14 - 11 - 2017

Aplicacions Linials

Siguin V i W espais vectorials, Una aplicació $f\ V \longrightarrow W$ és una aplicació linial (morfisme) si:

a) $f(u+v) = f(u) + f(v) \quad \forall u, v \in V$

b) $f(\alpha u) = \alpha \cdot f(u) \quad \forall u \in V, \alpha \in \mathbb{R}$

en particular: $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$

Observem que si A és una Matriu a coeficients reals, de n columnes i m files, A defineix una aplicació linial.

$$f_A\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\underset{(x_1 \text{---} x_n)}{\overset{\shortparallel}{v}} \longrightarrow A \cdot v = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix}$$

Recíprocament, donada una aplicació linial

$$f: \quad V \longrightarrow W$$

li podem associar una matriu com segueix:

- Fixem $B_V = \{e_1 \text{---} e_n\}$ una Base de V
- Fixem $B_W = \{u_1 \text{---} u_m\}$ una Base de W

La Matriu associada a f en les bases B_V de V i B_W de W és:

$$A_f = \left(f(e_1) \,|\, f(e_2) \,|\, \cdots \,|\, f(e_n) \right)$$

Coordenades de $f(e_1)$ en la base B_W

Coordenades de $f(e_n)$ en la base B_W

-※-

NUCLI I IMATGE D'UNA APLICACIÓ LINIAL :

$f: V \longrightarrow W$ una aplicació linial d'espais vectorials,

es defineix NUCLI d'f:

$$\ker(f) = Nuc(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \} \leq V \text{ (és un subespai)}$$

es defineix IMATGE d'f:

$$Im(f) := \{ w \in W \mid f(v) = w, \text{ per cert } v \in V \} \leq W \text{ (subespai)}$$

PROPIETAT $f: V \to W$ aplicació linial

① $\boxed{\dim V = \dim \ker(f) + \dim Im(f)}$

② Si $B = \{e_1 - e_n\}$ és una Base de V:

$Im(f) = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n) \rangle$ i $Im(f)$ està generat pels vectors $f(e_1), \dots, f(e_n)$

③ Si A_f és una matriu associada a f

$$\ker(f) = \{ v \in V \mid A_f \cdot v = 0 \}$$

Si $v = (x_1 - x_n)$, per estudiar $\ker(f)$ cal resoldre el sistema homogeni

$$A_f \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

④ Si A_f és una matriu associada a f, la $Im(f)$ està generada per les columnes d'A_f. I per tant:

$$\dim Im(f) = \text{nº columnes L.I.}$$

$f: V \longrightarrow W$ aplicació lineal

$S \subseteq V$ subespai, $T \subseteq W$ subespai

$f(S) := \{f(u) \mid u \in S\}$ subespai de W

Observem que si $S = \langle e_1 - e_s \rangle$, $f(S) = \langle f(e_1), \dots, f(e_s) \rangle$

$f^{-1}(T) := \{u \in V \mid f(u) \in T\}$ subespai de V

obs: $Im(f) = f(V)$

$ker(f) = f^{-1}(0)$

NONO, EPI, ISO

Def: $f: V \longrightarrow W$ aplicació lineal

f és MONOMORFISME si és injectiva $(ker(f) = 0)$

f és EPIMORFISME si és exhaustiva $(Im(f) = W)$

f és ISOMORFISME si és MONO + EPI

obs:

$f \; \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

a) f mono $\Rightarrow n \leq m$

b) f epi $\Rightarrow n \geq m$

c) f iso $\Rightarrow n = m$

Def: $f\ V \longrightarrow W$ aplicació lineal

f és ISOMETRIA si $\forall u \in V$, $\|f(u)\| = \|u\|$

f és isometria $\Leftrightarrow$ f conserva distàncies

PROPIETATS:

Suposem que f en les bases B de V, B' de W té associada la matriu A_f.

f és isometria $\leftrightarrow$ $A_f \cdot A_f = Id$.

Def: COMPOSICIÓ

$f: V \longrightarrow W$ aplicació lineal

$g: W \longrightarrow U$ aplicació lineal

Es defineix la composició de f i g:

$$g \circ f : V \longrightarrow U$$
$$v \longmapsto g(f(v))$$

$(g \circ f)(v) = g(f(v))$

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$
$$v \longrightarrow f(v) \longrightarrow g(f(v))$$

PROPIETAT: $f\ V \to W$, $g\ W \to U$ aplicacions lineals.

siguin B_V Base de V

B_W Base de W

B_U Base de U

Anomeno: A_f matriu de f en bases B_V i B_W

A_g matriu de f en bases B_W i B_U

B matriu de $(g \circ f)$ en bases B_V i B_U

La matriu de la composició és el producte de matrius. $\longrightarrow$ $\boxed{B = A_g \cdot A_f}$

MATRIUS DE CANVI DE BASE

Tenim V un espai vectorial de dimensió n.

