Clase 2

Ensayos de Hipótesis para Medias

- Ensayo con varianza conocida (Z-test).
- Ensayo con varianza desconocida (t de Student).
- Determinación del tamaño muestral.
- Aplicación con datos reales.

BIBLIOGRAFÍA GENERAL

Walpole, R. E. Probabilidad y Estadística para Ingenieros. México: Pearson Education.

Devore, J. L. Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias México:Thomson.

Ensayos de Hipótesis para Medias

- Tema de la inferencia estadística.
- Permiten tomar decisiones sobre parámetros poblacionales (en este caso, la media μ) en presencia de incertidumbre.
- Se formulan dos proposiciones:
  - Hipótesis nula H_0 afirmación inicial que se somete a prueba.
  - Hipótesis alternativa H_1 afirmación que se acepta si hay evidencia suficiente contra H_0.
- Se definen:
  - Nivel de significación α probabilidad de cometer un error Tipo I (rechazar H_0 siendo verdadera).
  - Potencia (1–β): probabilidad de rechazar H_0 cuando H1 es verdadera.
  - Estadístico de prueba: valor calculado a partir de la muestra para contrastar contra una distribución de referencia.
  - Error Tipo II (β): no rechazar H_0 cuando en realidad es falsa.

Ensayo con varianza conocida (Z-test)

- Supongamos lo siguiente:
  - Población con distribución normal o tamaño muestral grande (n>30).
  - Varianza poblacional σ^2 conocida.

- Hipótesis:
  - Bilateral: $H_0: \mu=\mu_0$ $H_a: \mu\neq\mu_0$
  - Unilateral (mayor): $H_0: \mu\leq\mu_0$ $H_a: \mu>\mu_0$
  - Unilateral (menor): $H_0: \mu\geq\mu_0$ $H_a: \mu<\mu_0$

- Estadístico de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Ensayos de Hipótesis para Medias
Ensayo con varianza conocida (Z-test)

- Verificación:
  - Calcular Z.
  - Comparar con el valor crítico Z_α (o $Z_\alpha/2$ en pruebas bilaterales).
  - Ejemplo: si $|Z| > Z_\alpha/2 \Rightarrow$ rechazar H_0
  - Una cola derecha: $Z > z_{1-\alpha}$
  - Una cola izquierda: $Z < z_\alpha$
  - Dos colas: $|Z| > z_{1-\alpha/2}$
  - p-valor: se calcula con la función de distribución acumulada estándar $\Phi(z)$

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- Supongamos lo siguiente:
  - Población con distribución normal.
  - Varianza poblacional σ_2 desconocida.
  - Se reemplaza σ por el desvío estándar muestral s.

- Estadístico de prueba: $$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_\nu, \qquad \nu = n - 1.$$
  - s es la desviación estándar muestral.
  - Se definen con los cuantiles de la distribución t con n−1 grados de libertad.
  - Para muestras pequeñas (n<30), la normalidad es condición esencial.
  - Para muestras grandes, la aproximación normal es válida.

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- Verificación o reglas de decisión:
  - (nivel α)

    Una cola derecha: rechazar H_0 si $T > t_{1-\alpha,\nu}$.

    Una cola izquierda: rechazar H_0 si $T < t_{\alpha,\nu}$.

    Dos colas: rechazar H_0 si $|T| > t_{1-\alpha/2,\nu}$.
  - p-value (con CDF de t).
  - El p-value es la probabilidad de obtener un estadístico de prueba tan extremo o más extremo que el observado, suponiendo que la hipótesis nula H_0 es verdadera.
    - Si el p-value es pequeño (<α), significa que el resultado observado sería muy poco probable, si H_0 fuera cierta → se rechaza H_0
    - Si el p-value es grande, significa que la evidencia no es suficiente para rechazar H_0.

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- Si tenemos el caso t de Student (varianza desconocida)
  - Cuando usamos el estadístico:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{\nu}, \quad \nu = n - 1$$

  - El p-value se calcula con la función de distribución acumulada (CDF) de la distribución t con v grados de libertad $F t_v(t)$
    - El p-value con CDF de t es el área de cola (izquierda, derecha o ambas) de la distribución t de Student con v grados de libertad, calculada en el valor observado del estadístico de prueba.
    - $F t_v(t)$ es la función de distribución acumulada (CDF) de una variable aleatoria T que sigue una distribución t de Student con v grados de libertad.
    - Probabilidad acumulada de que T tome un valor menor o igual que el valor observado t.

$$F_{t_\nu}(t) = \Pr(T \leq t), \quad T \sim t_\nu$$

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- Qué es $F_{t\nu}(t)$ y cómo se calcula.
  - $F_{t\nu}$ es la CDF (función de distribución acumulada).
  - Base para determinar los p-values: $F_{t_\nu}(t) = \Pr(T \leq t), \qquad T \sim t_\nu.$
  - Una cola izquierda (H_1:$\mu<\mu_0$) $p = F_{t_\nu}(t_{\text{obs}}).$
  - Una cola derecha (H_1:$\mu>\mu_0$) $p = 1 - F_{t_\nu}(t_{\text{obs}}).$
  - Dos colas (H_1:$\mu\neq\mu_0$) $p = 2 \cdot \min\{F_{t_\nu}(t_{\text{obs}}), 1 - F_{t_\nu}(t_{\text{obs}})\}.$
  - $F_{t\nu}(t)$ es la función de distribución acumulada (CDF) de una variable aleatoria T que sigue una distribución t de Student con v grados de libertad. Es la probabilidad acumulada de que T tome un valor menor o igual que el valor observado t.

