方式不同时，结果也不同。

2）抽取对象数目较大，抽取数量相对较小时，
100　3
不放回抽样当作放回抽样处理，结果相近。

3）可能数中考虑顺序，有利数也要考虑顺序，

否则A中少可能事件。

4）组合：不放回抽样，且事件与顺序无关。

计算中常见问题。

5）常用情形：

E——从n个产品中（甲n_1、乙n_2、丙n_3）

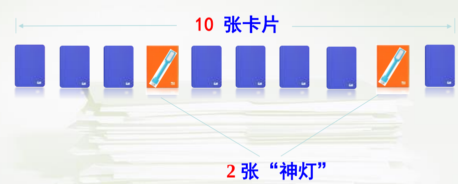
不放回取k个。

A——取出的k件中，甲k_1、乙k_2、丙k_3

则： $P(A)=\dfrac{\boxed{C_{n_1}^{k_1}\cdot C_{n_2}^{k_2}\cdot C_{n_3}^{k_3}}}{C_n^k}$ 乘法原理，都取完事件A才完成。

3.抽签问题

10张同样的卡片只有2张上印有“特征签”，其余的什么也没写，将其洗匀，“无放回”依次抽取.
问：第i个人抽到“特征签”的概率是多少?



解： E——抽签（不放回）。

A_i——第 i 次抽中“特征签”。

法一： E——对 10个卡片做全排列。 $n=10!$

求k： 只要第 i 个位置“特征签”卡片，其余随便。

所以， $k=C_2^1\cdot(10-1)!=2\cdot(10-1)!$

$$P(A_i)=\frac{2\cdot(10-1)!}{10!}=\frac{2}{10}$$

$i=1,2\cdots,10$

法二：（仅对前i个卡片进行考虑）

E——在 10个卡片中任取 i 个进行排列。

$n=A_{10}^{i}$

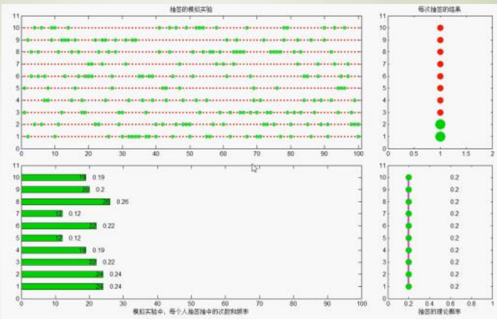
$k=2\cdot A_{10-1}^{i-1}$

结果与 i 无关，
即与抽签顺序无关！

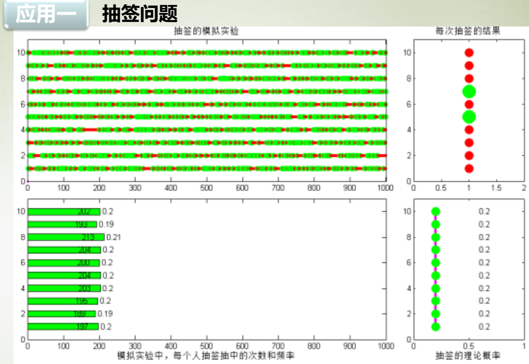
$$P(A_i)=\frac{2\cdot A_{(10-1)}^{i-1}}{A_{(10)}^{i}}=\frac{2}{10}$$

$i=1,2\cdots,10$

应用一 抽签问题



应用一 抽签问题



应用一 抽签问题

抽签模型

条件：

（1） N个签中有m个特征签;

（2） 一次取一个,无放回;

则：

$$P(A_i)=\frac{m}{N} \qquad i=1,2\cdots,N$$

例5.在 0 , 1 , 2 … 9 这十个数中不放回地任取两个，求取到数字 8 的概率。

解： A——取到数8. 将A分解

A_i——第 i 次取到数8，i=1,2

$$A=A_1\cup A_2 \qquad A_1\cap A_2=\varnothing$$

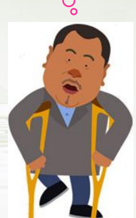
$$\therefore \quad P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{5}$$

分析： 10个数，两类，一类是8，一类不是8.

所以：由抽签原理 $P(A_1)=P(A_2)=\dfrac{1}{10}$

4.放球问题

同一天过生日？缘分呐！



11月 2 波尔克和哈定的生日

12月 26 杜鲁门和福特的祭日

3月 8 菲尔莫尔和塔夫脱的祭日

7月 4 亚当斯、杰斐逊和门罗的祭日

放球模型

问题 将 m 个不同编号的球随机放入 $N(m \le N)$ 个盒子中，每球以相同的概率放入盒子，盒子容量不限，令：

A_1——某指定的 m 个盒子中各有一球；

A_2——恰有 m 个盒子中各有一球；

A_3——至少有两球在同一个盒子中.

求: $P(A_i)$，$i=1,2,3$.

25

将 m 个不同编号的球随机放入 $N(m \le N)$ 个盒子中，每球以相同的概率放入盒子，盒子容量不限.

求: 某指定的 m 个盒子中各有一球的概率?

