Trazadores

Lección 15

Dr. Pablo Alvarado Moya

CE3102 Análisis Numérico para Ingeniería
Área de Ingeniería en Computadores
Tecnológico de Costa Rica

I Semestre 2018

Contenido

Trazadores

Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de n-ésimo orden que pasa por **todos** $n+1$ puntos.

Trazadores
Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de n-ésimo orden que pasa por **todos** $n + 1$ puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.

Trazadores

Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de n-ésimo orden que pasa por **todos** $n+1$ puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.
- Ventaja: eliminan oscilaciones entre puntos muestreados.

Trazadores

Splines

- Métodos anteriores: **un** polinomio de n-ésimo orden que pasa por **todos** $n + 1$ puntos.
- **Splines** o **Trazadores** usa polinomios de grado inferior en subconjuntos de puntos.
- Ventaja: eliminan oscilaciones entre puntos muestreados.
- Objetivo es lograr que subconjuntos adyacentes usen polinomios que además se conectan "suavemente", esto es, que tienen igual(es) derivada(s) en los puntos de conexión.

Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \to f(x_0) \quad x_1 \to f(x_1) \quad x_2 \to f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \to f(x_n)$$

Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \to f(x_0) \quad x_1 \to f(x_1) \quad x_2 \to f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \to f(x_n)$$

- El segmento entre x_i y x_{i+1} sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)}_{m_i}(x - x_i)$$

Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \to f(x_0) \quad x_1 \to f(x_1) \quad x_2 \to f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \to f(x_n)$$

- El segmento entre x_i y x_{i+1} sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)}_{m_i}(x - x_i)$$

- Todos los segmentos en conjunto aproximan a $f(x)$

Trazadores lineales

- Unen los puntos (o **nodos**) por segmentos de recta:

$$x_0 \to f(x_0) \quad x_1 \to f(x_1) \quad x_2 \to f(x_2) \quad \cdots \quad x_n \to f(x_n)$$

- El segmento entre x_i y x_{i+1} sigue el patrón de la interpolación lineal:

$$f(x) = f(x_i) + \underbrace{\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}\right)}_{m_i}(x - x_i)$$

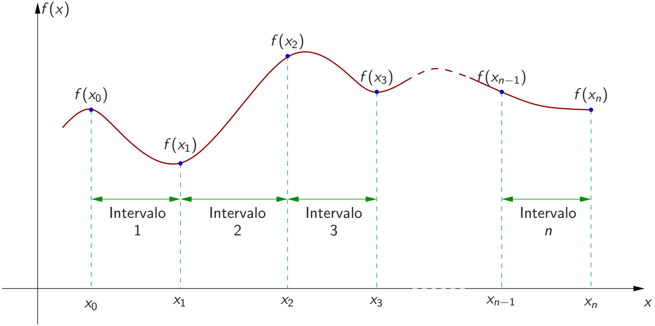
- Todos los segmentos en conjunto aproximan a $f(x)$
- Desventaja: Solo la función es contínua; la primera derivada es discontinua en los nodos.

Trazadores cuadráticos

- En general, para que m-ésima derivada sea contínua, se requieren polinomios de $(m+1)$-ésimo orden.
- Trazadores cuadráticos: Permiten que tanto la función como la primera derivada sean continuas.
- Desventaja: discontinuidad de la segunda derivada es perceptible.
- Ventaja: permiten comprender el principio de operación de los trazadores.
- En cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ la función se interpola con

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Trazadores cuadráticos (1)



Hay $n+1$ datos, n intervalos c/u con tres incógnitas (a_i, b_i, c_i)
$\Rightarrow$ hay $3n$ incógnitas.

Trazadores cuadráticos (2)

- Los valores de la función en los nodos (dos polinomios adyacentes) deben ser iguales.

$$a_i x_i^2 + b_i x_i + c_i = f(x_i)$$
$$a_{i+1} x_i^2 + b_{i+1} x_i + c_{i+1} = f(x_i)$$

para $i = 1 \ldots n-1$. Esto proporciona $2 \times (n-1)$ ecuaciones.

- Las evaluaciones en los extremos proveen dos ecuaciones más:

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

- (hasta ahora, $2n$ ecuaciones).

Trazadores cuadráticos (3)

- Las primeras derivadas en los nodos deben ser iguales, y como la derivada en el i-ésimo intervalo es

$$f'(x) = 2a_i x + b_i$$

entonces

$$2a_i x_i + b_i = 2a_{i+1} x_i + b_{i+1}$$

con $i = 1 \ldots n-1$ que provee otras $n-1$ condiciones.

- (Total hasta ahora: $3n - 1$ ecuaciones)
- Falta una condición más. Arbitrariamente se elige $f''(x_0) = 0$ que produce:

$$2a_1 = 0$$

y por tanto $a_1 = 0$

¿Cómo se puede plasmar lo anterior en un sistema de ecuaciones lineal?

Sistema de ecuaciones

$$
\begin{bmatrix}
x_0^2 & x_0 & 1 & & & & \cdots & & & \\
x_1^2 & x_1 & 1 & & & & \cdots & & & \\
 & & & x_1^2 & x_1 & 1 & \cdots & & & \\
2x_1 & 1 & & -2x_1 & -1 & & \cdots & & & \\
 & & & x_2^2 & x_2 & 1 & \cdots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \cdots & x_n^2 & x_n & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_1) \\ 0 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}
$$

Trazadores cúbicos

- Cada intervalo entre dos nodos se interpola con un polinomio

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Para $n+1$ datos hay n intervalos y por tanto en total hay $4n$ incógnitas.
- Se necesitan plantear $4n$ ecuaciones

$4n$ ecuaciones (1)

1. Función en límite común a dos polinomios debe ser igual ($2n - 2$ ec.)

$$f_i(x_i) = f(x_i) \qquad f_{i+1}(x_i) = f(x_i)$$

2. Función pasa por puntos extremos (2 ec.)

$$f_1(x_0) = f(x_0) \qquad f_n(x_n) = f(x_n)$$

3. Primeras derivadas en nodos interiores son iguales ($n - 1$ ec.)

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)$$

4. Segundas derivadas en nodos interiores son iguales ($n - 1$ ec.)

$$f_i''(x_i) = f_{i+1}''(x_i)$$

5. Arbitraria: segunda derivada en extremos es cero (2 ec.)

Solución directa

Con lo anterior se plantea sistema de ecuaciones utilizando $n+1$ puntos con $4n$ ecuaciones.

Ejercicio

Plantee el sistema $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$

El sistema se resuelve empleando cualquiera de los métodos analizados.

Optimizando los trazadores cúbicos

- Sistema anterior usa matrices de $4n \times 4n$
- Algoritmos de solución de $\mathbf{A}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ son $\mathcal{O}\left(n^3\right)$
- Se replanteará otro algoritmo $\mathcal{O}\left(n^2\right)$, que produce además una matríz tridiagonal
- Factor de aceleración será $64n$

Replanteamiento (1)

Trazadores cúbicos

- El polinomio cúbico es

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- Tiene como primera derivada

$$f_i'(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$$

- y segunda derivada

$$f_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$$

  que tiene forma de ecuación lineal

- Se desea que la segunda derivada sea contínua en los nodos

Replanteamiento (2)

Trazadores cúbicos

- La segunda derivada está dada por segmentos de recta, que se interpolan con polinomios de Lagrange:

$$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1})\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

- Integrando lo anterior se obtiene:

$$f_i'(x) = \left[f_i''(x_{i-1})\frac{(x - x_i)^2}{2(x_{i-1} - x_i)} + C\right] + \left[f_i''(x_i)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2(x_i - x_{i-1})} + D\right]$$

Replanteamiento (3)
Trazadores cúbicos

- Integrando de nuevo se obtiene:

$$f_i(x) = \left[f_i''(x_{i-1})\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + C(x-x_i)\right] + \left[f_i''(x_i)\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} + D(x-x_{i-1})\right]$$

- Considerando que $f(x) = f(x_{i-1})$ en x_{i-1} y $f(x) = f(x_i)$ en x_i se obtiene:

$$C = \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}{6}$$

$$D = \frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}$$

Replanteamiento (4)

Trazadores cúbicos

- Finalmente se tiene el siguiente polinomio cúbico:

$$
\begin{aligned}
f_i(x) = & f_i''(x_{i-1})\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f_i''(x_i)\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} + \\
& \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}{6}\right](x-x_i) + \\
& \left[\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x-x_{i-1})
\end{aligned}
$$

que tiene solo dos términos desconocidos: $f_i''(x_{i-1})$ y $f_i''(x_i)$

Replanteamiento (5)
Trazadores cúbicos

- Para encontrar dichos términos se utiliza

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)$$

- Se sabe que

$$\begin{aligned}f_i'(x) =& f_i''(x_{i-1})\frac{(x-x_i)^2}{2(x_{i-1}-x_i)} + \frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}{6} + \\ & f_i''(x_i)\frac{(x-x_{i-1})^2}{2(x_i-x_{i-1})} + \frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}\end{aligned}$$

Replanteamiento (6)

Trazadores cúbicos

- Con lo anterior se obtiene finalmente

$$
\begin{aligned}
&(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1})\\
=&6\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - 6\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}
\end{aligned}
$$

Plantee el sistema de ecuaciones lineales considerando que en ambos extremos la segunda derivada se hace (arbitrariamente) cero

Sistema de ecuaciones para trazadores bicubicos
Planteamiento general

$$
\begin{bmatrix}
x_1-x_0 & 2(x_2-x_0) & x_2-x_1 & & & & \\
 & x_2-x_1 & 2(x_3-x_1) & x_3-x_2 & & & \\
 & & x_3-x_2 & 2(x_4-x_2) & x_4-x_3 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & & x_{n-1}-x_{n-2} & 2(x_n-x_{n-2}) & x_n-x_{n-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
f''(x_0) \\ f''(x_1) \\ f''(x_2) \\ \vdots \\ f''(x_n)
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
6\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - 6\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\
6\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - 6\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\
6\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} - 6\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \\
\vdots \\
6\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} - 6\frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}}
\end{bmatrix}
$$

El sistema así planteado tiene $n-1$ ecuaciones pero $n+1$ incógnitas.

