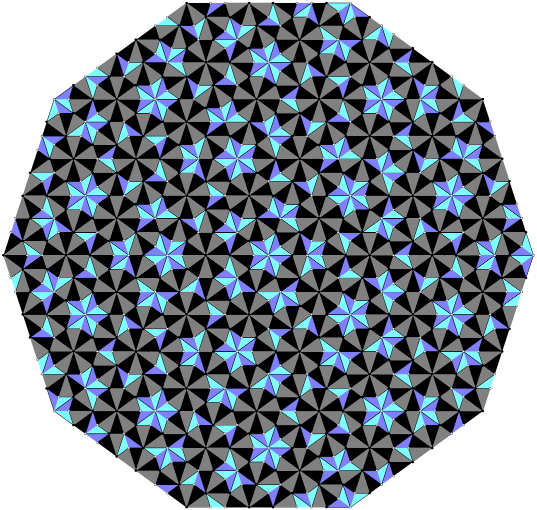
微观数学

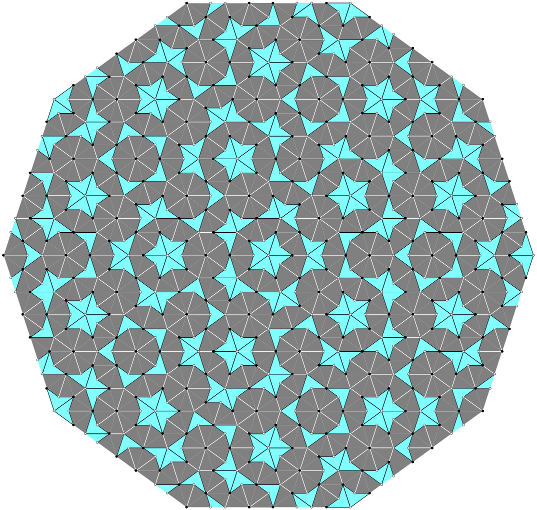
第2讲　【真】・Penrose镶嵌

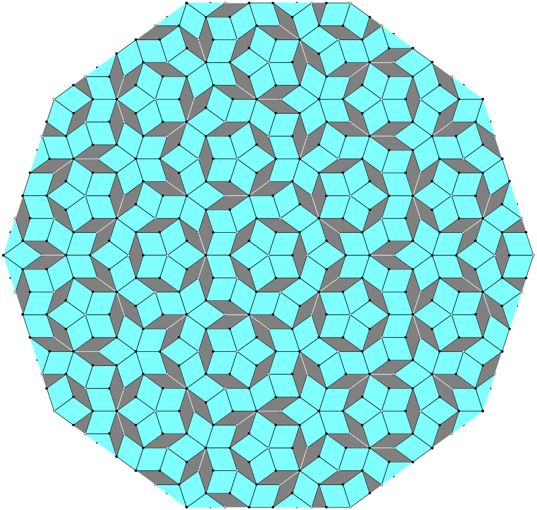
邱宇

清华大学
丘成桐数学科学中心

2021.03.08







定理 (N.G. de Brujin)

*Penrose*覆盖一一对应与一个非退化*5*-网格。

约定：$\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}, \zeta_j = e^{2j\pi \mathrm{i}/5}, \Xi = (1, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$.

定义

一个*5*-网格$\mathrm{PG}(\Theta)$是由参数$\Theta = (\eta_0, \ldots, \eta_4) \in \mathbb{R}$给出的5族平行线：

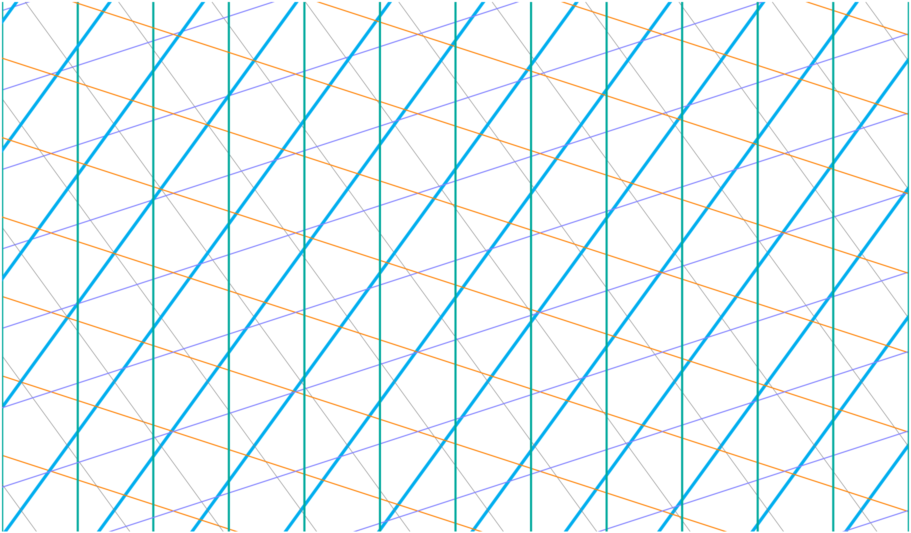
$$\mathsf{L}_j = \{l_j(m) \mid m \in \mathbb{Z}\}, \quad j \in \mathbb{Z}_5,$$

