作 业

	内容	作业
7	随机变量的概念，离散型随机变量	习题3 2. 3. 4. 15. 17. 18
8	分布函数及其性质，连续型随机变量	习题3 1.
9	均匀分布，指数分布，正态分布	习题3 1. 7. 9.
10	分位点，随机变量函数的分布	习题3 12. 13. 14.

复 习

1）随机变量是定义在抽象空间上的实值函数。

2）随机变量的特点：

i） 取值带有随机性 ii）取值有一定的概率

例1 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8，现该射手不断向目标射击，直到击中目标为止，则

$X(e)$ = 所需射击次数，

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为:

1， 2， 3， … .

例2 某公共汽车站每隔 5 分钟有一辆汽车通过，如果某人到达该车站的时刻是随机的，则

$X(e)$ = 此人的等车时间，

是一个随机变量.

且 $X(e)$ 的所有可能取值为: [0,5].

四、随机变量的分类

随机变量
- 离散型
- 非离散型
  - 连续型
  - 其它

(1)离散型 随机变量所取的可能值是有限多个或无限可列个，叫做离散型随机变量.

实例1 观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能值是： 1, 2, 3, 4, 5, 6.

实例2 若随机变量 X 记为 “连续射击，直至命中时的射击次数”，则 X 的可能值是:

1， 2， 3， ….

实例3 设某射手每次射击打中目标的概率是0.8，现该射手射了30次，则随机变量 X 记为 “击中目标的次数”，则 X 的所有可能取值为:

0， 1， 2， 3， …， 30.

(2)连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例1　随机变量 X 为“灯泡的寿命”.

则 X 的取值范围为 $[0,+\infty)$.

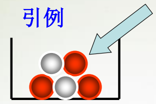
实例2　随机变量 X 为“某城市10月份平均气温”.

则 X 的取值范围为 (a, b).

第2节　离散型随机变量及其分布

一. 离散型随机变量的分布律

引例



如图中所示，现从中任取 3 个球，取到的白球数 X 是一个随机变量。

X 可能取的值是 0, 1, 2

取每个值的概率为:

$P\{X=0\}=$　　　　$P\{X=1\}=$

$P\{X=2\}=$　　　　且: $\sum_{i=1}^{3} P\{X=i\}=\boxed{1}$

1. 定义: 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k, $k=1,2,\cdots$ 其各个可能取值即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率为:

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=0,1,2\cdots\cdots$$

则称 $P\{X=x_k\}=p_k$ 为离散型随机变量 X 的 概率分布 或 分布律.

法一

分布律的表示方法:

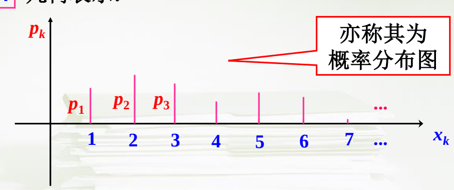
法2　表格表示:

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	$\cdots\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	$\cdots\cdots$

法3　矩阵表示:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

法4　几何表示:



2. 性 质

(1). $p_k \ge 0,$
$k=0,1,2\cdots$

(2). $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

用这两条性质判断一个函数是否是分布率

注　▲ 一般：求分布律时需验证这两条性质。若成立则称其为分布律，否则不能表明所求的是分布律.

▲ 离散型随机变量才具有分布律

例1. 设在15只同类型的零件中有两只次品，现从中抽取3只，以 X 表示取出3只中所含次品的个数. 求: X的分布律.

解: 由题意， X 的可能取值: 0, 1, 2

X 的各种可能取值的概率如下:

$$P\{X=0\}=\frac{C_{13}^3 C_2^0}{C_{15}^3}=\frac{22}{35}\qquad P\{X=1\}=\frac{C_{13}^2 C_2^1}{C_{15}^3}=\frac{12}{35}$$

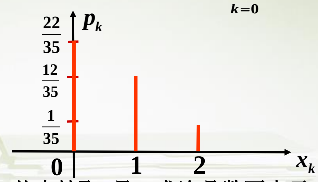
$$P\{X=2\}=\frac{C_{13}^1 C_2^2}{C_{15}^3}=\frac{1}{35}$$

所以其分布律为：

X	0	1	2
p_k	$\frac{22}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(显然每个 $p_k > 0$, $\sum_{k=0}^{3} p_k = 1$)

图形：



思考题：从中抽取3只，求次品数不大于1只的概率有多大？

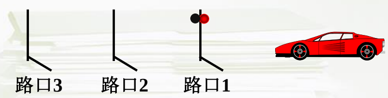
答案：$P\{X \le 1\} = P\{X=0\} + P\{X=1\} = \frac{22}{35} + \frac{12}{35}$

例2. 一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其它信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号灯显示的时间相等. 以 X 表示该汽车首次停车时已通过的路口的个数。

求：汽车至少通过2个路口的概率.

