Модель популяции

Симбиоз. Мутуализм

Уткина Алина Дмитриевна

Оглавление

Список иллюстраций

1 Модель мутуализма

Мутуализм (от лат. mutuus «взаимный») — форма симбиоза двух или более видов, при которой взаимоотношение между организмами является жизненно необходимым для всех особей в симбиозе.

Преимущества организмов, вступающих в мутуалистические отношения, могут быть различны. Один из партнёров может использовать другого в качестве поставщика пищи, а второй получать защиту от врагов или благоприятные для роста и размножения условия. В других случаях вид, выигрывающий в пище, освобождает партнёра от паразитов, опыляет растения или распространяет семена.

Тесный контакт видов при мутуализме вызывает их совместную эволюцию. Характерным примером служат взаимные приспособления, которые сформировались у цветковых растений и их опылителе.

Рассмотрим симбиотические отношения типа мутуализм, при котором межпопуляционные взаимодействия являются облигатными, т. е. необходимым условием существования каждого из видов, и в отсутствие партнера каждый из видов вымирает [1].

1.1 Основная формула модели

Изначально модель описывается системой уравнений

$$x' = -c_1 x + P_1 xy,$$
$$y' = -c_2 y + P_2 xy,$$

В данной формуле:

- x, y - численности (или биомассы) двух взаимодействующих популяций в момент времени t;
- c_1, c_2 - коэффициенты смертности. Они показывают, какая доля особей популяций x и y соответственно погибает за единицу времени (чем больше коэффициент c, тем выше смертность в этой популяции);
- $c_1 x$, $c_2 y$ описывают естественную смертность или уменьшение численности популяции в отсутствие взаимодействия с партнером;
- P_1 - насколько эффективно присутствие популяции y способствует росту популяции x;
- P_2 - насколько эффективно присутствие популяции x способствует росту популяции y;
- $P_1 xy$ и $P_2 xy$ описывают положительный эффект от мутуалистического взаимодействия между популяциями (рост каждой популяции тем выше, чем больше численность обеих популяций).

Каждая популяция в одиночку обречена на вымирание, так как смертность не компенсируется рождаемостью. Взаимодействие между популяциями является единственным фактором, который может привести к росту численности и поддержанию жизни обеих популяций.

Таким образом, система моделирует облигатный мутуализм, где выживание каждого вида напрямую зависит от присутствия другого.

Функция на языке Julia для данной формулы выглядит следующим образом:

```
function mutualism_1!(du, u, p, t)
    X, Y = u
    c1, c2, p1, p2 = p

    du[1] = -c1*X + p1*X*Y
    du[2] = -c2*Y + p2*X*Y
end
```

В зависимости от начальных значений плотностей популяций, график системы может выглядеть так:

- обе популяции неограниченно размножаются за очень короткое время, если их начальные плотности достаточно велики;
- обе популяции вымирают, если хотя бы один из видов имеет маленькую плотность.

Например, для одних и тех же параметров смертности и влияния друг на друга ($c = 0.6, p = 0.2$) построим графики с разной начальной плотностью видов.

Для первого случая с достаточной плотностью популяции возьмем значения $x_0 = 5$ и $y_0 = 4$. Эти значения считаются достаточными для того, чтобы обе популяции быстро разрастались (рис. 1.1).

```
X_0 = 5.0
Y_0 = 4.0
time = (0.0, 1.5)
```

```
params = [0.6, 0.6, 0.2, 0.2]

prob = ODEProblem(mutualism_1!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
            xlabel="Время",
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nпо основной формуле, \
            legend=:bottomright)
```

Для второго случая возьмем значения $x_0 = 5$ и $y_0 = 1$, так как вторая популяция имеет маленькую плотность, обе популяции постепенно сокращаются и в итоге вымирают (рис. 1.2).

```
X_0 = 5.0
Y_0 = 1.0
time = (0.0, 10.0)
params = [0.6, 0.6, 0.2, 0.2]

prob = ODEProblem(mutualism_1!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
            xlabel="Время",
```

```
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nпо основной формуле, \
            legend=:right)
```

