Clase 3
Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

- Proceso de Bernoulli.
- Ensayos sobre proporciones.
- Curvas de potencia para proporciones.
- AQL, LTPD, riesgos del comprador y proveedor.
- Norma IRAM 15 – aplicaciones industriales.
- Ejemplos.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Walpole, R. E. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. México: Pearson Education.

Devore, J. L. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias México:Thomson.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Ensayos sobre Proporciones

- Ensayos sobre Proporciones
  - Partimos del proceso de Bernoulli, base de la inferencia sobre proporciones:
  - Cada ensayo puede dar dos resultados: “éxito” (probabilidad p) o “fracaso” (probabilidad 1−p).

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

  - Variable aleatoria X~Bernoulli(p)
    - Ejemplo: lanzar una moneda $\rightarrow$ X=1 si sale cara, X=0 si sale cruz.
- Media y varianza

$$E[X] = p \qquad Var[X] = p(1-p)$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Valor esperado de un Bernoulli

- Distribución muestral tamaño n suma de éxitos y proporción muestral: $E[X] = p \qquad Var[X] = p(1-p)$
- *E[X]* es el valor esperado o media teórica de la variable aleatoria X.

$$E[X] = \sum_x x \cdot \Pr(X = x)$$

- Cálculo en el caso Bernoulli: $E[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$
- Como no conocemos p, tomamos una muestra y calculamos la proporción muestral $\hat{p}$ donde X es el número de éxitos en la muestra (ejemplo: productos defectuosos) y n es el tamaño de la muestra.

$$\text{Conteo (Binomial): } S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Binomial}(n, p) \qquad \text{Proporción: } \hat{p} = \frac{S}{n}$$

Valor esperado de un Bernoulli

- El valor esperado de un Bernoulli es justamente la probabilidad de éxito:
  - Si repitiéramos el experimento infinitas veces, el promedio de los valores observados tendería a p.
  - Como X vale 1 en caso de éxito, y 0 en caso de fracaso, el promedio de muchos ensayos refleja la proporción de éxitos.
  - Si lanzamos una moneda no sesgada (equilibrada) (p=0.5), el valor esperado de X es 0.5.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Estadístico de prueba

- Estadístico de prueba para hipótesis sobre p se contrasta con la distribución normal estándar.
- p es la proporción poblacional verdadera que queremos estudiar. Ejemplos:
  - fracción de productos defectuosos en una línea de producción,
  - porcentaje de usuarios que prefieren una marca,
  - probabilidad que una moneda caiga en “cara”.
- Como no conocemos p, tomamos una muestra y calculamos la proporción muestral:

$$H_0 : p = p_0 \qquad H_1 : p \neq p_0$$

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Estadístico de prueba

- El estadístico de prueba es un número calculado a partir de los datos muestrales que nos permite decidir si rechazamos o no la hipótesis nula H_0:p=p_0

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

- $\hat{p}$ = proporción muestral observada
- p_0 = proporción poblacional bajo la hipótesis nula
- n = tamaño de la muestra
- El denominador es el **error estándar** de $\hat{p}$.

$$H_0 : p = p_0 \qquad H_1 : p \neq p_0$$

  - Z es el valor estandarizado de la diferencia entre lo que observamos (p^) y lo que afirma la hipótesis nula (p_0).
  - Se interpreta como cuántos desvíos estándar está p^ alejado de p_0. Z Se contrasta con la distribución normal estándar.
  - Bajo H_0, el estadístico Z se distribuye aproximadamente como una Normal estándar:

$$Z \sim N(0,1)$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
p (proporciones) y p-valor

- NO CONFUNDIR p de Bernoulli/Binomial/Proporciones con el p-valor de en pruebas de hipótesis.

  - p (proporciones): parámetro fijo de la población.
    - Ej.: “el 40% de los clientes está satisfecho”.

  - p-valor: probabilidad calculada a partir de la distribución del estadístico de prueba bajo H_0.
    - Ej.: “si H_0 fuera cierta, la probabilidad de ver un valor de t tan extremo o más es 0.03”.

