Descomposición en Valores Singulares

Lección 13

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Justificación

Descomposición en Valores Singulares

- **DVS**: Descomposición en Valores Singulares
- **SVD**: *Singular Value Decomposition*
- Conjunto de técnicas para tratar con sistemas de ecuaciones singulares o cercanos a singulares.
- DVS funciona donde la descomposición **LU** o la eliminación Gaussiana fallan
- DVS permite además diagnosticar cuál es el problema
- Aun con singularidades, DVS provee *una* solución
- AQUÍ: cómo usar DVS (en vez de cómo hacer DVS)

Principio matemático
Descomposición en Valores Singulares

DVS parte de

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

con

- $\mathbf{A}$: matriz $m \times n$
- $\mathbf{U}$: matriz $m \times n$ de **columnas** ortogonales

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}$$

- $\mathbf{W}$: matriz diagonal con n **valores singulares** no negativos
- $\mathbf{V}$: matriz cuadrada $n \times n$ de **columnas** y **filas** ortogonales

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I} \qquad \mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$$

Situaciones sobredeterminadas

Sistemas **sobredeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m > n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso **U** tiene **todas** sus columnas ortogonales

Situaciones subdeterminadas

Sistemas **subdeterminados** tienen matrices $m \times n$ con $m < n$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \underbrace{\begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & w_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ v_{12} & v_{22} & \cdots & v_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1n} & v_{2n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^T}$$

En este caso

- $w_j = 0$ para $j = m+1, \ldots n$, y sus correspondientes columnas $\underline{\mathbf{u}}_{\cdot j} = \underline{\mathbf{0}}$.
- Únicamente las primeras m columnas de $\mathbf{U}$ son ortogonales.

Unicidad de DVS

- DVS es una descomposición única excepto por
  - permutaciones de las columnas correspondientes de $\mathbf{U}$, elementos de $\mathbf{W}$ y columnas de $\mathbf{V}$ (o filas de $\mathbf{V}^T$)
  - rotaciones ortogonales entre columnas de $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$ cuyos elementos correspondientes en $\mathbf{W}$ son idénticos (por ejemplo, multiplicando dichas columnas por -1)
- Resultados de DVS no necesariamente aparecen en orden *canónico*, así que se deben permutar las columnas de las matrices para que la diagonal de $\mathbf{W}$ tenga valores singulares en orden decreciente.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.

¿Qué es un vector?

- En física, se introducen vectores como entidades matemáticas con magnitud y dirección.
- En ingeniería el concepto de vector se asocia a una tupla de n componentes, por ejemplo $[x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.
- Formalmente, un **vector** es un elemento de un **espacio lineal** o **espacio vectorial**.

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:

Espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\mathbb{V}$ se denomina **espacio vectorial** o **lineal** sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) si

- para una operación de adición vectorial en $\mathbb{V}$, denotada $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$, con $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{V}$ se cumple que $(\mathbb{V}, \{+\})$ es un grupo abeliano; y
- para una operación de multiplicación escalar en $\mathbb{V}$, denotada como $a\underline{\mathbf{x}}$, con $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$ y $a \in \mathbb{F}$ se cumplen los siguientes axiomas:
  - $a\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{V}$. ($\mathbb{V}$ es cerrado con respecto a la multiplicación escalar).
  - $a(b\underline{\mathbf{x}}) = (ab)\underline{\mathbf{x}}$. (Asociatividad de la multiplicación escalar en $\mathbb{V}$).
  - Si 1 representa el elemento neutro multiplicativo del cuerpo $\mathbb{F}$ entonces $1\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}$. (Neutralidad de uno).
  - $a(\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}) = a\underline{\mathbf{x}} + a\underline{\mathbf{y}}$. (Distributividad con respecto a la adición vectorial).
  - $(a + b)\underline{\mathbf{x}} = a\underline{\mathbf{x}} + b\underline{\mathbf{x}}$. (Distributividad con respecto a la adición del cuerpo $\mathbb{F}$).