这里$\sum_j \eta_j = 0$，$l_j(m)$是直线；

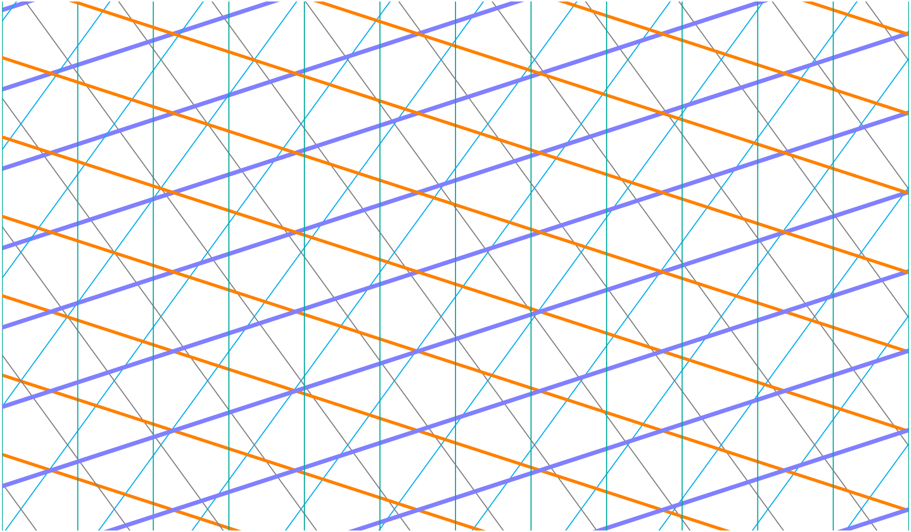
$$l_j(m) \colon x\cos(e^{2j\pi \mathrm{i}/5}) - y\sin(e^{2j\pi \mathrm{i}/5}) = m - \eta_j.$$

$$\iff \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z\zeta^{-j}) + \eta_j = m\}.$$

