# 微观数学
# 第一讲（下）　　Penrose镶嵌

原作：于品
画师：邱宇

清华大学丘成桐数学科学中心

2021.03.08

上回书正说到。。。

# 本次课程

- 前情回顾 Previously on Penrose
- Penrose镶嵌的具体构造
- Penrose镶嵌的性质

# 本次课程

- 前情回顾 Previously on Penrose
- Penrose镶嵌的具体构造
- Penrose镶嵌的性质

# 本次课程

- 前情回顾 Previously on Penrose
- Penrose镶嵌的具体构造
- Penrose镶嵌的性质

# 本次课程

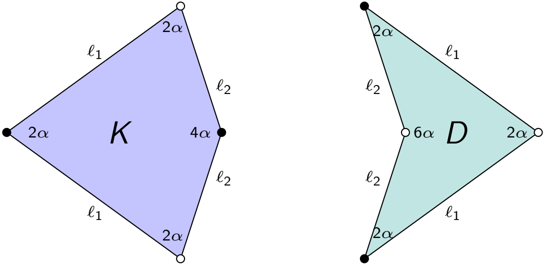
- 前情回顾 Previously on Penrose
- Penrose镶嵌的具体构造
- Penrose镶嵌的性质

# 本次课程

- 前情回顾 Previously on Penrose
- Penrose镶嵌的具体构造
- Penrose镶嵌的性质

# 样砖

我们要用一类特殊的样砖$\mathfrak{M}_1 = \{K, D\}$来镶嵌2维Euclid平面$E$，其中$K$=风筝，$D$=飞镖。




其中，边长$\ell_1 = (1+\sqrt{5})/2$，$\ell_2 = 1$，角度$\alpha = \pi/5$。

# 镶嵌的存在性定理

我们对镶嵌做的要求如下：

- 平面的每个点都属于某一块砖；两块不同的砖只能在边界处重合；
- 对$\mathfrak{M}_1$而言，我们进一步要求边对边，同色顶点对同色顶点。

我们证明了存在性定理：

**定理**

如果对任意的$R > 0$，都可以构造一个不完全镶嵌$T$，使得$|T| \supset B(R)$，那么存在整个平面的镶嵌。

我们对镶嵌做的要求如下：

- 平面的每个点都属于某一块砖；两块不同的砖只能在边界处重合；
- 对$\mathfrak{M}_1$而言，我们进一步要求边对边，同色顶点对同色顶点。

我们证明了存在性定理：

**定理**

如果对任意的$R > 0$，都可以构造一个不完全镶嵌$T$，使得$|T| \supset B(R)$，那么存在整个平面的镶嵌。

# 镶嵌的存在性定理

我们对镶嵌做的要求如下：

- 平面的每个点都属于某一块砖；两块不同的砖只能在边界处重合；
- 对$\mathfrak{M}_1$而言，我们进一步要求边对边，同色顶点对同色顶点。

我们证明了存在性定理：

**定理**

如果对任意的$R > 0$，都可以构造一个不完全镶嵌$T$，使得$|T| \supset B(R)$，那么存在整个平面的镶嵌。

# 剪开

- 将风筝和飞镖剪开：



- 我们就可以用下面的四个三角样砖（带由箭头）铺满平面：




- 反过来沿着箭头粘接，可以得到风筝和飞镖的镶嵌。

- 将风筝和飞镖剪开：

- 我们就可以用下面的四个三角样砖（带由箭头）铺满平面：

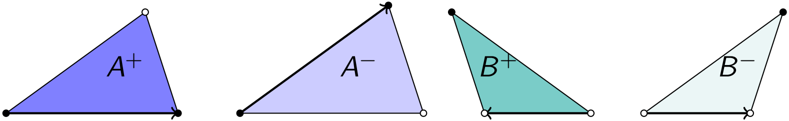



- 反过来沿着箭头粘接，可以得到风筝和飞镖的镶嵌。

# 剪开

- 将风筝和飞镖剪开：

- 我们就可以用下面的四个三角样砖（带由箭头）铺满平面：

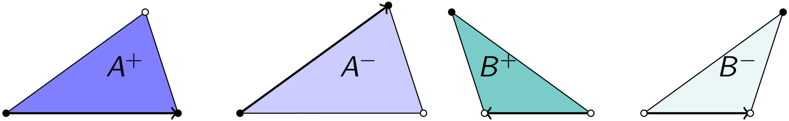



- 反过来沿着箭头粘接，可以得到风筝和飞镖的镶嵌。

# 剪开

- 将风筝和飞镖剪开：

- 我们就可以用下面的四个三角样砖（带由箭头）铺满平面：




- 反过来沿着箭头粘接，可以得到风筝和飞镖的镶嵌。

# $B$型砖的改变：操作甲

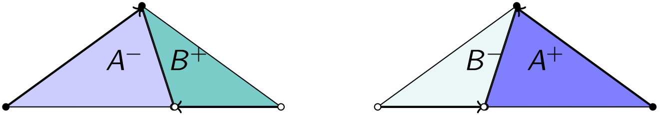
- 每个$B$型的砖都唯一的以如下方式对应着一个$A$型砖：




- 加大所有的$B^\pm$型砖，得到如下样砖的镶嵌：

# B型砖的改变：操作甲

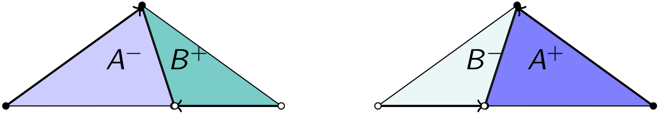
- 每个$B$型的砖都唯一的以如下方式对应着一个$A$型砖：



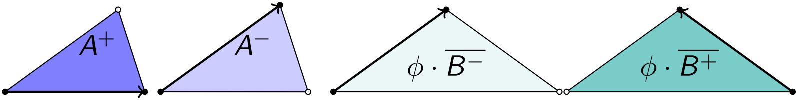

- 加大所有的$B^\pm$型砖，得到如下样砖的镶嵌：

# $B$型砖的改变：操作甲

- 每个$B$型的砖都唯一的以如下方式对应着一个$A$型砖：




- 加大所有的$B^{\pm}$型砖，得到如下样砖的镶嵌：



# $A$型砖的改变：操作丙

- 对$A$和$\phi\cdot\overline{B}$型的砖，我们仍然有

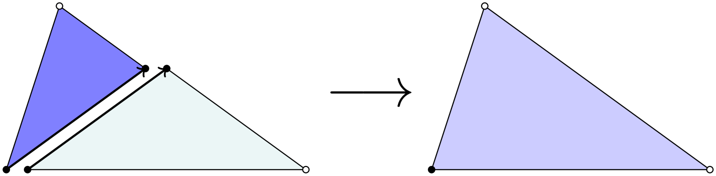


- 结合两个操作，我们得到

$$\{A^{\pm},B^{\pm}\}\xrightarrow{\text{甲}}\{A^{\pm},\phi\cdot\overline{B^{\pm}}\}\xrightarrow{\text{丙}}\{\phi\cdot\overline{A^{\pm}},\phi\cdot\overline{B^{\pm}}\}.$$