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- ¿Qué significa Pr? $F_{t_\nu}(t) = \Pr(T \le t), \qquad T \sim t_\nu.$
  - La probabilidad que la variable aleatoria T tome un valor menor o igual que t.
  - Esa probabilidad no se calcula “contando casos” (como en problemas discretos), sino integrando la función de densidad de probabilidad en el intervalo adecuado.

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo con varianza desconocida (t de Student)

- La integral es complicada. Por eso se usan tablas de la t-Student que dan valores de cuantiles
  - (Ej: $t_{0.05,\,19}=-1.729$)
  - Supongamos: $t_{obs} = -2.24$, v=19
  - Una cola izquierda: $p = F_{t19}(-2.24) \approx 0.019$
  - Dos colas: $p = 2\times 0.019 \approx 0.038$
- Una cola izquierda (H_1:$\mu<\mu_0$) $p=F_{tv}(t_{obs})$, es la probabilidad de observar un valor tan extremo por debajo de t_{obs}
- Una cola derecha (H_1:$\mu>\mu_0$) $p=1-F_{tv}(t_{obs})$ es la probabilidad de observar un valor tan extremo por encima de t_{obs}
- Dos colas (H_1:$\mu\neq\mu_0$) $p=2\cdot\min\{F_{tv}(t_{obs}),1-F_{tv}(t_{obs})\}$ se multiplica por 2 porque se consideran ambas colas de la distribución.
- p-value es exactamente la probabilidad acumulada bajo H_0

Determinación del tamaño muestral (n)

- La planificación de un ensayo requiere calcular n en función de:
  - Nivel de significación α.
  - Error Tipo II deseado (β).
  - Diferencia mínima detectable δ=|μ1−μ0|
  - Desvío estándar σ (conocido o estimado).
- Fórmula general (caso Z, una cola):

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}}{\delta / \sigma} \right)^2$$

- Interpretación:
  - A mayor variabilidad (σ), se necesita un n mayor.
  - A menor diferencia mínima detectable (δ), el n crece cuadráticamente.
  - Para dos colas se usa $z_{1-\alpha/2}$.

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo Z (varianza conocida) — Control de peso en cajas de cereales

- Una empresa vende cajas de cereales de 500 g.
- Se cuenta con historial de procesos y calibración de balanzas.
  - Desviación estándar poblacional σ = 8 g (se asume conocida).
  - Queremos saber si el proceso está llenando paquetes con un peso menor que el declarado.
  - Planteo(unilateral a la izquierda): α=0.05. $H_0 : \mu = 500 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 500$
  - Se toma una muestra aleatoria de n=36 cajas y se obtiene $\bar{x}$=497.8.
  - $$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$
  - $$Z = \frac{497.8 - 500}{8/\sqrt{36}} = \frac{-2.2}{8/6} = \frac{-2.2}{1.333\overline{3}} \approx -1.65$$
  - Regla de decisión (unilateral, α=0.05): rechazar H_0 si $Z \leq z_{0.05} = -1.645$
  - Como estadístico de prueba Z=−1.65<−1.645 ⇒ Rechazamos H_0.
  - Hay evidencia (al 5%) de subllenado.
  - p-value: p=Pr(Z≤−1.65)≈0.0495. Como p-value p<0.05, coincide con la decisión anterior.

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo Z (varianza conocida) — Control de peso en cajas de cereales

- Intervalo de confianza (IC) al 95% para μ.

$$\bar{x} \pm z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 497.8 \pm 1.96 \cdot 1.333\overline{3} = 497.8 \pm 2.613 \Rightarrow (495.19,\ 500.41)\ \mathrm{g}$$

- El IC incluye levemente 500 g, pero el test unilateral es más sensible a déficits; por eso detecta subllenado al 5%.

- Potencia frente a una desviación específica (por ejemplo, μ=498 g).
- Umbral crítico en $\bar{x}$:

$$\bar{x}_c = \mu_0 + z_{0.05}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 500 + (-1.645) \cdot 1.333\overline{3} \approx 497.807$$

- Potencia=Pr(rechazar H_0 |μ=498):

$$\Pr(\bar{x} \leq 497.807 \mid \mu = 498) = \Phi\left(\frac{497.807 - 498}{1.333\overline{3}}\right) = \Phi(-0.145) \approx 0.443$$

- Con n=36 la potencia es baja (~44%) para detectar una caída a 498 g (déficit de 2 g).

Ensayos de Hipótesis para Medias

Ensayo Z (varianza conocida) — Control de peso en cajas de cereales

- ¿Cuántas muestras necesito para buena potencia?
  - Objetivo: potencia 1–β=0.80 para detectar δ=2 (de 500 a 498) con α=0.05 unilateral.
  - Fórmula de tamaño muestral (Z-test, varianza conocida):

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha} + z_{1-\beta}}{\delta / \sigma} \right)^2$$

Con $z_{1-\alpha} = 1.645$, $z_{1-\beta} = 0.842$, $\sigma = 8$, $\delta = 2$:

$$n = \left(\frac{1.645 + 0.842}{2/8} \right)^2 = ((2.487) \cdot 4)^2 = (9.948)^2 \approx 98.96 \Rightarrow \boxed{n \approx 99}$$

  - Conclusión: para detectar con certeza un déficit de 2 g con 80% de potencia, la muestra debe ser de ~99 cajas.
  - Unilateral izquierda sólo nos interesa un extremo de la distribución (cola izquierda), no los dos.