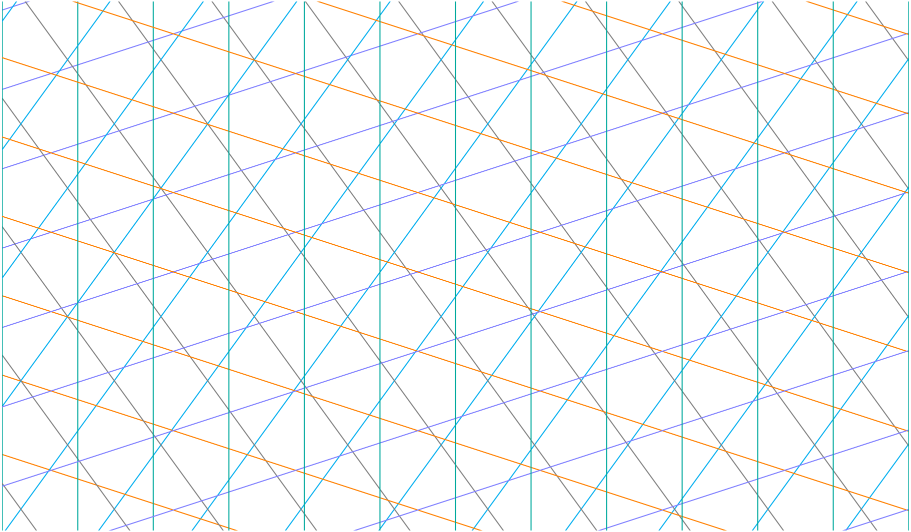
5-网格



5-网格



5-网格



5-网格坐标

每一个平面中的点$z = x + y$i对应一个5维坐标

$$M(z) = (m_0(z), m_1(z), m_2(z), m_3(z), m_4(z)),$$

这里

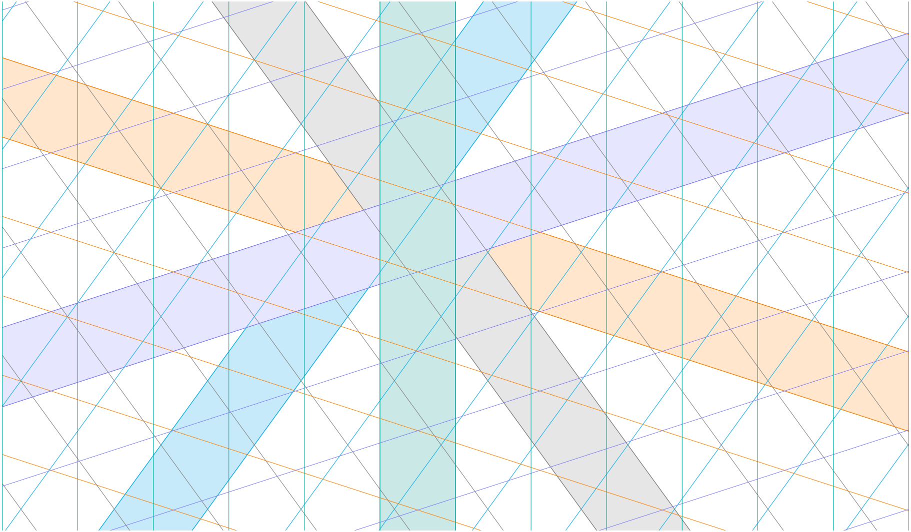
$$m_j(z) = \left\lceil \mathrm{Re}(z\zeta^{-j}) + \eta_j \right\rceil,$$