解：依题意，X 可取值 0, 1, 2, 3,　欲求：$P\{X\ge2\}$

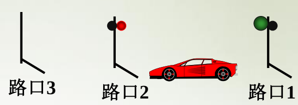
设　A_i = { 第i个路口遇红灯 }, i =1, 2, 3



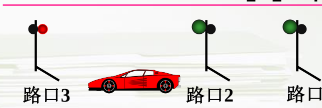
则：$P\{X=0\} = P(A_1) = 1/2$

X 表示该汽车首次停车时已通过的路口的个数

设　A_i ={ 第i个路口遇红灯 },　i = 1, 2, 3



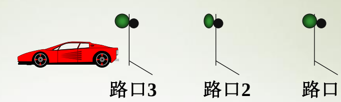
$$P\{X=1\} = P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



$$P\{X=2\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

X 表示该汽车首次停车时已通过的路口的个数

设　A_i = { 第 i 个路口遇红灯 }, i =1, 2, 3



$$P\{X=3\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

于是得其分布律为：

X	0	1	2	3
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

显然：$\sum_{i=0}^{3} P\{X=i\} = 1$

$$\therefore\quad P\{X\ge2\} = P\{X=2\} + P\{X=3\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

二. 几种常见的离散型随机变量的分布

1.两点分布

设随机变量 X 只可能取0与1两个值，它的分布律为

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则称 X 服从参数为 p 的 (0—1) 分布或两点分布.

例3　200件产品中,有190件合格品,10件不合格品,现从中随机抽取一件,那么,若规定

$$X = \begin{cases} 1, & \text{取得不合格品,} \\ 0, & \text{取得合格品.} \end{cases}$$

X	0	1
p_k	$\frac{190}{200}$	$\frac{10}{200}$

则随机变量 X 服从(0 —1)分布.

说明 两点分布是最简单的一种分布,任何一个只有两种可能结果的随机现象,都属于两点分布.

应用

E	A	$\overline{A}$	$p=P(A)$
掷硬币	正面	反面	0.5
生孩子	男	女	0.5
射击	击中	未击中	0.004
产品抽样	正品	次品	0.96
掷骰子	6点	非6点	1/6

2.二项分布

(1) 重复独立试验

将试验 E 重复进行 n 次,若各次试验的结果互不影响,即每次试验结果出现的概率都不依赖于其它各次试验的结果,则称这 n 次试验是**相互独立**的,或称为 **n 次重复独立试验**.

说明: 把在相同的条件下重复进行 n 次独立试验的概率模型,称为 n 次独立试验模型.

(2) n 重贝努利试验

设试验 E 只有两个可能结果:A 及 $\overline{A}$,则称 E 为贝努利试验.

设 $P(A)=p\ (0<p<1)$,此时$P(\overline{A})=1-p$.

将 E 独立地重复地进行 n 次,则称这一串重复的独立试验为 **n 重贝努利试验**.

(3) 定理:(贝努利定理)

设一次试验中事件A发生的概率为 p,$(0<p<1)$

则在 n 次贝努利试验中事件A 恰发生 k 次概率为:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0,1,2\cdots\cdots n)$$

证明:按独立事件的概率计算公式可知:

n 次试验中事件A 在某 k 次 (例如前 k 次)

发生而其余 $n-k$ 次不发生的概率应为:

$$\underbrace{p\cdot p\cdots\cdots p}_{k}\cdot\underbrace{(1-p)(1-p)\cdots(1-p)}_{n-k}=p^k(1-p)^{n-k}$$

由于现在只考虑事件A 在n 次试验中发生 k 次而不论在哪 k 次发生,所以它应有 C_n^k 种不同的发生方式.