Combinación lineal

- El vector $\underline{\mathbf{x}}$ es una **combinación lineal** de los vectores $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n$ si

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

  con $c_i \in \mathbb{F}$.
- Ya vimos esto en la forma $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{U}\underline{\mathbf{c}}$:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 & \underline{\mathbf{u}}_2 & \ldots & \underline{\mathbf{u}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Independencia lineal

El conjunto $\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$ es:

- **linealmente dependiente** si algún $\underline{\mathbf{u}}_i$ es una combinación lineal de otros elementos de $\mathcal{U}$.
- **linealmente independiente** o **libre** si

$$c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$$

  solo con $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Independencia lineal

Consecuencias

- un conjunto que contiene un solo vector, es libre si el vector es no nulo,
- el vector nulo $\underline{\mathbf{0}}$ no forma parte de ningún sistema libre,
- todo subconjunto de un sistema libre es también libre,
- el número máximo de vectores de un sistema libre es igual a la **dimensión** de dichos vectores.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores
$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$
si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
  - se suma un generador con otro,

Generación de espacios

- Un espacio lineal $\mathbb{V}$ se dice **engendrado** por el conjunto de vectores

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\} \subset \mathbb{V}$$

  si contiene **todas** las combinaciones lineales de los vectores de $\mathcal{U}$, al que se denomina entonces **conjunto generador** del espacio (ingl. *to span a space*).
- A cada elemento del conjunto $\mathcal{U}$ se le denomina en este contexto **vector generador**.
- Este espacio no varía si
  - se multiplica cualquier vector generador por un escalar no nulo,
  - se suma un generador con otro,
  - si se suprimen los generadores que son una combinación lineal de los demás.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.

Subespacio

El subconjunto $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ es un **subespacio** de $\mathbb{V}$ si es cerrado ante la suma vectorial y la multiplicación escalar.

Los subespacios tienen las siguientes propiedades:

- Todo espacio lineal $\mathbb{V}$ contiene al menos dos subespacios: el mismo $\mathbb{V}$ y $\{\underline{\mathbf{0}}\}$.
- La intersección $\mathbb{W}_1 \cap \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ es a su vez un subespacio lineal.
- La unión $\mathbb{W}_1 \cup \mathbb{W}_2$ de dos subespacios lineales $\mathbb{W}_1$ y $\mathbb{W}_2$ del mismo espacio lineal $\mathbb{V}$ **no** necesariamente es un subespacio lineal.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.

Base

- $\mathcal{U}$ es una **base** de $\mathbb{V}$ si los vectores generadores $\underline{\mathbf{u}}_i \in \mathcal{U}$ son linealmente independientes.
- Todo espacio lineal $\mathbb{V} \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ posee al menos una base.
- Si existen varias bases, todas contienen el mismo número de vectores generadores.
- Este número de vectores de la base es la **dimensión** del espacio lineal.

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,

Teorema Fundamental del Álgebra Lineal

Para un espacio $\mathbb{V}$ con n dimensiones

1. toda base de $\mathbb{V}$ tiene exactamente n elementos,
2. todo subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{V}$ tiene a lo sumo n elementos y corresponde a una base de $\mathbb{V}$ si y solo si tiene exactamente n elementos,
3. cualquier subconjunto de $\mathbb{V}$ que actúa como conjunto generador de $\mathbb{V}$ debe tener al menos n elementos y es una base si y solo si tiene exactamente n elementos,
4. si los elementos de una determinada base en $\mathbb{V}$ se toman en un **orden determinado**, cualquier elemento de $\mathbb{V}$ puede entonces ser representado por una secuencia única de **coordenadas**.

Unicidad de coeficientes

El último punto indica que si $\mathbb{V}$ tiene como base a

$$\mathcal{U} = \{\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{u}}_n\}$$

entonces un vector

$$\underline{\mathbf{x}} = c_1\underline{\mathbf{u}}_1 + c_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + c_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

puede representarse utilizando tan solo los coeficientes c_i y manteniendo fija la base: $\underline{\mathbf{x}} = [c_1, c_2, \ldots, c_n]^T$.

Unicidad de coeficientes

Ninguna otra secuencia puede representar con la misma base al vector $\underline{\mathbf{x}}$, puesto que si existiese alguna otra representación equivalente

$$\underline{\mathbf{x}} = d_1\underline{\mathbf{u}}_1 + d_2\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + d_n\underline{\mathbf{u}}_n$$

entonces la diferencia de ambas representaciones debería ser cero y

$$(d_1 - c_1)\underline{\mathbf{u}}_1 + (d_2 - c_2)\underline{\mathbf{u}}_2 + \ldots + (d_n - c_n)\underline{\mathbf{u}}_n = \underline{\mathbf{0}}$$

se cumple solo si $d_i = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ por el requisito de que la base $\mathcal{U}$ debe ser linealmente independiente.

