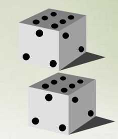
作 业

	内容	作业
1	绪论，样本空间和随机事件	习题1　1.3
2	频率与概率定义，概率的主要性质	习题1　13~15
3	古典概型，几何概型	习题1　1.4 1.7, 1.8 1.9
4	乘法定理，全概率公式与贝叶斯公式	习题2　8，11，12
5	事件的独立性 小结	习题2　2~5，18

独立性

引例1. 将一颗均匀骰子连掷两次，



设： A={第二次掷出6点}，
B={第一次掷出6点}，

显然： $P(A\,|\,B) = P(A)$

这就是说，已知事件B发生，并不影响事件A发生的概率，这时称事件A、B独立。

由乘法公式，可知：

$P(AB)=P(B)P(A|B)$

用 $P(AB) = P(A)\,P(B)$刻划独立性，比用 $P(A|B)= P(A)$ 或 $P(B|A)= P(B)$ 更好，它不受$P(B) > 0$ 或 $P(A) > 0$ 的制约。

定义1. 设 A, B是两个事件，如果具有等式：

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 为 相互独立 的事件。

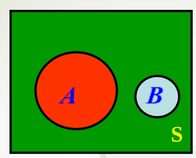
注　由定义易证以下关于独立性的命题：

▲ 若 A与 B 相互独立 ⟺ A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$ 也相互独立。

▲ 若 $P(A) > 0, P(B) > 0$ ⟹ A, B 相互独立 与A, B互不相容 不能同时成立。

例1 （1）如图的两个事件是独立的吗？

（2）能否在样本空间 S 中找两个事件,它们既相互独立又互斥?



解：(1) 因为： $P(AB) = 0$

而已知 $P(A) \neq 0$， $P(B) \neq 0$

即： $P(AB) \neq P(A)P(B)$

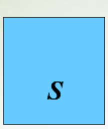
故 A、B不独立

即：若A、B 互斥，且 $P(A)>0, P(B)>0$，则 A 与 B 不独立.

它的反问题呢？

反之，若 A与 B 独立，且 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，则 A 、B 不互斥。

（2）能否在样本空间 S 中找两个事件,它们既相互独立又互斥?



（2）所要寻找的这两个事件就是

S 和 $\varnothing$

因为: $\varnothing S = \varnothing$

所以: $P(S\varnothing) = P(\varnothing)P(S) = 0$

则: $\varnothing$与 S 独立且互斥

注　意:

不难发现，$\varnothing$与任何事件都独立.

▲ $P(A) = 0$或1，则A与任何事件相互独立

定理三：设 A, B是两事件，且$P(A)>0$，若 A, B相互独立

则：$P(B|A) = P(B)$，反之亦然。

注：在实际应用中，往往根据问题的实际意义去判断两事件是否独立.

例如：从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，记 A = { 抽到 K }，B = { 抽到的牌是黑色的 }

问：事件A、B是否相互独立？

解：由于：$P(A) = 4/52 = 1/13$，

所以：$P(AB) = 2/52 = 1/26$ ，$P(B) = 26/52 = 1/2$

可见，$P(AB)=P(A)P(B)$

根据两事件独立的定义,说明事件A、B是相互独立的

此例也可以通过计算条件概率去得出相互独立的结论:

如上例中：从一副不含大小王的扑克牌中任取一张，

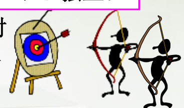
记： A={ 抽到K }， B={ 抽到的牌是黑色的 }

则： 由于 $P(A)=1/13$，$P(A\,|\,B)=2/26=1/13$

即：$P(A)=P(A\,|\,B)$，说明事件A、B 独立。

又例如：甲、乙两人向同一目标射击，记 A={ 甲命中 }，B={乙命中}

问：A与B是否独立？



可根据实际意义，由于“甲命中”并不影响“乙命中”的概率，故认为A、B 独立．（即一事件发生与否并不影响另一事件发生的概率）

定义3 (两两独立) 设 A, B, C 三个事件, 如果具有如下等式:

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \end{cases}$$

则称 A，B，C 两两独立。

注 ▲若A , B , C 两两独立，

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$ 不一定成立。

问题： 满足什么条件上式才能成立?

