1. Sistemes d'equacions. Matrius. Determinants

$a_i^j \in \mathbb{R}$ (pertany reals)

$x \ldots x_m$ = variables/incògnites

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \cdots + a_m^1 x_m = b_1 \\ a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2 + \cdots + a_m^2 x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_1^m x_1 + a_2^m x_2 + \cdots + a_m^m x_m = b_m \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \rightarrow 3 \times 2$

$B = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \rightarrow 1 \times 3$

$C = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \rightarrow$ quadrada 2×2

$D = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \rightarrow$ quadrada 3×3

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \cdots & a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_m^2 \\ \vdots & & & & \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_m^3 \end{pmatrix}$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ identitat 4×4 $\rightarrow a_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$F = (\text{totes } 0) \rightarrow$ Matriu 0

$G = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \longrightarrow$ Diagonal

Trasposta $\longrightarrow$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ si $A = A^t \longrightarrow$ Simètrica

si $A = -A^t \longrightarrow$ Antisimètrica

Operacions amb matrius

$$A = (a^j_i)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \quad m\times n \qquad B = (b^l_k)_{\substack{1\leq k\leq q \\ 1\leq l\leq p}} \quad p\times q$$

- Suma:

- s'ha de complir: $\boxed{m=p}$ i $\boxed{n=q}$
- posicions corresponents: $C = A + B \quad C = (c^j_i)$ on $c^j_i = a^j_i + b^j_i$

- Producte per Escalars:

$a \in \mathbb{R} \qquad a\cdot B = (a\cdot b^j_i)$

- Producte de Matrius:

- $A\cdot B$ s'ha de complir $\boxed{n=p}$
- $B\cdot A$ s'ha de complir $\boxed{m=q}$

→ NO COMMUTATIU

$\sum$ fila j_1 · columna k_1 $= c^1_1$

$A\cdot B = B\cdot A = \underbrace{I_{n\times m}}_{\text{identitat } n\times m} \longrightarrow B = A^{-1}$ → matrius commutatives o que commuten

$A\cdot X = B \rightarrow X = A^{-1}\cdot B$

Metode de Gauss:

Sistemes
- incompatible - no té solució
- compatible determinat - 1 solució
- compatible indeterminat - +1 solució

Sistema → Matriu
- de coeficients
- Ampliada

$A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$

$(A|b) \rightarrow C$
$\downarrow$

- Canviar d'ordre les files
- Multiplicar per K $(K \neq 0)$
- Sumar a una fila un multiple d'un altra

Un sistema de la forma

$$Ax = b$$

es diu que és HOMOGENI, si $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

19-09-2017.

RANG: n de files no nules despres d'aplicar gauss. (a i b)

Calcula inversa per Gauss:

$A = (a_i^j)$

$$\left(\underbrace{\qquad\qquad}_{A} \middle| \underbrace{\qquad\qquad}_{I_{m \times n}} \right)$$

→ a l'esquerra fem operacions en files fins a obtenir la matriu identitat

→ Fent les mateixes operacions en la $I_{m \times n}$ el que resulta és la inversa d'A.

Amb el sistema tipus $Ax = b$ i A una matriu $m \times n$

- és compatible si $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b)$
- si A es quadra $m \times n$ té solució si $\text{rank}(A)$ és màxim $\longrightarrow$ A es invertible
- $A \cdot x = b \rightarrow x = A^{-1} \cdot b$

Determinants:

A matriu $m \times n$

$n = 1 \longrightarrow A = (a^1_1) \longrightarrow$ Determinant de $A = a^1_1$

$n = 2 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Determinat de A per: $|A| := a^1_1 \cdot a^2_2 - a^2_1 \cdot a^1_2$

$A_{ij\,(n-1)-(n-1)}$ $\rightarrow$ Per $n \geq 2$ defineix Determinant d'A

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} |A_{ij}| a^j_i$$

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = a^1_1 \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} - a^2_1 \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} + a^3_1 \begin{vmatrix} a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_2 & a^2_3 \end{vmatrix} =$$

$$= a^1_1 (a^2_2 a^3_3 - a^3_2 a^2_3) - a^2_1 (a^1_2 a^3_3 - a^1_3 a^3_2) + a^3_1 (a^1_2 a^2_3 - a^2_2 a^1_3)$$

* si A és una matriu diagonal, $|A|$ és el producte dels elements de la diagonal.

Operacions que modifiquen valor de determinant:

- no: Suma a una fila el múltiple d'una altra.
- si: Cambiar d'ordre dues files $\rightarrow$ el determinant canvia de signe

  Multiplico una fila per x $\rightarrow$ determinant queda multiplicat per x

$|A| = |A^t|$

Propietats dels determinants

- Per calcular $|A|$ podem desenvolupar per qualsevol fila o columna.
- $|A| = |A^t|$
- Si tenim una fila o columna de zeros el Det val 0
- Si tenim 2 files o columnes proporcionals, el Det és 0

Regla de Cramer

Si tenim SCD
$|A|$ = matriu coeficient

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 + \dots a_n^1 x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_1^n x_1 + a_2^n x_2 + \dots a_n^n x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots \\ b_n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 & b_1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots \\ a_1^n & b_n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_{n-1}^1 & b_1 \\ \vdots \\ a_1^n & \dots & a_{n-1}^n & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Caracterització del rank d'una matriu

Per $A_{n \times m}$, rank de A és el màxim tamany d'una submatriu quadrada d'A amb det = 0

Càlcul de la matriu inversa

Criteri per l'existència de la inversa $A_{n \times m}$

A es invertible $\Rightarrow$ A té rang màxim $\left|\begin{array}{l} \text{rank } A = n \\ \det A \neq 0 \end{array}\right.$

si $\det A \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Matrius d'ajunts de } a^t$$

La matriu d'adjunts és la que té en la posició (ij) el Determinant de la matriu que resulta de taxar fila i i columna j.