# $A$型砖的改变：操作丙

- 对$A$和$\phi \cdot \overline{B}$型的砖，我们仍然有

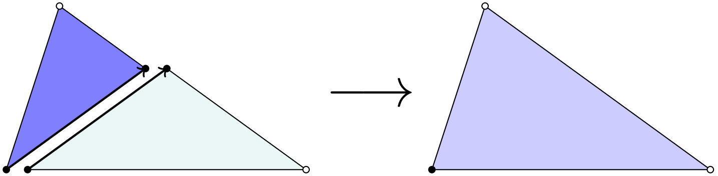


- 结合两个操作，我们得到

$$\{A^{\pm}, B^{\pm}\} \xrightarrow{\text{甲}} \{A^{\pm}, \phi \cdot \overline{B^{\pm}}\} \xrightarrow{\text{丙}} \{\phi \cdot \overline{A^{\pm}}, \phi \cdot \overline{B^{\pm}}\}.$$

# $A$型砖的改变：操作丙

- 对$A$和$\phi\cdot\overline{B}$型的砖，我们仍然有



- 结合两个操作，我们得到

$$\{A^{\pm},B^{\pm}\}\xrightarrow{\text{甲}}\{A^{\pm},\phi\cdot\overline{B^{\pm}}\}\xrightarrow{\text{丙}}\{\phi\cdot\overline{A^{\pm}},\phi\cdot\overline{B^{\pm}}\}.$$

# 熔合与分裂

- 上面操作定义出了熔合：

$$\{K, D\} \xrightarrow{\text{剪开}} \{A^{\pm}, B^{\pm}\} \xrightarrow{\text{丙}\circ\text{甲}} \{\phi \cdot \overline{A^{\pm}}, \phi \cdot \overline{B^{\pm}}\} \xrightarrow{\text{粘贴}} \{\phi \cdot K, \phi \cdot D\}.$$

- 分裂的工艺为上述的逆。



- 分裂的过程使得砖块的个数增加了至少两倍。这是用来构造比较大的镶嵌的基本想法。

# 熔合与分裂

- 上面操作定义出了熔合：

$$\{K, D\} \xrightarrow{\text{剪开}} \{A^{\pm}, B^{\pm}\} \xrightarrow{\text{丙}\circ\text{甲}} \{\phi\cdot\overline{A^{\pm}}, \phi\cdot\overline{B^{\pm}}\} \xrightarrow{\text{粘贴}} \{\phi\cdot K, \phi\cdot D\}.$$

- 分裂的工艺为上述的逆。



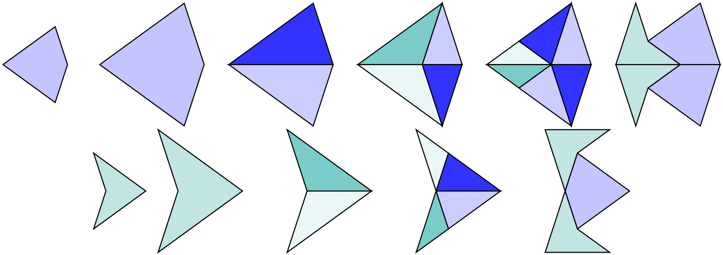
- 分裂的过程使得砖块的个数增加了至少两倍。这是用来构造比较大的镶嵌的基本想法。

# 熔合与分裂

- 上面操作定义出了熔合：

$$\{K, D\} \xrightarrow{\text{剪开}} \{A^{\pm}, B^{\pm}\} \xrightarrow{\text{丙}\circ\text{甲}} \{\phi\cdot\overline{A^{\pm}}, \phi\cdot\overline{B^{\pm}}\} \xrightarrow{\text{粘贴}} \{\phi\cdot K, \phi\cdot D\}.$$

- 分裂的工艺为上述的逆。



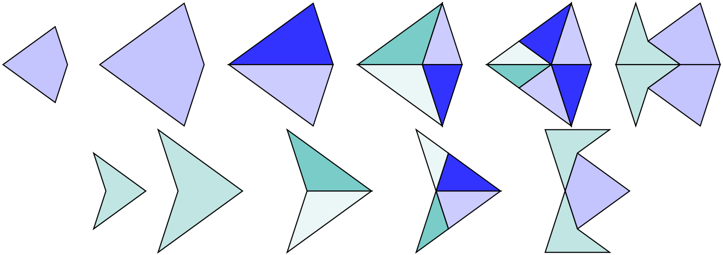
- 分裂的过程使得砖块的个数增加了至少两倍。这是用来构造比较大的镶嵌的基本想法。

# 熔合与分裂

- 上面操作定义出了熔合：

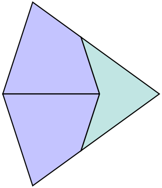
$$\{K, D\} \xrightarrow{\text{剪开}} \{A^{\pm}, B^{\pm}\} \xrightarrow{\text{丙}\circ\text{甲}} \{\phi \cdot \overline{A^{\pm}}, \phi \cdot \overline{B^{\pm}}\} \xrightarrow{\text{粘贴}} \{\phi \cdot K, \phi \cdot D\}.$$

