

¿Cómo se construye una función de hash?

Los pasos de la construcción:

- Se define una función de hash para mensajes de largo fijo, la cual es llamada **función de compresión**
- Se define un método que permite utilizar de manera **iterativa** la función de compresión para construir una función de hash para mensajes de largo arbitrario

Una función de compresión

Queremos construir una función de hash de largo fijo:

$$h : \{0, 1\}^{2n} \rightarrow \{0, 1\}^n$$

Para construir esta función suponemos que tenemos un esquema criptográfico (Gen, Enc, Dec) sobre los espacios $\mathcal{M} = \mathcal{K} = \mathcal{C} = \{0, 1\}^n$

- Tenemos que $Enc : \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n$

Un primer intento

Dados $u, v \in \{0, 1\}^n$, defina $h(u||v) = \text{Enc}(u, v)$

- Recuerde que $u||v$ es la concatenación de u con v

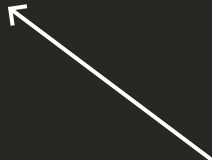
Este es nuestro primer intento para definir una función de hash $h : \{0, 1\}^{2n} \rightarrow \{0, 1\}^n$

- Para ver si esta es una buena alternativa, vamos a considerar primero el caso $n = 128$ y AES

AES en la práctica

```
1 from Crypto.Cipher import AES
2
3 if __name__ == "__main__":
4     k = b'Fgh64%djfg/fydhj'
5     alg = AES.new(k, AES.MODE_ECB)
6
7     m = b'Texto de prueba.'
8     c = alg.encrypt(m)
9     r = alg.decrypt(c)
10
11     print(m)
12     print(c)
13     print(r)
```

Electronic
codebook (ECB)



b'Texto de prueba.'

b'\x0fk\x8ec+\xaa\xeb\xcbE\x04\xf5\xf9\xdf(\xa5\x11'

b'Texto de prueba.'

Nuestra primera función de compresión

```
1 def compresion(m: str) -> str:
2     """
3     Argumentos :
4         m: str - mensaje
5     Retorna :
6         str: hash del mensaje usando AES
7     """
8
9     l = m[0:16]
10    r = m[16:32]
11
12    h = AES.new(l, AES.MODE_ECB)
13    return h.encrypt(r)
```

Los resultados del intento

```
1  if __name__ == "__main__":  
2  
3      m1 = b'Texto de prueba para compresion.'  
4      m2 = b'TeXto de prueba para compresion.'  
5      m3 = b'Texto de prueba para compresion?'  
6  
7      h1 = compresion(m1)  
8      h2 = compresion(m2)  
9      h3 = compresion(m3)  
10  
11     print(h1.hex())  
12     print(h2.hex())  
13     print(h3.hex())
```

a4eb875d9a9e589d7dfaec66bb710441

98b1b377d5915e6a80a4db533fa416c7

bbb4aafcb004f5a4a5ede95da4f84395

Pero tenemos un problema

Existe un algoritmo eficiente, en términos del parámetro de seguridad 1^n , para construir preimagenes

- No solo para el caso de AES, sino que también para cualquier esquema criptográfico (Gen, Enc, Dec) sobre los espacios $\mathcal{M} = \mathcal{K} = \mathcal{C} = \{0, 1\}^n$

La relación entre Enc y Dec

Fije una llave $k \in \{0, 1\}^n$, y defina las siguientes funciones de $\{0, 1\}^n$ en $\{0, 1\}^n$:

$$f(x) = Enc(k, x)$$

$$g(x) = Dec(k, x)$$

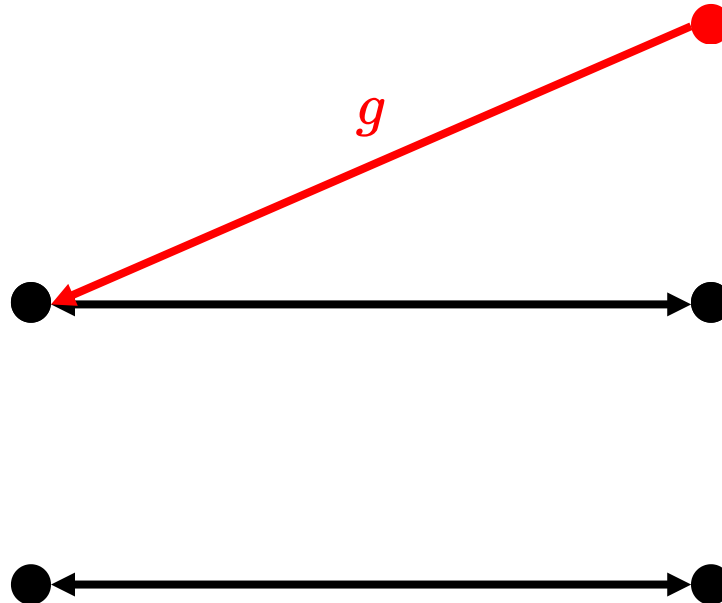
Tenemos que:

$$\forall x \in \{0, 1\}^n : g(f(x)) = x$$

¿También tenemos que $f(g(x)) = x$?

Cuidado con la respuesta

$$g(f(x)) = x$$



WRONG
 $f(g(x)) = x$

Pero $\mathcal{M} = \mathcal{C} = \{0, 1\}^n$

Tenemos que:

$$\forall x \in \{0, 1\}^n : f(g(x)) = x$$

Concluimos que:

$$\forall k \in \mathcal{K} \forall m \in \mathcal{M} : \text{Enc}(k, \text{Dec}(k, m)) = m$$

Ahora podemos demostrar que el primer intento no es resistente a preimagen

Dados $u, v \in \{0, 1\}^n$, sea $x = h(u\|v) = \text{Enc}(u, v)$

Considere $u' \in \{0, 1\}^n$ arbitrario, y defina $v' = \text{Dec}(u', x)$

Tenemos que: $h(u'\|v') = \text{Enc}(u', v') = \text{Enc}(u', \text{Dec}(u', x)) = x$

En código ...

```
1  if __name__ == "__main__":
2      m = b'Texto de prueba para compresion.'
3      h = compresion(m)
4
5      k = b'1111111111111111'
6      alg = AES.new(k, AES.MODE_ECB)
7      c = alg.decrypt(h)
8      p = k + c
9
10     print(m.hex())
11     print(h.hex())
12     print(p.hex())
13     print(compresion(p).hex())
```

546578746f20646520707275656261207061726120636f6d70726573696f6e2e

a4eb875d9a9e589d7dfaec66bb710441

3131313131313131313131313131313117894bb10a97cd21175266d33b1c25b4

a4eb875d9a9e589d7dfaec66bb710441

Un segundo intento: la construcción de Davies–Meyer

$$h(u||v) = \textit{Enc}(u, v) \oplus v$$

Recuerde que el símbolo \oplus representa al XOR, o suma en módulo 2, dado que estamos operando con bits

La construcción de Davies-Meyer: formalización

Suponemos dado un esquema criptográfico
(Gen, Enc, Dec) sobre $\mathcal{M} = \mathcal{K} = \mathcal{C} = \{0, 1\}^*$

Definimos una función de hash (Gen', h') de largo fijo:

- $Gen'(1^n) = n$ para un parámetro de seguridad 1^n
- $(h')^n : \{0, 1\}^{2n} \rightarrow \{0, 1\}^n$ tal que para cada $u, v \in \{0, 1\}^n$
:

$$(h')^n(u||v) = Enc(u, v) \oplus v$$

La propiedad fundamental de la construcción de Davies–Meyer

Si (Gen, Enc, Dec) es un esquema criptográfico *ideal*,
entonces (Gen', h') es resistente a colisiones

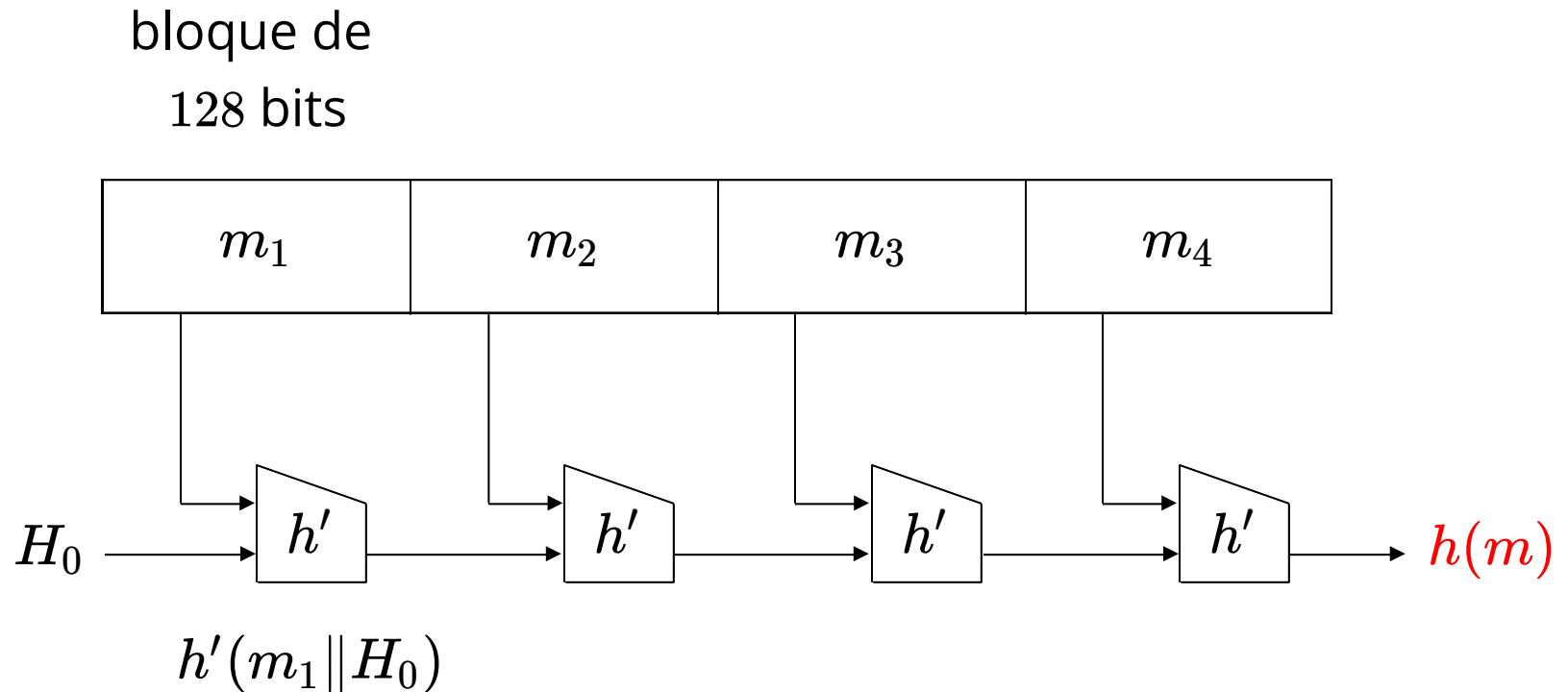
(Gen', h') es una buena alternativa para una función
de compresión

La extensión a un largo arbitrario

Suponemos que tenemos una función de compresión $h' : \{0, 1\}^{256} \rightarrow \{0, 1\}^{128}$

m

La extensión a un largo arbitrario



¿Cuál es la intuición detrás de esta idea?

Queremos demostrar que si h' es resistente a colisiones y no se conoce una preimagen de H_0 , entonces h es resistente a colisiones

Piense en la idea de la demostración solo considerando mensajes cuyo largo es divisible por 128

- Y considere primero el caso donde los mensajes en una colisión tienen el mismo largo

¿Cómo podemos estar seguros que nadie conoce una preimagen de H_0 ?

¿Podríamos pedir que H_0 sea un número *sacado al azar*?

Nos pueden engañar: el adversario saca un mensaje $m_0 \in \{0, 1\}^{256}$ al azar y nos dice que $H_0 = h'(m_0)$

- H_0 se ve como un número sacado al azar, pero el adversario conoce una preimagen m_0

¿Cómo podemos estar
seguros que nadie conoce
una preimagen de H_0 ?

Lo que necesitamos es un *nothing-up-my-sleeve number*

¿Cómo podemos estar seguros que nadie conoce una preimagen de H_0 ?

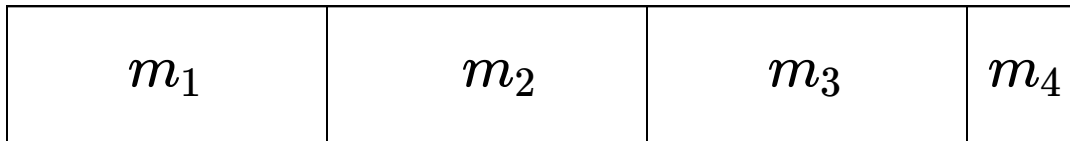
Lo que necesitamos es un *nothing-up-my-sleeve number*

Por ejemplo: considere los primeros 128 bits de la representación de π en binario

- ¿Cree que alguien conoce la preimagen de este valor de H_0 ?

Aún por responder: ¿Qué hacemos si el largo de m no es divisible por 128?

Tenemos que hacer *padding*



Aún por responder: ¿Qué hacemos si el largo de m no es divisible por 128?

Tenemos que hacer *padding*

m_1	m_2	m_3	m_4 00...0
-------	-------	-------	--------------

Aunque esta no es una buena forma de hacer padding

- Es fácil encontrar colisiones: $h(m) = h(m0)$ si $|m|$ no es divisible por 128

¿Qué debe cumplir una buena función de padding?

Considere una función $Pad(\cdot)$ para bloques de largo n

- En el ejemplo anterior, $n = 128$

Dado un mensaje $m \in \{0, 1\}^*$, se debe tener que $|Pad(m)| \geq n$ y $|Pad(m)|$ es divisible por n

Padding: los axiomas fundamentales

- m es un prefijo de $Pad(m)$
- si $|m_1| = |m_2|$, entonces $|Pad(m_1)| = |Pad(m_2)|$
- si $|m_1| \neq |m_2|$, entonces el último bloque de $Pad(m_1)$ es distinto del último bloque de $Pad(m_2)$

Nota: Pad es una función inyectiva si satisface los axiomas fundamentales

Suponga que $m_1 \neq m_2$:

- Si $|m_1| \neq |m_2|$, entonces $Pad(m_1) \neq Pad(m_2)$ ya que el último bloque de $Pad(m_1)$ es distinto del último bloque de $Pad(m_2)$
- Si $|m_1| = |m_2|$, entonces $Pad(m_1) \neq Pad(m_2)$ ya que m_1 es prefijo de $Pad(m_1)$ y m_2 es prefijo de $Pad(m_2)$

Poniendo todo junto: la construcción de Merkle-Damgård

Suponga dados:

- La función de compresión (Gen', h') de Davies-Meyer
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, una función de padding Pad_n que considera bloques con n elementos y satisface los axiomas fundamentales

Vamos a definir una función de hash (Gen, h) para mensajes de largo arbitrario

La construcción de Merkle-Damgård

Considere un parámetro de seguridad 1^n

Tenemos que $Gen(1^n) = s$, y

$$h^s : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^n$$

El valor del vector de inicialización H_0 está contenido en s

- s puede ser definido como (n, H_0)

La construcción de Merkle–Damgård

Dado $m \in \{0, 1\}^*$, calculamos $h^s(m)$ de la siguiente forma:

1. Suponga que $\text{Pad}_n(m) = m_1 m_2 \cdots m_\ell$, donde el largo de cada bloque m_i es n
2. Para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$:

$$H_i := (h')^n(m_i \| H_{i-1})$$

3. $h^s(m) := H_\ell$

La construcción es resistente a colisiones

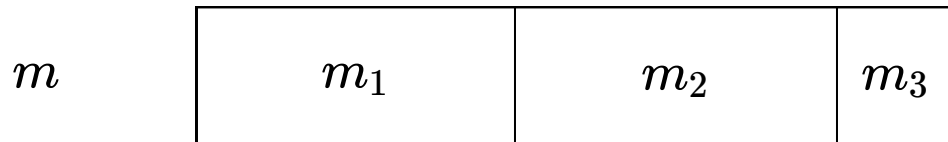
Demuestre que (Gen, h) es resistente a colisiones, dado que (Gen', h') es resistente a colisiones y cada función de padding Pad_n satisface los axiomas fundamentales

Algunos comentarios sobre la construcción

- Podemos reemplazar la construcción de Davies-Meyer por cualquier función de compresión resistente a colisiones
- Podemos considerar funciones de compresión de la forma $h' : \{0, 1\}^{p(n)} \rightarrow \{0, 1\}^n$ con $p(n)$ un polinomio tal que $p(n) > n$

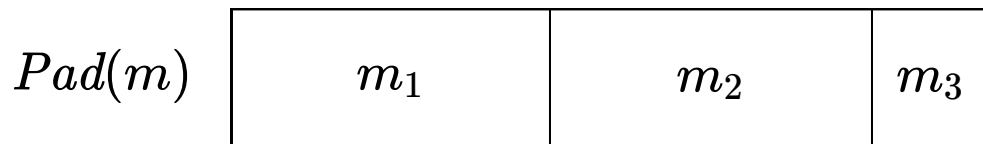
Una pregunta pendiente: ¿qué función de padding utilizamos?

Consideramos bloques de largo n



Una pregunta pendiente: ¿qué función de padding utilizamos?

Consideramos bloques de largo n



Una pregunta pendiente: ¿qué función de padding utilizamos?

Consideramos bloques de largo n

$Pad(m)$	m_1	m_2	$m_3 \ 10 \dots 0$
----------	-------	-------	--------------------

Una pregunta pendiente: ¿qué función de padding utilizamos?

Consideramos bloques de largo n

$Pad(m)$	m_1	m_2	$m_3 \ 10 \dots 0$	$ m \bmod 2^n$
----------	-------	-------	--------------------	-----------------

¿Cuáles axiomas satisface esta función de padding?

Satisface los dos primeros axiomas fundamentales, pero pueden existir mensajes m_1 y m_2 tales que $|m_1| \neq |m_2|$ y los últimos bloques de m_1 y m_2 son iguales

Se debe tener que: $|m_1| \equiv |m_2| \pmod{2^n}$

- Si $|m_1| < |m_2|$, entonces $|m_2| > 2^n$

¿Cuáles axiomas satisface esta función de padding?

Si $n = 128$, entonces $|m_2| > 2^{128}$, y m_2 debe tener al menos 10^{38} dígitos

¿Es posible escribir un número de este tamaño?

- No: Cisco estima que el tráfico de Internet en 2025 será de 175 zettabytes, vale decir $175 \cdot 10^{21}$ bytes


Funciones de hash en la práctica: SHA-2

SHA-2

From Wikipedia, the free encyclopedia

SHA-2 (Secure Hash Algorithm 2) is a set of [cryptographic hash functions](#) designed by the United States [National Security Agency](#) (NSA) and first published in 2001.^{[3][4]} They are built using the [Merkle–Damgård construction](#), from a [one-way compression function](#) itself built using the [Davies–Meyer structure](#) from a specialized block cipher.

SHA-2 includes significant changes from its predecessor, [SHA-1](#). The SHA-2 family consists of six hash functions with [digests](#) (hash values) that are 224, 256, 384 or 512 bits.^[5] **SHA-224, SHA-256, SHA-384, SHA-512, SHA-512/224, SHA-512/256**. SHA-256 and SHA-512 are novel hash functions computed with eight 32-bit and 64-bit words, respectively. They use different shift amounts and additive constants, but their structures are otherwise virtually identical, differing only in the number of rounds. SHA-224 and SHA-384 are truncated versions of SHA-256 and SHA-512 respectively, computed with different initial values. SHA-512/224 and SHA-512/256 are also truncated versions of SHA-512, but the initial values are generated using the method described in [Federal Information Processing Standards](#) (FIPS) PUB 180-4.



Funciones de hash en la práctica: SHA-2

SHA-2 (Secure Hash Algorithm 2) es una familia de funciones de hash

- Se definen utilizando la construcción de Merkle–Damgård
- Las funciones de compresión son definidas utilizando la construcción de Davies–Meyer sobre un block cipher propio (no AES)

SHA-256

El número 256 se refiere al largo del hash

- SHA-256 es una función de $\{0, 1\}^*$ en $\{0, 1\}^{256}$

SHA-256 puede considerarse como el resultado de instanciar el parámetro de seguridad en el valor 256

- También son utilizadas las funciones de hash SHA-224, SHA-384 y SHA-512

SHA-256 es utilizada en Bitcoin

SHA-256: bloques y estados internos

SHA-256 considera bloques de 512 bits, y sus estados internos H_i son de 256 bits

La función de compresión es de la forma

$$h' : \{0, 1\}^{512} \times \{0, 1\}^{256} \rightarrow \{0, 1\}^{256}$$

SHA-256: función de padding

Se define utilizando las ideas descritas anteriormente, pero reservando los últimos 64 bits para el largo del mensaje m

SHA-256: función de padding

Se realiza los siguiente pasos sobre el mensaje m :

1. Se agrega un símbolo 1
2. Se agregan ℓ símbolos 0, donde ℓ es el menor número natural tal que $|m| + 1 + \ell \equiv 448 \pmod{512}$
3. Se agrega $|m| \pmod{2^{64}}$

SHA-256: vector de inicialización

H_0 se define como $H_0^1 H_0^2 H_0^3 H_0^4 H_0^5 H_0^6 H_0^7 H_0^8$, donde

- H_0^i tiene los primeros 32 bits de la parte decimal de la raíz cuadrada del i -ésimo número primo

Por ejemplo, H_0^1 tiene los primeros 32 bits de la parte decimal de $\sqrt{2}$:

$$H_0^1 = 01101010000010011110011001100111$$