Mapeo lineal

- Sea el sistema

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

  con una matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $m \times n$, un vector $\underline{\mathbf{x}}$ de n dimensiones, y un vector $\underline{\mathbf{b}}$ de m dimensiones.
- La matriz $\mathbf{A}$ **mapea** o **transforma** linealmente el vector n-dimensional $\underline{\mathbf{x}}$ a otro vector m-dimensional $\underline{\mathbf{b}}$, pues se realiza con $\underline{\mathbf{x}}$ una combinación lineal de sus vectores columna
- La dimensión del espacio vectorial de las *imágenes* $\underline{\mathbf{b}}$ puede ser menor, igual o mayor que la dimensión del espacio vectorial original que contiene a $\underline{\mathbf{x}}$, pero es igual a la dimensión del espacio que contiene a las columnas de $\mathbf{A}$.

Espacio columna y rango

- Sistema $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ tiene solución siempre que $\underline{\mathbf{b}}$ se encuentre en el **espacio columna** o **alcance** de la matriz $\mathbf{A}$ (ingl. *range*).
- El espacio columna o alcance es el espacio **engendrado** por las n columnas de $\mathbf{A}$:

$$c_1\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 1} + c_2\underline{\mathbf{a}}_{\cdot 2} + \cdots + c_n\underline{\mathbf{a}}_{\cdot n} \in C(\mathbf{A}) \qquad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

- El espacio columna $C(\mathbf{A})$ es un **subespacio** de $\mathbb{R}^m$, que corresponde al espacio de donde se toma cada columna de $\mathbf{A}$
- El número de columnas linealmente independientes, es decir, la dimensión del espacio columna $C(\mathbf{A})$ se denomina **rango** de la matriz $\mathbf{A}$ (ingl. *rank*).
- Si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ entonces el rango estará entre 1 y $\text{mín}(n, m)$

Espacio nulo (1)

- El sistema
$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$
tiene la solución trivial $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.
- Si $\underline{\mathbf{x}}_1 \neq \underline{\mathbf{0}}$ soluciona el sistema anterior, entonces $c\underline{\mathbf{x}}_1$ también lo hace, pues
$$\begin{aligned}\mathbf{A}(c\underline{\mathbf{x}}_1) &= \\ c(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1) &= \\ c\underline{\mathbf{0}} &= \underline{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

Espacio nulo (2)

- Si también $\underline{\mathbf{x}}_2$ soluciona el sistema anterior entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(c_1\underline{\mathbf{x}}_1 + c_2\underline{\mathbf{x}}_2) &= \\ c_1(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1) + c_2(\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_2) &= \\ c_1\underline{\mathbf{0}} + c_2\underline{\mathbf{0}} &= \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

- Por las dos propiedades anteriores el conjunto de todos los vectores $\underline{\mathbf{x}}$ que satisfacen

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$$

constituyen un subespacio vectorial del espacio $\mathbb{R}^n$ (que contiene a todos los $\underline{\mathbf{x}}$), y se denomina **espacio nulo** de $\mathbf{A}$.

Espacio nulo (3)

- La dimensión del espacio nulo de $\mathbf{A}$ se denomina **nulidad** de $\mathbf{A}$
- La nulidad puede tomar un valor desde cero hasta n.
- La suma del rango de $\mathbf{A}$ más su nulidad es igual a n (número de columnas de $\mathbf{A}$)

Solución única

- Si $\mathbf{A}$ es cuadrada $n \times n$ y con rango n entonces $\mathbf{A}$ es no-singular e invertible; $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ tiene una única solución para cada $\underline{\mathbf{b}}$ y solo el $\underline{\mathbf{0}}$ se mapea a $\underline{\mathbf{0}}$ (dimensión del espacio nulo es cero).
- En este caso **LU** es el método de preferencia

Multiples o no soluciones

Si **A** tiene nulidad mayor que cero (rango menor que n) pueden pasar dos cosas:

- la mayoría de vectores $\underline{\mathbf{b}}$ no producen solución
- algunos vectores $\underline{\mathbf{b}}$ tienen como solución un subespacio completo

Relación entre DVS con los espacios de una matriz

La descomposición en valores singulares construye explícitamente

- base vectorial del espacio columna (columnas de $\mathbf{U}$ con valores singulares no nulos)
- base vectorial del espacio nulo (columnas de $\mathbf{V}$ con valores singulares correspondientes nulos)

DVS de matrices cuadradas

- Si **A** es cuadrada, entonces **U**, **W** y **V** también lo son.
- Puesto que las matrices son ortogonales o diagonales, el cálculo de la matriz inversa es directa:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\left[\mathrm{diag}(1/w_j)\right]\mathbf{U}^T$$

- Único problema posible $w_j = 0$ o ≈ 0
- Número de condición de la matriz **A** se define ahora como $\nu = \max_j(w_j)/\min_i(w_i)$
- Si $\nu \to \infty$ entonces **A** es singular
- Si $\nu \gg 0$ y $1/\nu \approx \mathscr{E}$ entonces **A** es mal condicionada

Solución de sistema homogéneo

- El sistema homogéneo es planteado como $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$
- Cualquier combinación lineal de las columnas de $\underline{\mathbf{V}}$ con correspondiente valor singular $w_j = 0$ es solución a este sistema.