- 分裂的工艺为上述的逆。



- 分裂的过程使得砖块的个数增加了至少两倍。这是用来构造比较大的镶嵌的基本想法。

# 大号风筝的分裂过程

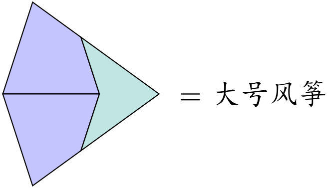


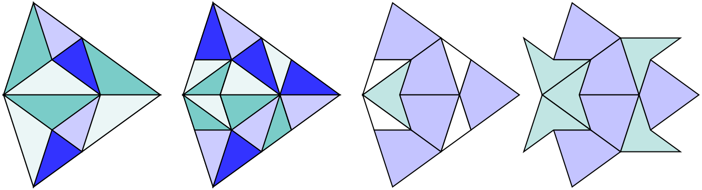
= 大号风筝



- 分裂之后还有一个大号风筝，你能找到么？

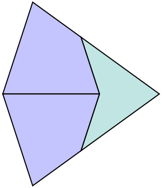
# 大号风筝的分裂过程

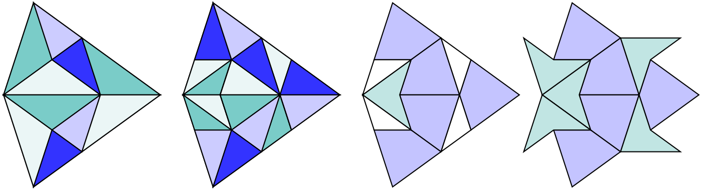


- 分裂之后还有一个大号风筝，你能找到么？

# 大号风筝的分裂过程

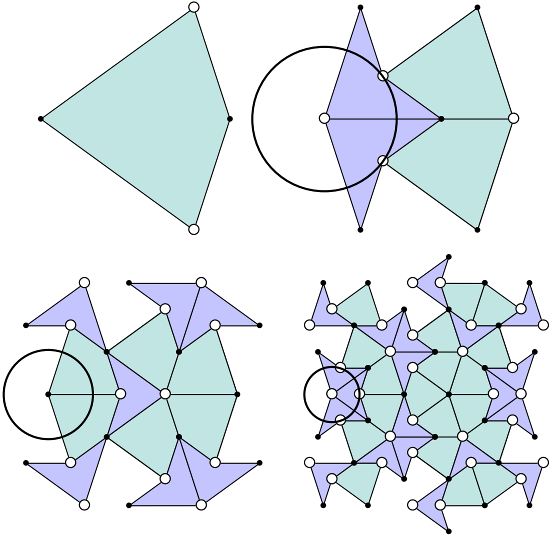


- 分裂之后还有一个大号风筝，你能找到么？

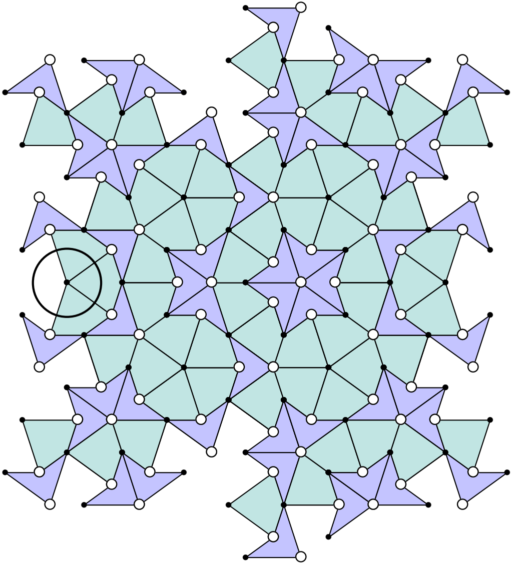
# 风筝$K$的1,2,3次分裂

# 风筝$K$的1,2,3次分裂



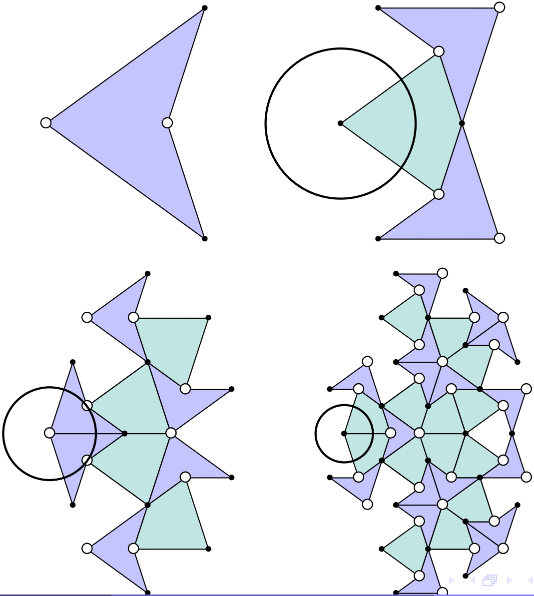
# 风筝$K$的4次分裂

# 风筝$K$的4次分裂



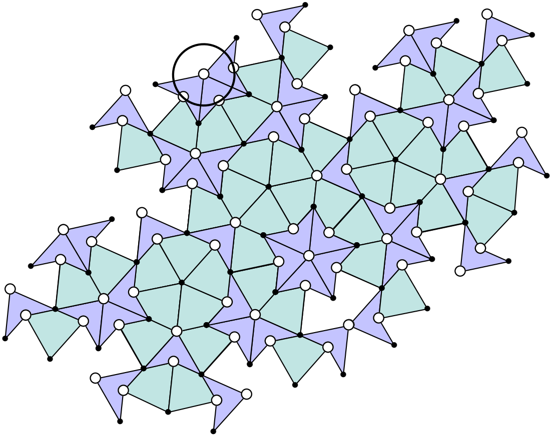
# 飞镖$D$的多次分裂

# 飞镖$D$的多次分裂

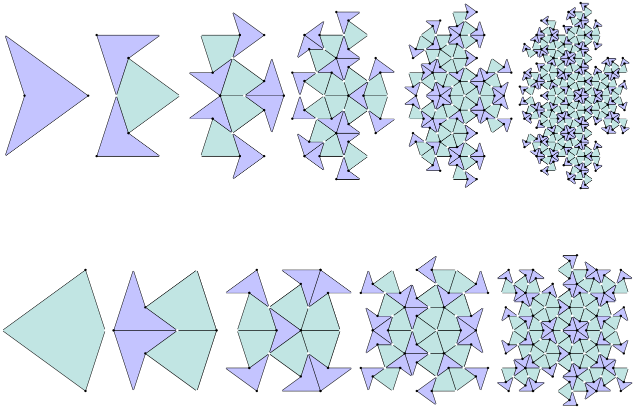


# 飞镖$D$的4次分裂

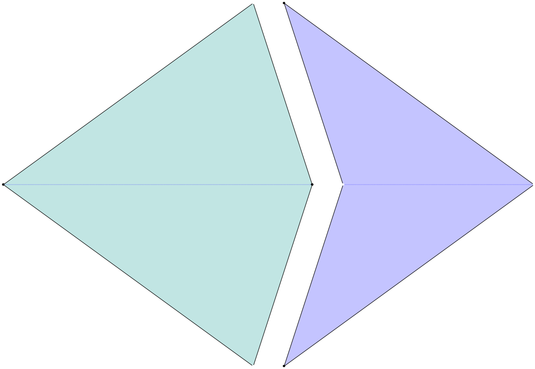
# 飞镖$D$的4次分裂



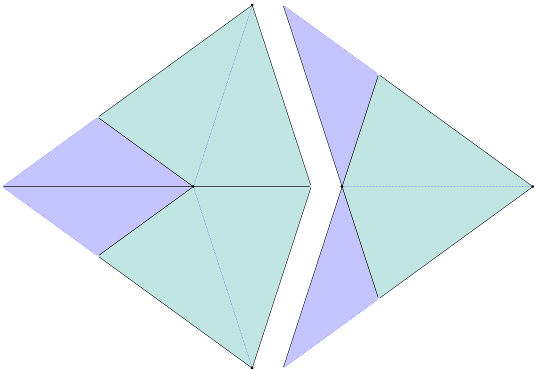
# 合体



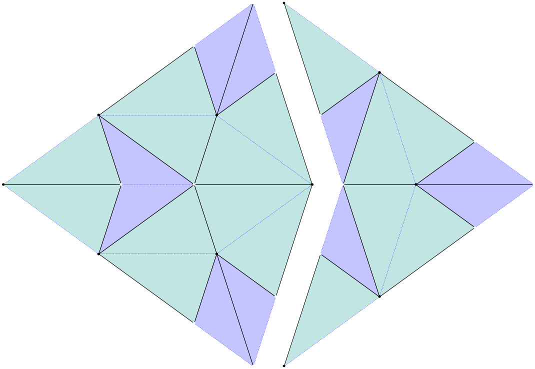
# 动画



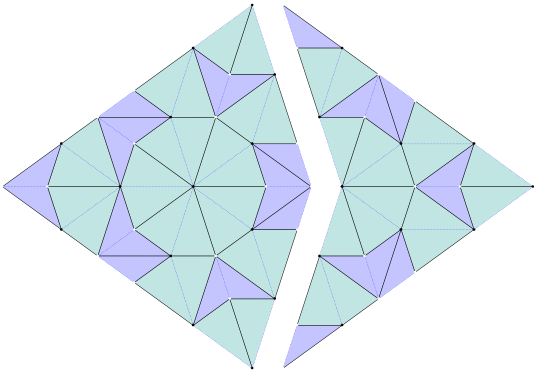
# 动画



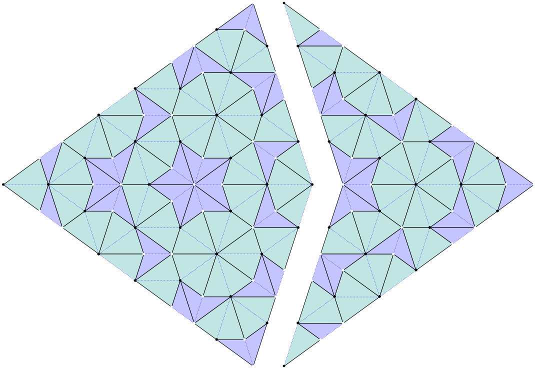
# 动画



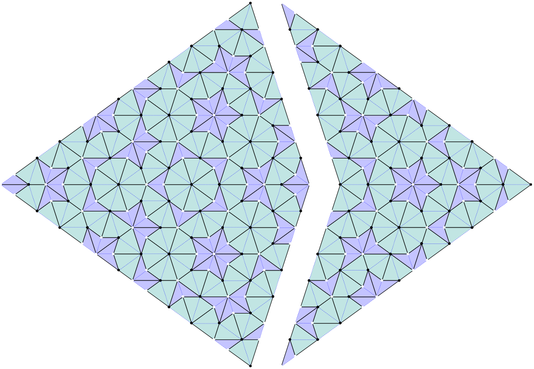
# 动画



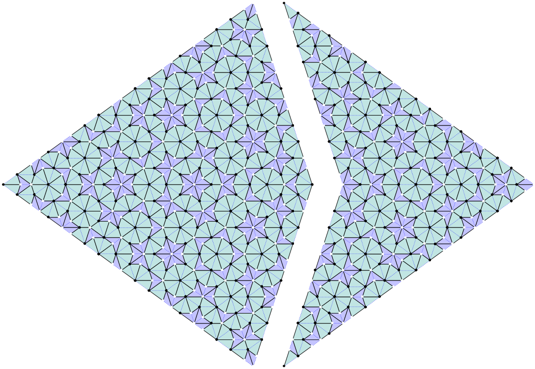
# 动画



# 动画



# 动画



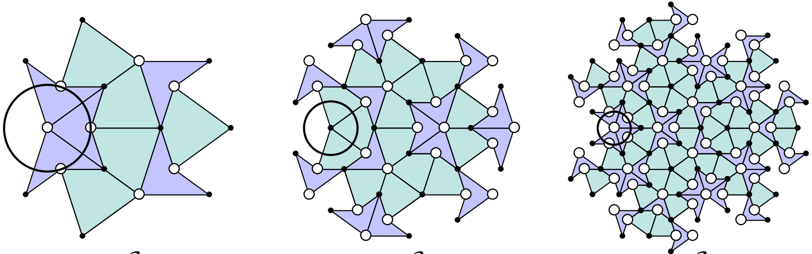
# 大号风筝的多次分裂



$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

据此，我们定义$\mathcal{C}_n$。这是一类非常重要的例子。

# 大号风筝的多次分裂

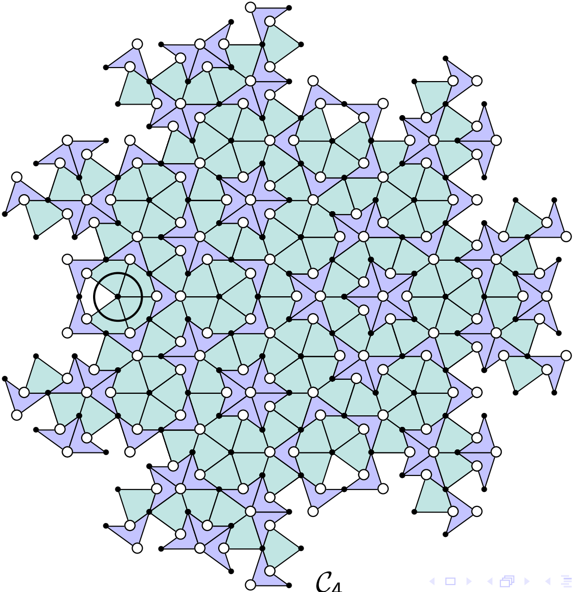


$\mathcal{C}_1$ $\mathcal{C}_2$ $\mathcal{C}_3$

据此，我们定义$\mathcal{C}_n$。这是一类非常重要的例子。

# 大号风车的4次分裂

# 大号风车的4次分裂



$\mathcal{C}_4$

