2. ESPAIS VECTORIALS

$\mathbb{R}^m := \{x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ Cada $(x_1 — x_n) \in \mathbb{R}^m$ l'anomenem VECTOR

Suma de Vectors: $(x, y) + (z, a) = (x+z, y+a)$

Producte per Escalars: $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2)$

Propietats:

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$ (sent 0 un vector $(0, 0, \dots, 0)$)

$$a + (-a) = 0$$

$$(\alpha_1 \alpha_2) \cdot a = \alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot a)$$

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha \cdot b$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot a = \alpha_1 \cdot a + \alpha_2 \cdot a$$

Espai vectorial: conjunt on podem fer suma i producte per escalars. verifiquen propietats anteriors.

- R^n suma de vectors i productes per escalars
- Matrius $M_{n \times m}(R)$ amb la seva suma de matrius i producte per escalars
- $\mathbb{R}[x] = \{$conjunt de polinomis en x i coeficients reals$\}$ amb la suma de polinomis i el producte per escalars

} Són Espais Vectorials

Subespai vectorial: subconjunt (SCV) de V (espai vectorial)

$\forall u, v \in S \longrightarrow u + v \in S$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in S \longrightarrow \alpha \cdot u \in S$

* un SCV amb les operacions de V té l'estructura d'espai vectorial

subespai generat per $v_1 - v_s$:

$$S = \langle \underbrace{v_1 - v_s}_{v_1 - v_s \text{ GENERENTS}} \rangle := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}$$

$v \in S$ és combinació lineal de ~~els~~ $v_1 - v_s$

S generat per $v_1 - v_s$, conjunt format per totes les combinacions lineals $v_1 - v_s$).

d'Equacions a Generadors:

① $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\} = \left\{(x_1 x_2 x_3 x_4) \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{matrix}\right\}$

Generadors: $S \ni (x_1 x_2 x_3 x_4) = (x_3 - x_4, -x_3, x_3, x_4) = x_3(1,-1,1,0) + x_4(-1,0,0,1)$

$$S = \langle (1,-1,1,0), (-1,0,0,1) \rangle$$

②

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a+d = b+c\right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c-d & b \\ c & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de Generadors a Equacions:

① $S = \langle (1,0,-1,0), (1,1,0,1) \rangle$

Equacions de S: $S \ni (xyzt) = \alpha_1 \cdot (1,0,-1,0) + \alpha_2 (1,1,0,1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_2 = y \\ -\alpha_1 = z \\ \alpha_2 = t \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & x+z \\ 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & x+z-y \\ 0 & 0 & y-t \end{array}\right)$$

$$S = \left\{(xyzt) \;\middle|\; \begin{matrix} y-t=0 \\ x+z-y=0 \end{matrix}\right\}$$

- Linialment Independents: $u_1 — u_s$ estan alineats ~~xxx~~

ex: $u_1 = (1\ 0\ {-1})$ $\quad v_2 = (0\ 2\ 0)$ $\quad u_3 = (1\ 1\ 0)$

Suposem que:

$$\alpha_1(1\ 0\ {-1}) + \alpha_2(0\ 2\ 0) + \alpha_3(1\ 1\ 0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \rightarrow \text{son L.I.}$$

* n vectors de $\mathbb{R}^n$ son LI si la matriu que generen (en fila o columna) té determinant no nul.

* si $v_i — v_s$ vectors son LI si la matriu que formen té rang màxim

Si tenim un conjunt de Generadors d'un subespai S $\quad S = \langle u_1 - u_s \rangle$, sempre podem extreure un conjunt de Generadors Linialment independents.

ex: $S = \langle v_1 v_2 v_3 \rangle = \langle v_1 v_3 \rangle$

$v_2 = v_1 - v_3$

Un conjunt B de vectors d'un subespai S es BASE si: $\begin{cases} \text{Els vectors de } B \text{ generen } S \\ \text{Els vectors de } B \text{ són LI} \end{cases}$

Les Bases no són uniques.

Si B i B' són dues bases d'un mateix subespai $S \longrightarrow \#B = \#B'$

- Dimensió: dimensió de subespai S = cardinal d'una base de S

$\dim(\mathbb{R}^n) = n \qquad \dim(M_{2\times2}(\mathbb{R})) = 4 \qquad \dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = n^2$

Si $S_1 \subseteq S_2$ son subespais vectorials $\rightarrow \dim S_1 \leq \dim S_2$, amb igualtat només si $S_1 = S_2$

Sigui $B = \{v_1 — v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$:

com ~~base~~ B és base, qualsevol $v \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure com:

$$v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$$

$\alpha_1 — \alpha_n$ són Les Coordenades de v en la base B.

Operacions amb subespais vectorials

S i T són subespais $\rightarrow$ $S \cap T := \{ u \in \mathbb{R}^n \mid u \in S \text{ i } u \in T \}$

$$\left.\begin{array}{l} S = \{ (x\,y\,z\,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} \text{equ.1} \\ \text{equ.2} \end{array} \} \\ \\ T = \{ (x\,y\,z\,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \text{equ } 3 \} \end{array}\right. \rightarrow S \cap T = \{ (x\,y\,z\,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} \text{equ } 1 \\ \text{equ } 2 \\ \text{equ } 3 \end{array} \}$$

$$S + T = S \cup T = \{ u + v \in V \mid u \in S,\ v \in T \}$$

OBS:

$S \leq S+T$ si $\{u_1 — u_s\}$ generadors de S

$T \leq S+T$ si $\{e_1 — e_r\}$ generadors de T

$\rightarrow$ $\{u_1 — u_s e_1 — e_r\}$ conjunt de generadors de $S+T$

FORMULA DE GRASSTIAN

E, F subespais vectorials:

$$\boxed{\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)}$$

ESPAIS VECTORIALS EUCLIDIANS

Introduim una mètrica en l'espai vectorial (Producte Escalar) $\rightarrow$ Longitud Distancia

Donats $u = (a_1 — a_n)$, $v = (b_1 — b_n)$ vectors de $\mathbb{R}^n$

PRODUCTE ESCALAR:

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

LONGITUD: (NORMA) de u

$$\|u\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{a_1^2 + \ldots a_n^2}$$

DISTANCIA: entre u i v

$$\|u - v\|$$

u i v són ORTOGONALS si $u \cdot v = 0$

$\boxed{\text{ORTOGONAL: } u \cdot v = 0}$

a $\mathbb{R}^2$ ortogonals 90° L

Un conjunt de vectors es ORTOGONAL si els vectors ho són entre ells.

Un conjunt $B = \{u_1 — u_s\}$ es ORTONORMAL si és ORTOGONAL i $\|u_i\| = 1 \ \forall \ 1 \le i \le s$

$\boxed{\text{ORTONORMAL: } u \cdot v = 0 \text{ i } \|u_i\| = 1 \ \forall \ 1 \le i \le s}$

OBS.

$v \in \mathbb{R}^n$

si $v' = \frac{1}{\|v\|} \cdot v \longrightarrow \|v'\| = 1$

si $B = \{u_1 — u_s\}$ és ortogonal $\longrightarrow B' = \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \dots \frac{u_s}{\|u_s\|} \right\}$ és ortonormal.

PROPIETATS:

- Si $B = \{u_1 — u_s\}$ és un conjunt de vectors ortogonals i B no conté el 0 ⇒ Els vectors de B són L.I.
- Si $B = \{u_1 — u_s\}$ és una Base ortonormal d'un subespai S i $v \in S$, → les coordenades de v en la Base B són:

$v \cdot u_1, v \cdot u_2, \dots, v \cdot u_s$

Donada una Base $B = \{u_1 — u_s\}$ d'un espai vectorial V calculem una Base de V ortonormal

↳ PROCÉS D'ORTOGONALITZACIÓ DE GRAM-SCHMIDT

dades inicials: $B \{v_1 — v_k\}$

1r OBJECTIU: calcular Base $\{v_1'' — v_k''\}$ ORTOGONAL:

$B = \left\{ \frac{v_1''}{\|v_1\|}, \frac{v_2''}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_k''}{\|v_k\|} \right\}$

31-10-2017

Càlcul de $\{v_1'' — v_k''\}$:

Els calculem per un procés iteratiu:

$v_1'' = v_1$

Suposem que tenim $v_1'' — v_{j-1}''$

$$v_j'' = v_j + \alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1}'' \longrightarrow \alpha_k = \frac{v_j \cdot v_k''}{\|v_k''\|^2} \quad 1 \leq k \leq j-1$$

Si tenim $S \subseteq \mathbb{R}^N$ un subespai vectorial i B es base de S,

podem trobar vectors $u_{s+1} — u_n$ tq $\{u_1 — u_s\ u_{s+1} — u_n\}$ és BASE de $\mathbb{R}^N$

Hem definit el producte escalar de vectors

$$(a_1 — a_n)(b_1 — b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

S ortogonal $S^\perp$

Sigui $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespai vectorial, Definim el seu ORTOGONAL

$$S^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v = 0\ \forall\ v \in S\}$$

PROPIETATS $S^\perp$:

- si $\{v_1 — v_s\}$ es una base de S:

$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot v_i = 0\ \forall\ 1 \leq i \leq s\}$$

- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ subespai: $\dim S + \dim S^\perp = n$
- $S \cap S^\perp = 0$
- $(S^\perp)^\perp = S$

ex:

$S_2 = \langle (1010),(1100) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$

$S_2^\perp = \left\{ (xyzt) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} (xyzt)(1010) = 0 \\ (xyzt)(1100) = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ (xyzt) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{matrix} x+z=0 \\ x+y=0 \end{matrix} \right\} =$

$= \{(x,-x,-x,t)\} = \langle (1-1-10),(0001) \rangle$

$x(1-1-10)+t(0001)$

$\{(1010)(1100)(1-1-10),(0001)\}$ Base de $\mathbb{R}^4$

$(S_2^\perp)^\perp = \left\{ (xyzt) \,\middle|\, \begin{matrix} x-y-z=0 \\ t=0 \end{matrix} \right\} = \{(y+z, y, z, 0)\} = \langle (1100)(1010) \rangle$

OBS

$S \subseteq \mathbb{R}^n$

si $B = \{u_1 \text{—} u_s\}$ Base de S, puc ampliar B a una base de $\mathbb{R}^n$:

$\{u_1 \text{—} u_s \underbrace{v_1 \text{—} v_t}_{\text{Base de } S^\perp}\}$ Base de $\mathbb{R}^n$

- $S \subseteq \mathbb{R}^n$ subespai vectorial: tot vector $u \in \mathbb{R}^n$ es pot escriure de forma única com a suma d'un vector S i un de $S^\perp$:

$$\boxed{u = \underset{S}{u_1} + \underset{S^\perp}{u_2}}$$

$\forall w \in S, \; \|u-u_1\| \leq \|u-w\| \longrightarrow u_1$ és el vector de S més proper a u

DISTANCIA: de u a S: $\|u-u_1\| = \|u_2\|$