

IIC3253

Teoría de Grupos

Grupos

Un grupo es un par $(G, *)$, donde G es un conjunto y $* : G \times G \rightarrow G$ es una operación que satisface:

Neutro. Existe $e \in G$ tal que para todo $a \in G$

$$e * a = a * e = a$$

Inversos. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$


Asociatividad. Para todos $a, b, c \in G$ se tiene


$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Grupos: Ejemplos

$$(\mathbb{Z}, +) ?$$



¿Neutro? El 0 

¿Inversos? Dado $a \in \mathbb{Z}$, $-a$ también está en \mathbb{Z} 

¿Asociatividad? Viene de la suma 

Grupos: Ejemplos

$$(\mathbb{Q}, \cdot) ?$$



¿Neutro? El 1 ✓


¿Inversos? Dado $q \in \mathbb{Q}$, $1/q$ también está en \mathbb{Q} 🤔


¿Asociatividad? Viene de la multiplicación ✓

Grupos: Ejemplos

$$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) ?$$




¿Neutro? El 1 

¿Inversos? Dado $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $1/q$ también está en $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ 

¿Asociatividad? Viene de la multiplicación 

Grupos: Ejemplos

$$(\mathbb{N}, +) ? \quad \times$$


¿Neutro? El 0 

¿Inversos? Dado $a \in \mathbb{N}$, $-a$ no está en \mathbb{N} 

Grupos: Ejemplos

$$(\mathbb{Z}, \cdot) ?$$





¿Neutro? El 1 

¿Inversos? Dado $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 1$, $1/a$ no está en \mathbb{Z} 


Grupos: Ejemplos

$(\{0, 1, 2, 3\}, + \bmod 4)$?

¿Neutro? El 0 

¿Inversos? Dado $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $(4 - a) \bmod 4$ está en $\{0, 1, 2, 3\}$
y tenemos que $(a + (4 - a) \bmod 4) \bmod 4 = a \bmod 4$ 


¿Asociatividad?

$((a + b) \bmod 4 + c) \bmod 4 = (a + (b + c) \bmod 4) \bmod 4$ 

Grupos: Ejemplos

$(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot \bmod 10) ?$

¿Multiplicación $\bmod 10 : \{1, 3, 7, 9\} \rightarrow \{1, 3, 7, 9\}$?

¿Neutro? El 1 

¿Inversos? Son todos los primos relativos con el 10 

¿Asociatividad?

$$((a \cdot b) \bmod 10 \cdot c) \bmod 10 = (a \cdot (b \cdot c) \bmod 10) \bmod 10$$

Grupos: Ejemplos

Dado $n \in \mathbb{N}$, todas las permutaciones

$$\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

¿Cuál es la operación?

Las permutaciones son funciones,
podemos usar composición (\circ)

Siendo A_n el conjunto de todas las permutaciones de $\{1, \dots, N\}$, Demuestre que $S_n = (A_n, \circ)$ es un grupo

Algunas preguntas

¿Es la operación $*$ siempre conmutativa?

¿Puede haber una segunda identidad?


¿Puede un elemento tener dos inversos?


¿Puede un elemento tener un inverso por la izquierda y otro inverso por la derecha?

Sea $n \in \mathbb{N}$

¿Qué operación nos da un grupo para $\{0, 1, \dots, n - 1\}$?

$$a + b \mod n$$

¿Neutro? El 0 

¿Inversos? Dado $a \in \{0, \dots, n\}$, $(n - a) \mod n$ está en $\{0, \dots, n\}$
y tenemos que $(a + (n - a) \mod n) \mod n = a \mod n$ 

$(\mathbb{Z}_n, + \mod n)$ grupo aditivo
de los enteros en módulo n .


¿Y si tratamos con la multiplicación?

¡Hay elementos que no tienen inverso!

El 0 y todo $a \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $\text{GCD}(a, n) > 1$

¿Y si los sacamos?

¿Multiplicación mod 10 : $\{1, 3, 7, 9\} \rightarrow \{1, 3, 7, 9\}$?

¿Neutro? El 1 

¿Inversos? Gracias Euclides!

\mathbb{Z}_n^*

Grupo multiplicativo de los enteros módulo n

$$\mathbb{Z}_{10}^*$$

$$\{1, 3, 7, 9\}$$

$$\mathbb{Z}_{11}^*$$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\mathbb{Z}_p^* \text{ para } p \text{ primo sus elementos son } \{1, \dots, n-1\}$$

\mathbb{Z}_n^* y sus subgrupos

Un subgrupo de $(G, *)$ es un conjunto $H \subseteq G$ tal que $(H, *)$ también es un grupo.

¿Qué subgrupos tiene $\mathbb{Z}_{10}^* = (\{1, 3, 7, 9\}, \cdot \bmod 10)$?

$(\{1\}, \cdot \bmod 10)$ ✓

$(\{1, 3, 7, 9\}, \cdot \bmod 10)$ ✓

$(\{1, 9\}, \cdot \bmod 10)$ ✓

¿Qué subgrupos tiene \mathbb{Z}_{12}^* ?

$$\{1, 5, 7, 11\}$$

$$(\{1\}, \cdot \bmod 12) \checkmark$$

$$(\{1, 5, 7, 11\}, \cdot \bmod 12) \checkmark$$

$$(\{1, 5\}, \cdot \bmod 12) \checkmark$$

$$(\{1, 7\}, \cdot \bmod 12) \checkmark$$

$$(\{1, 11\}, \cdot \bmod 12) \checkmark$$

¿Y si n es primo?

$$\mathbb{Z}_5^* = (\{1, 2, 3, 4\}, \cdot \bmod 5)$$

$$(\{1\}, \cdot \bmod 5) \checkmark$$

$$(\{1, 2, 3, 4\}, \cdot \bmod 5) \checkmark$$

$$(\{1, 4\}, \cdot \bmod 5) \checkmark$$

$$\mathbb{Z}_7^* = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \cdot \bmod 7)$$

$$(\{1\}, \cdot \bmod 7) \checkmark$$

$$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \cdot \bmod 7) \checkmark$$

$$(\{1, 2, 4\}, \cdot \bmod 7) \checkmark$$

$$(\{1, 6\}, \cdot \bmod 7) \checkmark$$

$$\mathbb{Z}_{11}^* = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \cdot \bmod 11)$$

$$(\{1\}, \cdot \bmod 11) \quad \checkmark$$

$$(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \cdot \bmod 11) \quad \checkmark$$

$$(\{1, 5, 3, 4, 9\}, \cdot \bmod 11) \quad \checkmark$$

$$(\{1, 10\}, \cdot \bmod 11) \quad \checkmark$$

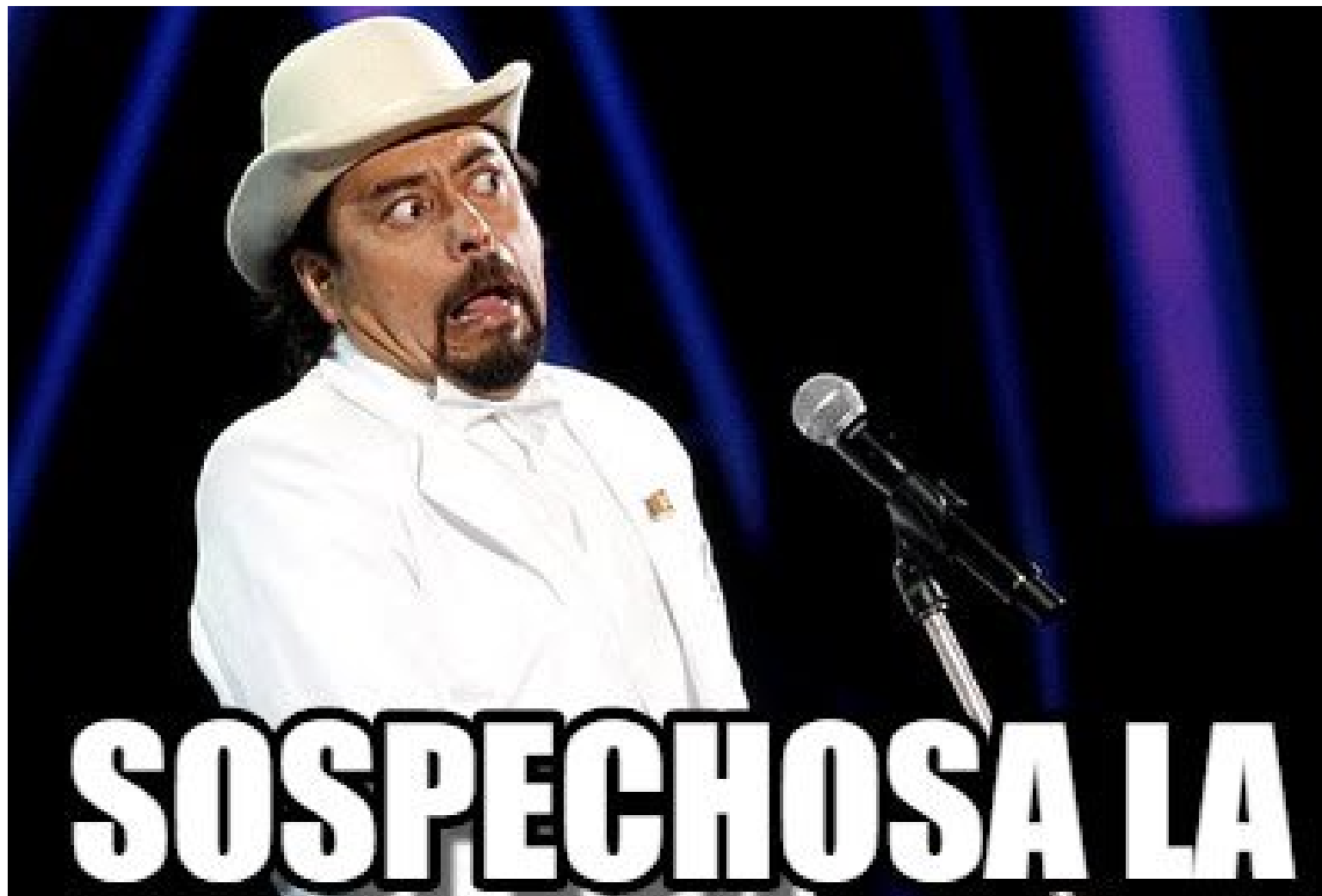
Cantidad de elementos de G = orden del grupo