而且它们是相互独立的,故在 n 次试验中 A 发生 k 次的概率(依概率的加法定理)为:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,2\cdots n$$

注 ▲ 显然它满足:

$$P_n(k)\ge 0, \qquad k=0,1,2\cdots n$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+q)^n=1$$

(4). 二项分布

若用 X 表示 n 重贝努利概型中事件 A 发生的次数,它的分布 律为:

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad k=0,1,2\cdots n$$

则称 X 服从参数为

概率 $P\{X=k\}$就等于二项式 $[(1-p)+px]^n$ 的展开式中 x^k 的系数,这也是二项分布的名称的由来.

记为: $X\sim B(n,p)$

分布率:

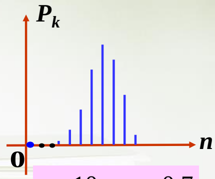
X	0	1	$2\cdots\cdots n$
$P\{X=k\}$	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)\cdots\cdots P_n(n)$

特别当 n=1时,二项分布即为 (0—1) 分布

说明

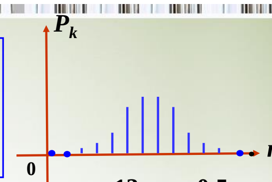
二项分布 $X \sim B(n, p)$ 的图形特点：

1)对于固定n及p，当k增加时，概率$P\{X=k\}$先是随之增加直至达到最大值，随后单调减少.



$n=10$, $p=0.7$

2)当$(n+1)p$为整数时概率$P\{X=k\}$在$k=(n+1)p$ 和 $k=(n+1)p-1$处达到最大值.

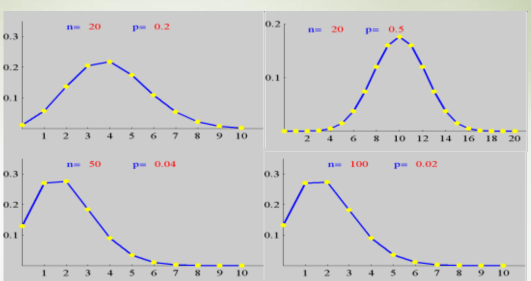


$n=13$, $p=0.5$

3)当$(n+1)p$不为整数时，概率$P\{X=k\}$在$k=[(n+1)p]$ 达到最大值

其中：$[x]$ 表示不超过x的最大整数

二项分布的图形



应用：

1）审E——是否为n重贝努利试验

细节： 一次试验是什么？

是否有且仅有两个可能结果？

共进行多少次试验？独立？ 重复？

2）选A—— 将一次试验中两个可能结果的一个记为A.

$p=P(A)$

3）记X—— n重贝努利试验中事件A发生的次数.

则： $X \sim B(n, p)$

例4. 设每只步枪击中飞机的概率为0.004，

求：100只步枪同时独立地射击时，击中飞机的概率.

解：

审E　E——100只步枪独立射击飞机.

选A　A——一只步枪击中飞机.　$P(A)=0.004$

记X　X——100只步枪中，击中飞机的步枪数.

$\therefore X \sim B(100, 0.004)$

飞机被击中，则所求事件W为：$\{X \geq 1\}$

$X \sim B(100, 0.004)$

$$P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\}$$
$$= 1 - (1-p)^{100}$$
$$= 1 - (1-0.004)^{100}$$
$$\approx 0.33$$

$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, 2 \cdots n$

例5. 已知100个产品中有5个次品，现从中有放回地取3次，每次任取1个。

求：在所取的3个产品中恰有2个次品的概率.

解：因为，这是有放回地取3次，

所以，这3次试验的条件完全相同且独立。

因此，它是重复独立贝努利试验.

依题意，每次试验取到次品的概率为0.05

设 X：为所取的3个中的次品数，

则 $X \sim B(3, 0.05)$ 于是，所求概率为：

$$P\{X=2\}=C_3^2(0.05)^2(0.95)=0.007125$$

注 若将例5中的“有放回”改为“无放回”，那么各次试验条件就不同了，就不是贝努利试验，此时，只能用古典概型求解。

贝努利概型与古典概型有何区别？

$$P\{X=2\}=\frac{C_{95}^1C_5^2}{C_{100}^3}$$

贝努里概型对试验结果没有等可能的要求，但要求

（1）每次试验条件相同，各次试验相互独立

（2）每次试验只考虑两个互逆结果 A 或 $\bar{A}$

且 $P(A)=p$，$P(\bar{A})=1-p$

例6 设有80台同类型设备，各台工作是相互独立的，发生故障的概率都是0.01，且一台设备的故障能有一个人处理。考虑两种配备维修工人的方法，其一是由4人维护，每人负责20台；其二是由3人共同维护80台。试比较这两种方法在设备发生故障时不能及时维修的概率的大小。

解 第一种方法

记 X——第1人维护的20台中同一时刻发生故障的台数.