Interpretación en una prueba de hipótesis

- Interpretación en una prueba de hipótesis.
  - Calculamos Z.
  - Lo comparamos con valores críticos de la Normal estándar (por ejemplo, ±1.96 si α=0.05 en una prueba bilateral).
  - Si |Z| es grande → evidencia contra H_0
  - Alternativamente, calculamos el p-valor, que es la probabilidad de observar un valor tan extremo (o más) que el hallado si H_0 fuera cierta.
  - El 1.96 proviene de la tabla de la Normal estándar, es el cuantil 97.5%.
  - Es el número que deja 2.5% en cada cola, totalizando 5% de área crítica.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Curvas de potencia para proporciones

- La potencia del test mide la capacidad de rechazar H_0 cuando $p \neq p_0$.

$$\beta(p_1) = P(\text{no rechazar } H_0 \mid p = p_1) \qquad \pi(p_1) = 1 - \beta(p_1)$$

  - β: Riesgo de cometer error tipo II.
  - π: Curva de potencia (probabilidad de detección).
  - Ejemplo: en control de calidad de perfiles de Steel Frame, p puede ser la proporción de perfiles con defectos en espesor.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

AQL, LTPD, riesgos del comprador y proveedor

- Control de calidad por muestreo
  - AQL (Acceptance Quality Level): nivel máximo de defectos tolerable para aceptar un lote.
  - LTPD (Lot Tolerance Percent Defective): nivel de calidad inaceptable (límite superior).
- Riesgos:
  - Riesgo del productor o proveedor (α): rechazar un lote bueno (con defectos $\leq$AQL).
  - Riesgo del consumidor (β): aceptar un lote malo (con defectos $\geq$LTPD).
- Se modela con la función binomial acumulada o aproximación normal.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Norma IRAM 15 – Aplicaciones Industriales

- Norma IRAM 15 (equivalente a ISO 2859) regula planes de muestreo por atributos:
  - La norma define tamaños de muestra n en función del tamaño del lote y el AQL.
  - Establece criterios de aceptación (número máximo permitido de defectuosos).
  - Garantiza el equilibrio entre α y β.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Norma IRAM 15 – Aplicaciones Industriales

- Se usa para inspección continua por lotes, para que el proveedor mantenga una calidad no inferior al AQL, al tiempo que define un límite al riesgo del cliente de aceptar un lote de baja calidad.
- Da el marco teórico, definiciones clave y metodología .
- IRAM 15-0: Introducción general a los sistemas de muestreo para inspección por atributos. Es una parte introductoria que explica conceptos, terminología y metodologías básicas. Se publicó en 2009.
- IRAM 15-1 (ISO 2859-1): Planes de muestreo para inspección por lotes, basados en el Nivel de Calidad Aceptable (AQL). Ofrece tablas de muestreo simple, doble y múltiple, indicaciones sobre tamaño de muestras, y criterios de aceptación/rechazo. Fue lanzada como segunda edición el 7 de abril de 2010.
- IRAM 15-2 (ISO 2859-2): Planes de muestreo para inspección de lotes aislados, basados en la Calidad Límite (LQ).
- IRAM 15-3 (ISO 2859-3): Procedimientos para muestreo de lotes salteados – una modalidad intermedia entre lotes consecutivos y aislados.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Norma IRAM 15 – Aplicaciones Industriales

- Tamaño de lote: N = 5000
- Elegir nivel de inspección:
  - Supongamos Nivel II normal → la tabla IRAM/ISO indica n = 200 muestras.
- Cálculo del número de aceptación (c):
  - Con AQL = 1,5% → la tabla da c = 5.
- Inspección:
  - Se seleccionan 200 perfiles al azar y se miden los espesores.
  - Si defectuosos ≤ 5 → lote aceptado. X<=c
  - Si defectuosos ≥ 6 → lote rechazado. X >c
- Probabilidad de encontrar x defectuosos en la muestra:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Norma IRAM 15 – Aplicaciones Industriales

- Norma IRAM 15 (equivalente a ISO 2859) regula planes de muestreo por atributos:
  - La norma define tamaños de muestra n en función del tamaño del lote y el AQL.
  - Establece criterios de aceptación (número máximo permitido de defectuosos).
  - Garantiza el equilibrio entre α y β.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Ejemplo

- Queremos verificar que la proporción de perfiles defectuosos en un lote de Steel Frame no supera el 2%.
  - Hipótesis: $H_0 : p = 0.02 \qquad H_1 : p > 0.02$
  - Muestra: n=200, p^=0.035
  - Estadístico: $$Z = \frac{0.035 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02(0.98)}{200}}} = 2.40$$
  - Como $Z > Z_{0.05} = 1.64$, se rechaza $\rightarrow$ lote no aceptado.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Revisamos E[X]