Sistema de ecuaciones para trazadores bicubicos

Planteamiento para segundas derivadas extremas igual a cero

$$\begin{bmatrix} 2(x_2-x_0) & x_2-x_1 & & & \\ x_2-x_1 & 2(x_3-x_1) & x_3-x_2 & & \\ & x_3-x_2 & 2(x_4-x_2) & x_4-x_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & x_{n-1}-x_{n-2} & 2(x_n-x_{n-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''(x_1) \\ f''(x_2) \\ \vdots \\ f''(x_{n-1}) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 6\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - 6\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ 6\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - 6\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \\ 6\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3} - 6\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \\ \vdots \\ 6\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}} - 6\frac{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}{x_{n-1}-x_{n-2}} \end{bmatrix}$$

El sistema así planteado tiene $n-1$ ecuaciones y $n-1$ incógnitas, pues se asumieron las segundas derivadas en los extremos como nulas.

Aspectos de implementación

1. Se calculan primero las segundas derivadas resolviendo sistema de ecuaciones y con ellas los coeficientes en:

$$
\begin{aligned}
f_i(x) = & f_i''(x_{i-1})\frac{(x-x_i)^3}{6(x_{i-1}-x_i)} + f_i''(x_i)\frac{(x-x_{i-1})^3}{6(x_i-x_{i-1})} + \\
& \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_{i-1}-x_i} - \frac{f_i''(x_{i-1})(x_{i-1}-x_i)}{6}\right](x-x_i) + \\
& \left[\frac{f(x_i)}{x_i-x_{i-1}} - \frac{f_i''(x_i)(x_i-x_{i-1})}{6}\right](x-x_{i-1})
\end{aligned}
$$

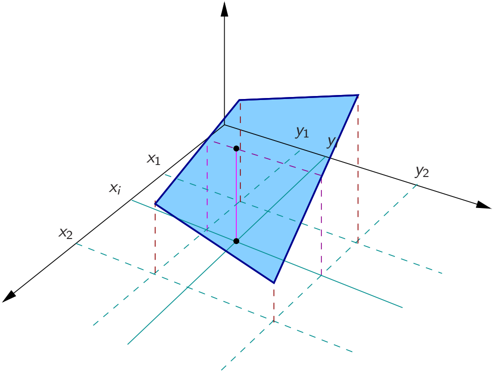
2. Con coeficientes precalculados se interpolan cuantos valores sean necesarios

Interpolación multidimensional

- Extensiones de los métodos unidimensionales a mayor número de dimensiones.
- Extensiones **separables** bidimensionales: se aplica interpolación primero a lo largo de una dimension, y luego en la otra
- Casos usuales en dos dimensiones:
  - Interpolación bilineal
  - Interpolación bicúbica

Interpolación bilineal

Se determina valor de función $f(x_i, y_i)$ a partir de cuatro puntos $f(x_1, y_1)$, $f(x_1, y_2)$, $f(x_2, y_1)$, $f(x_2, y_2)$



Concepto de interpolación bilineal

1. Se estima interpolación lineal en x con $y = y_1$ fijo

$$f(x_i, y_1) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_1)$$

2. Se estima interpolación lineal en x con $y = y_2$ fijo

$$f(x_i, y_2) = \frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2, y_2)$$

3. Entre ambos puntos interpolados, se aplica interpolación lineal en y:

$$f(x_i, y_i) = \frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_i, y_1) + \frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_i, y_2)$$

Interpolación bilineal en una ecuación

Las tres ecuaciones anteriores se sintentizan en una sola con:

$$
\begin{aligned}
f(x_i, y_i) = &\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_1, y_1) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_2}{y_1 - y_2} f(x_2, y_1) \\
&\frac{x_i - x_2}{x_1 - x_2}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_1, y_2) + \frac{x_i - x_1}{x_2 - x_1}\frac{y_i - y_1}{y_2 - y_1} f(x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

Resumen

Este documento ha sido elaborado con software libre incluyendo LaTeX, Beamer, GNUPlot, GNU/Octave, XFig, Inkscape, LTI-Lib-2, GNU-Make y Subversion en GNU/Linux