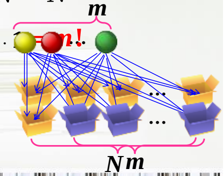
解 1)审E E——放球

2)设A A_1——某指定的 m 个盒子中各有一球

3)找n $n = \overbrace{N\times N\times\cdots\times N}^{m} = N^m$

4)求k $k_1 = m\cdot(m-1)\cdots = m!$

$\therefore\ P(A_1)=\dfrac{m!}{N^m}$



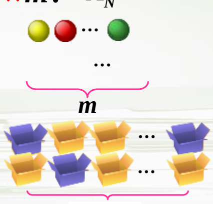
26

将 m 个不同编号的球随机放入 $N(m \le N)$ 个盒子中，每球以相同的概率放入盒子，盒子容量不限.

解 A_1——某指定的 m 个盒子中各有一球

A_2——恰有 m 个盒子中各有一球

$k_2 = C_N^m \times m! = A_N^m \quad \therefore\ P(A_2)=\dfrac{A_N^m}{N^m}$



27

将 m 个不同编号的球随机放入 $N(m \le N)$ 个盒子中，每球以相同的概率放入盒子，盒子容量不限.

解 A_2——恰有 m 个盒子中各有一球

$k_2 = C_N^m \times m! = A_N^m \quad \therefore\ P(A_2)=\dfrac{A_N^m}{N^m}$

A_3——至少有两球在同一个盒子中

$\because\ \overline{A_3} = A_2$

$\therefore\ P(A_3) = 1 - P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_2)$

$= 1 - \dfrac{A_N^m}{N^m}$

28

应用1、生日问题

假设每人的生日在一年365天中任一天是等可能的，人数为30的班级中，至少两人生日相同的概率为多大？

解 设：B—

至少两个球在同一盒子中.

应用1、生日问题

假设每人的生日在一年365天中任一天是等可能的，人数为30的班级中，至少两人生日相同的概率为多大？

解 设：B——至少两人生日相同.

至少两个球在同一盒子中.

$P(B) = 1 - \dfrac{A_{365}^{30}}{365^{30}} = 0.706$

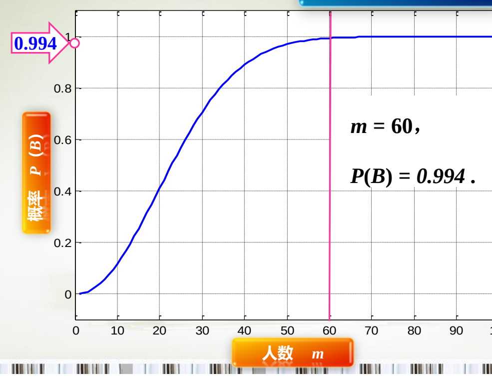
反问题 若要以0.99的概率，确保班里有两人生日相同，该班级有多少位同学？

解 设该班级有 m 位同学

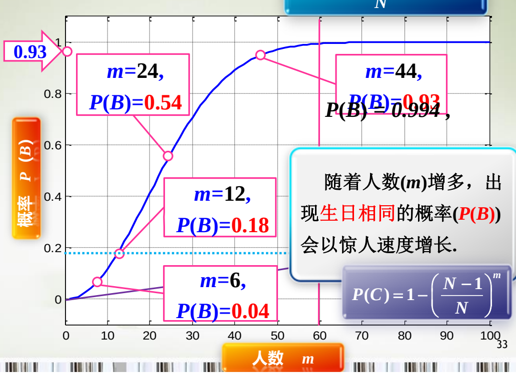
B：两人生日相同

$$P(B)=1-\frac{A_{365}^{m}}{365^{m}}=0.99$$

利用Matla6进行数值计算. $P(B)=1-\frac{A_N^m}{N^m}$，$N=365$



利用Matla6进行数值计算. $P(B)=1-\frac{A_N^m}{N^m}$，$N=365$



随着人数(m)增多，出现生日相同的概率(P(B))会以惊人速度增长.

$$P(C)=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^m$$

33

应用2、生日悖论

在此班级里（60人），有人与“我”生日相同的概率为多大呢？

至少有1人

解 C：有人与“我”生日相同

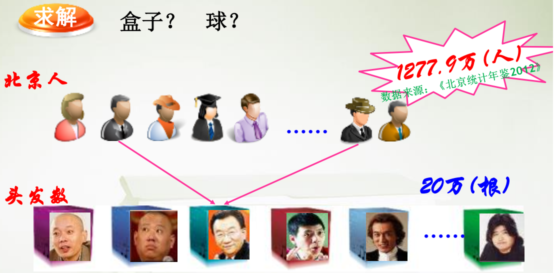
$\overline{C}$：无人与“我”生日相同

$$P(\overline{C})=\underbrace{\frac{364\cdot364\cdots\cdots364}{365\cdot365\cdots\cdots365}}_{60}=\left(\frac{364}{365}\right)^{60}$$

$$P(C)=1-P(\overline{C})=0.152$$

思考 北京人中有没有两个人头发根数相同？

求解 盒子？ 球？



35

应用3、抽屉原理

将 $n+1$ 个球放入 n 个盒子，必有两个球在同一盒子中.

Dirichlet(1805～1859)