\mathbb{Z}_{11}^*	$\{1, 5, 3, 4, 9\}$	Grupo de orden 10
	$\{1, 10\}$	Subgrupos de orden 2 y 5

\mathbb{Z}_7^*	$\{1, 2, 4\}$	Grupo de orden 6
	$\{1, 6\}$	Subgrupos de orden 2 y 3

\mathbb{Z}_5^*	$\{1, 4\}$	Grupo de orden 4
		Subgrupo de orden 2

\mathbb{Z}_{17}^*	\dots	Grupo de orden 16
		Subgrupos de orden 2, 4 y 8



COSA

¿Podremos demostrar que el tamaño de un subgrupo siempre divide al tamaño del grupo?

Abusaremos de la notación llamando G a un grupo si $(G, *)$ es un grupo y $*$ es una operación arbitraria

Sea G un grupo y H un subgrupo de G

Dado $g_0 \in G \setminus H$

¿Cuántos elementos tiene $g_0H = \{g_0 * h \mid h \in H\}$?

Dado $g_0 \in G \setminus H$

¿Cuántos elementos tiene $g_0H = \{g_0 * h | h \in H\}$?

A lo más tiene $|H|$ elementos distintos

Si $g_0 * h_1 = g_0 * h_2$ entonces $h_1 = h_2$.

Tenemos que $|g_0H| = |H|$

¿Puede $g_0H \cap H$ ser no vacío?

$$g_0h_1 = h_2 \Rightarrow g_0 = h_2h_1^{-1}$$

Pero como H es subgrupo, $h_2h_1^{-1} \in H \Rightarrow \Leftarrow$

Si $G = H \cup g_0H$ entonces $|G| = 2|H|$.

De lo contrario sea $g_1 \in G \setminus (H \cup g_0H)$

¿Cuántos elementos tiene $g_1H = \{g_1 * h | h \in H\}$?

¿Puede $g_1H \cap H$ ser no vacío?

