POLINOMIS I NOMBRES COMPLEXES

- Un polinomi en x és una expressió formal de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n, \quad a_i \in \begin{matrix} \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{matrix}$$

si $a_n \neq 0$, n és el GRAU de $p(x) \rightarrow deg(p(x))$

- Com en el cos $(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ tenim definida una suma i un producte, es defineix la suma i el producte de polinomis terme a terme, propietat distributiva.

PROPIETATS:

$$deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{deg(p(x)), deg(q(x))\}$$

$$deg(p(x) \cdot q(x)) = n + m$$

$\downarrow$ (K cos $\mathbb{Q}$ o K $\mathbb{R}$) $\downarrow$

Donats $p(x)$ i $q(x) \in K[x]$ ($p(x)$ i $q(x)$ amb coeficient a K i en X),

$q(x) \neq 0$, $\longrightarrow$ existeixen uns únics $c(x)$ i $r(x)$ tq

$$p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)$$

i $r(x) = 0$ o $deg(r(x)) < deg(q(x))$

- Diem que $q(x)$ divideix $p(x)$ si $r(x) = 0$. Existeix $c(x)$ tq

$$p(x) = c(x) \cdot q(x)$$

- Diem que $\alpha \in K$ és ARREL de $p(x) \in \mathbb{R}[x]$

PROP. α és arrel de $p(x) \longleftrightarrow p(\alpha) = 0 \longleftrightarrow (x - \alpha)$ divideix $p(x)$

α és arrel si $p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ (i.e $(x-\alpha)$ és FACTOR de $p(x)$)

Observem: si $\alpha_1 \text{---} \alpha_r$ son arrels de $p(x) \longrightarrow p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_r)\, q(x)$

si $n = deg(p(x))$, a molt $p(x)$ té n arrels.

- Diem que α és arrel de multiplicitat k de $p(x)$ si $(x-\alpha)^k$ divideix a $p(x)$

$$p(x) = (x-\alpha)^k \cdot q(x)$$

obs: si $\alpha_1 — \alpha_r$ són arrels de $p(x)$ de multiplicitat $a_1 — a_r$

$$n = \deg(p(x)) \geq \sum_{i=1}^{r} a_i$$

En efecte, si $\alpha_1 — \alpha_r$ són arrels de multiplicitat $a_1 — a_r$

$$p(x) = (x-\alpha_1)^{a_1} \cdot (x-\alpha_2)^{a_2} \cdots (x-\alpha_r)^{a_r} \cdot q(x) \longrightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i \leq n$$

- Si $p(x) \in K[x]$ un polinomi de la forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$, es defineix:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

- Successivament, es defineix la k-èssima derivada de $p(x)$ com la derivada de la $(k-1)$ derivada.

$$p^{(k)}(x) = \left(p^{(k-1)}\right)'(x)$$

PROP: Si $\alpha \in K$ és arrel de multiplicitat k,:

$$p(x) = 0 \quad p'(x) = 0 \qquad p^{(k-1)}(\alpha) = 0 \;;\; p^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

- A $\mathbb{R}$ (i a $\mathbb{Q}$) tenim polinomis que NO tenen arrels

x^2+1, $(x^2+a,\ a>0)$ ...

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Es defineix el valor imaginari i tq $i^2 = -1$ (i és arrel de x^2+1)

Es defineix el cos dels complexes $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

En $\mathbb{C}$ definim una Suma i un producte

$$(a+bi)+(x+yi) = (a+x)+(b+y)i$$

$$(a+bi)(x+yi) = ax + ayi + bxi - by = ax - by + (ay+bx)i$$

NOTACIÓ:

$z = a + bi$

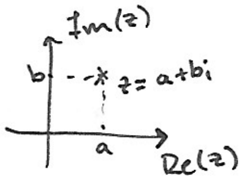
$Re(z) = a$ la part Real

$Im(z) = b$ la part Imaginaria.

Efectivament $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$z = a + bi$ és Real si $Im(z) = b = 0$

Podem representar un nº complex com un punt del plà.



Def: $z = a + bi \in \mathbb{C}$

Es defineix el conjugat de z:

$$\bar{z} := a - bi$$

Es defineix el mòdul de z:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

PROPIETATS: $z = a+bi$

$|z| = z \cdot \bar{z}$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$z + \bar{z} = 2\,Re(z)$

$z - \bar{z} = 2\,Im(z) \cdot i$