# 大号风车有趣的性质1

**引理**

通过适当的平移，有：$\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_4 \subset \cdots$，$\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_5 \cdots$.

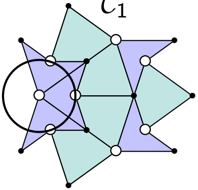
**引理**

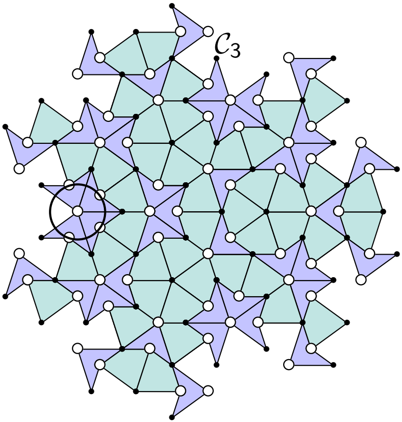
通过适当的平移，有： $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_4 \subset \cdots$， $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_5 \cdots$ .

# 大号风车有趣的性质1

## 引理

通过适当的平移，有： $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_4 \subset \cdots$， $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_3 \subset \mathcal{C}_5 \cdots$ .



# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下:

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质2

**引理**

对任意的$x \in E$，一定存在一个大号风筝 $C_0$覆盖了$x$。

前面的$C_4$提供了很好的例子。证明的要点如下：

- 给定$D$，它的凹进去的顶点上只能和两个$K$粘在一起构成一个大号风筝。。。
- 任意$K$的两条短边不可能都和另外的$K$相粘接。
- 给定$K$，它的某短边必须连到某个$D$的短边。。。

# 大号风车有趣的性质3

**引理**

任给Penrose镶嵌$\mathcal{T}$，任意$n$，任给定一块砖$T \in \mathcal{T}$，总落在某个（距同构于）$C_n$的子镶嵌$S \subset \mathcal{T}$。特别地，每个镶嵌都包含无限多个$C_n$。

证明的要点：

- 选取$T$内部的一个点$p$。假设$\mathcal{T}$是$\mathcal{T}'$通过$n$次分裂得到的，那么，在$\mathcal{T}'$中，存在一个大号风筝，它包含$p$（前面已经证明）。
- 这个大号风筝通过$n$次分裂就得到了包含$p$的一个$C_n$，$p$是内点，所以包含了$T$。

# 大号风车有趣的性质3

**引理**

任给Penrose镶嵌$\mathcal{T}$，任意$n$，任给定一块砖$T \in \mathcal{T}$，总落在某个（距同构于）$\mathcal{C}_n$的子镶嵌$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$。特别地，每个镶嵌都包含无限多个$\mathcal{C}_n$。

证明的要点：

- 选取$T$内部的一个点$p$。假设$\mathcal{T}$是$\mathcal{T}'$通过$n$次分裂得到的，那么，在$\mathcal{T}'$中，存在一个大号风筝，它包含$p$（前面已经证明）。
- 这个大号风筝通过$n$次分裂就得到了包含$p$的一个$\mathcal{C}_n$，$p$是内点，所以包含了$T$。

# 大号风车有趣的性质3

**引理**

任给Penrose镶嵌$\mathcal{T}$，任意$n$，任给定一块砖$T \in \mathcal{T}$，总落在某个（距同构于）$\mathcal{C}_n$的子镶嵌$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$。特别地，每个镶嵌都包含无限多个$\mathcal{C}_n$。

证明的要点：

- 选取$T$内部的一个点$p$。假设$\mathcal{T}$是$\mathcal{T}'$通过$n$次分裂得到的，那么，在$\mathcal{T}'$中，存在一个大号风筝，它包含$p$（前面已经证明）。
- 这个大号风筝通过$n$次分裂就得到了包含$p$的一个$\mathcal{C}_n$，$p$是内点，所以包含了$T$。

# 大号风车有趣的性质3

**引理**

任给Penrose镶嵌$\mathcal{T}$，任意$n$，任给定一块砖$T \in \mathcal{T}$，总落在某个（距同构于）$C_n$的子镶嵌$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$。特别地，每个镶嵌都包含无限多个$C_n$。

证明的要点：

- 选取$T$内部的一个点$p$。假设$\mathcal{T}$是$\mathcal{T}'$通过$n$次分裂得到的，那么，在$\mathcal{T}'$中，存在一个大号风筝，它包含$p$（前面已经证明）。
- 这个大号风筝通过$n$次分裂就得到了包含$p$的一个$C_n$，$p$是内点，所以包含了$T$。

# 大号风车有趣的性质3

**引理**

任给Penrose镶嵌$\mathcal{T}$，任意$n$，任给定一块砖$T \in \mathcal{T}$，总落在某个（距同构于）$\mathcal{C}_n$的子镶嵌$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$。特别地，每个镶嵌都包含无限多个$\mathcal{C}_n$。

证明的要点：

- 选取$T$内部的一个点$p$。假设$\mathcal{T}$是$\mathcal{T}'$通过$n$次分裂得到的，那么，在$\mathcal{T}'$中，存在一个大号风筝，它包含$p$（前面已经证明）。
- 这个大号风筝通过$n$次分裂就得到了包含$p$的一个$\mathcal{C}_n$，$p$是内点，所以包含了$T$。

# 对称型的镶嵌

五角星或者正十边形具有对称性：

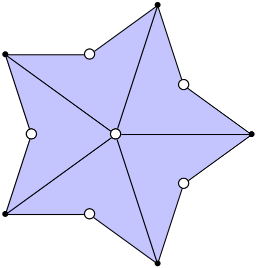


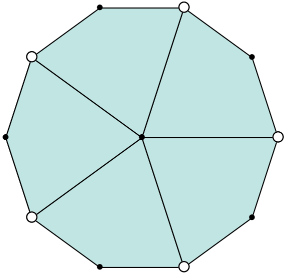


这些对称性在分裂下自然被保持。

# 对称型的镶嵌

五角星或者正十边形具有对称性：

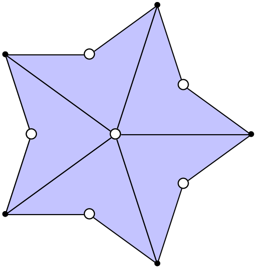


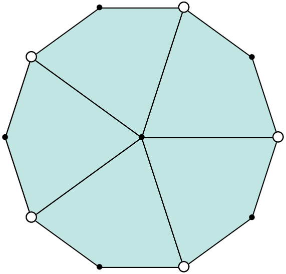


这些对称性在分裂下自然被保持。

# 对称型的镶嵌

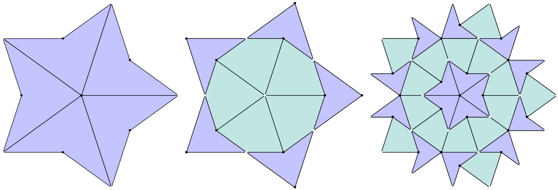
五角星或者正十边形具有对称性：

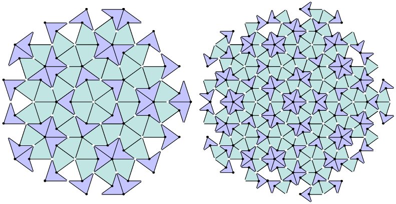




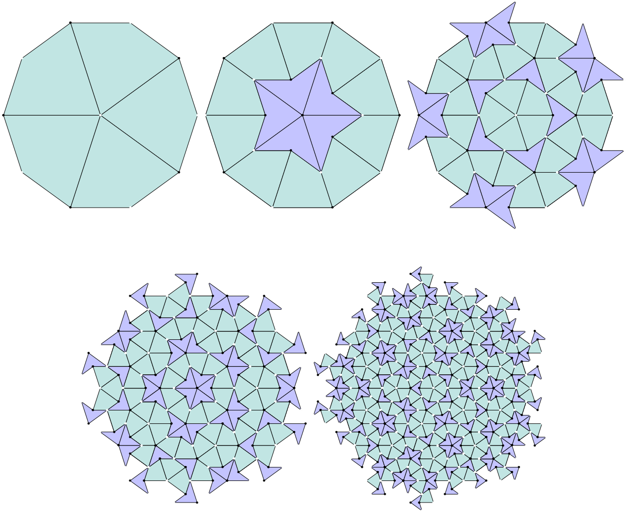
这些对称性在分裂下自然被保持。

# 五角星的分裂





# 正十边形的分裂



# Penrose镶嵌的构造

- 这几个例子均以一点为中心的，并给出了相互嵌套的不完备的镶嵌。据此，我们已经构造了Penrose镶嵌的存在性。
- 还可以利用$C_n$来构造Penrose镶嵌。
- 可以不构造具体例子而只用分裂映射来证Penrose镶嵌的存在性？

**作业**

证明，根据以上两个例子可以得到两个不同构的（通过平移和旋转）具有中心对称性的例子，而且这两个例子是仅有的两个具有中心对阵的*Penrose*镶嵌。

# Penrose镶嵌的构造

- 这几个例子均以一点为中心的，并给出了相互嵌套的不完备的镶嵌。据此，我们已经构造了Penrose镶嵌的存在性。
- 还可以利用$C_n$来构造Penrose镶嵌。
- 可以不构造具体例子而只用分裂映射来证Penrose镶嵌的存在性？

**作业**

证明，根据以上两个例子可以得到两个不同构的（通过平移和旋转）具有中心对称性的例子，而且这两个例子是仅有的两个具有中心对阵的*Penrose*镶嵌。

# Penrose镶嵌的构造

- 这几个例子均以一点为中心的，并给出了相互嵌套的不完备的镶嵌。据此，我们已经构造了Penrose镶嵌的存在性。
- 还可以利用$\mathcal{C}_n$来构造Penrose镶嵌。
- 可以不构造具体例子而只用分裂映射来证Penrose镶嵌的存在性？

