05-12-2017

DIAGONALITZACIÓ DE MATRIUS (DE ENDOMORFISMES)

$A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

Def: A és una matriu diagonal si fora de la diagonal principal totes les entrades són 0:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & 0_s \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0_s & & & \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Diem que $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ es DIAGONITZABLE (o equivalent a una diagonal) si $\exists\, D \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ una matriu diagonal i C en una matriu invertible tq:

$$A = C \cdot D \cdot C^{-1}$$

en general $k \geq 1$: $\quad A^k = C \cdot D^k \cdot C^{-1}$

Def: POLINOMI CARACTERÍSTIC de A:

1 $P_A(x) := \mathrm{Det}(A - xI)$

$\boxed{P_A(x) \text{ és un polinomi de grau } n}$

$A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Def: un vector u és un VECTOR PROPI (VEP) de ~~valor~~ VALOR PROPI α (VAP α) d'A si

$A \cdot u = \alpha \cdot u$

1 - $P_A(x)$
2 - VAPs
3 - VEPs de VAP

CARACTERITZACIÓ:

2 α és VAP d'A $\Rightarrow$ α és ARREL de $P_A(x)$

Si α és VAP d'A, u és VEP de VAP α $\longleftrightarrow$ $u \in \ker(A - \alpha I)$

E_{α_i} i.e $\ker(A - \alpha\, Id) = \{\text{VEPS de VAP}\,\alpha\}$

- u és VEP de VAP $\alpha_1 = 0$ $\longleftrightarrow$ $\underset{(xyz)}{u} \in \ker(A - 0 \cdot I) \longleftrightarrow A \cdot u = 0$

3

PROPIETATS:

ⓐ $\ker(A - \alpha I)$ és un subespai vectorial

$\ker(A - \alpha I) \neq 0 \longleftrightarrow \alpha$ és VAP

$1 \leq \dim E_{\alpha_i} \leq$ multiplicitat de α_i com arrel de $P_A(x)$

ⓑ Si $P_A(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_s)^{n_s} \longrightarrow$

$1 \leq \dim(\ker(A - \alpha_i I)) \leq n_i$

TEOREMA: CRITERI DE DIAGONALITZACIÓ

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

Denotem per $P_A(x)$ el polinomi característic d'A.

ⓐ A es diagonalitzable $\longleftrightarrow$ $P_A(x)$ descompon en factors lineals. Això és:

$$P_A(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_s)^{n_s} \qquad n = \sum_{i=1}^{s} n_i$$

i

$$\dim(\ker(A-\alpha_i I)) = n_i \quad \forall i$$

ⓑ Si $P_A(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(\alpha-\alpha_n)$, $\alpha_i \neq \alpha_j \longrightarrow$ DIAGONALITZA.

ⓒ Si A és diagonalitzable, per tant $P_A(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_s)^{n_s}$, i

$n_i = \dim(\ker(A-\alpha_i I)) = \dim\{\text{VEPS de VAP } \alpha_i\}$: $A = C\cdot D\cdot C^{-1}$

on

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\alpha_1 \ddots \alpha_1}^{n_1} & & & 0_s \\ & \overbrace{\alpha_2 \ddots \alpha_2}^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0_s & & & \overbrace{\alpha_s \ddots \alpha_s}^{n_s} \end{pmatrix}$$ ("Matriu formada pels Vaps")

$$C = \Big(\underbrace{v_1^1 \cdots v_1^{n_1}}_{\text{VEPS de VAP } \alpha_1} \quad \underbrace{v_2^1 \cdots v_2^{n_2}}_{\text{VEPS de VAP } \alpha_2} \cdots \underbrace{v_s^1 \cdots v_s^{n_s}}_{\text{VEPS de VAPS } \alpha_s} \Big)$$ ("Matriu de Veps")

DIAGONALITZACIÓ:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2+1$ $\rightarrow$ A no diagonalitza.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 1 & -1-x \end{vmatrix} = (x+1)^2 (x-1)$

VAP $\alpha_1 = 1$ de multiplicitat 1

$\alpha_2 = -1$ de multiplicitat 2

VEPS de α_2:

$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \quad n = (0\,0\,1)$

$\dim(\ker(A+I)) = 1 < 2$ $\rightarrow$ A no diagonalitza.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)^2 x$

$\alpha_1 = 0$ de m. 1

$\alpha_2 = 2$ de m. 2

VEPS de α_2: $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$\ker(A-2I) = \langle (1\,0\,0)\,(0\,1\,-1) \rangle$

dim Veps de vap $\alpha_2 = 2$ es 2 $\rightarrow$ A diagonalitza $\quad D = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

v Vep de vap 0 $\quad A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=z \end{matrix} \quad v = (0\,1\,1)$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \cancel{AC}$

DIAGONALITZACIÓ DE MATRIUS (DE ENDOMORFISMES)

exemple:

(a)

A es diagonalitzable $\rightarrow A = C \cdot D \cdot C^{-1}$, D diagonal

$A^2 = A \cdot A = (CDC^{-1}(CDC^{-1}) = C D^2 C^{-1}$

$x(1\,0\,0) + y(0\,1\,-1)$

(b) A diagonalitzable $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

$A \cdot x = b$

$0x = 0$

$y = -z$

$CDC^{-1} \cdot X = b \Rightarrow D \underbrace{C^{-1} X}_{Y} = C^{-1} b$

Resolem el sistema $\rightsquigarrow X = C \cdot Y$

$D \cdot y = C^{-1} b$

QÜESTIÓ:

(a) Saber quan A és diagonalitzable

(b) en cas que A diagonalitzi, com calcular C i D tq $A = CDC^{-1}$

__Polinomi Característic:__

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & -1 \\ 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)\left((1-x)^2 - 1\right) = (2-x)(x^2 - 2x) =$

$= x(x-2)^2$

VAPS de A $\quad \alpha_1 = 0$ de multiplicitat 1

$\alpha_2 = 2$ de multiplicitat 2

u és VEP de VAP $\alpha_1 = 0 \quad \rightarrow u \in \ker(A - 0 \cdot I) \leftrightarrow A \cdot u = 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = z \end{matrix} \qquad u = (0\,1\,1)$

Algebra - Exemples

DIAGONALITZACIÓ

③ $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(xyz) = (2x, 3x+4y-z, 3x+5y-2z)$$

Estudiar : Diagonalitza? C i D?

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \text{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 3 & 4-x & -1 \\ 3 & 5 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)\begin{vmatrix} 4-x & -1 \\ 5 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)\left((4-x)(-2-x)+5\right) =$$

$$= (2-x)(x^2-2x-3) = (x-2)(x+1)(x-3)$$

$$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = -1 \qquad \alpha_3 = 3$$

Si $P_A(x)$ des compon en n arrels Diferents $\longrightarrow$ A diagonalitza.

Calculem C:

$v_1 \in \ker(A - 2I) \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$v_1 = (xyz)$

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 3x + 5y - 4z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 3y - 3z &= 0 \\ y &= z \\ 3x &= -y \end{aligned}$$

$$v_1 = (-1\ 3\ 3)$$

v_2 és VEP de VAP $-1 \Longleftrightarrow (A+I)\,v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 5y \end{aligned} \qquad v_2 = (0\ 1\ 5)$$

v_3 és VEP de VAP $3 \Longleftrightarrow (A - 3I)\,v_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= z \end{aligned} \qquad v_3 = (0\ 1\ 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

DIAGONALITZACIÓ

(12) $a \in \mathbb{R} \to$ Discutir diagonalització:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & -2 \\ a & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ a & 3-x & -2 \\ a & 4 & -3-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} = (1-x)[(3-x)(-3-x)+8] =$$

$$= (1-x)(x^2-1) \Rightarrow (x-1)^2 (x+1)$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = -1$$

Estudiem v_1 VEPS de VAP 1 $\longleftrightarrow (A-I)v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 2 & -2 \\ a & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} ax+2y-2z=0 \\ ax+4y-4z=0 \end{array}\right\} \qquad ax = 0$$

si $a \neq 0 \to x = 0 \to y = z \to$ NO DIAGONALITZA pq dim de VEPS és 1

si $a = 0 \to v = (x, y, y) \to$ dim 2 $\to$ SÍ DIAG.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & a & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad P_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -2 \\ 2 & a-x & -1 \\ 4 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = (a-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 4 & -3-x \end{vmatrix} =$

$$= (a-x)(x^2-1) = (a-x)(x-1)(x+1)$$

Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ $P_A(x)$ té 3 arrels diferents $\to$ A diagonalitza

$a = 1$: $P_A(x) = (x-1)^2(x+1)$

v_1 és vep de vap 1 $\longleftrightarrow (A-I)v_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} x = z \\ 2x = z \end{array}\right\} \to (0, y, 0) = v_1 \to \text{A no diagonalitza}$$

$a = -1$: $P_A(x) = (x-1)(x+1)^2 \qquad (A-(-1)I)v = 0$

v_2 és vep de vap $-1 \longleftrightarrow (A+I)v_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad z = 2x \to v_2 = \text{dim veps de vap } -1 \text{ és } 2 \to \text{A diagonalitza.}$$

A diagonalitza $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 1$

Algebra - Exemples

15

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4+2a^2 & -5 & 6 \\ 5+a^2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) A diago. a?

b) $a=1$, matriu diagonal, matriu de veps

a)

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} -2-x & 0 & 0 \\ 4-2a^2 & -5-x & 6 \\ 5+a^2 & -3 & 4-x \end{vmatrix} = (-2-x)\begin{vmatrix} -5-x & 6 \\ -3 & 4-x \end{vmatrix} = (x+2)(x^2+x-2) \to (x+2)^2(x-1)$$

Calc veps de vap -2

$$u \longleftrightarrow (A+2I)u = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4+2a^2 & -3 & 6 \\ 5+a^2 & -3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} (4+2a^2)x - 3y - 6 = 0 \\ (5+a^2)x - 3y - 6 = 0 \end{array}\right\} \quad (a^2-1)x = 0$$

Si $a^2-1 \neq 0 \to x=0 \to y=2z \to$ dim VEPS $=1 \to$ A NO diag.

Si $a=\pm 1 \to 6x-3y+6z=0 \to y=2x+2z \to$ dim $=2 \to$ A diag.

A diagonalitza per $a=\pm 1$

b)

$a=1 \to P_A(x) = (x+2)^2(x-1)$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

veps de vap -2:

$Y = 2X + 2Z$

$u_1 = (0\ 2\ 1)$ $u_2 = (1\ 2\ 0)$

veps de vap 1:

$(A-I)u_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 6 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{array}{l} x=0 \\ Y=Z \end{array}$$

$u_3 = (0\ 1\ 1)$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$