即z是落在带状区域

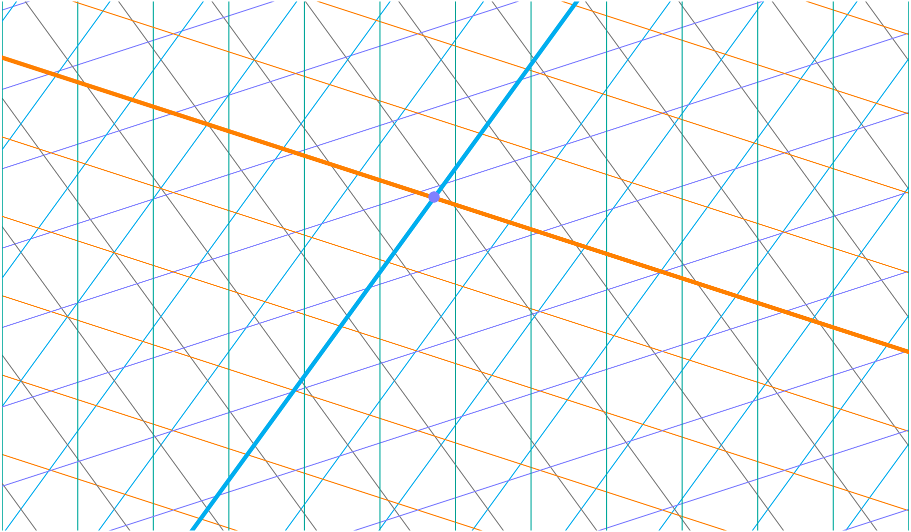
$$\left(l_j(m_j - 1), l_j(m_j)\right]$$

之中（可以落在边界$l_j(m_j)$）。

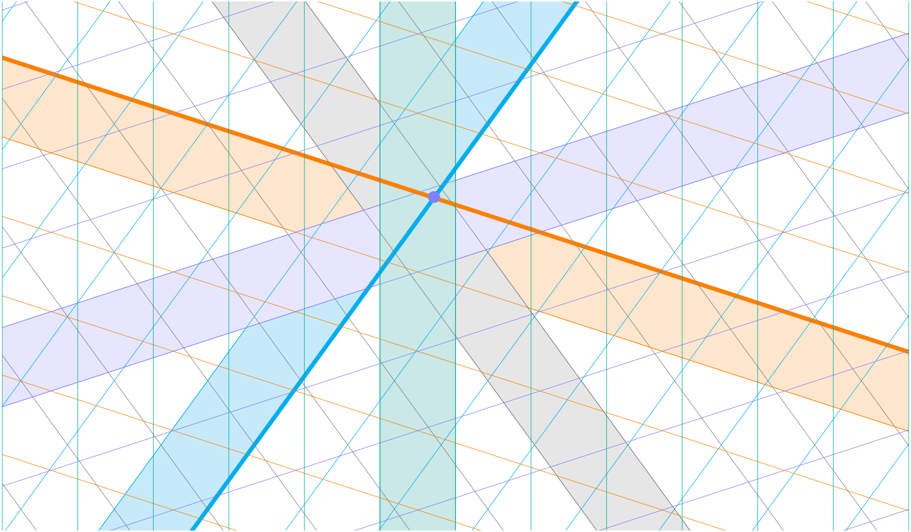
5-网格坐标



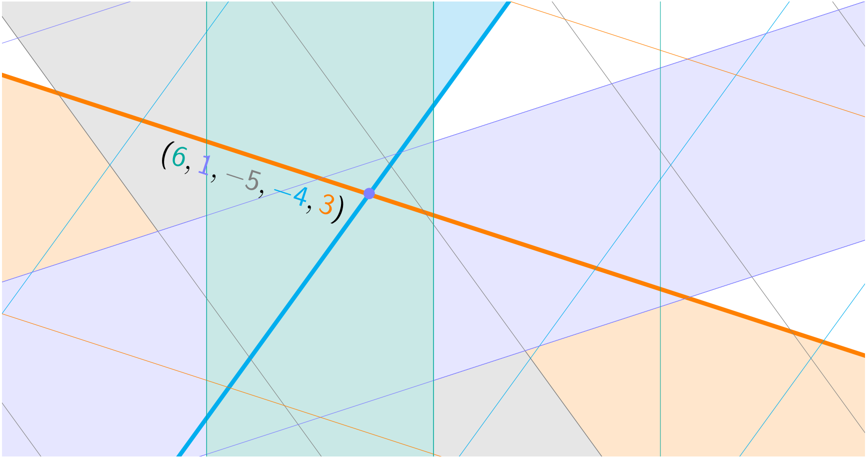
5-网格：交点



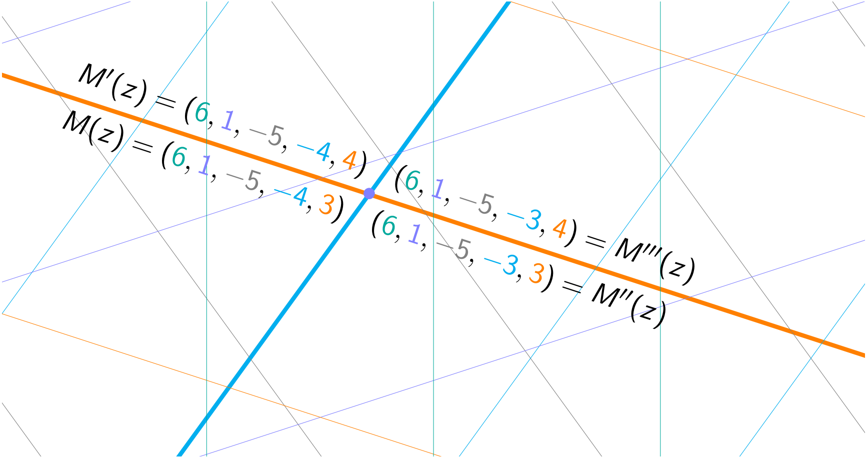
5-网格：交点



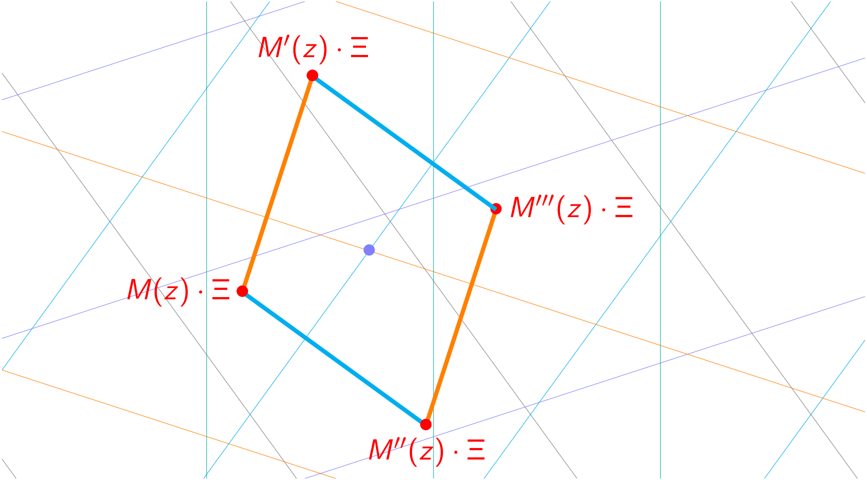
5-网格：交点放大版+坐标



5-网格：邻域坐标



5-网格：交点变样砖$z \mapsto R(z)$



5-网格：铺砖

考虑映射$Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$V(z) = M(z) \cdot \Xi.$$

定理

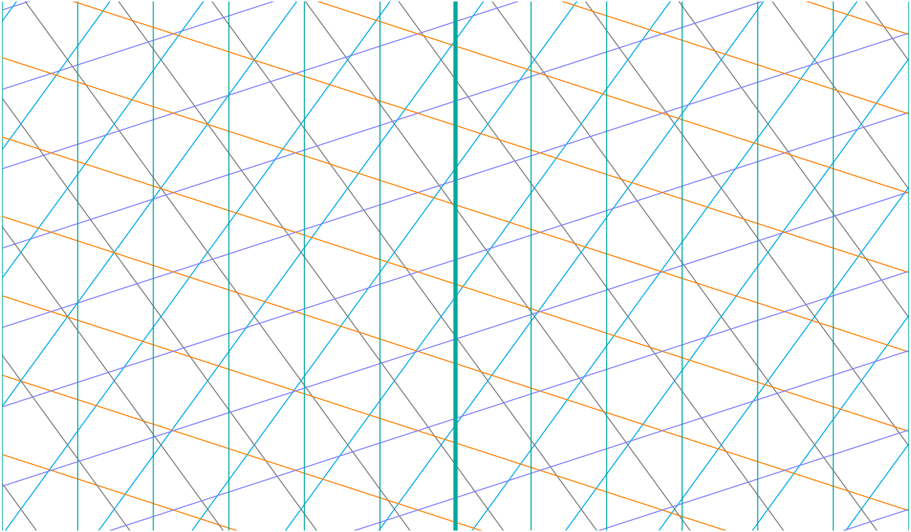
$\mathrm{PG}(\Theta)$给出的镶嵌格点集合为：

$$\mathcal{T}_0(\Theta) = \{V(z) \mid z\text{是}\mathrm{PG}(\Theta)\text{的交点}\}$$

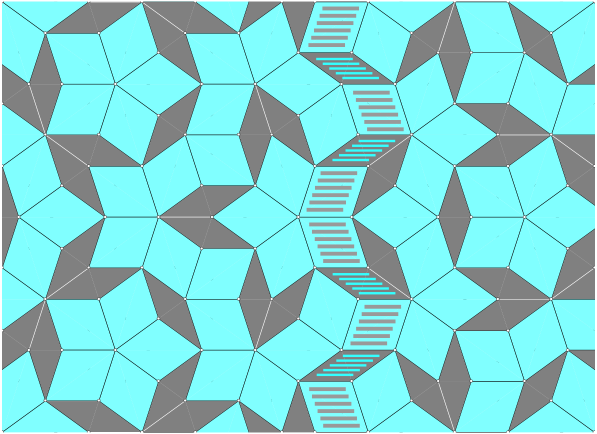
砖集为

$$\mathcal{T}(\Theta) = \{R(z) \mid z\text{是}\mathrm{PG}(\Theta)\text{的交点}\}$$

选定一条线（上的交点）



对应的路/梯子



证明要点

- 局部不会覆盖⇒不会覆盖；
- 局部（每个点$V(z)$处）可延拓铺满⇒给出一个覆盖。

重点来了：

- 是一个可以对应Penrose的覆盖（边界可以加定向/颜色，即异性相吸原则）。

证明要点

- 局部不会覆盖⇒不会覆盖；
- 局部（每个点$V(z)$处）可延拓铺满⇒给出一个覆盖。

重点来了：

- 是一个可以对应Penrose的覆盖（边界可以加定向/颜色，即异性相吸原则）。

证明要点

- 局部不会覆盖⇒不会覆盖；
- 局部（每个点$V(z)$处）可延拓铺满⇒给出一个覆盖。

重点来了：

- 是一个可以对应Penrose的覆盖（边界可以加定向/颜色，即异性相吸原则）。

证明要点

- 局部不会覆盖⇒不会覆盖；
- 局部（每个点$V(z)$处）可延拓铺满⇒给出一个覆盖。

重点来了：

- 是一个可以对应Penrose的覆盖（边界可以加定向/颜色，即异性相吸原则）。

证明要点

- 局部不会覆盖⇒不会覆盖；
- 局部（每个点$V(z)$处）可延拓铺满⇒给出一个覆盖。

重点来了：

- 是一个可以对应Penrose的覆盖（边界可以加定向/颜色，即异性相吸原则）。

几何背景：降维打击！

定理

*Penrsoe*镶嵌都是由五维空间（标准正方）网格对某一取定二维平面$E(\Theta)$的投影得到！这里只取网格中与$E(\Theta)$相交的立方体的面来投影。

$E(\Theta) = \{\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4) \mid \cdot\} \subset \mathbb{R}^5$满足的平面的方程：

$$\begin{cases} \underline{t} \cdot \Xi^0 = 0, \\ (\underline{t} - \Theta) \cdot \mathrm{Re}\Xi^2 = 0, \\ (\underline{t} - \Theta) \cdot \mathrm{Im}\Xi^2 = 0. \end{cases}$$

or

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_5} t_j = 0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}_5} (t_j - \eta_j) \cdot \zeta_j^2.$$

这里 $\Xi^k = (\zeta_0^k, \zeta_1^k, \zeta_2^k, \zeta_3^k, \zeta_4^k)$，$\forall k \in \mathbb{Z}$。

几何背景证明

一个点$\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$落在正方格$(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4)$中当且仅当

$$m_j = m_j(\underline{t}) = \left\lceil \mathrm{Re}(\underline{t}\zeta^{-j}) + \eta_j \right\rceil.$$

练习

细节=自己想。

几何背景证明

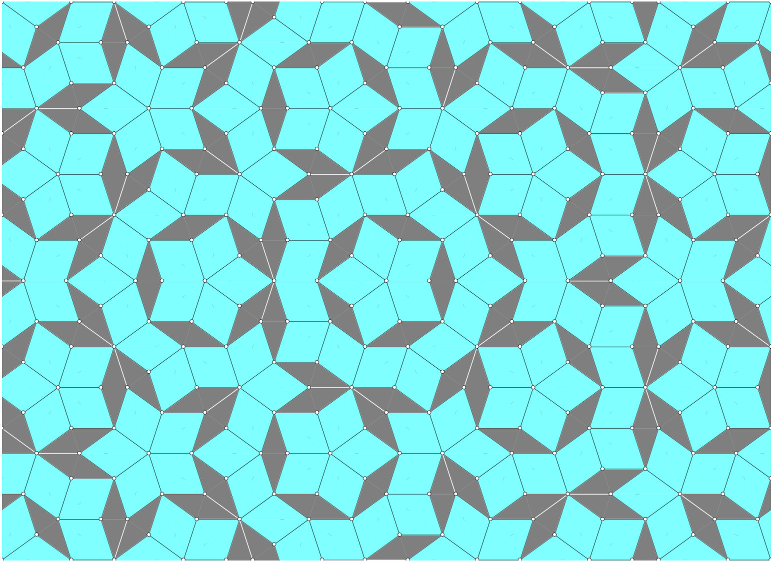
一个点$\underline{t} = (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4)$落在正方格$(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4)$中当且仅当

$$m_j = m_j(\underline{t}) = \left\lceil \mathrm{Re}(\underline{t}\zeta^{-j}) + \eta_j \right\rceil.$$