**作业**

证明，根据以上两个例子可以得到两个不同构的（通过平移和旋转）具有中心对称性的例子，而且这两个例子是仅有的两个具有中心对阵的*Penrose*镶嵌。

# Penrose镶嵌的构造

- 这几个例子均以一点为中心的，并给出了相互嵌套的不完备的镶嵌。据此，我们已经构造了Penrose镶嵌的存在性。
- 还可以利用$C_n$来构造Penrose镶嵌。
- 可以不构造具体例子而只用分裂映射来证Penrose镶嵌的存在性？

**作业**

证明，根据以上两个例子可以得到两个不同构的（通过平移和旋转）具有中心对称性的例子，而且这两个例子是仅有的两个具有中心对阵的*Penrose*镶嵌。

# Penrose镶嵌的构造

- 这几个例子均以一点为中心的，并给出了相互嵌套的不完备的镶嵌。据此，我们已经构造了Penrose镶嵌的存在性。
- 还可以利用$C_n$来构造Penrose镶嵌。
- 可以不构造具体例子而只用分裂映射来证Penrose镶嵌的存在性？

**作业**

证明，根据以上两个例子可以得到两个不同构的（通过平移和旋转）具有中心对称性的例子, 而且这两个例子是仅有的两个具有中心对阵的*Penrose*镶嵌。

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证：假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T$—的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？
-

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证：假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T-$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？
-

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证；假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T_{-}$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证：假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T_-$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证：假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T_-$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证：假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T_-$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立?

# Penrose镶嵌的非周期性

**定理**

$\mathcal{T}$是样砖$\mathfrak{M}_1$给出的*Penrose*镶嵌，则不存在平移$\tau_v$，使得$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。

- 反证；假设$\tau_v(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$。
- 要点：熔合（分裂）保持平移$\tau_v$。
- 由于$\tau_v T_1, \cdots$及它们周围一圈的情况和$\tau_v T_1, \cdots$以及它周围一圈的情况完全一致，根据熔合的局部性，表明$\tau_v T_1, \cdots$必然熔合成一块砖，这块砖显然是$T_-$的平移。
- 将镶嵌进行很多次熔合，使得$v$相对于这个很大的镶嵌特别小，$\tau_v$不会保持镶嵌，除非$v = 0$。
- 这个论证对周期的情形哪里不成立？
- 周期的时候可能平移后的砖会熔合到一起，使得周期变大

# Penrose镶嵌的非局部性

**定理**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在无限多不同的子镶嵌$\mathcal{S}'_k$，$k = 1, 2, \cdots$，使得$\mathcal{S}$ 和每个$\mathcal{S}'_k$都等距同构。

这个定理表明：你永远没法通过一个局部来判断两个Penrose镶嵌是否一样，也没法判断自己处于一个镶嵌的哪个位置；相反的，一个周期的镶嵌的一小部分就可以确定整体

# Penrose镶嵌的非局部性

**定理**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在无限多不同的子镶嵌$\mathcal{S}'_k$，$k = 1, 2, \cdots$，使得$\mathcal{S}$ 和每个$\mathcal{S}'_k$都等距同构。

这个定理表明：你永远没法通过一个局部来判断两个Penrose镶嵌是否一样，也没法判断自己处于一个镶嵌的哪个位置；相反的，一个周期的镶嵌的一小部分就可以确定整体

**定理**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在无限多不同的子镶嵌$\mathcal{S}'_k$，$k = 1, 2, \cdots$，使得$\mathcal{S}$ 和每个$\mathcal{S}'_k$都等距同构。

这个定理表明：你永远没法通过一个局部来判断两个Penrose镶嵌是否一样，也没法判断自己处于一个镶嵌的哪个位置； 相反的，一个周期的镶嵌的一小部分就可以确定整体

# Penrose镶嵌的非局部性

**定理**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在无限多不同的子镶嵌$\mathcal{S}'_k$，$k = 1, 2, \cdots$，使得$\mathcal{S}$ 和每个$\mathcal{S}'_k$都等距同构。

这个定理表明：你永远没法通过一个局部来判断两个Penrose镶嵌是否一样，也没法判断自己处于一个镶嵌的哪个位置； 相反的，一个周期的镶嵌的一小部分就可以确定整体

# 非局部性的证明：几个特例

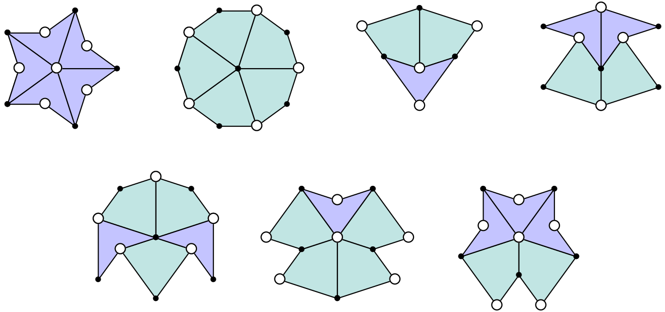
- 一个顶点的邻域只能是下面七种情况：



- 这些构形在$C_4$都出现了（从而在$T'$中出现无限次）。

# 非局部性的证明：几个特例

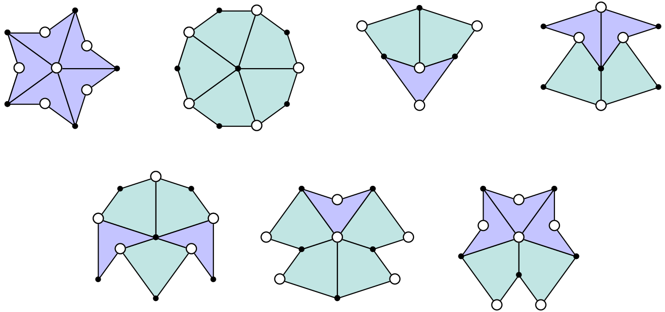
- 一个顶点的邻域只能是下面七种情况：



- 这些构形在$C_4$都出现了（从而在$T'$中出现无限次）。

# 非局部性的证明：几个特例

- 一个顶点的邻域只能是下面七种情况：



- 这些构形在$C_4$都出现了（从而在$T'$中出现无限次）。

# 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|S|$相对于砖来说很小。
- $|S|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$C_4$，做若干次分裂，这说明$S$一定出现在某个$C_n$中（$n$较大），然而$C_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$T$和$T'$（可相同），任给$T$的有限子镶嵌$S$，在$T'$中存在子镶嵌$S'$与$S$等距同构且距离不超过$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \times d(S)$。

# 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|S|$相对于砖来说很小。
- $|S|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$C_4$，做若干次分裂，这说明$S$一定出现在某个$C_n$中（$n$较大），然而$C_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$T$和$T'$（可相同），任给$T$的有限子镶嵌$S$，在$T'$中存在子镶嵌$S'$与$S$等距同构且 距离不超过$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \times d(S)$。

# 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|S|$相对于砖来说很小。
- $|S|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$C_4$，做若干次分裂，这说明$S$一定出现在某个$C_n$中（$n$较大），然而$C_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$T$和$T'$（可相同），任给$T$的有限子镶嵌$S$，在$T'$中存在子镶嵌$S'$与$S$等距同构且 距离不超过$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 \times d(S)$。