则：$X \sim B(20, 0.01)$

设 A——设备不能及时维修. $X \sim B(20, 0.01)$

A_i——第 i 人维护的设备不能及时维修.

所以：$A=A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\geq P(A_1)=P\{X\geq 2\}$$

而 $P\{X\geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$

$$=1-C_{20}^0(0.01)^0(0.99)^{20-0}-C_{20}^1(0.01)^1(0.99)^{20-1}$$

$$=0.0169$$

即 $P(A)\geq 0.0169$

第二种方法 记 Y——80台中同一时刻发生故障的台数.

则：$Y \sim B(80, 0.01)$

设 C——设备不能及时维修.

则 C 与 Y 的关系：$C=\{Y\geq 4\}$

对比 $P(A)\geq 0.0169$

$$\therefore P(C)=P\{Y\geq 4\}=1-P\{Y\leq 3\}$$

$$=1-\sum_{k=0}^{3}C_{80}^k(0.01)^k(0.99)^{80-k}=0.0087$$

结论：任务尽管重了（每人平均维护约27台），但工作效率不仅没有降低，反而提高了。

例7. 若一年中参加人寿保险者里面每个人死亡的概率为0.005，现有1000个这类人参加人寿保险.

试求：在未来一年中在这些保险者里面:

(1). 有10人死亡的概率

(2). 死亡人数少于10人(不含10人)的概率.

解:

审E E——1000人参加人寿保险. n=1000

选A A——一人死亡. $P(A)=0.005$

记X X——参加保险者中死亡人数.

则：$X \sim B(1000, 0.005)$

$X \sim B(10000,\ 0.005)$

(1). 有10人死亡的概率为:

$$P\{X=10\}=C_{1000}^{10}(0.005)^{10}(0.995)^{990}$$

(2). 死亡人数少于 10人的概率是:

$$P\{X<10\}=\sum_{k=0}^{9}C_{1000}^{k}(0.005)^{k}(0.995)^{1000-k}$$

这些计算是非常麻烦的，现给出一个当 n 很大，p 很小时的近似计算公式，即二项分布的 Possion 逼近.

3. 泊松分布

设随机变量所有可能取的值为 $0, 1, 2, \cdots$，而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数.则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布,记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

说明:

1）一般的用 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 去近似二项分布的 $P_n(k)$ 当:

$n\geq 20,\quad p\leq 0.05$ 时近似效果颇佳

$n\geq 100,\ np\leq 10$ 时近似效果更好

令 $\lambda=np$

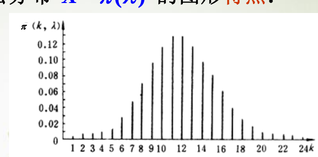
泊松定理中 $\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ 的值有表可查

（这是1837 年由法国数学家泊松引入的 ）

2）泊松分布满足分布律的两个条件:

$$P\{X=k\}\geq 0,\quad \sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$$

3）泊松分布 $X\sim\pi(\lambda)$ 的图形特点:



泊松分布 $\pi(\lambda)$ ($\lambda=12$)

4）在实际中，许多随机现象服从或近似服从泊松分布。

例如

某电话交换台收到的电话呼叫数

一个售货员接待的顾客数

到某机场降落的飞机数

一台纺纱机的断纱数

………

都可以看作泊松分布.

例8. 用泊松定理中的近似公式计算例 6

1000人参加保险，每人的死亡率为0.005.
求：10人死亡；小于10人死亡的概率。

解: (1) $\because\ \lambda=1000\times 0.005=5$

$$P\{X=10\}=\frac{5^{10}\cdot e^{-5}}{10!}=\frac{9765625\times 0.0067379}{3628800}$$

$$=0.01813$$

$$P\{X<10\}=1-P\{X\geq 10\}\approx 1-\sum_{k=10}^{\infty}\frac{5^k e^{-5}}{k!}$$

$$=1-0.031828\ =0.96817$$ 查表

一、填空题（10 分，每小题2分）

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=C\cdot\frac{\lambda^k}{k!},\lambda>0,k=1,2,\ldots$，则常数 C 为________.