➡ 三个事件的“相互独立”的概念

定义 3’. 设 A, B, C 是三个事件，如果具有等式：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称事件 A, B, C 为相互独立的事件。

注 1）推广：设 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是 n 个事件, 如果

对于任意 k $(1\le k\le n)$

任意 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$

具有等式：$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$

则称 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 为相互独立的事件。

（它含有 $C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=2^n-n-1$ 个等式）

2） 相互独立与两两独立的关系：

两两独立—— n 个事件 任何两个 彼此独立.

相互独立—— n 个事件 任意 k个 $(k\le n)$

都是独立的

故相互独立 $\Longrightarrow$ 两两独立, 反之则不真

3）有关公式:

i）设 A, B互相独立

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

或:

$$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})$$

$$=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$$

---

ii） n 个独立事件和 的概率公式:

设事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立, 则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n})$$

$$=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$$

由对偶律

$\bar{A}_1, \bar{A}_2, \cdots, \bar{A}_n$ 也相互独立

也就是说，n 个独立事件至少有一个发生的概率等于1 减去各自对立事件概率的乘积.

若设 n 个独立事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 发生的概率分别为：$p_1, \cdots, p_n$，

则 " $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生" 的概率为：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n) = 1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n)$$

类似可以得出：

" $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个不发生" 的概率为：

$$P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \cdots \cup \bar{A}_n) = 1 - P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

$$\boxed{= 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n}$$

例2. 设每只步枪击中飞机的概率为0.004，

求：1）100只步枪同时独立地射击时，击中飞机的概率.

2）为确保以0.99的概率击中飞机，至少要多少支步枪同时射击？

解：记 A ——飞机被击中.

A_i ——第i支步枪击中飞机.

1） $A = \bigcup_{i=1}^{100} A_i \qquad P(A_i) = 0.004$

由题意知$A_1, \ldots, A_{100}$相互独立，所以：

1） $A = \bigcup_{i=1}^{100} A_i \qquad P(A_i) = 0.004$

由题意知$A_1, \ldots, A_{100}$相互独立，所以：

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{100} A_i) = 1 - (1-p)^{100} = 1 - (1 - 0.004)^{100} \approx 0.33$$

2）为确保以0.99的概率击中飞机，至少要多少支步枪同时射击？

由题意 $\quad P(A) \geq 0.99 \rightarrow n \geq ?$

$$P(A) = 1 - (1 - 0.004)^n = 1 - 0.996^n \geq 0.99$$

$$\therefore \quad n \geq \frac{\lg 0.01}{\lg 0.996} \approx 1148.99$$

至少需要1149支步枪

说明：关于小概率事件

1）在一次试验中实际上几乎是不可能发生的。

——小概率实际推断原理

2）在无穷次试验中必会发生。

例3. 设一系统由若干独立工作的同类型元件构成，它们的可靠性（正常工作的概率）均为p，求以下系统的可靠性。

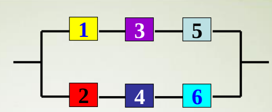
求：电路正常工作的概率。

解：

记A——系统正常工作

A_i——第i个元件正常工作

1）



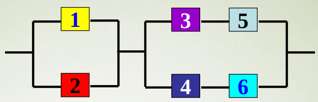
$$A = A_1A_3A_5 \cup A_2A_4A_6$$

$$P(A) = P(A_1A_3A_5 \cup A_2A_4A_6)$$

$$= P(A_1A_3A_5) + P(A_2A_4A_6) - P(A_1 \cdots A_6)$$

$$= 2p^3 - p^6$$

2）



$$A=(A_1\cup A_2)(A_3A_5\cup A_4A_6)$$

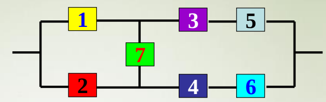
$$P(A)=P(A_1\cup A_2)P(A_3A_5\cup A_4A_6)$$

$[P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)]$

$[P(A_3A_5)+P(A_4A_6)-P(A_3\cdots A_6)]$

$$=(2p-p^2)(2p^2-p^4)$$

3）



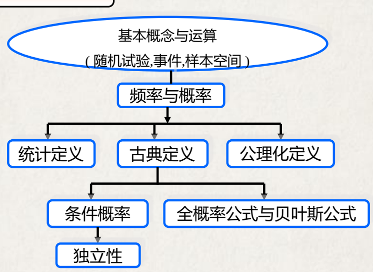
$$A=(A_7\cup\overline{A_7})A=A_7A\cup\overline{A_7}A$$

所以，由全概率公式：

$$P(A)=P(A_7)P(A\mid A_7)+P(\overline{A_7})P(A\mid\overline{A_7})$$

$$=p(2p-p^2)(2p^2-p^4)+(1-p)(2p^3-p^6)$$

第一章知识结构图



第一章 随机事件与概率

1) （2012-14题）设A,B,C是随机事件，A与C互不相容，P(AB)= $\frac{1}{2}$， P(C)= $\frac{1}{3}$，则 P(AB|$\bar{C}$)=

答案：$\frac{3}{4}$

2) （2014-7题）设随机事件A与B相互独立，且P(B)=0.5，P(A-B)=0.3，则P(B-A)=

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

答案：B

第一章 随机事件与概率

3) （2015-7题）设A,B为任意两个随机事件，则

（A）P(AB)≤ $P(A)P(B)$ (B)P(AB)≥ $P(A)P(B)$

(C) P(AB)≤ $\frac{P(A)+P(B)}{2}$ (D)P(AB) ≥ $\frac{P(A)+P(B)}{2}$

答案：C

4) （2017-7题）设随机事件，若0<P(A)<1，0<P(B)<1，则 P(A|B)>P(A|$\bar{B}$) 的充分必要条件是

(A) P(B|A)>P(B|$\bar{A}$) (B) P(B|A)<P(B|$\bar{A}$) (C) P($\bar{B}$|A)>P(B|$\bar{A}$) (D) P($\bar{B}$|A)<P(B|$\bar{A}$)

答案：A

第一章 随机事件与概率

5) （2019-7题）设A,B为随机事件，则P(A)=P(B)的充分必要条件是

(A) P(A∪B)=P(A)+P(B) (B) P(AB)=P(A)P(B)

(C) P(A$\bar{B}$)=P(B$\bar{A}$) (D) P(AB)=P($\bar{A}\bar{B}$)

答案：C

6) （2020-7题）设A,B,C为三个随机事件，且P(A)=P(B)=P(C)= $\frac{1}{4}$ ，P(AB)=0，P(AC)=P(BC)=$\frac{1}{12}$，则A，B，C中恰有一个事件发生的概率为

(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{12}$

答案：D

第一章 随机事件与概率

❸ 独立性

定义 —— 若$P(AB)=P(A)P(B)$，则事件A与B相互独立

判定

- A与B相互独立$\Leftrightarrow A$与$\overline{B}$相互独立$\Leftrightarrow \overline{A}$与$B$相互独立$\Leftrightarrow \overline{A}$与$\overline{B}$相互独立
- 对独立事件组不含相同事件作运算，得到的新事件组仍独立
- 若$P(A)>0$，则A与B相互独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)$
- 若$0<P(A)<1$，则A与B相互独立$\Leftrightarrow P(B|\overline{A})=P(B|A)\Leftrightarrow P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$
- 若$P(A)=0$或$P(A)=1$，则A与任意事件B相互独立

第一章 随机事件与概率

1) 设随机事件 A与 B相互独立，$0<P(A)<1$，$P(C)=1$，则下列事件中不相互独立的是(　　)

$(A)\ A,B,A\cup C$

$(B)\ A,B,A-C$

$(C)\ A,B,AC$

$(D)\ A,B,\overline{A}\overline{C}$

解：由$P(C)=1$ 有 $P(\overline{C})=1-P(C)=0$ 且

$P(A\cup C)\geq P(C)=1$ 故 $P(A\cup C)=1$；

$P(A-C)=P(A\overline{C})\leq P(\overline{C})=0$，故$P(A-C)=0$

$P(AC)=P(A)-P(A\overline{C})=P(A)$

由题设，$0<P(AC)<1$。

$P(\overline{A}\overline{C})\leq P(\overline{C})=0$，故$P(\overline{A}\overline{C})=0$

第一章 随机事件与概率

2) 设随机事件A与B相互独立，$0<P(A)<1$ $P(C)=1$，则下列事件中不相互独立的是(　)

$(A)\ A,B,A\cup C$

$(B)\ A,B,A-C$

$(C)\ A,B,AC$

$(D)\ A,B,\overline{A}\overline{C}$

又根据“概率为0或1的事件与任何事件相互独立”，

所以(A)，(B)，(D) 中的事件相互独立。

而 $P(AAC)=P(AC)\neq P(A)\cdot P(AC)$

所以(C) 中的事件A，B，AC 不相互独立，

故选(C)