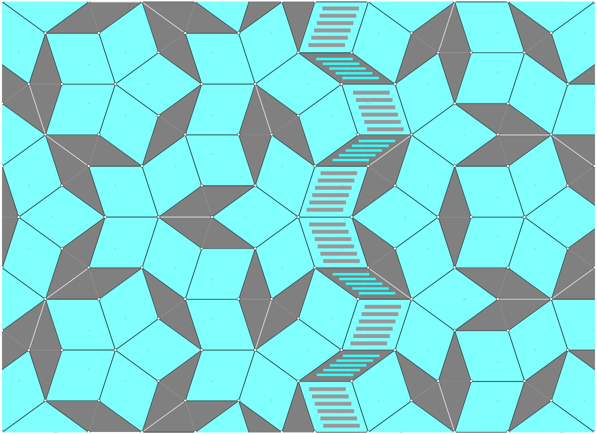
练习

细节=自己想。

菱形反向还原5-网格：方向垂直于边+参数Θ可算

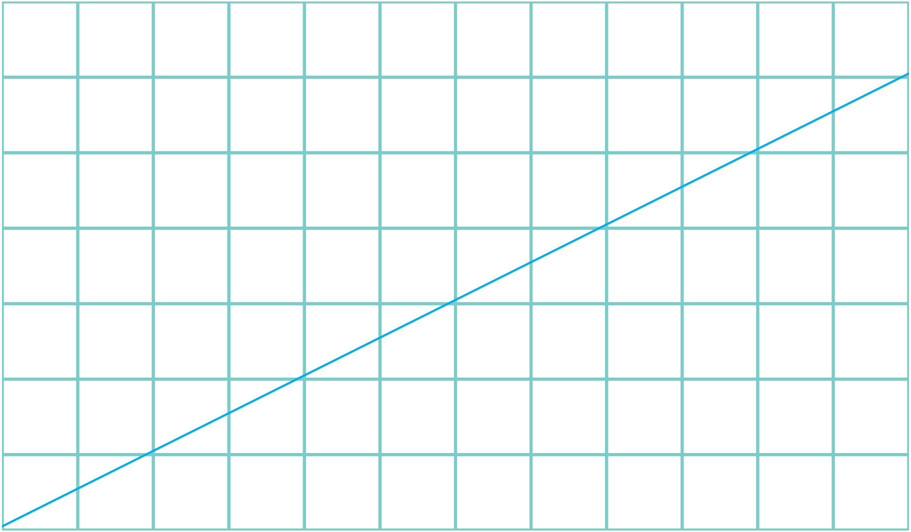


对应的路/梯子

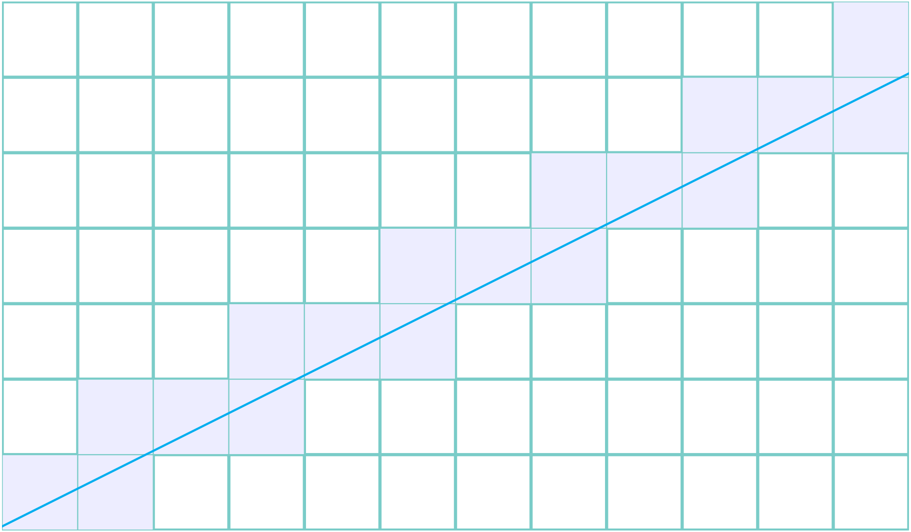


退化版

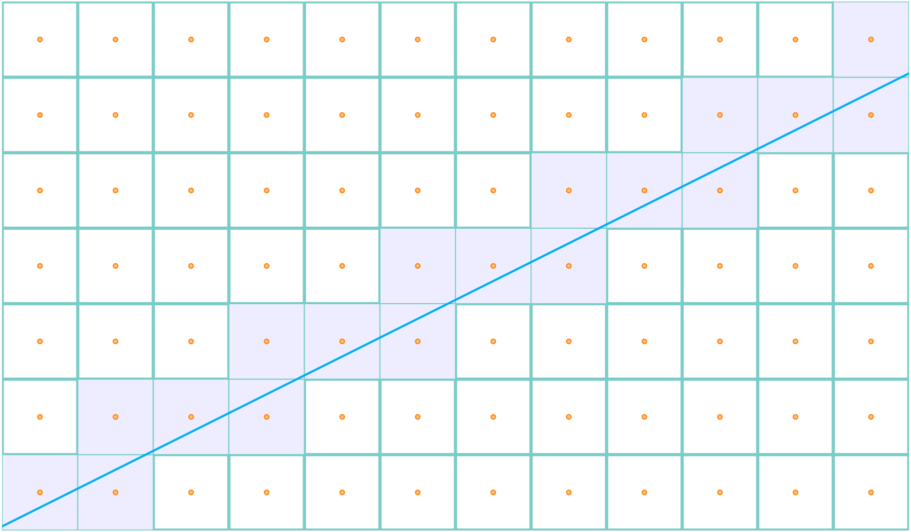
退化版



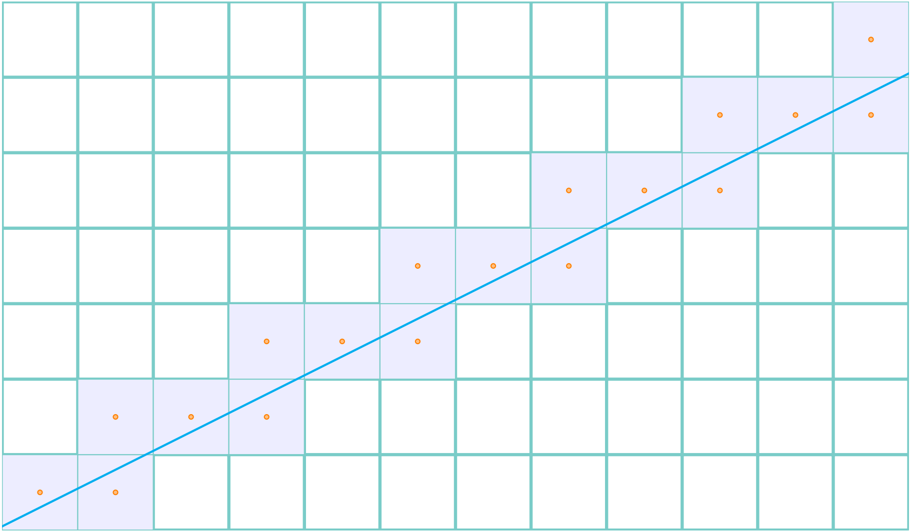