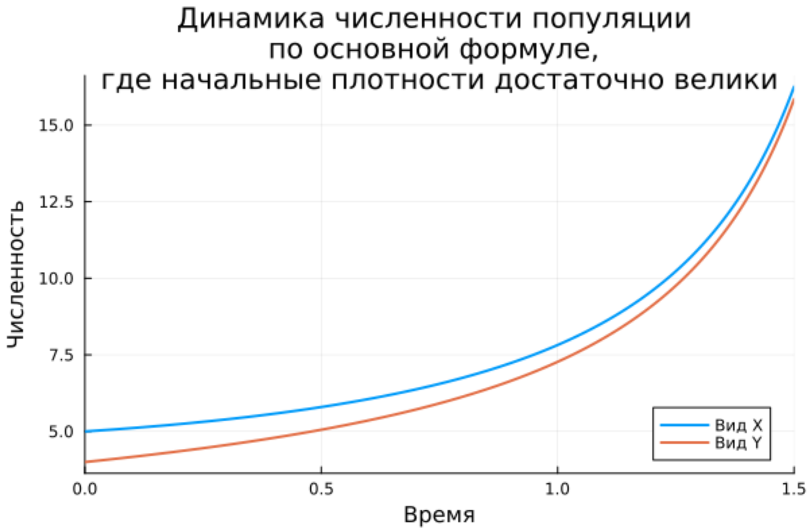

Рис. 1.1: Динамика численности популяции по основной формуле, где начальные плотности достаточно велики

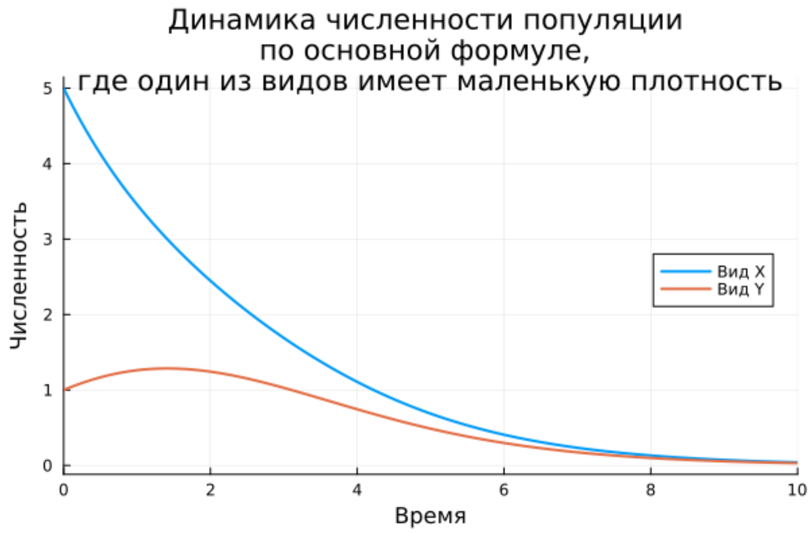

Рис. 1.2: Динамика численности популяции по основной формуле, где один из видов имеет маленькую плотность

В этом проявляется неадекватность описания эффекта мутуализма. В реальной экосистеме рост не может быть бесконечным, его всегда ограничивают имеющиеся ресурсы (еда, вода, свет, пространство) и другие внешние факторы.

1.2 Дополнение формулы фактором насыщения

Введем в формулу мутуализма фактор, аналогичный фактору насыщения хищника. Система при этом принимает вид

$$x' = -c_1 x + \frac{P_1 xy}{1 + D_1 y},$$
$$y' = -c_2 y + \frac{P_2 xy}{1 + D_2 x},$$

Здесь к уже описанным ранее коэффициентам добавляются параметры, ограничивающие пользу, которую популяции приносят друг другу с их ростом: D_1 и D_2 - коэффициенты насыщения, они показывают, насколько быстро эффективность мутуализма падает с ростом численности партнера.

Таким образом, $P_i xy$ является потенциальной пользой от мутуализма, которая растет пропорционально произведению численностей, а $\frac{1}{1+D_1 y}$ и $\frac{1}{1+D_2 x}$ - ограничения, добавляющие системе немного адекватности, и описывают реальную пользу взаимодействия популяций.

Данная система на языке Julia:

```julia
function mutualism_2!(du, u, p, t)
    X, Y = u
    c1, c2, p1, p2, d1, d2 = p

    du[1] = -c1*X + p1*X*Y/(1+d1*Y)
    du[2] = -c2*Y + p2*X*Y/(1+d2*X)
end
```

Рассмотрим примеры, так же как и с основной формулой: возьмем одинаковые коэффициенты смертности и влияния друг на друга ($c = 0.6$, $p = 0.2$) и новые коэффициенты насыщения ($D = 0.2$), и установим разные начальные плотности популяций.

Первый случай, когда плотности достаточно велики $x_0 = 20$ и $y_0 = 15$ (рис. 1.3). На графике мы видим, что с добавлением фактора насыщения, результат сильно не изменится, популяции все так же продолжают бесконечно расти, хоть и немного медленнее, чем до этого.

```julia
X_0 = 20.0
Y_0 = 15.0
```

```
time = (0.0, 15.0)
params = (0.6, 0.6, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)

prob = ODEProblem(mutualism_2!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
            xlabel="Время",
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nс насыщением, \nгде об
            legend=:bottomright)
```

Во втором случае возьмем $x_0 = 20$ и $y_0 = 1$ (рис. 1.4). В данном случае мы видим почти то же самое, как до добавления фактора насыщения.

```
X_0 = 5.0
Y_0 = 1.0
time = (0.0, 10.0)
params = (0.6, 0.6, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)

prob = ODEProblem(mutualism_2!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
```

```
            xlabel="Время",
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nс насыщением, \nгде од
            legend=:right)
```

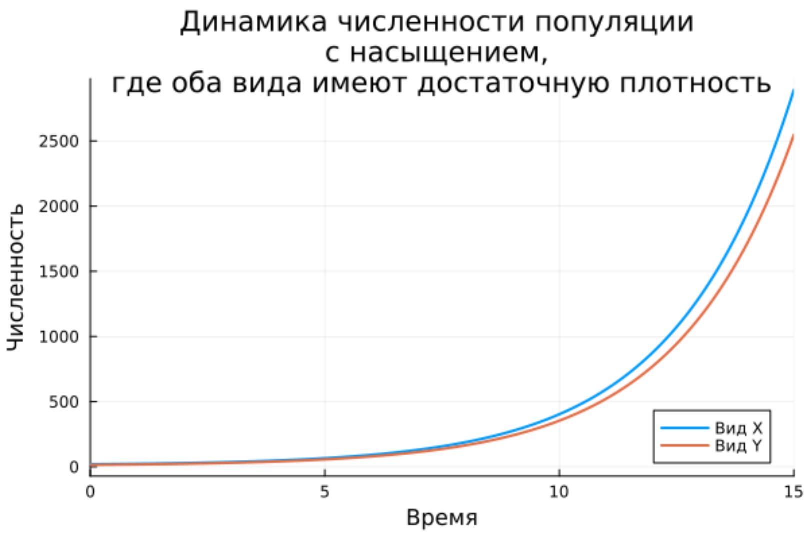

Рис. 1.3: Динамика численности популяции с насыщением, где оба вида имеют достаточную плотность

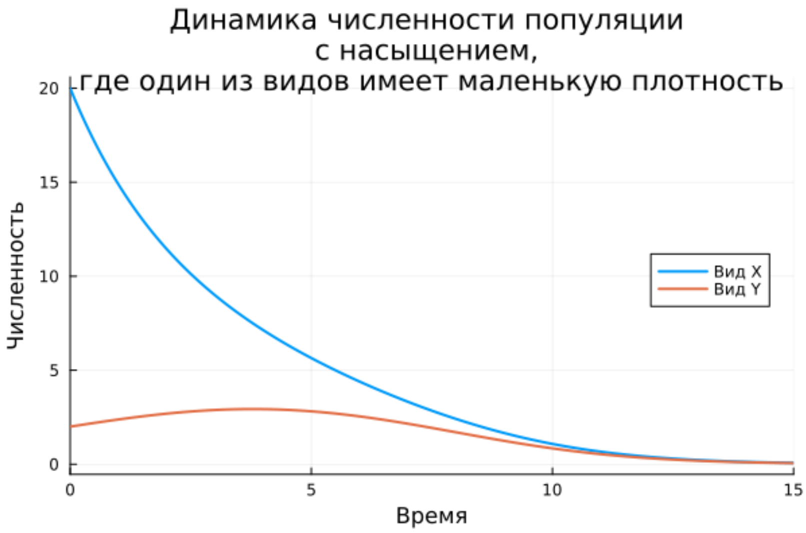

Рис. 1.4: Динамика численности популяции с насыщением, где один из видов имеет маленькую плотность

Так как изменения минимальные и модель все еще не достаточно реалистичная, необходимо дополнить ее дополнительными ограничениями.

1.3 Дополнение формулы фактором внутривидовой конкуренции

Для еще более реального описания динамики двух мутуалистаческих популяций можно ввести дополнительно в рассмотрение фактор внутривидовой конкуренции. Теперь система принимает вид

$$x' = -c_1 x + \frac{P_1 xy}{1 + D_1 y} - e_1 x^2,$$
$$y' = -c_2 y + \frac{P_2 xy}{1 + D_1 x} - e_2 y^2,$$

В данной системе добавляются e_1 и e_2 - коэффициенты внутривидовой конкуренции. Таким образом $-e_1x^2$ и $-e_2y^2$ показывают, что скорость снижения численности популяций пропорциональна квадрату их собственной численности. Это означает, что чем больше особей в популяции, тем сильнее они мешают друг другу и конкурируют за ограниченные ресурсы. И чем больше коэффициент e_i, тем сильнее эта конкуренция внутри популяции.

Функция на Julia:

```
function mutualism_3!(du, u, p, t)
    X, Y = u
    c1, c2, p1, p2, d1, d2, e1, e2 = p

    du[1] = -c1*X + p1*X*Y/(1+d1*Y) - e1*X*X
    du[2] = -c2*Y + p2*X*Y/(1+d2*X) - e2*Y*Y
end
```

Как и в предыдущих примерах построим графики с одинаковыми коэффициентами, добавив $e = 0.01$ и разными начальными плотностями популяций.

Первый вариант с достаточной плотностью обоих видов - $x_0 = 20$ и $y_0 = 19$ (рис. 1.5).

```
X_0 = 20.0
Y_0 = 19.0
time = (0.0, 50.0)
params = (0.6, 0.6, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.01, 0.01)

```

```
prob = ODEProblem(mutualism_3!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
            xlabel="Время",
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nc внутривидовой конкур
            legend=:right)
```

И второй вариант с маленькой плотностью одного из двух видов - $x_0 = 20$ и $y_0 = 10$ (рис. 1.6).

```
X_0 = 20.0
Y_0 = 10.0
time = (0.0, 50.0)
params = (0.6, 0.6, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.01, 0.01)

prob = ODEProblem(mutualism_3!, [X_0, Y_0], time, params)
sol = solve(prob, Tsit5(), reltol=1e-8, abstol=1e-8)

plt1 = plot(sol,
            linewidth=2,
            xlabel="Время",
            ylabel="Численность",
            label=["Вид X" "Вид Y"],
            title="Динамика численности популяции \nc внутривидовой конкур
```

```
              legend=:right)
```

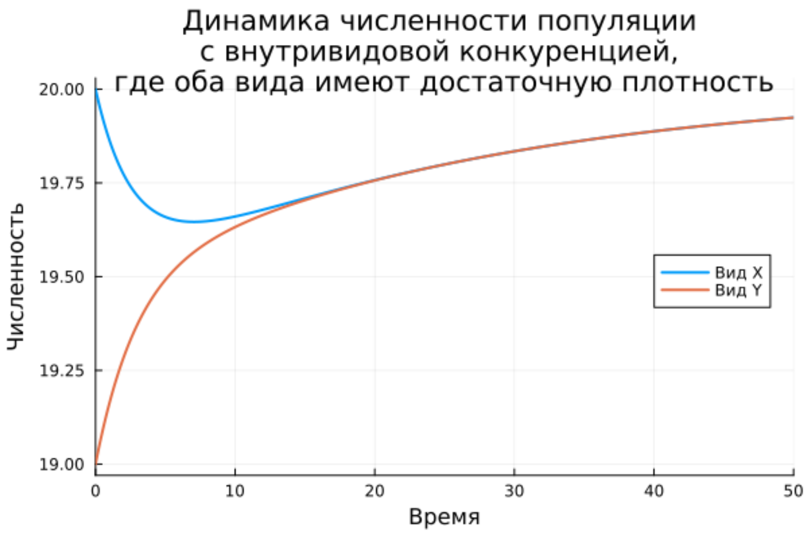

Рис. 1.5: Динамика численности популяции с внутривидовой конкуренцией, где оба вида имеют достаточную плотность

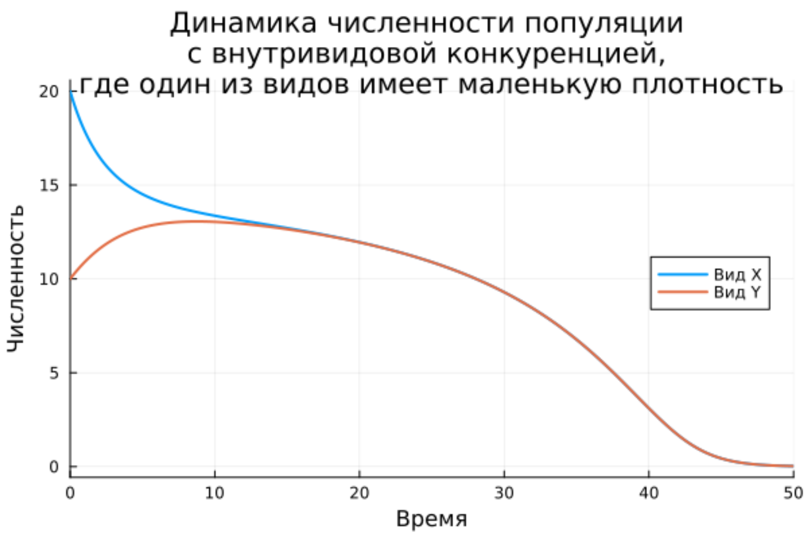

Рис. 1.6: Динамика численности популяции с внутривидовой конкуренцией, где один из видов имеет маленькую плотность

Теперь можно заметить, что вариант с внутривидовой конкуренцией и достаточной численностью обеих популяций выглядит более правдоподобно за счет установленных ограничений роста популяций, и численность этих популяций не уходит в бесконечность, а стремится к определенному балансному уровню.

Вывод

При выполнении данной работы были рассмотрены основная формула модели мутуализма и ее модификации, коэффициенты и их влияние на поведение графиков системы, проведено сравнение при различных исходных значениях и наличии/отсутствии этих коэффициентов.

Список источников

1. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Ижевский институт компьютерных исследований.