- E[X] es el valor esperado o esperanza matemática de una variable aleatoria.
  - Concepto similar a la media ponderada de todos los valores posibles de X, donde cada valor se multiplica por la probabilidad de que ocurra.
  - Variable aleatoria discreta X, con valores posibles x_i y probabilidades $P(X=x_i)=p_i$:

$$E[X] = \sum_i x_i \cdot p_i$$

  - Bernoulli: el valor esperado de un Bernoulli es la probabilidad de éxito.
    - Si X~Bernoulli(p):
      - Valores posibles: X=1(éxito) con probabilidad p.
      - X=0 (fracaso) con probabilidad 1–p.

$$E[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Revisamos E[X] comparado con la media y media ponderada

- Media aritmética (promedio simple)
  - Cuando tenemos un conjunto de datos observados $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

  - Se usa cuando todas las observaciones tienen igual importancia. Ejemplo: los espesores de 5 perfiles en mm: 0.85,0.83,0.84,0.86,0.82. La media aritmética es el promedio directo de esas mediciones.
- Media ponderada
  - Cuando cada dato tiene un peso o importancia distinta w_i, con $\sum w_i = 1$.

$$\bar{x}_w = \sum_{i=1}^{n} w_i\, x_i$$

    Ejemplo: medimos defectos en perfiles de distintas fábricas, y cada fábrica produce cantidades diferentes, debemos ponderar los defectos según el peso relativo de la producción.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Revisamos E[X] comparado con la media y media ponderada

- Valor esperado E[X]
  - Media ponderada teórica de todos los valores posibles de una variable aleatoria.
    - Los valores posibles de X son los datos xi.
    - Las probabilidades pi hacen de "pesos": $p_i = P(X = x_i)$

$$E[X] = \sum_i x_i \, p_i$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Revisamos E[X] comparado con la media y media ponderada

- Análisis de la comparación:
  - Para la media aritmética o ponderada usamos datos observados.
  - Para el valor esperado usamos valores posibles con sus probabilidades.
  - E[X] es una media ponderada especial, donde los pesos son probabilidades reales de la variable.
  - La media ponderada es un cálculo que hacemos nosotros, asignando pesos (que no necesariamente son probabilidades).
  - Puede ocurrir que la media ponderada ≠ valor esperado, cuando los pesos que usamos no coinciden con las probabilidades verdaderas de la variable.
  - La media ponderada depende de los pesos elegidos por el analista, mientras que el valor esperado depende de la distribución de probabilidad real del proceso.

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Ejemplo Comparado

- Control de calidad en perfiles de Steel Frame.
- Variable X representa el espesor de un perfil (en mm).
- Media aritmética (datos observados):
  - Medimos 5 perfiles: 0.80,0.81,0.82,0.83,0.85

$$\bar{x} = \frac{0.80 + 0.81 + 0.82 + 0.83 + 0.85}{5} = 0.822$$

  - Media ponderada (si un perfil de 0.80 mm proviene del 60% de la producción, y el de 0.85 mm del 40%):

$$\bar{x}_w = 0.80 \cdot 0.6 + 0.85 \cdot 0.4 = 0.82$$

  - Valor esperado (X como variable aleatoria con esa misma distribución de probabilidades):

$$E[X] = \sum x_i \, P(X = x_i) = 0.80 \cdot 0.6 + 0.85 \cdot 0.4 = 0.82$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
Ejemplo Comparado

- La variable aleatoria X se distribuye según una Bernoulli de parámetro p.