# 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|\mathcal{S}|$相对于砖来说很小。
- $|\mathcal{S}|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$C_4$，做若干次分裂，这说明$\mathcal{S}$一定出现在某个$C_n$中（$n$较大），然而$C_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在子镶嵌$\mathcal{S}'$与$\mathcal{S}$等距同构且 距离不超过$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \times d(\mathcal{S})$。

# 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|\mathcal{S}|$相对于砖来说很小。
- $|\mathcal{S}|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$\mathcal{C}_4$，做若干次分裂，这说明$\mathcal{S}$一定出现在某个$\mathcal{C}_n$中（$n$较大），然而$\mathcal{C}_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在子镶嵌$\mathcal{S}'$与$\mathcal{S}$等距同构且 距离不超过$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \times d(\mathcal{S})$。

## 一般非局部的证明

- 通过做很多次熔合，会得到很大的砖，所以可假设$|\mathcal{S}|$相对于砖来说很小。
- $|\mathcal{S}|$落在上述的七种开邻域中（为什么）？
- 七邻域都出现在$\mathcal{C}_4$，做若干次分裂，这说明$\mathcal{S}$一定出现在某个$\mathcal{C}_n$中（$n$较大），然而$\mathcal{C}_n$出现了无限多次。

**作业**

任给两个由$\mathfrak{M}_1$构成的镶嵌$\mathcal{T}$和$\mathcal{T}'$（可相同），任给$\mathcal{T}$的有限子镶嵌$\mathcal{S}$，在$\mathcal{T}'$中存在子镶嵌$\mathcal{S}'$与$\mathcal{S}$等距同构且 距离不超过$(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^5 \times d(\mathcal{S})$。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$S$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(S)$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(S))$次熔合，使得$|S|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$S$一定落在$C_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$C_{n+4}$中选一个长度由$d(S)$决定的区域（随便一个），$S$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$S$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$S$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(S)$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(S))$次熔合，使得$|S|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$S$一定落在$C_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$C_{n+4}$中选一个长度由$d(S)$决定的区域（随便一个），$S$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$S$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$\mathcal{S}$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(\mathcal{S})$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(\mathcal{S}))$次熔合，使得$|\mathcal{S}|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$\mathcal{S}$一定落在$C_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$C_{n+4}$中选一个长度由$d(\mathcal{S})$决定的区域（随便一个），$\mathcal{S}$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$\mathcal{S}$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$\mathcal{S}$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(\mathcal{S})$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(\mathcal{S}))$次熔合，使得$|\mathcal{S}|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$\mathcal{S}$一定落在$C_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$C_{n+4}$中选一个长度由$d(\mathcal{S})$决定的区域（随便一个），$\mathcal{S}$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$\mathcal{S}$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$\mathcal{S}$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(\mathcal{S})$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(\mathcal{S}))$次熔合，使得$|\mathcal{S}|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$\mathcal{S}$一定落在$\mathcal{C}_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$\mathcal{C}_{n+4}$中选一个长度由$d(\mathcal{S})$决定的区域（随便一个），$\mathcal{S}$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$\mathcal{S}$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$\mathcal{S}$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(\mathcal{S})$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(\mathcal{S}))$次熔合，使得$|\mathcal{S}|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$\mathcal{S}$一定落在$\mathcal{C}_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$\mathcal{C}_{n+4}$中选一个长度由$d(\mathcal{S})$决定的区域（随便一个），$\mathcal{S}$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$\mathcal{S}$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 应用：判定法

**问题**

假定有不完全镶嵌$\mathcal{S}$，想判断它是否能够扩张到整个平面上。

- 直径是$d(\mathcal{S})$，每块砖的大小大约是1。
- 如果能做到，那么先做$n \approx \log(d(\mathcal{S}))$次熔合，使得$|\mathcal{S}|$落在上面七个基本邻域之中。上面的证明说明$\mathcal{S}$一定落在$\mathcal{C}_{n+4}$中。
- 再根据作业中关于距离的估计，我们就可以在$\mathcal{C}_{n+4}$中选一个长度由$d(\mathcal{S})$决定的区域（随便一个），$\mathcal{S}$一定要在这里面。
- 这就给出了如何用计算机检验$\mathcal{S}$能否延拓成完全镶嵌的算法。

# 风筝$K$和飞镖$D$的个数的计算

用$B(R)$表示中心在原点，半径为$R$的圆盘。

**定理**

任给Penrose镶嵌，我们有如下的极限：

$$\lim_{R\to\infty}\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 通过观察，我们也发现，一个相对比较大的区域里面的风筝要比飞镖多。

**推论**

不能找到两个方向不同的平移，它们都使得该镶嵌不变。

# 风筝$K$和飞镖$D$的个数的计算

用$B(R)$表示中心在原点，半径为$R$的圆盘。

**定理**

任给Penrose镶嵌，我们有如下的极限：

$$\lim_{R\to\infty}\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 通过观察，我们也发现，一个相对比较大的区域里面的风筝要比飞镖多。

**推论**

不能找到两个方向不同的平移，它们都使得该镶嵌不变。

用$B(R)$表示中心在原点，半径为$R$的圆盘。

**定理**

任给*Penrose*镶嵌，我们有如下的极限：

$$\lim_{R\to\infty}\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 通过观察，我们也发现，一个相对比较大的区域里面的风筝要比飞镖多。

**推论**

不能找到两个方向不同的平移，它们都使得该镶嵌不变。

# 风筝$K$和飞镖$D$的个数的计算

用$B(R)$表示中心在原点，半径为$R$的圆盘。

**定理**

任给Penrose镶嵌，我们有如下的极限：

$$\lim_{R\to\infty}\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

- 通过观察，我们也发现，一个相对比较大的区域里面的风筝要比飞镖多。

**推论**

不能找到两个方向不同的平移，它们都使得该镶嵌不变。

# 证明

从$K$和$D$的镶嵌出发，可以得到$A$和$B$型的三角形样砖的镶嵌。形式上，我们知道$K=2A$，$D=2B$。当$R$很大的时候，我们直观上应该有

$$\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{B(R)\text{的}A\text{个数}}{B(R)\text{的}B\text{个数}}.$$

所以，只要对$A$和$B$的镶嵌进行证明就好。

由于在$B(R)$的边界附近的$A$和$B$的个数可能会不同，所以上述等式不完全正确。但我们会说明

$$A/B\text{的个数}\sim O(R^2),\quad \text{与}\partial B(R)\text{交的}A/B\text{的个数}\sim O(R),$$

所以在取极限的意义下，上面仍然成立。

# 证明

从$K$和$D$的镶嵌出发，可以得到$A$和$B$型的三角形样砖的镶嵌。形式上，我们知道$K=2A$，$D=2B$。当$R$很大的时候，我们直观上应该有

$$\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}}=\frac{B(R)\text{的}A\text{个数}}{B(R)\text{的}B\text{个数}}.$$

所以，只要对$A$和$B$的镶嵌进行证明就好。

由于在$B(R)$的边界附近的$A$和$B$的个数可能会不同，所以上述等式不完全正确。但我们会说明

$$A/B\text{的个数}\sim O(R^2),\quad \text{与}\partial B(R)\text{交的}A/B\text{的个数}\sim O(R),$$