Considerem $B = \{e_1 — e_n\}$ Base de V

$B' = \{u_1 — u_n\}$ Base de V

<u>Objectiu</u>: Determinar una Matriu que permeti passar de coordenades en la Base B a coordenades en la Base B' i al revés:

La Matriu de canvi de Base de la Base B a la Base B' és la Matriu associada a l'aplicació Identitat de $\mathbb{R}^n$ en les Bases B i B'.

$$A_{BB'} = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Coordenades de} \\ e_1 \text{ en la Base } B'}}{e_1} \middle| e_2 \middle| \ldots \middle| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Coordenades de} \\ e_n \text{, en la Base } B'}}{e_n} \right)$$

Si un vector u té coordenades

$u = (a_1 — a_n)$ en la base B $\longrightarrow$ $A_{BB'} \cdot U$ són les coordenades de u en base B'

La Matriu de canvi de Base de B' a B és $A_{BB'}^{-1}$.

APLICACIONS LINIALS EXEMPLE:

$$f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (x+2y, 2x-y)$$

$B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(0,1)\}$

$B'_{\mathbb{R}^2} = \{(1,1),(-1,0)\}$ *

Matriu de f en Base $B'_{\mathbb{R}^2}$ i Base $B_{\mathbb{R}^2}$

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1\cdot 1+2\cdot 1 & -1+2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 - 1\cdot 1 & \end{matrix}$$

La Matriu de f en la Base Canònica

$$B_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$B''_{\mathbb{R}^2} = \{(0,-1),(-1,0)\}$

Matriu de f en Base $B'_{\mathbb{R}^2}$ i $B''_{\mathbb{R}^2}$

$$C_f = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

NUCLI - IMATGE

$$f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x y z) \longrightarrow (x-y, z, -x+y+z)$$

Matriu de f associada a les Bases Canòniques de $\mathbb{R}^3$

$$Af = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \ker(f) = \{\underset{(x,y,z)}{v} \in \mathbb{R}^3 \mid f(v)=0\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$x-y=0$

$z=0$

$-x+y=0$

$\ker f = \langle (x,x,0) \rangle$

$\dim \operatorname{Im}(f) = 3-1 = 2$

$\operatorname{Im}(f) = \langle (1\,0\,-1)(0\,1\,1) \rangle$

$f(e_1) = -f(e_2)$

$f(e_1)+f(e_2) = 0$

$\quad\ \ \shortparallel$

$f(e_1+e_2)$

Exemple 7.

$$g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (x-y, x, -2y)$$

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}(g) = \langle (1\,1\,0)(-1\,0\,-2) \rangle$$

COMPOSICIÓ

Fixem Bases canòniques de $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^4$

$$f \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x\,y\,z) \longrightarrow (x+y, y-z)$$

$$g \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x\,y) \longrightarrow (x, x+y, x-y, y)$$

$$f\circ g \quad \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
$$(x\,y\,z) \longrightarrow (x+y, x+2y-z, x+z, y-z)$$

Matriu en la Base Canònica de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriu en Base Canònica de $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriu en Base Canònica de $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^4$:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_f \cdot A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = B$$

ALGEBRA - EXEMPLES TEORIA:

MATRIUS DE CANVI DE BASE

A $\mathbb{R}^3$ considerem:

$B = \{(010)\ (200)\ (003)\}$ — $\overset{\shortparallel}{e_1}$, $\overset{\shortparallel}{e_2}$, $\overset{\shortparallel}{e_3}$

$B' = \{u_1, u_2, u_3\}$

$u_1 = 2e_1 + e_2$

$u_2 = -e_3$

$u_3 = e_1 + e_2 + e_3$

La Matriu de canvi de Base de B' a B.

$$A_{B'B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriu de canvi de Base de B a B' és:

$$A_{B'B}^{-1} = A_{BB'}$$

Matriu de canvi de Base de la Base canònica de $\mathbb{R}^3$ a la Base B

$$A_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{CB} = A_{BC}^{-1}$$

Matriu de canvi de Base de Base Canònica a Base B':

$$A_{CB'} = A_{B'B}^{-1} \cdot A_{BC}^{-1} = A_{BB'} \cdot A_{CB}$$

$f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

en base canònica de $\mathbb{R}^3$ té per matriu:

$$Af = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la imatge de u que en la Base B té per coordenades (111)

b) Matriu de f en les bases B i B'

a) $\overbrace{A_f \cdot \underbrace{A_{BC} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{coordenades de u en la base canònica}}}$

matriu de f en Base B i canònica.

$$\mathbb{R}^3_B \xrightarrow{A_{BC}} \mathbb{R}^3_c \xrightarrow{A_f} \mathbb{R}^3_c \xrightarrow{A_{CB'}} \mathbb{R}^3_{B'}$$

Matriu de f en la Base B i B' $= A_{CB} \cdot Af \cdot A_{BC}$

ex. 9.2