$$X \sim \text{Bernoulli}(p)$$

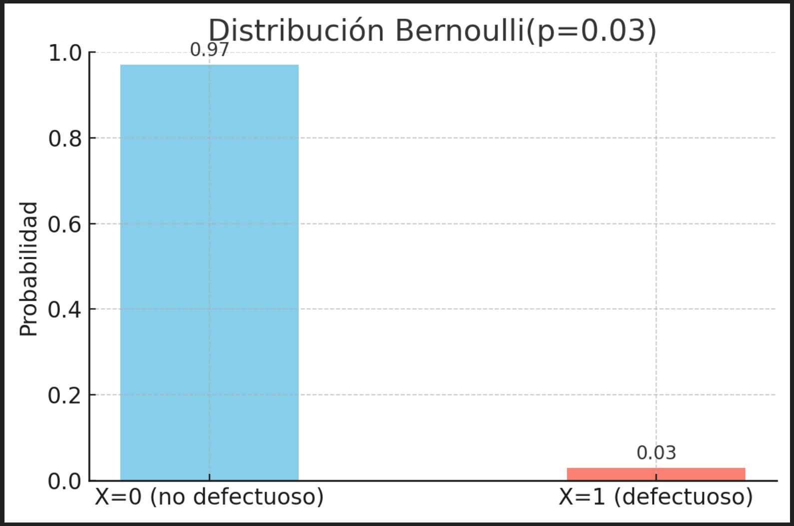
- Hipótesis: en la línea de producción de perfiles de acero galvanizado, la probabilidad que un perfil esté defectuoso es de p=0.03.

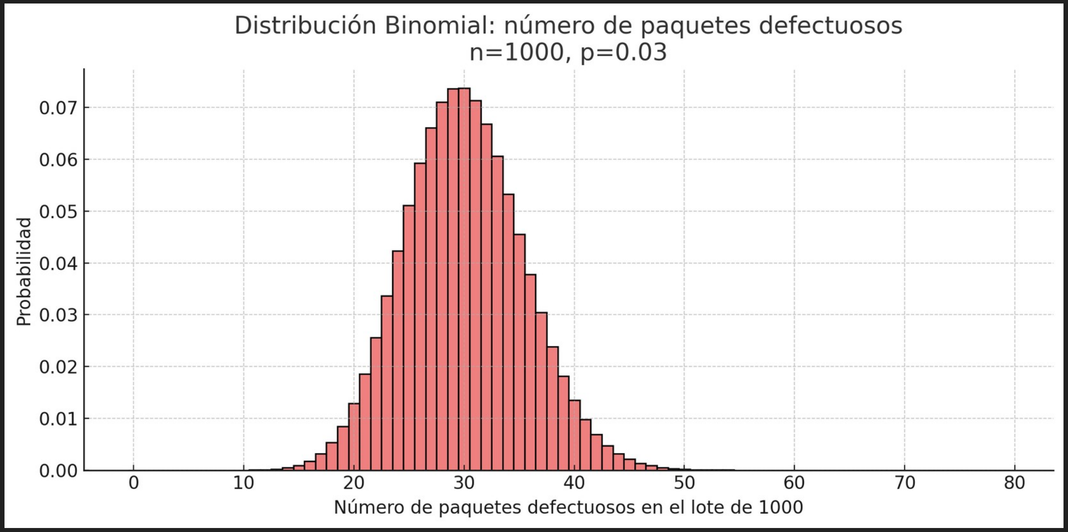
$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el perfil es defectuoso} \\ 0 & \text{si el perfil es correcto} \end{cases}$$

- Cada vez que inspeccionamos un perfil, tenemos un 3% de probabilidad de observar X=1 (defectuoso) y un 97% de probabilidad de observar X=0 (correcto).

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad

Ejemplo Comparado





- El eje x muestra cuántos defectuosos hay en un lote de 1000.
- El eje y muestra la probabilidad de cada cantidad.
- La distribución se concentra alrededor de 30 defectuosos.

$$S \sim \text{Binomial}(1000, 0.03).$$

Inferencia sobre Proporciones y Control de Calidad
De Bernoulli a Binomial

- Si S~Binomial(n,p) entonces: S∈{0,1,2,...,n}
  - La salida es un número entero entre 0 y n que representa el número de éxitos observados en n ensayos de Bernoulli independientes.
  - Si lanzamos una moneda equilibrada (p=0.5) n=3 veces:

$$S \sim \mathrm{Binomial}(3, 0.5).$$

  - Los posibles valores de salida son 0,1,2,3 (cantidad de caras obtenidas).

$$P(S=0) = \binom{3}{0}(0.5)^0(0.5)^3 = 0.125.$$
$$P(S=1) = \binom{3}{1}(0.5)^1(0.5)^2 = 0.375.$$
$$P(S=2) = 0.375.$$
$$P(S=3) = 0.125.$$

  –