¿Puede $g_0H \cap g_1H$ ser no vacío?

$$g_0h_1 = g_1h_2 \Rightarrow g_0h_1h_2^{-1} = g_1$$

Pero como H es subgrupo, $h_1h_2^{-1} \in H$. Luego $g_1 \in g_0H \Rightarrow \Leftarrow$

Si $G = H \cup g_0H \cup g_1H$ entonces $|G| = 3|H|$. De lo contrario sea $g_2 \in G \setminus (H \cup g_0H \cup g_1H)$

Teorema de Lagrange

Si H es un subgrupo de G entonces $|H|$ divide a $|G|$

Subgrupos generados

Sea G un grupo y $a \in G$. Usando notación multiplicativa, definiremos

$$a^n = \underbrace{a * \cdots * a}_{n \text{ veces}}$$

Si tomamos la secuencia $\{1, a, a^2, a^3, \dots\}$ eventualmente un elemento se tiene que repetir. Sea $a^j = a^{j+k}$ la primera repetición

Tenemos entonces que $a^j = a^j * a^k$ y por lo tanto a^k es el neutro

Subgrupos generados

Tenemos entonces que $a^j = a^j \cdot a^k$ y por lo tanto a^k es el neutro

Implica que $j = 0$.

Definamos $\langle a \rangle = \{a^j \mid 0 \leq j < k\}$

¿Qué podemos decir de $\langle a \rangle$?

¡Es un subgrupo de tamaño k !

Implica que $|\langle a \rangle| = k$ divide a $|G|$

\mathbb{Z}_p^* con p un número primo

Sea $a \in \mathbb{Z}_p^*$ y supongamos $|\langle a \rangle| = k$

\mathbb{Z}_p^* tiene exactamente $p - 1$ elementos

Luego k divide a $p - 1$

Existe α tal que $\alpha \cdot k = p - 1$

$$a^{p-1} = a^{\alpha \cdot k} = (a^k)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

\mathbb{Z}_n^* **con** $n \in \mathbb{N}$

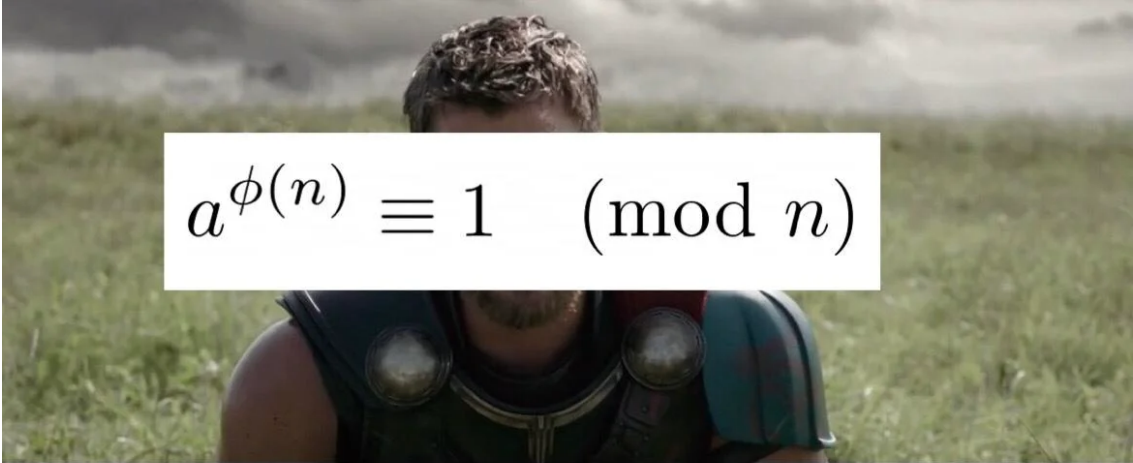
Sea $a \in \mathbb{Z}_n^*$ y supongamos $|\langle a \rangle| = k$

\mathbb{Z}_n^* tiene exactamente $\phi(n)$ elementos

Luego k divide a $\phi(n)$

Existe α tal que $\alpha \cdot k = \phi(n)$

$$a^{\phi(n)} = a^{\alpha \cdot k} = (a^k)^\alpha = 1^\alpha = 1$$

A medium shot of Thor, played by Chris Hemsworth, standing in a grassy field under a cloudy sky. He is wearing his iconic Asgardian armor, which includes a blue and red chest plate with circular details. His expression is serious as he looks towards the camera.
$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

I'm not as strong as you.

A medium shot of Odin, played by Anthony Hopkins, standing in the same grassy field. He is an older man with a long white beard, wearing a simple brown jacket over a pink shirt. He looks directly at the camera with a calm, steady gaze.
$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

No. You're stronger.

@12_Semitones

Dado un grupo G , si existe $a \in G$ tal que $\langle a \rangle = G$, decimos que G es un grupo *cíclico*

No demostraremos que...

\mathbb{Z}_p^* es siempre cíclico

¿Quién genera a \mathbb{Z}_7^* ?