所以在取极限的意义下，上面仍然成立。

# 估计ish

与$\partial B(R)$交的$A/B$的个数$\sim O(R)$的证明：
考虑$\partial B(R)$的管状领域（一个圆环，宽为$A$，$B$的直径的两倍）的面积。

$A/B$的个数$\sim O(R^2)$的证明：考虑面积，至少一个的个数$\sim O(R^2)$。另一个的个数也至少是等量级的，因为每个K或者D边上（管状领域！）都有D或者K。。。

# 估计ish

与$\partial B(R)$交的$A/B$的个数$\sim O(R)$的证明：
考虑$\partial B(R)$的管状领域（一个圆环，宽为$A$，$B$的直径的两倍）的面积。

$A/B$的个数$\sim O(R^2)$的证明：考虑面积，至少一个的个数$\sim O(R^2)$。另一个的个数也至少是等量级的，因为每个K或者D边上（管状领域！）都有D或者K。。。

# 估计ish

与$\partial B(R)$交的$A/B$的个数$\sim O(R)$的证明：
考虑$\partial B(R)$的管状领域（一个圆环，宽为$A$，$B$的直径的两倍）的面积。

$A/B$的个数$\sim O(R^2)$的证明：考虑面积，至少一个的个数$\sim O(R^2)$。
另一个的个数也至少是等量级的，因为每个K或者D边上（管状领域！）都有D或者K。。。

# 估计ish

与$\partial B(R)$交的$A/B$的个数$\sim O(R)$的证明：
考虑$\partial B(R)$的管状领域（一个圆环，宽为$A$，$B$的直径的两倍）的面积。

$A/B$的个数$\sim O(R^2)$的证明：考虑面积，至少一个的个数$\sim O(R^2)$。
另一个的个数也至少是等量级的，因为每个K或者D边上（管状领域！）都有D或者K。。。

# 关键的计算

- 在构造熔合的过程中，$A$和$B$先拼成一个$\phi \cdot B$；然后$A$和$\phi \cdot B$拼成一个$\phi \cdot A$。最终，得到$\{\phi \cdot A, \phi \cdot B\}$型样砖的镶嵌。
- 通过一次$(A, B) \longrightarrow (\phi \cdot A, \phi \cdot B)$之后，有

$$\phi \cdot A = 2A + B, \qquad \phi \cdot B = A + B,$$

- $n$次操作之后，我们得到

$$\phi^n \cdot A = F_{2n+1}A + F_{2n}B, \qquad \phi^n \cdot B = F_{2n}A + F_{2n-1}B,$$

其中，$\{F_n\}_{n \geqslant 1} = \{1, 1, 2, 3, 5, \cdots\}$是Fibonacci数列。

# 关键的计算

- 在构造熔合的过程中，$A$和$B$先拼成一个$\phi\cdot B$；然后$A$和$\phi\cdot B$拼成一个$\phi\cdot A$。最终，得到$\{\phi\cdot A,\phi\cdot B\}$型样砖的镶嵌。
- 通过一次$(A,B)\longrightarrow(\phi\cdot A,\phi\cdot B)$之后，有
$$\phi\cdot A=2A+B,\qquad \phi\cdot B=A+B,$$
- $n$次操作之后，我们得到
$$\phi^n\cdot A=F_{2n+1}A+F_{2n}B,\qquad \phi^n\cdot B=F_{2n}A+F_{2n-1}B,$$
其中，$\{F_n\}_{n\geqslant 1}=\{1,1,2,3,5,\cdots\}$是Fibonacci数列。

# 关键的计算

- 在构造熔合的过程中，$A$和$B$先拼成一个$\phi \cdot B$ ；然后$A$和$\phi \cdot B$拼成一个$\phi \cdot A$。最终，得到$\{\phi \cdot A, \phi \cdot B\}$型样砖的镶嵌。
- 通过一次$(A, B) \longrightarrow (\phi \cdot A, \phi \cdot B)$之后，有

$$\phi \cdot A = 2A + B, \qquad \phi \cdot B = A + B,$$

- $n$次操作之后，我们得到

$$\phi^n \cdot A = F_{2n+1}A + F_{2n}B, \qquad \phi^n \cdot B = F_{2n}A + F_{2n-1}B,$$

其中，$\{F_n\}_{n\geqslant 1} = \{1, 1, 2, 3, 5, \cdots\}$是Fibonacci数列。

# 关键的计算

- 在构造熔合的过程中，$A$和$B$先拼成一个$\phi \cdot B$；然后$A$和$\phi \cdot B$拼成一个$\phi \cdot A$。最终，得到$\{\phi \cdot A, \phi \cdot B\}$型样砖的镶嵌。
- 通过一次$(A, B) \longrightarrow (\phi \cdot A, \phi \cdot B)$之后，有

$$\phi \cdot A = 2A + B, \qquad \phi \cdot B = A + B,$$

- $n$次操作之后，我们得到

$$\phi^n \cdot A = F_{2n+1}A + F_{2n}B, \qquad \phi^n \cdot B = F_{2n}A + F_{2n-1}B,$$

其中，$\{F_n\}_{n\geqslant 1} = \{1, 1, 2, 3, 5, \cdots\}$是Fibonacci数列。

# 完结撒花

现在取一个$R \gg 1$，通过$n = n(R)$次熔合之后，假设这里面有$x$个$\phi^n \cdot A$和$y$个$\phi^n \cdot B$砖块。 则熔合前中$A$的个数有$xF_{2n+1} + yF_{2n}$个，$B$的个数有$xF_{2n} + yF_{2n-1}$。从而，

$$\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}} = \frac{xF_{2n+1} + yF_{2n} + O(R)}{xF_{2n} + yF_{2n-1} + O(R)} = \frac{xF_{2n+1} + yF_{2n}}{xF_{2n} + yF_{2n-1}}.$$

取极限：

$$\lim_{R\to\infty} \frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} + y}{x + y\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}} = \frac{x\phi + y}{x + y\phi^{-1}} = \phi.$$

实际上，$x$和$y$会发生变化（依赖于$R$）。请大家想清楚为什么然并紧。

现在取一个$R \gg 1$，通过$n = n(R)$次熔合之后，假设这里面有$x$个$\phi^n \cdot A$和$y$个$\phi^n \cdot B$砖块。 则熔合前中$A$的个数有$xF_{2n+1} + yF_{2n}$个，$B$的个数有$xF_{2n} + yF_{2n-1}$。从而，

$$\frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}} = \frac{xF_{2n+1} + yF_{2n} + O(R)}{xF_{2n} + yF_{2n-1} + O(R)} = \frac{xF_{2n+1} + yF_{2n}}{xF_{2n} + yF_{2n-1}}.$$

取极限：

$$\lim_{R\to\infty} \frac{B(R)\text{的风筝个数}}{B(R)\text{的飞镖个数}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} + y}{x + y\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}} = \frac{x\phi + y}{x + y\phi^{-1}} = \phi.$$

实际上，$x$和$y$会发生变化（依赖于$R$）。请大家想清楚为什么么然并紧。

感谢大家捧场！

（故事并没有结束！

分析理论完成

我们来看代数理论！）

感谢大家捧场！

（故事并没有结束！

分析理论完成

我们来看代数理论！）

感谢大家捧场！
（故事并没有结束！
分析理论完成
我们来看代数理论！）