退化版



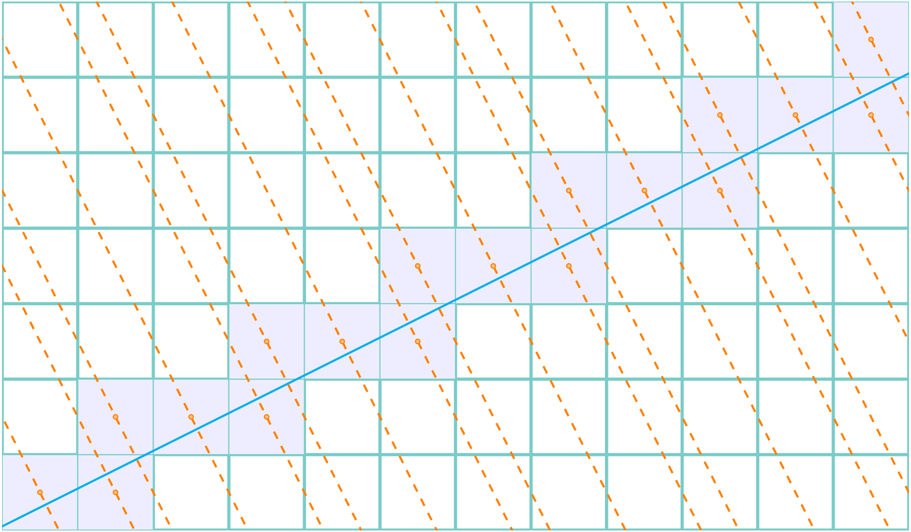
退化版



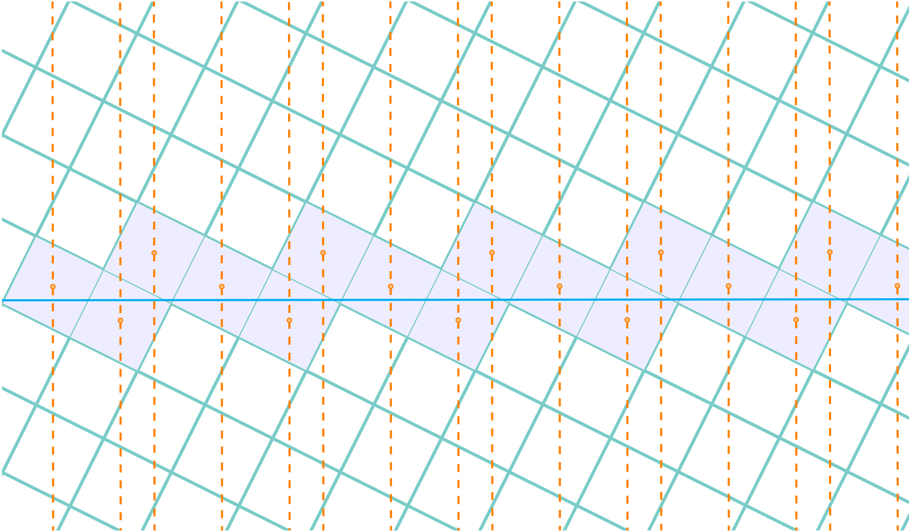
退化版



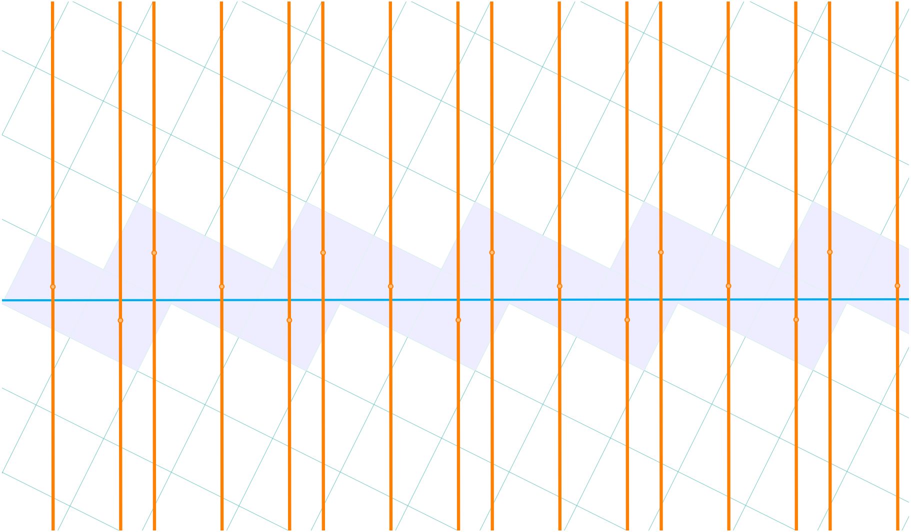
退化版



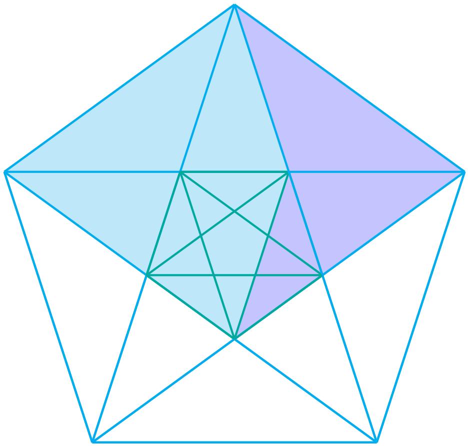
退化版



退化版



完结 · 前夜 · 谢谢



完结 · 前夜 · 谢谢