Solución de sistema con nulidad mayor que cero (1)

Para

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

- Si $\underline{\mathbf{b}}$ está en el alcance de $\mathbf{A}$ (en su espacio columna) y la nulidad de $\mathbf{A}$ no es cero, entonces sistema tiene infinitas soluciones, pues si $\underline{\mathbf{x}}_1$ es una solución, entonces si se suma con cualquier vector $\underline{\mathbf{n}}$ del espacio nulo:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{n}}) &= \mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{A}\underline{\mathbf{n}} \\ &= \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{0}} \\ &= \underline{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

Solución de sistema con nulidad mayor que cero (2)

- Usualmente se busca la solución de menor norma $\|\underline{\mathbf{x}}\|_2$, que se obtiene fácilmente de

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\left[\operatorname{diag}(1/w_j)\right]\left(\mathbf{U}^T\underline{\mathbf{b}}\right)\end{aligned}$$

donde para $w_j = 0$ se sustituye en la matriz diagonal inversa $1/w_j \to 0$, anulando así todo aporte del espacio nulo.

Solución fuera del alcance de $\mathbf{A}$

Para

$$\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$$

Si $\underline{\mathbf{b}}$ está fuera del alcance de $\mathbf{A}$, entonces

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^{-1}\underline{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{V}\left[\operatorname{diag}(1/w_j)\right]\left(\mathbf{U}^T\underline{\mathbf{b}}\right) \end{aligned}$$

con $1/w_j \to 0$ si $w_j = 0$ encuentra "una" solución que minimiza

$$r \equiv |\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}|$$

con r el resíduo de la solución.

Seudoinversa de **A**

El cálculo de la matriz inversa utilizando DVS:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\left[\operatorname{diag}(1/w_j)\right]\mathbf{U}^T$$

forzando $1/w_j \to 0$ si $w_j = 0$ se denomina la inversa de Moore-Penrose o la seudoinversa de **A**, y se denota con $\mathbf{A}^+$.
En conclusión:

- Si todo $w_j \neq 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\underline{\mathbf{b}}$ resuelve el sistema no singular.
- Si algunos $w_j = 0$, la solución $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\underline{\mathbf{b}}$ devuelve la "mejor" solución en el sentido de que retorna el vector $\underline{\mathbf{x}}$ más pequeño que resuelve el sistema, o aquel que produce el menor residuo si no existe solución.

Ejemplo: Matriz con nulidad (1)

Utilizando en octave `[U,W,V]=svd(A)` se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

Ejemplo: Matriz con nulidad (2)

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0,59684 & -0,06151 & -0,80000 \\ -0,10252 & 0,99473 & 0,00000 \\ -0,79578 & -0,08201 & 0,60000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 7,10741 & 0 & 0 \\ 0 & 1,21848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0,699784 & -0,420676 & -0,577350 \\ -0,014424 & 0,816369 & -0,577350 \\ -0,714208 & 0,395693 & 0,577350 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Matriz con nulidad (3)

- Con $\underline{\mathbf{b}} = [9; 0; 12]^T$ la solución a $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ es $\underline{\mathbf{x}} = [1; -2; 2]^T$
- La nulidad de $\mathbf{A}$ es 1 y el espacio nulo lo engendra $\underline{\mathbf{n}} = [-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3]$
- Si se hace $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{x}} + c\underline{\mathbf{n}}$ para cualquier c real se obtiene el mismo $\underline{\mathbf{b}}$ con $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}}'$

Ejemplo: Compresión de matrices (1)

- Con $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T$ puede aproximarse $\mathbf{A}$ descartando vectores asociados a valores singulares más pequeños:

$$\mathbf{A} \approx \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{V}^T$$

  con $\tilde{\mathbf{W}} = \operatorname{diag}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots, \tilde{w}_n)$ donde

$$\tilde{w}_i = \begin{cases} w_i & \text{si } w_i > \tau \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

- Se descartan entonces últimas columnas de $\mathbf{V}$ y de $\mathbf{U}$

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux