

分类号_____

密级_____

UDC _____

编号_____

中国科学院研究生院

博士学位论文

多视几何中的最优三角化方法研究

张 强

指导教师_____吴福朝 研究员

申请学位级别工学博士 学科专业名称模式识别与智能系统

论文提交日期2011.10 论文答辩日期_____

培养单位_____中国科学院自动化研究所

学位授予单位_____中国科学院研究生院

答辩委员会主席_____

A Study on Optimal Triangulation in
Multiple View Geometry

Dissertation Submitted to

Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences

in partial fulfillment of the requirements

for the degree of

Doctor of Engineering

by

Zhang Qiang

Pattern Recognition and Intelligent Systems

Dissertation Supervisor: Professor Wu Fuchao

独创性声明

本人声明所提交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确地说明并表示了谢意。

签名：_____ 日 期：_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解中国科学院自动化研究所有关保留、使用学位论文的规定，即：中国科学院自动化研究所有权保留送交论文的复印件，允许论文被查阅和借阅；可以公布论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文。

（保密的论文在解密后应遵守此规定）

签名：_____ 导师签名：_____ 日 期：_____

摘要

计算机视觉的核心问题是三维重建问题，其中利用多视几何的方法估计射影空间中的空间点和直线的问题已经存在很多方法。但这些现存的方法中，有些没有注意到提取图像点和直线时产生的误差，对噪声较为敏感；有些虽然考虑到了测量误差的影响，但计算复杂性太大。本文对射影空间中空间点和直线的三角化方法进行了深入的研究，所完成的工作如下：

1.两视的点三角化方法：基于基本锥面，提出了求解测量点到基本锥面上最近点的最优三角化方法。这种方法虽然仍要求解一元六次方程，但它的欧氏变换不再依赖于测量点，它的方程的次数不再依赖于图像次序。为了减少计算复杂度，基于生成锥面、生成线和 Sampson 序列，又提出了三种满足对极几何约束的次优方法。这三种次优方法的估计精度与最优三角化方法相当，但运算时间却大为减少。

2.多视的点三角化方法：提出了最小化 L_2 -范数几何距离的优化准则。基于该优化准则，提出计算复杂性较小的 Sampson 近似迭代算法；为了进一步减少迭代次数，提出了沿共轭梯度方向的迭代算法。相比黄金标准算法，这两种迭代算法的计算复杂度明显减少，而计算精度几乎与之相同。

3.三视的直线三角化方法：提出了两种新的直线三角化方法。基于 Plucker 坐标表示，提出在满足 Klein 曲面约束下最小化代数距离的次优算法。这种算法得到的代数误差不会超过最小代数误差的两倍。基于图像上新的直线表示，又给出了以点-线-线三焦张量为约束条件最小化测量端点沿测量直线法线方向到估计直线距离的优化准则，并且提出了一种运算时间更短但精度与黄金标准算法几乎相同的迭代算法。

关键词 最优三角化，次优三角化，Sampson 近似，多视三角化，直线三角化

Abstract

3D reconstruction is a key problem in computer vision and many algorithms based on multiple view geometry have been proposed for the 3D point or 3D line reconstruction in projective space. In these existing algorithms, some of them are more sensitive to noise due to not fully taking into account the measurement errors of image point and image line; others are of high computational complexity although the impacts of measurement error are taken into account. This study is focused on 3D point and 3D line reconstruction in projective space. The main work is summarized as follows:

1. Point Triangulation from Two Views: Based on the fundamental cone, a new optimal triangulation framework is proposed, in which the nearest point on fundamental cone to the measure point is searched. Although this triangulation needs finding out the root of 6-degree polynomial, the Euclidean transformation in it doesn't depend on the measured point and the degree of the polynomial doesn't depend on the order of images. To reduce the computational load, three efficient suboptimal algorithms based on generating cone, generating line and Sampson sequence are proposed. Our proposed three suboptimal algorithms can achieve comparable estimation accuracy compared with the optimal triangulation, but with much less computational load.
2. Point Triangulation from Multiple Views: A L_2 -norm distance optimality criterion is proposed. Based on this criterion, a simple Sampson approximation iterative algorithm is introduced for the point triangulation from multiple views. In addition a fast iterative algorithm based on conjugate gradient is also proposed to speedup the iteration. Compared with the Gold Standard algorithm, our proposed two iterative algorithms can achieve comparable estimation accuracy, but with lower computational complexity.
3. Line triangulation from Three Views: Two new algorithms are proposed. Based on Plucker coordinates, the first algorithm minimizes the algebraic distance under Klein quadric constraint to obtain a suboptimal solution. The algebraic distance of the suboptimal solution is less than double of the optimal solution. Via a new line representation in im-

age, the second algorithm minimizes the normal distance from the measured endpoint to the estimated line under point-line-line tensor constraint using an iterative method. This algorithm can achieve comparable estimation accuracy compared with the Gold Standard algorithm, but with much less computational load.

Keywords Optimal triangulation, Suboptimal triangulation, Sampson approximation, Multi-view triangulation, Line triangulation

目录

第一章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 选题意义及研究动机	2
1.3 国内外研究状况	3
1.3.1 摄像机模型及多视的极几何约束	3
1.3.2 两视的点三角化方法的相关工作	8
1.3.3 多视的点三角化方法的相关工作	8
1.3.4 三视的直线三角化方法的相关工作	9
1.4 本文的主要内容及论文结构	10
第二章 两视的最优三角化方法及其次优方法	11
2.1 引言	11
2.2 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法	12
2.3 基本锥面及新的最优三角化方法	14
2.3.1 平移结构	18
2.4 基于生成锥面和生成线的次优三角化方法	20
2.4.1 生成锥面和生成线	20
2.4.2 基于生成锥面的次优三角化方法	21
2.4.3 基于生成线的次优三角化方法	23
2.5 基于 Sampson 序列的次优三角化方法	26
2.5.1 一个簇的 Sampson 序列	26
2.5.2 锥面和椭球面的 Sampson 序列的收敛性	28
2.5.3 基于 Sampson 序列的次优三角化方法	32
2.6 实验	33
2.6.1 模拟实验	33
2.6.2 真实实验	45
2.7 本章小结	47

第三章 多视三角化的迭代算法	49
3.1 引言.....	49
3.2 一种新的优化准则.....	50
3.3 基于 Sampson 近似的迭代算法.....	51
3.4 基于共轭梯度的迭代算法.....	53
3.4.1 $\{\sigma_4^k\}$ 单调递减的充分条件	53
3.4.2 基于共轭梯度的迭代算法.....	54
3.5 实验.....	55
3.5.1 模拟实验.....	56
3.5.2 真实实验.....	59
3.6 本章小结.....	60
第四章 三视的直线三角化方法	61
4.1 引言.....	61
4.2 基于代数距离的次优算法.....	62
4.2.1 Plucker 坐标表示及直线投影矩阵	62
4.2.2 Klein 曲面约束下的最小代数距离问题.....	63
4.2.3 次优算法.....	63
4.2.4 算法分析.....	66
4.3 基于几何距离的迭代算法.....	67
4.3.1 图像上估计直线的法线距离表示.....	67
4.3.2 新的优化准则.....	67
4.3.3 迭代算法.....	68
4.4 实验.....	71
4.4.1 模拟实验.....	71
4.4.2 真实实验.....	76
4.5 本章小结.....	79
第五章 结论与展望	81
参考文献	83
附录 A：命题 2-1 中情况 2, 3 的证明	91
附录 B：两种最优三角化方法的比较.....	95

附录 C: $\det(M), M_1^*, M_2^*$ 中 λ 的系数	97
附录 D: 方程 (4-16) 有解情况讨论	99
附录 E: (4-23) 的一种新的目标函数	103
攻读博士学位期间参与项目和研究成果	i
致 谢	ii

第一章 绪论

1.1 引言

对于视觉感知在人类生活中的重要地位，古人早有定论，汉代刘向就曾经说过“夫耳闻之，不如目见之” [1]，说明人们愿意相信用自己眼睛所看到的事物。研究也表明在人类感知到的外界信息中，80%以上是通过视觉得到的[2]。但也许很多人都不知道，其实我们所看到的外界物体只是在人眼视网膜上形成的二维图像。所看到的三维世界，是我们的大脑通过对二维图像进行加工所得到的。既然二维图像通过人脑的加工可以得到物体的三维形状，那么有人要问能否给计算机输入图像信息使其能够“看见”三维景物呢？这恰恰就是计算机视觉这门学科需要解决的问题。

计算机视觉的主要目的是赋予计算机像人类一样通过二维图像感知三维世界的能力[2,3]。这种感知能力包括辨别三维世界中物体的形状和颜色，确定物体的位置和姿态，以及跟踪物体运动信息等。其实计算机视觉的研究领域远不止这些，它的研究范围既与机器视觉，图像处理相互重叠，又与信号处理，物理学，成像技术，神经生物学，机器学习，人工智能以及自动控制机器人技术等学科密切相关。由于在工农业生产、医疗诊断、地理绘图、机器人和军事等领域的智能系统中占有重要的位置，计算机视觉受到了各国科研人员的重视，成为国际上富有挑战性的重要研究领域。特别是一些先进国家，例如美国等将计算机视觉的研究列为对经济和科学有广泛影响的重大基础问题，并且希望通过对计算机视觉的研究，让计算机和机器人具有与人类相当的视觉能力，进而构建一个整合图像信号、纹理和颜色建模、几何处理和推理以及物体建模等模块的视觉系统[4]。

计算机视觉的研究起源于上世纪六十年代[5]，但直到上世纪七十年代后期，计算机的性能提高到足以处理像图像这样的大规模数据时，才真正得到关注和发展。如今的计算机视觉的基础框架是由 MIT 的 David Marr 教授[6]在上世纪八十年代提出的。他首次从信息处理的角度综合了图像处理，心理物理学，神经生物学以及临床精神病学的研究成果，提出了迄今为止最为完善的理论框架。虽然 Marr 的计算视觉理论还不能完全解决人类的视觉理论问题，并且在实践中也遇到了一些困难。但

经过计算机视觉领域科研工作者的不断改进和发展,如今已经发展出了以 Marr 的计算视觉理论为框架的一整套理论和算法,初步的解决了让计算机构建三维景物的问题。

1.2 选题意义及研究动机

Marr 的计算视觉理论框架的建立具有里程碑式的意义,它使得通过计算解决视觉问题成为可能。时至今日 Marr 理论依然是计算机视觉领域的主流理论。尽管 Marr 的计算视觉理论也会受到人们这样那样的质疑和批评,但 Marr 理论在计算机视觉领域的统治地位却从未动摇。Marr 理论的理论框架分为三个阶段:第一阶段从二维图像中提取基本几何元素或特征得到基元图;第二阶段得到以观察者为中心坐标系的物体的三维形状和空间位置,即 2.5 维描述。第三阶段通过进一步处理得到物体本身某一坐标系下的描述,即三维阶段。从以上三个阶段可以看出 Marr 的计算视觉理论主要强调从二维图像恢复三维物体几何结构的过程(即三维重建)。

上世纪九十年代以来,大量的数学方法被引入计算机视觉领域中,以解决如何描述和计算重建的问题,其中多视几何学的发展尤为迅速[7]。多视几何学用几何方法描述多台摄像机之间的关系,并且在只知道景物图像信息的情况下,能够计算出景物在射影空间,仿射空间和度量空间下的几何结构。

射影空间下的重建是多视几何学重建理论中的重点问题,并且是仿射空间和度量空间重建的基础。射影空间下重建的好坏决定着仿射空间和度量空间重建的好坏。而估计射影空间下点和直线又是射影重建的核心问题。利用点和直线的重建结果不仅可以迭代估计摄像机的射影矩阵,保证射影矩阵的准确性,还可以对射影矩阵的估计结果做出评价。随着 RANSAC 方法的提出[8],保证了估计结果不会受到外点的影响。但原有的算法要么在估计的准确性方面达不到要求,要么在算法的计算复杂度方面达不到要求。所以,结合多视几何学和最优化理论,给出既能满足准确性和又能降低计算复杂度的方法就成了科研工作者研究的重点。对于空间点来说,射影空间中点的重建经常应用于机器人的双目视觉系统中,所以很有必要对两视的点三角化方法进行研究。在一般情况下,我们都会获取摄像机拍摄的多幅图像,

相比两视的点三角化方法，多视的点三角化方法能得到更准确的重建结果，但如何在保证准确性的同时降低多视三角化方法的计算复杂度是一个值得研究的问题。在人造场景中，存在着大量的直线。相较空间点，这些直线具有抗遮挡、测量误差小等优点，而且直线含有更多的物体结构信息，所以研究射影空间的直线三角化方法也受到了广泛的关注。特别是研究三台摄像机配置下直线重建可以为多视的直线重建打下基础。为此，我们着重研究了两视和多视的点三角化方法以及三视的直线三角化方法。

1.3 国内外研究状况

1.3.1 摄像机模型及多视的极几何约束[9]

摄像机模型

这里定义的摄像机模型为有限摄像机模型，主要针对常用的带有 CCD 传感器的摄像机。图 1-1 给出了基本针孔模型，其中 O_c 为摄像机中心（光心），它到图像平面 π 上的距离 f 称为焦距，它在图像平面 π 上的垂足 p 称为主点。空间点 X_c 的成像过程为以 O_c 为端点通过 X_c 的射线与图像平面 π 交于点 m 。

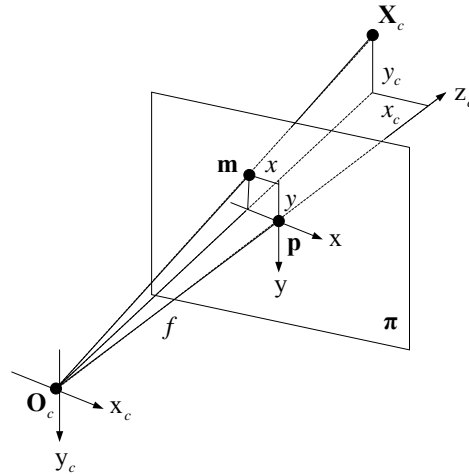


图 1-1 基本针孔模型

在针孔模型下，如果空间点 X_c 在摄像机坐标系中的欧氏坐标为 $(x_c, y_c, z_c)^T$ ，则通过相似三角形原理，得到对应图像点 m 在图像坐标系中的坐标为 $(x, y)^T$

$$\begin{aligned} x &= \frac{fx_c}{z_c} \\ y &= \frac{fy_c}{z_c} \end{aligned} \quad (1-1)$$

又可表述为矩阵形式

$$z_c \mathbf{m} = \begin{pmatrix} fx_c \\ fy_c \\ z_c \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{X}_c \quad (1-2)$$

其中 $\mathbf{m} = (x, y, 1)^T$ ， $\mathbf{X}_c = (x_c, y_c, z_c, 1)^T$ ，分别为空间点和图像点的齐次坐标，

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为针孔摄像机矩阵。

(1-1) 式假设图像平面上的坐标原点在图像的左上角，但要将原点移至摄像机主点 $\mathbf{p} = (x_0, y_0, 1)^T$ 还需在图像平面上进行平移变换。此时，摄像机的投影关系变为

$$z_c \mathbf{m} = \begin{pmatrix} fx_c + z_c x_0 \\ fy_c + z_c y_0 \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & f & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_c = \mathbf{P} \mathbf{X}_c \quad (1-3)$$

若记 $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f & 0 & x_0 \\ 0 & f & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，则 (1-3) 还可以写为更简洁的形式 $z_c \mathbf{m} = \mathbf{K}(\mathbf{I} | \mathbf{0}) \mathbf{X}_c$ 。其中称 \mathbf{K}

为摄像机的内参数矩阵。

CCD 摄像机所获取的图像为离散化的数字图像，如果离散化后像素为平行四边形，并且一边长为 d_x 平行于 u 轴，另一边长为 d_y 与 u 轴夹角为 θ ，则离散化后的坐标 $(u, v, 1)^T$ 为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/d_x & -\cot\theta/d_x & 0 \\ 0 & \sin\theta/d_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1-4)$$

由此可以得到摄像机内参矩阵的更为一般的表达形式 $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} f_x & s & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ，其中

$f_x = f/d_x$ ， $f_y = f \sin\theta/d_y$ 称为 u 轴和 v 轴方向的尺度因子，

$(u_0, v_0)^T = ((x_0 - y_0 \tan \theta) / d_x, y_0 \sin \theta / d_y)^T$ 称为 CCD 摄像机的主点， $s = -f \tan \theta / d_x$ 称为 CCD 摄像机的畸变因子。如果夹角 θ 为 90 度，则得到的摄像机内参数矩阵对应像素为矩形的情况。

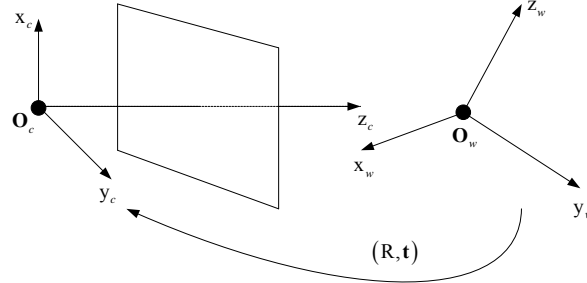


图 1-2 世界坐标系到摄像机坐标系的欧氏变换

如果我们只知道空间点在世界坐标系中的坐标 $\mathbf{X}_w = (x_w, y_w, z_w, 1)^T$ ，而世界坐标系又不是摄像机坐标系，则如图 1-2，需要先将该点的坐标进行旋转和平移等欧氏变换 (R, t) 得到它在摄像机坐标系的坐标再向图像平面进行投影，由此空间点 \mathbf{X}_w 在摄像机坐标系的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1-5)$$

由 (1-3) 到 (1-5)，可以得到摄像机完整的投影过程

$$\mathbf{m} \approx \mathbf{K}(\mathbf{R}, \mathbf{t}) \mathbf{X}_w \quad (1-6)$$

其中 \approx 表示齐次坐标下的相等， $\mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{R}, \mathbf{t})$ 称为摄像机矩阵。

两视极几何约束及其数学描述

两幅图像的极几何约束又被称为对极几何约束，是描述空间点与两台摄像机中心形成的射线与图像平面相交得到的两个图像点的几何约束，如图 1-3。其中的 \mathbf{m} 和 \mathbf{m}' 为图像点；两摄像机中心的连线被称为基线，基线与两图像平面的交点是两个对极点 \mathbf{e} 和 \mathbf{e}' ；空间点与基线构成了对极面 π ，而任意对极面必包含基线；对极面与两图像平面的交线构成了两条对极线 \mathbf{l} 和 \mathbf{l}' 。由于对极线是空间点与摄像机中心的连线的投影，所以对极线必过图像点和对极点，由此构成了对极几何约束。

基本矩阵是描述两幅图像极几何约束的代数形式。下面我们用代数方法推导得到基本矩阵并给出对极几何约束的表达式。假设两台摄像机投影矩阵为 P, P' ，则空间点 X 在第一台摄像机的投影方程为

$$PX \approx m \quad (1-7)$$

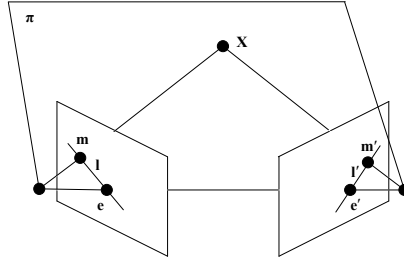


图 1-3 对极几何约束

于是， X 与第一台摄像机中心 C 的反投影线可以表示为

$$X(\lambda) = P^\dagger m + \lambda C \quad (1-8)$$

其中 P^\dagger 为 P 的伪逆。而第二台摄像机的图像上的对极线 l' 正是反投影线 $X(\lambda)$ 的投影，由于 C 在 $X(\lambda)$ 上，它在第二台摄像机的投影点也在 $X(\lambda)$ 的投影线上，于是 $l' = (P'C) \times (P'P^\dagger)m$ ，称为 m 确定的对极线。点 $P'C$ 为第二幅图像的对极点 e' ，所以 m 确定的对极线还可以写成 $l' = [e']_\times (P'P^\dagger)m = Fm$ ，其中 F 称为基本矩阵

$$F = [e']_\times (P'P^\dagger) \quad (1-9)$$

由基本矩阵就可以通过 m 确定的对极线 l' 描述图像点 m' 与 m 之间的几何约束，于是得到如下结论：

结论 1-1 对两幅图像中的任何一对对应点匹配 $m \leftrightarrow m'$ ，都满足条件

$$m'^T F m = 0 \quad (1-10)$$

对极几何约束中没有出现空间点的信息，而是直接给出了两个对应图像点匹配的约束。

三视极几何约束及其数学描述

三幅图像的极几何约束可由图像平面上直线之间的约束关系表示，即射影空间下三个摄像机中心与对应图像面上的三条对应直线匹配构成的三个平面在空间中必

交于同一条直线。三视极几何约束通常用三焦张量进行描述，以下用代数推导得到三焦张量并给出三视极几何约束的数学表达式。

假设有一组对应直线匹配 $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}' \leftrightarrow \mathbf{l}''$ ，并令三台摄像机的投影矩阵为 $\mathbf{P} = (\mathbf{I}, \mathbf{0})$ ， $\mathbf{P}' = (\mathbf{A}, \mathbf{a}_4)$ ， $\mathbf{P}'' = (\mathbf{B}, \mathbf{b}_4)$ ，其中 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 $\mathbf{P}', \mathbf{P}''$ 的前三列， $\mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4$ 为 $\mathbf{P}', \mathbf{P}''$ 的第四列。于是可以得到这三条直线的反投影平面

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{P}^T \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{l} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\pi}' = \mathbf{P}'^T \mathbf{l}' = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{l}' \\ \mathbf{a}_4^T \mathbf{l}' \end{pmatrix}, \boldsymbol{\pi}'' = \mathbf{P}''^T \mathbf{l}'' = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \mathbf{l}'' \\ \mathbf{b}_4^T \mathbf{l}'' \end{pmatrix} \quad (1-11)$$

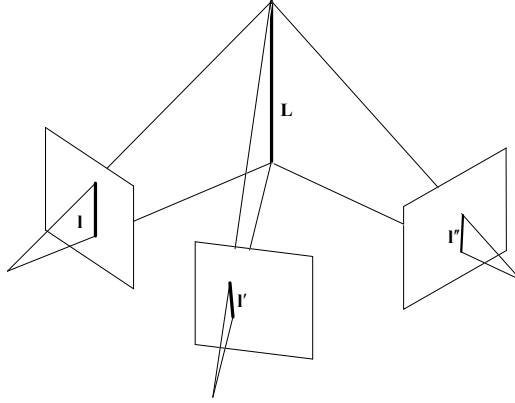


图 1-4 三视极几何约束

由于这三个平面交于空间中同一直线，所以这三个平面相关。三个平面的关系又可以写成 $\boldsymbol{\pi} = \alpha \boldsymbol{\pi}' + \beta \boldsymbol{\pi}''$ 。因为平面 $\boldsymbol{\pi}$ 的最后一项为零，很容易得到 $\alpha = k(\mathbf{b}_4^T \mathbf{l}'')$ ， $\beta = -k(\mathbf{a}_4^T \mathbf{l}')$ ，其中 k 为非零常数，则第一条直线可以用其它两条直线表示为 $\mathbf{l} = \mathbf{l}''^T \mathbf{b}_4 \mathbf{A}^T \mathbf{l}' - \mathbf{l}'^T \mathbf{a}_4 \mathbf{B}^T \mathbf{l}''$ 。对于 \mathbf{l} 的第 i 个元素 l_i 可以写成

$$l_i = \mathbf{l}'^T \mathbf{T}_i \mathbf{l}'' \quad (1-12)$$

其中 $\mathbf{T}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{b}_4^T - \mathbf{a}_4 \mathbf{b}_i^T, i=1,2,3$ ， $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i$ 为 \mathbf{A}, \mathbf{B} 的第 i 列。将三个矩阵的集合 $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3\}$ 称为三焦张量，可以得到三条对应直线匹配关于三焦张量的约束关系：

结论 1-2 三幅图像中的任意三条对应直线匹配 $\mathbf{l} \leftrightarrow \mathbf{l}' \leftrightarrow \mathbf{l}''$ ，都满足条件

$$\mathbf{l} = (\mathbf{l}'^T \mathbf{T}_1 \mathbf{l}'', \mathbf{l}'^T \mathbf{T}_2 \mathbf{l}'', \mathbf{l}'^T \mathbf{T}_3 \mathbf{l}'')^T \quad (1-13)$$

与对极几何约束相同，三视极几何约束同样没有用到空间直线的信息。如果给定直线 \mathbf{l} 上的任意一点 \mathbf{m} ，由于满足 $\mathbf{l}^T \mathbf{m} = 0$ ，结论 1-2 中 (1-13) 式还可以写成 $\mathbf{m} \leftrightarrow \mathbf{l}' \leftrightarrow \mathbf{l}''$ 对应的形式 $(\mathbf{l}'^T \mathbf{T}_1 \mathbf{l}'', \mathbf{l}'^T \mathbf{T}_2 \mathbf{l}'', \mathbf{l}'^T \mathbf{T}_3 \mathbf{l}'') \mathbf{m} = 0$ 。

1.3.2 两视的点三角化方法的相关工作

两视的点三角化方法中首先要给定两台摄像机的射影矩阵，而由对极几何求解射影矩阵是两视情况下最常用的方法，这里我们先来了解对极几何的发展过程。对极几何的数学描述从本质矩阵的引入到基本矩阵的提出经历了长达十几年的发展。早在 1981 年，Louquet-Higgins[10]就首先提出两台标定摄像机下对应点匹配的几何约束关系，即给出了本质矩阵的定义。后来，经过 Huang[11]、Maybank[12]和 Horn[13]等人的努力进一步明确了本质矩阵的一些性质。而在 1992 年，Faugeras[14,15]和 Hartley[16,17]分别发表文章提出两台未标定摄像机下，对应点匹配也具有类似于本质矩阵所描述的约束关系，并定义了基本矩阵，由此使得未知摄像机内参数矩阵时的射影重建成为可能。

对于基本矩阵的求解，科研工作者已经提出了很多方法。Boufama[18]等在 1995 年利用三个空间点在空间中构建的虚拟面提出了较为稳定的计算基本矩阵的方法。后来，张正友在[19]中对当时几乎所有求解基本矩阵的方法进行了总结，并且在 2001 年的文章中给出了基本矩阵参数化方法[20]。由于近几年来，大量的优化方法被引入计算机视觉领域来求解非线性问题。计算满足不满秩约束的基本矩阵成为了研究的热点，Chesi 等[21]就提出了一种利用凸优化来求解基本矩阵的方法。该方法利用 LMI(线性矩阵不等式)[22,23]优化方法求解满足秩 2 约束下代数误差最小的基本矩阵。

在得到基本矩阵后，求解空间点位置就是一个重要问题。Beardsley, Zisserman[24]等首先在 1994 年发表的文章中提出了一个简单的算法，即中点算法 (the mid-point method)，该方法选择两个反投影线之间公垂线的中点做为估计结果。1997 年 Hartley[25]又在文章中对三角化进行了详细的阐述，不仅提出了一系列线性算法，还给出了最小化几何距离的最优三角化方法。除上述方法以外，求解两视的点三角化方法还可以采用黄金标准算法[7]或基于 Sampson 近似[26]的方法。

1.3.3 多视的点三角化方法的相关工作

相比对极几何约束的代数表达形式，两视以上的多视极几何约束[27-32]则更加复杂。为了简化多视极几何约束，Torr[33]在 1997 年发表的文章中将两视的基于 Sampson 近似的方法扩展到多视的情况。但这种算法并不能保证估计结果满足极几何约束。所以多视的点三角化方法，通常并不采用极几何约束，而是直接利用摄像

机矩阵计算射影空间中点的位置。对于 3 幅图像的情况, Stewenius 和 Schaffalitzky[34] 等提出了构造 3 元 6 次方程组, 并用 Groebner 基进行求解的方法。而对于三视以上的情况, 构造方程的方法已经不能解决问题。所以, 对于 3 幅以上图像的点三角化方法, 在文献中都是使用某种优化准则采用迭代优化方法来求解。其中, 最常用的方法是基于 LM 迭代的黄金标准算法[35-37], 并且 Hartley[79]发现在 277000 次独立实验中该方法得到全局解的频率为 99.9%。但为了得到 L_2 -范数优化准则的全局最优解, 文献[38-43] 引入了线性矩阵不等式松弛[34]、半正定松弛[45,46]和分支定界[47]等凸优化方法进行求解。除此以外, 文献[48-51]采用 L_∞ -范数的优化准则避免了多个局部极小值的存在, 减少了计算复杂性。

1.3.4 三视的直线三角化方法的相关工作

三视的极几何约束通常采用三焦张量来进行数学描述, 得到三焦张量后就可以进行三视的射影重建, 所以先给出三焦张量的发展过程。三视极几何约束的提出可以追溯到 1988 年 Weng[52]和 1991 年 Spetsakis[53]发表的两篇解决三台标定摄像机的直线重建问题的文章。Hartley[54]在此基础上又给出了未标定摄像机的直线的射影重建。采用张量符号是首先由 Vieville[55]提出的, 在此之前都使用的是矩阵符号描述。对于三视中对应点的约束是 Shashua[56,57]首先提出的, 其后 Hartley[58,59]证明了由直线求点和景物重建的 Shashua 关系式来自共同的张量, 因此对应点的三焦张量被正式确认。随后多年的工作都集中在对三焦张量性质[28,30,60,61]的讨论。

对于三焦张量的求解问题, 已经得到了很好的解决。其中, 线性算法包括直接线性算法 (DLT), 归一化算法[58,62], 以及吴福朝[63,64]等提出的因子化方法。Hartley[65]和 Torr[33]等人分别在各自的文章中给出估计相容张量的方法。

求得三焦张量, 也就是求得了三台摄像机的射影矩阵, 而三视正好能够给出直线足够的约束, 所以直线三角化方法也就成为研究的热点。但由于直线的空间坐标具有四个自由度[66], 研究直线三角化方法就必须以直线的表示为基础。直线的表示方法[67]分为: 完全表示法和非完全表示法。完全表示法可以表示空间中任意位置的直线, 包括 Plucker 坐标表示[68,69]和点对或面对表示[58,70]; 非完全表示法则不能一次表示直线在空间中的所有位置, 包括方向加最近点表示[71-74]、两投影表示[75]和 Denavit-Hartenberg 参数表示[76]。基于这些直线表示法, 研究人员提出了一系列的直线三角化方法。其中 Wang 和 Huang 等人[74]提出基于方向加最近点的直线表示, 将方向和最近点分开求解的方法。基于 Plucker 坐标表示, Bartoli 和 Sturm

[67]提出了三种线性求解空间直线的方法。基于两投影表示, 文献[7]给出了最小化测量点到估计线之间 L_2 -范数距离的黄金标准算法。

1.4 本文的主要内容及论文结构

本文围绕计算机视觉中两视和多视的点三角化方法以及三视的直线三角化方法展开了较为深入的研究。论文主要工作如下:

1. 两视的最优三角化方法及其次优方法。基于联合图像点空间中的基本锥面, 提出了求解测量点到基本锥面上最近点的最优三角化方法。为了减少计算复杂度, 又提出了三种满足对极几何约束的次优方法, 它们分别是: 基于生成锥面的次优三角化方法, 该方法只需求解一元四次方程; 基于生成线的次优三角化方法, 该方法只需求解一元二次方程; 基于 Sampson 序列的次优三角化方法, 该方法只需迭代求解 Sampson 近似。此外, 还给出了 Sampson 序列收敛性及其收敛于基本锥面上一点的证明。

2. 多视三角化的迭代算法。提出一种新的优化准则: 在空间平面矩阵最小奇异值为零的约束下最小化估计点到测量点的 L_2 -范数距离。基于该优化准则, 提出计算复杂性较小的 Sampson 近似迭代算法; 为了进一步减少 Sampson 近似迭代的迭代次数, 还根据空间平面矩阵最小奇异值单调递减的条件和共轭梯度, 给出了沿共轭梯度方向的迭代算法。

3. 三视的直线三角化方法。提出了两种新的直线三角化方法。基于 Plucker 坐标的直线表示, 提出在满足 Klein 曲面约束的条件下最小化代数距离的次优算法。该算法并不直接求解最小化问题, 而是将该问题转化为求解六个一元十次方程。基于图像上估计直线的法线距离表示, 还提出了以点-线-线三焦张量为约束条件最小化图像上几何距离的优化准则以及一种有效的迭代求解算法。

论文的余下结构如下:

第二章是两视的最优三角化方法及其次优方法。第三章是多视三角化的迭代算法。第四章是三视的直线三角化方法。第五章对本文的工作进行总结并对以后的工作进行展望。

第二章 两视的最优三角化方法及其次优方法

2.1 引言

在计算机视觉中，两视情况下的点三角化方法就是在给定两幅视图的基本矩阵与对应点匹配的情况下，估计射影空间中空间点的过程。从理论上来说求解空间点并不复杂，因为空间点就是对应图像点的反投影线的交点。但由于提取图像点时存在测量误差，这两个反投影线一般并不相交，所以需要对方空间点做出估计。本章将着重讨论两视情况下空间点的估计方法，这里提到的三角化方法均特指为两视的点三角化方法。

对于射影空间中空间点的估计，早在 1994 年 Beardsley 和 Zisserman 等人 [24] 就给出了一个简单的估计方法，称为中点算法（the mid-point method），该方法直接将两条反投影线之间公垂线的中点做为估计结果。但三角化方法估计的空间点位于射影空间中，这时角度和距离没有真实的几何意义，所以中点算法无法给出准确的估计。为此，Hartley 和 Sturm [25] 提出了一系列的方法来对空间点的位置进行估计：为了代数误差最小化，线性算法先利用投影方程构造空间点坐标的线性方程，再对方程中的系数矩阵进行奇异值分解得到空间点的估计；为了近似几何误差最小化，迭代线性算法将空间点到摄像机的深度加入到线性算法的线性方程中迭代求解空间点坐标直到深度不变。虽然这两种算法计算简单，但代数误差和近似几何误差与测量误差无关，所得结果并不理想。文献[7]给出了基于 Sampson 近似的估计方法，将对极几何约束进行线性近似并最小化图像上的几何误差，但它的估计结果并不满足对极几何约束。由此，要想得到准确的估计结果就需要寻找一种满足对极几何约束并且与测量误差密切相关的优化准则进行最小化。为此，Hartley 和 Sturm [25] 假设测量误差服从高斯分布，并根据最大似然估计，提出在对极几何约束下最小化图像上测量点到估计点 L_2 -范数距离的优化准则。因为该准则最小化图像上的几何误差，所以不会受到空间中射影变换的影响。文献[25]中，Hartley 和 Sturm 还给出了求解该准则全局极值解的算法，称为最优三角化方法。该算法由测量点得到一个欧氏变换，再利用该变换将优化准则转化为一元六次方程进行求解。在具体应用中，可以发现在测量点较多时最优三角化方法的计算复杂度较高。

本章对 Hartley 和 Sturm 提出的优化准则进行了进一步的讨论,将描述对极几何约束的基本矩阵变换成了基本锥面,并提出了求解测量点到基本锥面上最近点的最优三角化方法。相比 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法,新的方法虽然也要求解一元六次方程,但它的欧氏变换只依赖于基本矩阵并且方程的次数也不会受到图像次序的影响。为了减少计算复杂度,本章还提出了三种满足对极几何约束的次优三角化方法。其中基于生成锥面的次优三角化方法只用求解一元四次方程,基于生成线的次优三角化方法只用求解一元二次方程。利用 Sampson 近似,本章提出了测量点的 Sampson 序列,证明了序列的收敛性,还给出了基于 Sampson 序列的次优三角化方法。实验表明,三种次优方法的估计精度与最优三角化方法相当,但计算复杂度却大大减少。

本章的结构如下:2.2 节将简要回顾一下 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法;2.3 节在定义基本锥面后给出新的最优三角化方法;2.4 节先给出生成锥面与生成线的概念后又提出与之相关的两种次优三角化方法;2.5 节将介绍 Sampson 序列以及另一种次优三角化方法;2.6 节报道模拟和真实图像的实验结果;最后是本章的小结。

2.2 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法

给定两幅图像上的对应测量点匹配 $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}'$, 以及这两幅图像的基本矩阵 \mathbf{F} , 最优三角化方法就是最小化几何误差

$$C = d^2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) + d^2(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{x}}') \quad (2-1)$$

得到满足对极几何约束 $\bar{\mathbf{x}}'^T \mathbf{F} \bar{\mathbf{x}} = 0$ 的全局极值解 $\bar{\mathbf{x}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{x}}'$ 。这个问题还等价于最小化点线距离

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{l}) + d^2(\mathbf{x}', \mathbf{l}') \quad (2-2)$$

其中 \mathbf{l}, \mathbf{l}' 表示一对对应的对极线。假设 $\bar{\mathbf{l}}, \bar{\mathbf{l}}'$ 为 (2-2) 的全局极值解, 则 $\bar{\mathbf{x}}$ 为 \mathbf{x} 到 $\bar{\mathbf{l}}$ 上的最近点, $\bar{\mathbf{x}}'$ 为 \mathbf{x}' 到 $\bar{\mathbf{l}}'$ 上的最近点。最优三角化方法的主要步骤如表 2-1 所示。

注释:

- (a) 以上算法中, 两个变换矩阵均依赖于对应的测量点匹配。下节将给出一种新的最优三角化方法, 其中变换矩阵与测量点无关。
- (b) 以上算法中, 方程的次数由步骤 6 中哪幅图像进行参数化所决定。也就是说, 给定对应图像点匹配, 用第一幅还是第二幅图像的对极线进行参数化将导

表 2-1 Hartley 和 Sturm 的算法

1. 定义两个变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1 & -y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x' \\ 0 & 1 & -y' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

将两幅图像上的对应点匹配 $\mathbf{x} = (x, y, 1)^T$, $\mathbf{x}' = (x', y', 1)^T$ 分别平移到坐标原点。

2. 用 $T'^{-T}FT^{-T}$ 替代 F 。新的 F 对应于平移后的坐标系。

3. 计算对极点 \mathbf{e}, \mathbf{e}' ，使得 $F\mathbf{e} = \mathbf{0}, \mathbf{e}'^T F = \mathbf{0}$ 。归一化 \mathbf{e} 使得 $e_1^2 + e_2^2 = 1$ ，对 \mathbf{e}' 做同样的处理。

4. 构造旋转矩阵

$$R = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ -e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R' = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & 0 \\ -e'_2 & e'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则其满足 $R\mathbf{e} = (1, 0, f)^T$ ， $R'\mathbf{e}' = (1, 0, f')^T$ 。

5. 用 RFR^T 代替 F 。新的 F 具有如下形式

$$F = \begin{pmatrix} ff'd & -f'c & -fd \\ -fb & a & b \\ -fd & c & d \end{pmatrix}$$

6. 用 t 参数化第一幅图像中的对极线，得到对极线束 $\mathbf{l}(t) = (ft, 1, -t)^T$ ，并且计算第二幅图像中的对极线 $\mathbf{l}'(t) = (-f'(ct+d), at+b, ct+d)^T$ 。将其代入 (2-2) 的目标函数中得到关于 t 的函数

$$C(t) = \frac{t^2}{1 + f^2 t^2} + \frac{(ct+d)^2}{(at+b)^2 + f'^2 (ct+d)^2} \quad (2-3)$$

7. 整理 (2-3)，求解一元六次方程

$$g(t) = t \left((at+b)^2 + f'^2 (ct+d)^2 \right)^2 - (ad-bc) (1 + f^2 t^2)^2 (at+b)(ct+d) = 0$$

得到 t 的六个根。

8. 将 $g(t)$ 的每个根的实部代入目标函数 (2-3)。同时，求解 $t = \infty$ 时 (2-3) 的渐进值，即 $1/f^2 + c^2 / (a^2 + f'^2 c^2)$ 。选择使目标函数 (2-3) 最小的 t 值 t_{\min} 。

9. 计算 t_{\min} 处的两条对极线 $\mathbf{l}(t) \leftrightarrow \mathbf{l}'(t)$ ，并找到线上关于原点的最近点 $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}'$ 。

10. 用 $T^{-1}R^T \bar{\mathbf{x}}$ 和 $T'^{-1}R'^T \bar{\mathbf{x}}'$ 代替 $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}'$ ，使其变换回原始坐标。

11. 利用 DLT 方法得到 $\bar{\mathbf{x}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{x}}'$ 的空间点坐标。

致算法中的方程次数发生变化。例如，当第二幅图像的对极点位于无穷远，但第一幅图像的对极点处于有限远，即 $f' = 0, f \neq 0$ 。如果选择第一幅图像进行参数化则方程次数为 6 次，而选择第二幅图像进行参数化则方程次数为 5 次。从算法角度来看，这样是不合理的。方程的次数应该反映对应测量点匹配的特性，而与采用哪幅图像上的对极线进行参数化无关。下节的算法避免了方程次数对图像选择的依赖，相关的讨论请见附录 B。

2.3 基本锥面及新的最优三角化方法

本小节将定义联合图像点空间中的基本锥面，并基于该锥面给出新的最优算法。

由 Anandan 和 Avidan[77]的研究，对极几何约束等价于如下联合图像点空间中的锥面约束

$$\mathbf{X}^T \Omega \mathbf{X} \triangleq (x, y, x', y', 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ 0 & 0 & F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{11} & F_{12} & 0 & 0 & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & 0 & 0 & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{13} & F_{23} & 2F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2-4)$$

其中 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^T, 1)^T$ ，由对应点匹配 $(x, y, 1)^T \leftrightarrow (x', y', 1)^T$ 定义，是联合图像点空间中的一点， F_{ij} 为基本矩阵 F 的第 (i, j) 个元素，而锥面 Ω 称为基本锥面。在本章中，约定联合图像点空间的点的齐次坐标用大写字母表示，如 \mathbf{X} ，它的非齐次坐标用小写字母表示，如 \mathbf{x} 。对应的测量点匹配则被称为联合图像点空间中的测量点。

很明显，最优三角化方法 (2-1) 等价于如下最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{X}}} d^2(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X}) \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{X}}^T \Omega \bar{\mathbf{X}} = 0 \end{aligned} \quad (2-5)$$

本节将采用如下策略来求解这个最小化问题：

- (a) 由 $F_{2 \times 2}$ 的奇异值分解和两个对极点建立联合图像点空间中的一个欧氏变换 E ，使基本锥面 Ω 变换到其标准形式 $\tilde{\Omega} = E^{-T} \Omega E^{-1}$ ，其中 $F_{2 \times 2}$ 为基本矩阵 F 左上角的 2×2 子矩阵。
- (b) 由上述欧氏变换，可以将 (2-5) 简化成基本锥面的标准形式约束下的最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{X}}} d^2(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{X}') \\ \text{s.t. } \bar{\mathbf{X}}'^T \tilde{\Omega} \bar{\mathbf{X}}' = 0 \end{aligned} \quad (2-6)$$

其中 $\mathbf{X}' = \mathbf{E}\mathbf{X}$ 。

(c) 由 Lagrange 乘子法，将 (2-6) 的最小化问题转化为多项式求根的问题。而多项式的次数由如下的命题给出。

命题 2-1 令矩阵 $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 的秩为 k ，两个奇异值为 $\sigma_1, \sigma_2 (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0)$ ，则有表 2-2 中的结论。

由于在实际应用中情况 1 最为普遍，这里给出情况 1 的证明及其最优解。情况 2、3 的证明请见附录 A。

表 2-2 对极点位置，基本锥面的标准形式和多项式次数的分类表

	$\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 的奇异值	两个对极点的位置	Ω 的标准形式	多项式的次数
情况 1	$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$	都位于有限远处	$\sigma_1(x_3^2 - x_1^2) + \sigma_2(x_4^2 - x_2^2) = 0$	6
$k = 2$	$\sigma_1 = \sigma_2 > 0$		$(x_3^2 - x_1^2) + (x_4^2 - x_2^2) = 0$	2
情况 2	$\sigma_1 > 0, \sigma_2 = 0$	一个位于无穷远处	$(x_3^2 - x_1^2) + 2s(x_2 + x_4) = 0$	5
$k = 1$		都位于无穷远处	$(x_3^2 - x_1^2) + t = 0$	4
情况 3	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$	都位于无穷远处	$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + e = 0$	1
$k = 0$				

情况 1 的证明：令两个对极点为 $\mathbf{e}_1 = (e_1, e_2, 1)^T$ 和 $\mathbf{e}_2 = (e'_1, e'_2, 1)^T$ ，则不难看出对极点对应 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}^T, 1)^T$ 为锥面 Ω 的顶点，其中 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e'_1, e'_2)^T$ 。

为了求解最小化问题 (2-5)，首先给出联合图像点空间中的欧氏变换 \mathbf{E} 及 Ω 的标准形式。因为基本锥面是一个三维锥面并且其顶点 $\mathbf{E} = (\mathbf{e}^T, 1)^T$ 不在无穷远处，它

可以写成 $\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B}\mathbf{e} \\ -\mathbf{e}^T\mathbf{B} & \mathbf{e}^T\mathbf{B}\mathbf{e} \end{pmatrix}$ ，其中 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F}_{2 \times 2}^T \\ \mathbf{F}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$ 。则由变换矩阵

$$T = \begin{pmatrix} I & -\mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-7)$$

即将顶点 E 平移至原点，基本锥面可以写成

$$T^{-T} \Omega T^{-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-8)$$

令 $F_{2 \times 2}$ 奇异值分解为 $U \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2) V^T$ ，则变换矩阵

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V \\ -U & U \end{pmatrix} \quad (2-9)$$

为正交阵，并且很容易的证明 B 可以特征分解为 $B = W \underbrace{\text{diag}(-\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2)}_{\Sigma} W^T$ 。由

此，通过欧氏变换

$$E = \begin{pmatrix} W^T & -W^T \mathbf{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-10)$$

基本锥面可以写成如下标准形式

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= E^{-T} \Omega E^{-1} = \text{diag}(\Sigma, 0) \\ \Sigma &= \text{diag}(-\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2) \end{aligned} \quad (2-11)$$

令 \mathbf{X} 为测量点并且 $\mathbf{X}' = E\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, 1)^T$ ，则 Ω 的标准方程为

$$\sigma_1(x_3^2 - x_1^2) + \sigma_2(x_4^2 - x_2^2) = 0 \quad (2-12)$$

因为欧氏变换保证两点间距离不变，最小化问题 (2-5) 可以简化成

$$\begin{aligned} \min_{\bar{x}} \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - x_i)^2 \\ s.t. \quad \sigma_1(\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1^2) + \sigma_2(\bar{x}_4^2 - \bar{x}_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

由 Lagrange 乘子法可以得到 (2-13) 的 Lagrange 函数

$$L = \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - x_i)^2 + \lambda (\sigma_1(\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1^2) + \sigma_2(\bar{x}_4^2 - \bar{x}_2^2)) \quad (2-14)$$

于是得到 Lagrange 方程

$$\partial_{\bar{x}_1} L = 2(\bar{x}_1 - x_1) - 2\lambda \sigma_1 \bar{x}_1 = 0, \quad (2-14a)$$

$$\partial_{\bar{x}_2} L = 2(\bar{x}_2 - x_2) - 2\lambda \sigma_2 \bar{x}_2 = 0, \quad (2-14b)$$

$$\partial_{\bar{x}_3} L = 2(\bar{x}_3 - x_3) + 2\lambda \sigma_3 \bar{x}_3 = 0, \quad (2-14c)$$

$$\partial_{\bar{x}_4} L = 2(\bar{x}_4 - x_4) + 2\lambda\sigma_2\bar{x}_4 = 0, \quad (2-14d)$$

$$\partial_{\lambda} L = \sigma_1(\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1^2) + \sigma_2(\bar{x}_4^2 - \bar{x}_2^2) = 0 \quad (2-14e)$$

从 (2-14a) 到 (2-14d)，可以得到

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{1-\lambda\sigma_1}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{1-\lambda\sigma_2}, \\ \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{1+\lambda\sigma_1}, \bar{x}_4 = \frac{x_4}{1+\lambda\sigma_2}. \end{aligned} \quad (2-15)$$

将 (2-15) 代入 (2-14e) 中，可以得到关于 λ 的方程

$$\sigma_1 \left(\frac{x_3^2}{(1+\lambda\sigma_1)^2} - \frac{x_1^2}{(1-\lambda\sigma_1)^2} \right) + \sigma_2 \left(\frac{x_4^2}{(1+\lambda\sigma_2)^2} - \frac{x_2^2}{(1-\lambda\sigma_2)^2} \right) = 0.$$

将其整理得到

$$\begin{aligned} s(\lambda) \triangleq & \sigma_1(1+\lambda\sigma_2)^2(1-\lambda\sigma_2)^2 \left((1-\lambda\sigma_1)^2 x_3^2 - (1+\lambda\sigma_1)^2 x_1^2 \right) \\ & + \sigma_2(1+\lambda\sigma_1)^2(1-\lambda\sigma_1)^2 \left((1-\lambda\sigma_2)^2 x_4^2 - (1+\lambda\sigma_2)^2 x_2^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-16)$$

这是一个关于 λ 的六次方程，其系数只依赖于 $F_{2 \times 2}$ 的两个奇异值以及测量点的坐标。而通过将 (2-16) 的实根代入 (2-13) 的目标函数中，可以得到使目标函数最小的值 λ_{\min} ，再由 (2-15) 可以得到 (2-13) 的全局极值点 $\bar{\mathbf{X}}$ 。

如果 $F_{2 \times 2}$ 的两个奇异值相等，即 $\sigma_1 = \sigma_2 > 0$ ，则 (2-13) 变为

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{x}}} & \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - x_i)^2 \\ \text{s.t.} & (\bar{x}_3^2 - \bar{x}_1^2) + (\bar{x}_4^2 - \bar{x}_2^2) = 0 \end{aligned} \quad (2-17)$$

由 Lagrange 乘子法，可得

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{1-\lambda}, \bar{x}_2 = \frac{x_2}{1-\lambda}, \\ \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{1+\lambda}, \bar{x}_4 = \frac{x_4}{1+\lambda}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

则

$$s(\lambda) \triangleq (1-\lambda)^2 (x_3^2 + x_4^2) - (1+\lambda)^2 (x_1^2 + x_2^2) = 0 \quad (2-19)$$

其解为

$$\lambda_1 = \frac{(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_2 - \delta_1}$$

$$\lambda_2 = \frac{(\delta_1 + \delta_2) - 2\sqrt{\delta_1\delta_2}}{\delta_2 - \delta_1}$$

其中 $\delta_1 = x_1^2 + x_2^2, \delta_2 = x_3^2 + x_4^2$ 。

不难证明 λ_2 使得 (2-17) 的目标函数值更小。由 (2-18)，可以得到最优解

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{x_1}{1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right) x_1 \\ \bar{x}_2 = \frac{x_2}{1 - \lambda_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right) x_2 \\ \bar{x}_3 = \frac{x_3}{1 + \lambda_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right) x_3 \\ \bar{x}_4 = \frac{x_4}{1 + \lambda_2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right) x_4 \end{cases} \quad (2-20)$$

得证。 □

情况 1 的最优三角化方法的步骤见表 2-3。而本节算法与 Hartley 和 Sturm 算法的不同之处将在附录 B 中讨论。

表 2-3 新的最优三角化方法（情况 1）

1. 由 $F_{2 \times 2}$ 的奇异值分解和 Ω 的顶点，定义欧氏变换矩阵 E ；
2. 用 $E^{-T}\Omega E^{-1}$ 替换 Ω 并且用 EX 替换 X ；
3. 如果 $F_{2 \times 2}$ 的两个奇异值相等，则由 (2-20) 求得 \bar{X} ，并转到步骤 5。否则，解 (2-16)，得到 λ 的六个根；
4. 将 λ 的实根代入 (2-13) 的目标函数，选择使目标函数值最小的根做为解 λ_{\min} ，并将其代入 (2-15) 得到 \bar{X} ；
5. 用 $E^{-1}\bar{X}$ 替换 \bar{X} ，将坐标系变换为原始坐标系；
6. 用 DLT 方法求解 \bar{X} 对应的空间点坐标。

2.3.1 平移结构

本小节中，将讨论平移结构下的最优三角化方法。一般来说，如果两摄像机之

间只存在平移变换，同样需要求解一元六次方程。但如下两种特殊结构可以使方程简化为线性形式和二次形式。

结构 1: $t_3 = 0$;

结构 2: $t_3 \neq 0, \beta' / \alpha' = \beta / \alpha$ 并且 $\gamma' / \alpha' = \gamma / \alpha$

其中, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ 为两摄像机之间的平移向量, 两摄像机的内参数为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma & u \\ 0 & \beta & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' & u' \\ 0 & \beta' & v' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

结构 1 中, 平移方向平行于图像平面, 摄像机内参数没有限制。这种情况常用于立体视觉系统, 即沿 x 轴或 y 轴平移。结构 2 中, 没有限制平移方向, 但要求摄像机内参数满足某种约束, 例如两摄像机的内参数相同。此处给出以上结论的证明。

因为平移结构中基本矩阵为 $\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-T} [\mathbf{t}]_{\times} \mathbf{K}^{-1}$, 通过直接计算可以得到

$$\mathbf{F}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t_3}{\alpha' \beta} \\ \frac{t_3}{\alpha \beta'} & \frac{t_3}{\beta \beta'} \left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \end{pmatrix} \quad (2-21)$$

结构 1 中, $\mathbf{F}_{2 \times 2} = 0$, 由命题 2-1 的情况 3 可以知道最优三角化求解一个线性方程。

而当 $t_3 \neq 0$, $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 具有如下两个非零奇异值

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sqrt{2}|t_3|}{\sqrt{\left((\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 (1 + (\alpha\beta'\delta)^2) + \left(\left((\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 (1 + (\alpha\beta'\delta)^2) \right)^2 - 4(\alpha\beta\alpha'\beta')^2 \right)}}, \\ \sigma_2 = \frac{\sqrt{2}|t_3|}{\sqrt{\left((\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 (1 + (\alpha\beta'\delta)^2) - \left(\left((\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 (1 + (\alpha\beta'\delta)^2) \right)^2 - 4(\alpha\beta\alpha'\beta')^2 \right)}} \end{cases},$$

其中 $\delta = \frac{1}{\beta\beta'} \left(\frac{\gamma'}{\alpha'} - \frac{\gamma}{\alpha} \right)$ 。因此, $\sigma_1 = \sigma_2$ 当且仅当

$$\left(\left((\alpha\beta')^2 + (\alpha'\beta)^2 (1 + (\alpha\beta'\delta)^2) \right)^2 - 4(\alpha\beta\alpha'\beta')^2 \right) = 0。$$

该方程中 δ^2 的解为

$$\delta^2 = -\left(\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha\beta\alpha'\beta'}\right)^2, \delta^2 = -\left(\frac{\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha\beta\alpha'\beta'}\right)^2。$$

因为 $\delta^2 \geq 0$ ，所以 $\delta = 0$ 并且 $\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$ 。因此， $\sigma_1 = \sigma_2$ 当且仅当 $\beta'/\alpha' = \beta/\alpha$ 并且 $\gamma'/\alpha' = \gamma/\alpha$ 。因此，结构 2 的最优三角化对应命题 2-1 中情况 1 的第二类情形，即求解一个二次方程。

2.4 基于生成锥面和生成线的次优三角化方法

本小节中，首先给出基本锥面 Ω 的生成锥面和生成线，再定义测量点到基本锥面上的两个近似最近点，最后给出这两个近似最近点的求解方法。

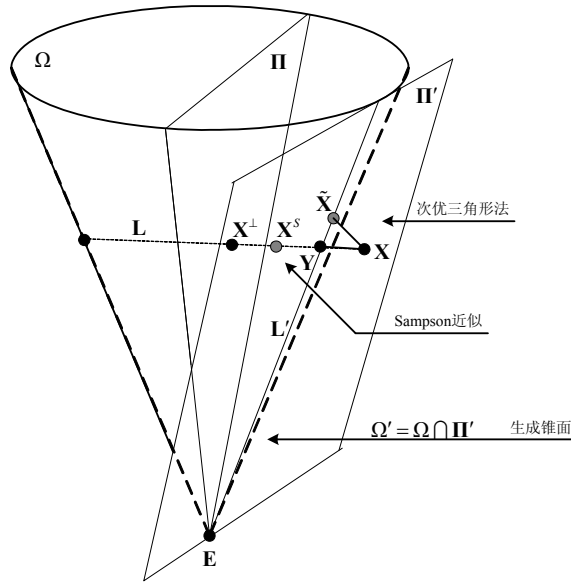


图 2-1 测量点到基本锥面的近似最近点及 Sampson 近似

2.4.1 生成锥面和生成线

假设 $F_{2 \times 2}$ 的秩为 2，给定测量点 \mathbf{X} ，可以得到一个三维超平面， $\Pi = \Omega \mathbf{X}$ ，该超平面为 \mathbf{X} 关于基本锥面 Ω 的极平面。由于 $\Pi^T \mathbf{E} = \mathbf{X}^T \Omega \mathbf{E} = 0$ ，基本锥面 Ω 的顶点 \mathbf{E} 位于极平面上。令 \mathbf{X}^\perp 为 \mathbf{X} 到极平面 Π 的垂足， \mathbf{L} 为过 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}^\perp 的极平面的垂线。则线 \mathbf{L} 和锥面 Ω 存在两个交点，这里将靠近 \mathbf{X} 的交点用 \mathbf{Y} 表示。令 $\Pi' = \Omega \mathbf{Y}$ ， $\Omega' = \Omega \cap \Pi'$ ，则 Π' 是过点 \mathbf{Y} 的锥面 Ω 的切平面， Ω' 是以 \mathbf{E} 为顶点的二维锥面，称为 \mathbf{Y} 点上锥面 Ω 的生成锥面。令 \mathbf{L}' 为过顶点 \mathbf{E} 和 \mathbf{Y} 点的母线，称为 \mathbf{Y} 点上锥面 Ω 的生成线。关于基本锥面 Ω ，极平面 Π ，点 \mathbf{Y} ，切平面 Π' ，生成锥面 Ω' 和生成线 \mathbf{L}' 的

关系如图 2-1 所示。很明显，存在关系 $L' \subset \Omega' \subset \Omega$ 。下面给出测量点 \mathbf{X} 的两个近似最近点的定义。

定义 2-1 将测量点 \mathbf{X} 到生成锥面 Ω' 的最近点 $\tilde{\mathbf{X}}$ 称为测量点 \mathbf{X} 到基本锥面 Ω 的近似最近点。同样，将测量点 \mathbf{X} 到生成线 L' 的最近点 $\tilde{\mathbf{X}}'$ 也称为测量点 \mathbf{X} 到基本锥面 Ω 的近似最近点。

下面两小节，将给出求解这两个近似最近点的方法。由于 2.3 小节中的欧氏变换 E 保持距离以及垂直关系不变，所以以下讨论中总是假设基本锥面 Ω 和测量点 \mathbf{X} 为变换后的结果。

2.4.2 基于生成锥面的次优三角化方法

本小节中，将给出计算测量点 \mathbf{X} 到生成锥面 Ω' 上的近似最近点 $\tilde{\mathbf{X}}$ 的方法。

由定义 2.1， $\tilde{\mathbf{X}}$ 为如下最小化问题的解

$$\begin{aligned} \min_{\tilde{\mathbf{x}}} & (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \\ \text{s.t. } & \Omega' : \tilde{\mathbf{x}}^T \Sigma \tilde{\mathbf{x}} = 0 \wedge \tilde{\mathbf{x}}^T \Sigma \mathbf{y} = 0 \end{aligned} \quad (2-22)$$

此处先依次给出极平面上的垂足 \mathbf{X}^\perp ，交点 \mathbf{Y} 以及生成锥面 Ω' 的三变量参数化形式，最后再求解最小化问题 (2-22)。

因为 $\Sigma \mathbf{x}$ 为极平面 Π 的法线，垂足 \mathbf{X}^\perp 可以被表示为 $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} + s \Sigma \mathbf{x}$ 。因为 \mathbf{x}^\perp 在极平面 Π 上，则 $(\mathbf{x} + s \Sigma \mathbf{x})^T \Sigma \mathbf{x} = 0$ ，因此 $s = -\frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}}$ 。所以垂足 \mathbf{X}^\perp 为

$$\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}} \Sigma \mathbf{x} \quad (2-23)$$

很明显，交点 \mathbf{Y} 可以表示成 $\mathbf{y} = t \mathbf{x}^\perp + (1-t) \mathbf{x}$, $0 \leq t \leq 1$ 。则由 $\mathbf{y}^\perp \Sigma \mathbf{y} = 0$ 和 (2-23) 式，可以得到 $\mathbf{x}^T (\mathbf{I} + t s^* \Sigma)^T \Sigma (\mathbf{I} + t s^* \Sigma) \mathbf{x} = 0$ ，其中 $s^* = -\frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}}$ 。整理上式可得

$$\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} + 2 s^* \mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x} \cdot t + s^{*2} \mathbf{x}^T \Sigma^3 \mathbf{x} \cdot t^2 = 0 \quad (2-24)$$

该二次方程的解为 $t_\pm = \frac{-\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x} \pm \sqrt{(\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x})^2 - \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^T \Sigma^3 \mathbf{x}}}{s^* \mathbf{x}^T \Sigma^3 \mathbf{x}}$ ，因此，得到交点 \mathbf{Y}

$$\mathbf{y} = \begin{cases} t_+ \mathbf{x}^\perp + (1-t_+) \mathbf{x}, & \text{if } 0 \leq t_+ \leq 1 \\ t_- \mathbf{x}^\perp + (1-t_-) \mathbf{x}, & \text{else} \end{cases} \quad (2-25)$$

由于生成锥面 Ω' 是一个二维锥面，可以用如下的三个变量的参数化形式表示。

首先在切平面 Π' 上选择三个正交向量， $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ ，则切平面可以参数化为

$$\tilde{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)}_{\mathbf{Q}} \mathbf{z}, \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T \in R^3 \quad (2-26)$$

使得 $\tilde{\mathbf{x}}^T \Sigma \mathbf{y} = 0$ 等价于对于任意的 $\mathbf{z} \in R^3$ 有 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q} \mathbf{z}$ 。令 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ ， $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ ， $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)^T$ ， $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)^T$ 并且 $\mathbf{d} = \frac{\Sigma \mathbf{y}}{\|\Sigma \mathbf{y}\|}$ 。因为 \mathbf{d} 为切平面 Π' 的法线， Π' 上的向量必与 \mathbf{d} 垂直，所以可以构造三个与 \mathbf{d} 垂直且相互正交的向量做为 Π' 的基向量。如果 $\mathbf{d} = \mathbf{e}_1$ ， $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ 。如果 $\mathbf{d} \neq \mathbf{e}_1$ ，则构造矩阵 $\mathbf{H} = \left(\mathbf{I}_4 - 2 \frac{(\mathbf{d} - \mathbf{e}_1)(\mathbf{d} - \mathbf{e}_1)^T}{(\mathbf{d} - \mathbf{e}_1)^T (\mathbf{d} - \mathbf{e}_1)} \right)$ ，使得

$$\mathbf{Q} = \mathbf{H}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \quad (2-27)$$

这里， \mathbf{H} 是一个正交阵，并且 $\mathbf{H} \mathbf{e}_1 = \mathbf{d}$ 。

将(2-26)代入(2-22)中，生成锥面 Ω' 可以表示成三个变量参数化的形式

$$\mathbf{z}^T \mathbf{Q}^T \Sigma \mathbf{Q} \mathbf{z} = 0 \quad (2-28)$$

令 $\mathbf{Q}^T \Sigma \mathbf{Q}$ 的特征分解为 $\mathbf{Q}^T \Sigma \mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \underbrace{\text{diag}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)}_{\Sigma'} \mathbf{U}$ ，并令 $\mathbf{z}' = \mathbf{U} \mathbf{z}$ 。则可以得到生成锥面 Ω' 的标准方程

$$\mathbf{z}'^T \Sigma' \mathbf{z}' = 0 \quad (2-29)$$

由于矩阵 \mathbf{U} 正交并且矩阵 \mathbf{Q} 的列向量正交，(2-22)的目标函数可以展开为

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) &= (\mathbf{Q} \mathbf{U}^T \mathbf{z}' - \mathbf{x})^T (\mathbf{Q} \mathbf{U}^T \mathbf{z}' - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{z}'^T \mathbf{z}' - 2 \mathbf{z}'^T \underbrace{\mathbf{U} \mathbf{Q}^T \mathbf{x}}_{\mathbf{b}} + \underbrace{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}_c \end{aligned}$$

因此，最小化问题(2-22)简化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}'} \quad & C(\mathbf{z}') = \mathbf{z}'^T \mathbf{z}' - 2 \mathbf{z}'^T \mathbf{b} + c \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{z}'^T \Sigma' \mathbf{z}' = 0 \end{aligned} \quad (2-30)$$

由Lagrange乘子法，可以得到

$$\mathbf{z}' = \left(\frac{b_1}{1 + \lambda \sigma'_1}, \frac{b_2}{1 + \lambda \sigma'_2}, \frac{b_3}{1 + \lambda \sigma'_3} \right)^T \quad (2-31)$$

其中乘子 λ 满足以下四次方程

$$\begin{aligned} & \sigma'_1 b_1 (1 + \lambda \sigma'_2)^2 (1 + \lambda \sigma'_3)^2 + \sigma'_2 b_2 (1 + \lambda \sigma'_1)^2 (1 + \lambda \sigma'_3)^2 \\ & + \sigma'_3 b_3 (1 + \lambda \sigma'_1)^2 (1 + \lambda \sigma'_2)^2 = 0 \end{aligned} \quad (2-32)$$

将(2-32)的实根代入(2-31)得到对应的 \mathbf{z}' ，再从中找到使(2-30)的目标函数值最小的 \mathbf{z}'_{\min} ，由此得到使(2-22)的目标函数值最小的 $\tilde{\mathbf{x}}_{\min} = \mathbf{Q}\mathbf{U}^T \mathbf{z}'_{\min}$ 。

上述次优三角化方法的步骤见表 2-4。相较原有的最优三角化方法，本节的算法只需求解一个四次方程，大大减少了算法的复杂性。

表 2-4 基于生成锥面的次优三角化方法

1. 由 $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 的奇异值分解和 Ω 的顶点，定义欧氏变换矩阵 \mathbf{E} ；
2. 用 $\mathbf{E}^{-T} \Omega \mathbf{E}^{-1}$ 替换 Ω 并且用 $\mathbf{E} \mathbf{X}$ 替换 \mathbf{X} ；
3. 由(2-23)计算垂足 \mathbf{X}^\perp ，并由(2-25)确定交点 \mathbf{Y} ；
4. 构造列正交矩阵 \mathbf{Q} 使得 $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Q} \mathbf{z}$ 为切平面 Π' 的参数化形式，并计算 $\mathbf{Q}^T \Sigma \mathbf{Q}$ 的特征分解， $\mathbf{Q}^T \Sigma \mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \Sigma' \mathbf{U}$ ；
5. 由 $\mathbf{z}' = \mathbf{U} \mathbf{Q}^T \mathbf{x}$ 计算生成锥面 Ω' 的标准形式；
6. 选择(2-32)的实根 λ_{\min} 使得(2-30)中的目标函数值最小；
7. 将 λ_{\min} 代入(2-31)求得 \mathbf{z}'_{\min} ，并计算近似最近点 $\tilde{\mathbf{x}}_{\min} = \mathbf{Q} \mathbf{U}^T \mathbf{z}'_{\min}$ ；
8. 用 $\mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}$ 替换 $\tilde{\mathbf{X}}$ ，将坐标系变换为原始坐标系；
9. 用 DLT 方法求解 $\tilde{\mathbf{X}}$ 对应的空间点坐标。

2.4.3 基于生成线的次优三角化方法

本小节中，测量点到生成线上距离最近的点将做为基本锥面上的近似最近点。而该最近点也非常容易得到。

表 2-5 基于生成线的次优三角化方法

1. 由 $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 的奇异值分解和 Ω 的顶点，定义欧氏变换矩阵 \mathbf{E} ；
2. 用 $\mathbf{E}^{-T} \Omega \mathbf{E}^{-1}$ 替换 Ω 并且用 $\mathbf{E} \mathbf{X}$ 替换 \mathbf{X} ；
3. 由(2-23)计算 \mathbf{X} 的对应极平面的垂足 \mathbf{X}^\perp ；
4. 由(2-25)确定交点 \mathbf{Y} ，并由(2-34)计算近似最近点 $\tilde{\mathbf{X}}'$ ；
5. 用 $\mathbf{E}^{-1} \tilde{\mathbf{X}}'$ 替换 $\tilde{\mathbf{X}}'$ ，将坐标系变换为原始坐标系；
6. 用 DLT 方法求解 $\tilde{\mathbf{X}}'$ 对应的空间点坐标。

首先将生成线上的点参数化为 $\mathbf{x}' = t\mathbf{y}$ ($-\infty < t < \infty$)，则测量点 \mathbf{X} 到该线的最近距离就是最小化如下关于 t 的二次多项式

$$p(t) = (t\mathbf{y} - \mathbf{x})^T (t\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} t^2 - 2\mathbf{y}^T \mathbf{x} t + \mathbf{x}^T \mathbf{x} \quad (2-33)$$

其最优解为

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \left(\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\mathbf{y}^T \mathbf{y}} \right) \mathbf{y} \quad (2-34)$$

这里的算法步骤见表 2-5。相较原有的最优三角化方法，基于生成线的三角化方法只用求解一个二次方程。

值得注意的是如果 $F_{2 \times 2}$ 的两个奇异值相等，则上述的两个次优解将变为最优解。

命题 2-2 如果 $F_{2 \times 2}$ 具有两个相等的奇异值，则基于生成锥面和生成线的次优解都将变为最优解。

证明：如果基于生成线的次优解是最优解，则有基于生成锥面的次优解必为最优解。所以，这里只需要证明生成线的情况。如果两个奇异值均为零，则基本锥面 Ω 退化为一个三维超平面：

$$\mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33} = 0 \quad (2-35)$$

其中 $\mathbf{b} = (F_{31}, F_{32}, F_{33})^T$ 。对于给定测量点 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^T, 1)^T$ ，其关于 Ω 的极平面为

$\Pi = \Omega \mathbf{X} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{x} + 2F_{33} \end{array} \right)$ 。因此， \mathbf{x} 在平面 Π 上的垂足 \mathbf{x}^\perp 以及 \mathbf{x} 与 \mathbf{x}^\perp 之间的中点 $\bar{\mathbf{x}}$ 为

$$\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \frac{2(\mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33})}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}^\perp + \mathbf{x}}{2} = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33})}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b}$$

于是存在

$$\mathbf{b}^T \bar{\mathbf{x}} + F_{33} = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33} - \frac{(\mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33})}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b}^T \mathbf{b} = 0,$$

即 $\bar{\mathbf{x}}$ 满足 (2-35)。由定义 2-1，不难看出 $\bar{\mathbf{x}}$ 是测量点到生成线和生成锥面的近似最近点。另一方面，由 (A-17) 可知 $\bar{\mathbf{x}}$ 是测量点到基本锥面的最近点。因此，两个次优解都为最优解。

如果两个相等的奇异值不为零, 即 $\sigma_1 = \sigma_2 \neq 0$, 由 2.3 节可知基本锥面具有如下标准方程

$$(x_3^2 - x_1^2) + (x_4^2 - x_2^2) = 0 \quad (2-36)$$

并且测量点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 的最优解为

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \delta_2 / \sqrt{\delta_1 \delta_2}) x_1 \\ (1 + \delta_2 / \sqrt{\delta_1 \delta_2}) x_2 \\ (1 + \delta_1 / \sqrt{\delta_1 \delta_2}) x_3 \\ (1 + \delta_1 / \sqrt{\delta_1 \delta_2}) x_4 \end{pmatrix} \quad (2-37)$$

其中 $\delta_1 = x_1^2 + x_2^2$, $\delta_2 = x_3^2 + x_4^2$ 。同样, 只需证明基于生成线的次优解为最优解 (2-37), 就可以得到基于生成锥面的次优解也是最优解的结论。

因为测量点 \mathbf{x} 关于锥面 (2-36) 的极平面为 $\boldsymbol{\pi} = (-x_1, -x_2, x_3, x_4)^T$, 则可以得到 \mathbf{x} 在 $\boldsymbol{\pi}$ 上的垂足, $\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2 + \delta_1} \boldsymbol{\pi}$ 。因此, 过点 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}^\perp 的线 $\mathbf{z}(s)$ 可以表示成

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{x} + s(\mathbf{x}^\perp - \mathbf{x}) = \mathbf{x} + s \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_2 + \delta_1} \boldsymbol{\pi} \quad (-\infty < s < \infty) \quad \text{。} \quad \text{而} \quad \text{由} \quad \text{方} \quad \text{程}$$

$$\left((z_3(s))^2 + (z_4(s))^2 \right) - \left((z_1(s))^2 + (z_2(s))^2 \right) = 0 \quad \text{可以得到两个根} \quad s_1 = 1 + \frac{2\sqrt{\delta_1 \delta_2}}{\delta_1 + \delta_2},$$

$$s_2 = 1 - \frac{2\sqrt{\delta_1 \delta_2}}{\delta_1 + \delta_2} \text{。} \text{于是, 得到} \mathbf{z}(s) \text{与锥面 (2-36) 的两个交点}$$

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_1 \\ \left(1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_2 \\ \left(1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_3 \\ \left(1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{(\delta_1 + \delta_2) + 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_4 \end{pmatrix}, \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{(\delta_1 + \delta_2) - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_1 \\ \left(1 + \frac{\delta_2 - \delta_1}{(\delta_1 + \delta_2) - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_2 \\ \left(1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{(\delta_1 + \delta_2) - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_3 \\ \left(1 + \frac{\delta_1 - \delta_2}{(\delta_1 + \delta_2) - 2\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \right) x_4 \end{pmatrix},$$

其中 \mathbf{z}_1 为靠近 \mathbf{x} 的点。因为 \mathbf{z}_1 在锥面 (2-36) 上的生成线 \mathbf{L}_g 可以表示为 $\mathbf{z}(s) = s\mathbf{z}_1$ ($-\infty < s < \infty$), 不难证明

$$s_{\min} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right)$$

使得 $\mathbf{z}(s_{\min})$ 为 \mathbf{x} 到 \mathbf{L}_g 的最近点，由此获得基于生成线的次优解

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(s_{\min}) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2\sqrt{\delta_1\delta_2}} \right) \mathbf{z}_1 \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(1 + \delta_2 / \sqrt{\delta_1\delta_2} \right) x_1 \\ \left(1 + \delta_2 / \sqrt{\delta_1\delta_2} \right) x_2 \\ \left(1 + \delta_1 / \sqrt{\delta_1\delta_2} \right) x_3 \\ \left(1 + \delta_1 / \sqrt{\delta_1\delta_2} \right) x_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-38)$$

该解与 (2-37) 一致。得证。 \square

2.5 基于 Sampson 序列的次优三角化方法

本节给出的第三种次优三角化方法是一种基于 Sampson 序列的迭代方法，下面的几节中先给出 Sampson 序列的定义及性质，再给出具体的迭代方法。

2.5.1 一个簇的 Sampson 序列

由于 Sampson 序列与 Sampson 近似密切相关，所以在介绍 Sampson 序列之前，先简要的回顾一下 Sampson 近似。

令 \mathbb{G} 是一个由方程 $G(\mathbf{x}) = 0$ ($\mathbf{x} \in R^n$) 定义的簇或一个代数方程集。如果测量点 \mathbf{x} 被称为来自于簇 \mathbb{G} ，则意味着其真值 $\bar{\mathbf{x}}$ 满足 $G(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ 。因为在实际中很难获得真值 $\bar{\mathbf{x}}$ ，需要求解以下最近点的最小化问题，得到 $\bar{\mathbf{x}}$ 的估计

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} &= \arg \min \|\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|^2 \\ s.t. \quad G(\bar{\mathbf{x}}) &= 0 \end{aligned} \quad (2-39)$$

令 $\Delta\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ，则最小化问题变为

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= \arg \min (\Delta\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} \\ s.t. \quad G(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (2-40)$$

这个最小化问题是一个非线性问题。为了简化计算复杂度，采用 (2-40) 的一阶近

似，也称为测量点 \mathbf{x} 的 Sampson 近似。Sampson 近似首先是由 Sampson[26]提出来解决曲线拟合问题。在三维重建中，Sampson 近似被用来迭代拟合对极几何和多视几何[19,33,78]以及线性求解的两视三角化问题[7]。

(2-40) 中约束函数的一阶近似可以写成

$$G(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \approx G(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \quad (2-41)$$

其中 $J(\mathbf{x})$ 为 G 在点 \mathbf{x} 的雅可比矩阵。而 Sampson 近似可以由以下线性约束的最小化问题求得

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x} &= \arg \min (\Delta\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{x} \\ \text{s.t. } J(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} &= -G(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (2-42)$$

用 Lagrange 乘子法，可以得到 (2-42) 的解

$$\Delta\mathbf{x} = -J^T(\mathbf{x})(J(\mathbf{x})J^T(\mathbf{x}))^\dagger G(\mathbf{x}) \quad (2-43)$$

因此测量点 \mathbf{x} 的 Sampson 近似为

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{x} - J^T(\mathbf{x})(J(\mathbf{x})J^T(\mathbf{x}))^\dagger G(\mathbf{x}) \quad (2-44)$$

很明显，当 \mathbb{G} 是一个线性簇，即 $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} - \mathbf{b}$ ，Sampson 近似 \mathbf{x}^S 位于该簇中。然而，在一般情况下 Sampson 近似 \mathbf{x}^S 并不满足 $G(\mathbf{x}) = 0$ ，即就是并不位于簇 \mathbb{G} 中。下面，给出测量点的 Sampson 序列的定义。

定义 2-2 给定来自于簇 \mathbb{G} 的测量点 \mathbf{x} ，它的 Sampson 序列是如下的一个点列：

$$\mathbf{x}_{n+1}^S = \mathbf{x}_n^S - J_n^T (J_n J_n^T)^\dagger G(\mathbf{x}_n^S), n \geq 0, \mathbf{x}_0^S = \mathbf{x} \quad (2-45)$$

其中 $J_n = J(\mathbf{x}_n^S)$ ， \mathbf{x}_n^S 称为测量点的第 n 个 Sampson 近似。如果 Sampson 序列收敛，则其极限被称做测量点的 Sampson 点。

命题 2-3 假设 Sampson 序列 $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 收敛到点 \mathbf{x}^* 并且 $J(\mathbf{x}^*)$ 行满秩，则 \mathbf{x}^* 位于簇 \mathbb{G} 中。

证明：因为 G 的所有元素是多项式，所以 G 和 J 连续。 J 的连续性使得 J 的子行列式连续。因此，由于 $J(\mathbf{x}^*)$ 行满秩，存在一个自然数 N 使得 $n \geq N$ 时 $J(\mathbf{x}_n^S)$ 行满秩。所以，当 $n \geq N$ ，第 $n+1$ 个 Sampson 近似可以写成

$$\mathbf{x}_{n+1}^S = \mathbf{x}_n^S - J_n^T (J_n J_n^T)^{-1} G(\mathbf{x}_n^S) \quad (2-46)$$

则得到

$$G(\mathbf{x}_n^S) = J_n(\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_{n+1}^S) \quad (2-47)$$

并且

$$G(\mathbf{x}^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(\mathbf{x}_n^S)(\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_{n+1}^S) = J(\mathbf{x}^*) \cdot 0 = 0。$$

因此 \mathbf{x}^* 位于簇 \mathbb{G} 中。得证。 \square

2.5.2 锥面和椭球面的 Sampson 序列的收敛性

本小节将讨论 Sampson 序列对于锥面或椭球面的收敛性。在 n 维空间中，一个 $n-1$ 维椭球面或锥面可以表示成

$$\mathbb{G}: G(\mathbf{x}) \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2-48)$$

其中 \mathbf{B} 是一个可逆对称阵。如果 \mathbf{B} 是正定阵并且 $c < \mathbf{b}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ ，则 \mathbb{G} 是一个椭球面；如果 $c = \mathbf{b}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ ，则 \mathbb{G} 是一个锥面。很明显， G 的雅可比矩阵为

$$J(\mathbf{x}) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{B} + 2\mathbf{b}^T \quad (2-49)$$

而且当且仅当 \mathbf{x} 为 \mathbb{G} 的中心时， $J(\mathbf{x}) = 0$ ，这时 $\mathbf{x} = -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ 。对于不在 \mathbb{G} 中心的测量点 \mathbf{x} ，它的 Sampson 近似为

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{x} - \frac{J^T}{JJ^T} G(\mathbf{x}) \quad (2-50)$$

以下讨论中假设测量点不在 \mathbb{G} 的中心。

令 $\mathbf{B} = \mathbf{U}^T \Sigma \mathbf{U}$ 为 \mathbf{B} 的特征分解，其中 \mathbf{U} 为正交矩阵， Σ 为对称矩阵，则由如下欧氏变换

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^T & -\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix}$$

得到 \mathbb{G} 的标准形式

$$\tilde{\mathbb{G}}: \tilde{G}(\mathbf{x}') \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{x}'^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2-51)$$

其中 $\delta = c - \mathbf{b}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ 。此时，如果 $\delta = 0$ ， $\tilde{\mathbb{G}}$ 为顶点在原点的锥面；如果 $\delta < 0$ ， $\tilde{\mathbb{G}}$ 为中心在原点的椭球面。

在 \mathbb{G} 的标准形式下, 测量点 \mathbf{x}' 的 Sampson 近似是

$$\mathbf{x}'^S = \mathbf{x}' - \frac{\mathbf{x}'^T \Sigma \mathbf{x}' + \delta}{2 \mathbf{x}'^T \Sigma^2 \mathbf{x}'} \Sigma \mathbf{x}' \quad (2-52)$$

并且

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{U}^T \mathbf{x}'^S - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \quad (2-53)$$

为了简洁, 下文中不失一般性的用 \mathbb{G} 的标准形式 (2-51) 进行讨论。

现在考虑测量点 \mathbf{x} 的 Sampson 近似与它在极平面上的垂足 \mathbf{x}^\perp 的关系。因为 \mathbf{x} 关于 \mathbb{G} 的极平面为 $\Pi(\mathbf{y}) \triangleq \mathbf{y}^T \Sigma \mathbf{x} + \delta = 0$ 并且 $\mathbf{J} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{y}}|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = (\Sigma \mathbf{x})^T$,

$$\mathbf{x}^\perp = \mathbf{x} - \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \Pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} + \delta}{\mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}} \Sigma \mathbf{x} \quad (2-54)$$

由 (2-52) 和 (2-54), 可得

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} + \delta}{2 \mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}} \Sigma \mathbf{x} = \frac{1}{2} (\mathbf{x} + \mathbf{x}^\perp) \quad (2-55)$$

因此得到关于 Sampson 近似的命题。

命题 2-4 如图 2-1 所示, 测量点 \mathbf{x} 的 Sampson 近似 \mathbf{x}^S 为 \mathbf{x} 到其极平面上垂足 \mathbf{x}^\perp 的中点。

如果测量点并不位于 \mathbb{G} 的中心, 即 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 并且如果 \mathbb{G} 为锥面时 \mathbf{x} 不位于 \mathbb{G} 上, 则它的 Sampson 近似 \mathbf{x}^S 也不位于 \mathbb{G} 的中心。这里给出简要的证明:

如果 \mathbf{x}^S 也位于 \mathbb{G} 的中心, 由 (2-52) 可以得到

$$\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} + \delta}{2 \mathbf{x}^T \Sigma^2 \mathbf{x}} \Sigma \mathbf{x} = \mathbf{0}。$$

然后, 等式两边左乘 $\mathbf{x}^T \Sigma$, 得到

$$\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} + \delta}{2} = 0。$$

因此, $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} = \delta$ 。如果 \mathbb{G} 是椭球面, 则 $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} < 0$, 这与 Σ 为正定阵矛盾。如果 \mathbb{G} 是锥面, 则 $\mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x} = 0$, 这与 \mathbf{x} 不位于 \mathbb{G} 上矛盾。所以 Sampson 近似 \mathbf{x}^S 不位于 \mathbb{G} 的中心。

基于上述讨论, 一般情况下测量点 \mathbf{x} 的 Sampson 序列可以写成

$$\mathbf{x}_{n+1}^S = \mathbf{x}_n^S - \frac{(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta}{2(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma^2 \mathbf{x}_n^S} \Sigma \mathbf{x}_n^S \quad (2-56)$$

命题 2-5 如果 \mathbb{G} 是一个锥面或椭球面，则 Sampson 序列 $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 必收敛于 \mathbb{G} 上的一点。

证明： 首先证明 $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 的收敛性。令

$$\mathbf{x}_n^\perp = \mathbf{x}_n^S - \frac{(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta}{(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma^2 \mathbf{x}_n^S} \Sigma \mathbf{x}_n^S \quad (2-57)$$

为 \mathbf{x}_n^S 到极平面 $\Pi: \mathbf{x}^T \Sigma \mathbf{x}^S + \delta = 0$ 的垂足。由命题 2-4, \mathbf{x}_{n+1}^S 是 \mathbf{x}_n^S 到 \mathbf{x}_n^\perp 的中点。如果 \mathbb{G} 是锥面，则极平面过原点 \mathbf{o} ，即锥面的顶点，并且如图 2-2 所示， $\angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S = \pi/2$ 。

如果 \mathbb{G} 是椭球面，则 $\angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S > \pi/2$ 。这是因为，由

$$-(\mathbf{x}_n^\perp)^T (\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_n^\perp) = \frac{\delta \left((\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta \right)}{2(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma^2 \mathbf{x}_n^S}$$

$$\text{以及 } (\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta = -\delta + \frac{\left((\mathbf{x}_{n-1}^S)^T \Sigma \mathbf{x}_{n-1}^S + \delta \right)^2 (\mathbf{x}_{n-1}^S)^T \Sigma^3 \mathbf{x}_{n-1}^S}{4(\mathbf{x}_{n-1}^S)^T \Sigma^2 \mathbf{x}_{n-1}^S} > 0$$

可以得到 $-(\mathbf{x}_n^\perp)^T (\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_n^\perp) < 0$ ，因此 $\cos \angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S = \frac{-(\mathbf{x}_n^\perp)^T (\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_n^\perp)}{\|\mathbf{x}_n^\perp\| \cdot \|\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_n^\perp\|} < 0$ ，

$\angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S > \pi/2$ 。由此可以得出对于锥面或椭球面

$$\angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S \geq \pi/2 \quad (2-58)$$

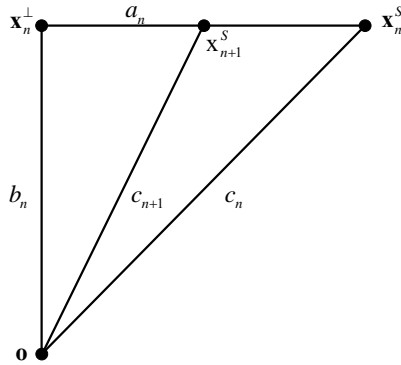


图 2-2 Sampson 序列 $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 以及垂足序列 $\{\mathbf{x}_n^\perp\}$

令 $c_n = \|\mathbf{x}_n^S\|$ ，由 (2-58) 得到 $c_{n+1} < c_n$ ，即 $\{c_n\}$ 为单调递减序列。因此， $\{c_n\}$ 必收敛到一个常数 α ，

$$\|\mathbf{x}_n^S\| = c_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2-59)$$

令 $a_n = \|\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_n^\perp\|$ ， $b_n = \|\mathbf{x}_n^\perp\|$ 。因为 c_{n+1} 为三角形 $\Delta \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S$ 的中线，

$$c_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{2(b_n^2 + c_n^2) - a_n^2} \quad (2-60)$$

并且

$$\begin{aligned} c_n^2 &= a_n^2 + b_n^2 - 2a_n b_n \cos \angle \mathbf{o} \mathbf{x}_n^\perp \mathbf{x}_n^S \geq a_n^2 + b_n^2 \\ \Rightarrow b_n^2 &\leq c_n^2 - a_n^2 \end{aligned} \quad (2-61)$$

由 (2-60) 和 (2-61)，又可得到 $c_{n+1} \leq \frac{1}{2} \sqrt{4c_n^2 - 3a_n^2}$ ，所以

$$a_n \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{c_n^2 - c_{n+1}^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2-62)$$

由 (2-62) 和

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{n+1}^S - \mathbf{x}_n^S\| &= \left\| \frac{(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S}{2(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma^2 \mathbf{x}_n^S} \Sigma \mathbf{x}_n^S \right\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n^\perp - \mathbf{x}_n^S\| = \frac{1}{2} a_n, \text{ 还可以得到} \\ \|\mathbf{x}_{n+1}^S - \mathbf{x}_n^S\| &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2-63)$$

由 (2-59) 可知， $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 是一个有界序列，故其子序列收敛

$$\mathbf{x}_{n_k}^S \rightarrow \mathbf{x}^* \quad (k \rightarrow \infty) \quad (2-64)$$

因为 $\|\mathbf{x}_{n_k+1}^S - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}_{n_k+1}^S - \mathbf{x}_{n_k}^S\| + \|\mathbf{x}_{n_k}^S - \mathbf{x}^*\|$ ，由 (2-63) 和 (2-64)，可以得到

$\mathbf{x}_{n_k+1}^S \rightarrow \mathbf{x}^* \quad (k \rightarrow \infty)$ 。由此还可以推出，对于任意 $m \geq 1$ ，必存在 $\mathbf{x}_{n_k+m}^S \rightarrow \mathbf{x}^* \quad (k \rightarrow \infty)$ 。所以任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 K 和 M 使得当 $k \geq K$ ， $m \geq M$ 时，

$$\|\mathbf{x}_{n_k+m}^S - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon \quad (2-65)$$

令 $N = n_K + M$ ，则对于 $n > N$ 存在 $n = n_{k'} + m' \quad (k' \geq K, m' \geq M)$ ，因此由 (2-65) 可以得到 $\|\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon$ 。由此，Sampson 序列 $\{\mathbf{x}_n^S\}$ 收敛。

接下来，再证明点 \mathbf{x}^* 位于 \mathbb{G} 中。对 (2-56) 两端左乘 $(\Sigma \mathbf{x}_n^S)^T$ ，可以得到

$$(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta = 2(\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma (\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_{n+1}^S), \text{ 并可得到}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}^*)^T \Sigma \mathbf{x}^* + \delta &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma \mathbf{x}_n^S + \delta \\
&= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_n^S)^T \Sigma (\mathbf{x}_n^S - \mathbf{x}_{n+1}^S) = 0
\end{aligned}$$

因此， \mathbf{x}^* 位于 \mathbb{G} 中。得证。 □

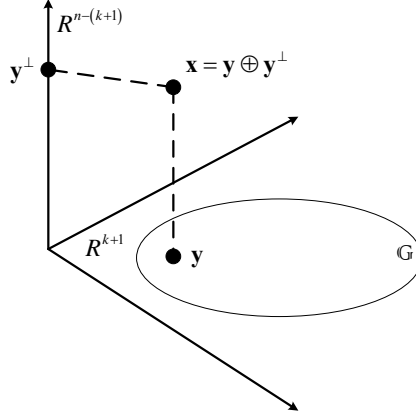


图 2-3 R^n 中测量点 \mathbf{x} 的分解

命题 2-5 对 R^n 中任意维数的锥面和椭球面都成立。对于 R^n 中的 k 维锥面和椭球面 \mathbb{G} ，对 R^n 进行正交分解，得到 $R^n = R^{k+1} \oplus R^{n-(k+1)}$ ，使得 $\mathbb{G} \subset R^{k+1}$ 。令 \mathbf{x} 为来自 \mathbb{G} 的测量点，则如图 2-3 所示， \mathbf{x} 可以唯一的分解为 $\mathbf{x} = \mathbf{y} \oplus \mathbf{y}^\perp$ ， $\mathbf{y} \in R^{k+1}$ 。很明显， \mathbf{y}^\perp 是要被去除的测量误差。因此， R^{k+1} 中 \mathbf{y} 的 Sampson 点可以看成是 \mathbf{x} 的 Sampson 点。

2.5.3 基于 Sampson 序列的次优三角化方法

将命题 2-5 应用于基本锥面，可以得到第三个次优三角化方法，即基于 Sampson 序列的次优三角化方法，它的具体步骤见表 2-6。由命题 2-5，来自于基本锥面的测量点的 Sampson 点严格满足对极几何约束。

表 2-6 基于 Sampson 序列的次优三角化方法

初始化：给定终止阈值 ε 并令 $n = 0, \mathbf{x}_0^S = \mathbf{x}$
1. Sampson 迭代： <div style="margin-left: 20px;"> 1.1 $\mathbf{x}_{n+1}^S = \mathbf{x}_n^S - \mathbf{J}_n^T (\mathbf{J}_n \mathbf{J}_n^T)^{-1} \varphi(\mathbf{x}_n^S)$； 1.2 如果 $\varphi(\mathbf{x}_{n+1}^S) < \varepsilon$，则输出 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{n+1}^S$，并终止迭代；否则，令 $n \leftarrow n + 1$，转到 1.1。 </div>
2. 重建：用 DLT 方法计算对应估计点匹配 $\bar{\mathbf{X}}$ 的空间点。

在基于 Sampson 序列的次优三角化方法中，并不需要用欧氏变换将基本锥面变成标准形式。给定基本矩阵 $F = (F_{ij})$ ，可以直接算得 Sampson 序列

$$\mathbf{x}_{n+1}^S = \mathbf{x}_n^S - J_n^T (J_n J_n^T)^{-1} \varphi(\mathbf{x}_n^S)$$

$$\text{其中 } J_n = 2(\mathbf{x}_n^S)^T \mathbf{B} + 2\mathbf{b}^T, \quad \varphi(\mathbf{x}_n^S) = (\mathbf{x}_n^S)^T \mathbf{B} \mathbf{x}_n^S + 2\mathbf{b}^T \mathbf{x}_n^S + 2F_{33}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{21} \\ F_{12} & F_{22} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b} = (F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{23})^T。$$

2.6 实验

2.6.1 模拟实验

模拟实验将考虑以下三种典型的摄像机结构：

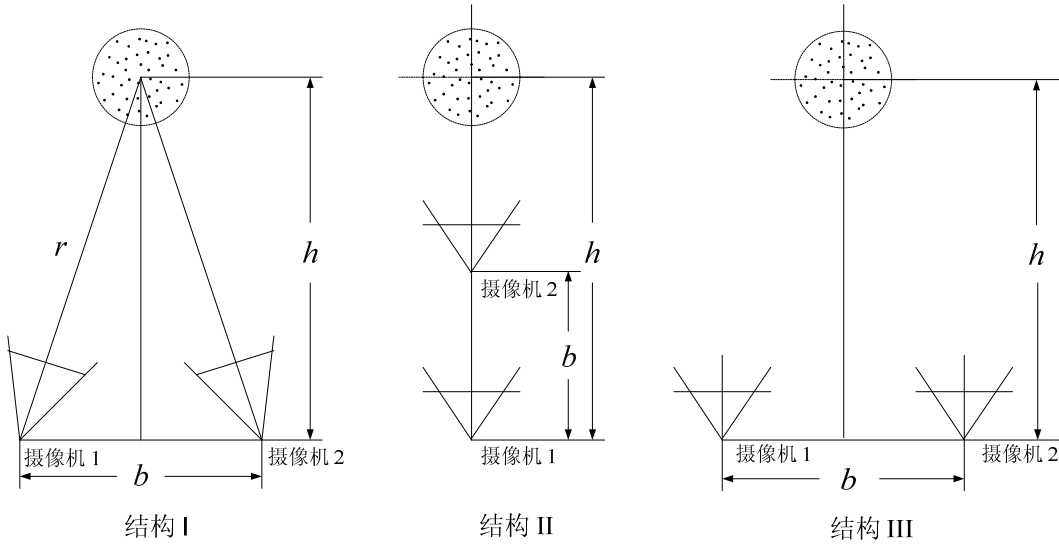


图 2-4 实验中的三种典型结构：左图为环形结构（结构 I）；中图为纵向结构（结构 II）；右图为横向结构（结构 III）

结构 I（环形结构）如图 2-4（左）所示，观测点位于一个半径为 4 个单位的球体中。摄像机位于与球体同心半径 r 为 10 个单位的圆上，并且光轴通过圆心。实验中，分别设置基高比 b/h 为 1, 1/2, 1/20, 1/40，其中 b 为两摄像机的基线长度， h 为圆心到基线中点的距离。要注意的是基高比 b/h 越小，表明基线相对越短，重建效果相对

越差。

结构 II（纵向结构）如图 2-4（中）所示，摄像机 2 沿摄像机 1 的光轴（ z 轴）移动距离 b 。观测点位于半径 r 为 1 个单位的球体中，该球体的中心位于 z 轴上，并与第一个摄像机中心的距离 h 为 10 个单位。实验中，分别设置基高比为 $2/3, 3/5, 1/2, 2/5$ 。

结构 III（横向结构）如图 2-4（右）所示，这是一个标准的立体视觉系统。摄像机 2 从摄像机 1 的位置沿 x 轴移动距离 b 。观测点位于半径为 4 个单位的球体中，该球体的球心位于 b 的二等分线上与 x 轴的距离 h 为 10 个单位。实验中，分别设置基高比为 $1, 1/2, 1/20, 1/40$ 。

每种结构的实验中，均设置两台摄像机的内参数矩阵为

$$K = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 512 \\ 0 & 700 & 512 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

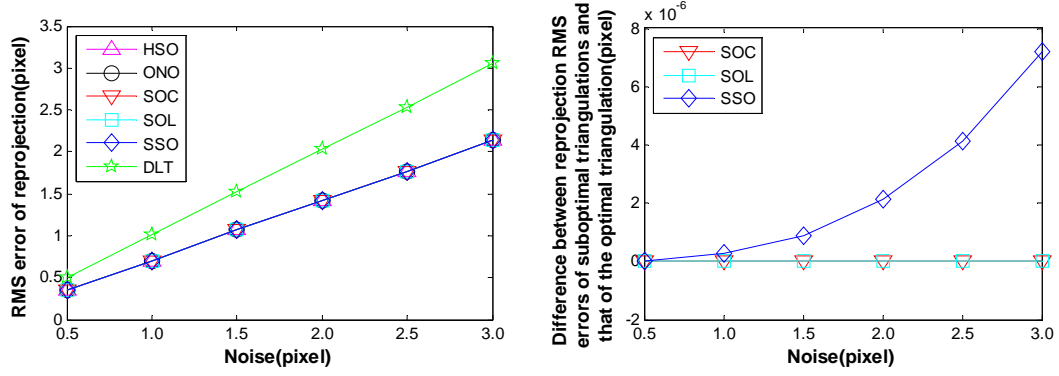
并从三维球中随机选择 50 个空间点，将其投影到大小为 1024×1024 图像面上。实验时，给每个图像点都加入均值为零标准差为 σ 的高斯噪声，标准差大小由 0.5 个像素增加到 3.0 个像素，每增加 0.5 个像素进行 500 次实验，以保证实验的统计意义。对比的算法包括 DLT（齐次线性三角化方法），HSO（Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法），ONO（新的最优三角化方法），SOC（基于生成锥面的次优三角化方法），SOL（基于生成线的次优三角化方法），以及 SSO（基于 Sampson 序列的次优三角化方法）。对比的内容包括一下三个方面：

- （a） 重投影均方根误差；
- （b） 次优算法与最优算法重投影差值的均方根；
- （c） 重建的空间点与真实空间点的均方根误差。

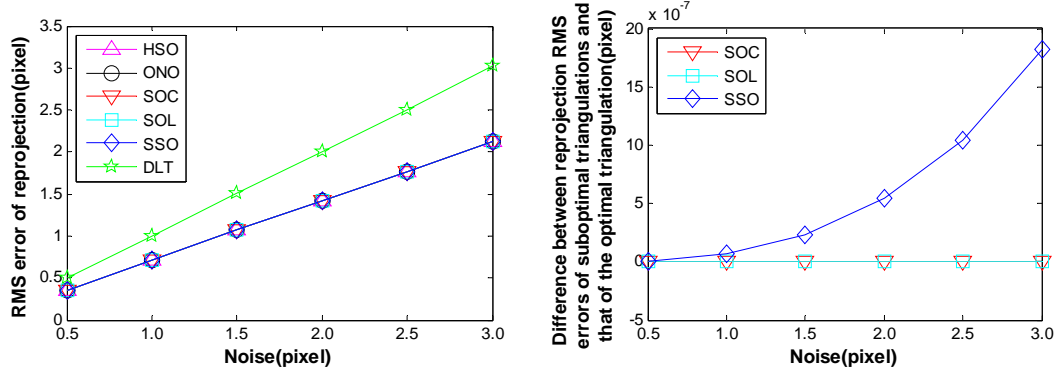
结构 I 的实验结果：

结构 I 的实验结果如图 2-5，图 2-6，图 2-7，表 2-7 所示。图 2-5（左）给出了重投影均方根误差，从图中可以看出 DLT 的重投影均方根误差远远大于其它的三角化方法，而三种次优三角化方法的重投影均方根误差与最优三角化方法相当。图 2-5（右）进一步给出了三种次优三角化方法与最优三角化方法之间重投影均方根误差的差值。可以看出，即使是差值最大的 SSO，不论基线长短其差值也不会超过 10^{-5} 个像素，而 SOC 和 SOL 的差值几乎为零。这表明三种次优三角化方法与最优三角

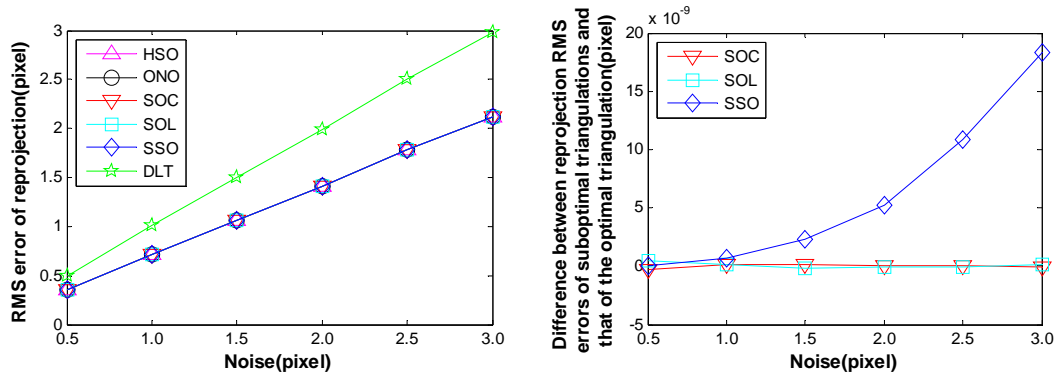
化方法具有几乎相同的重投影均方根误差。



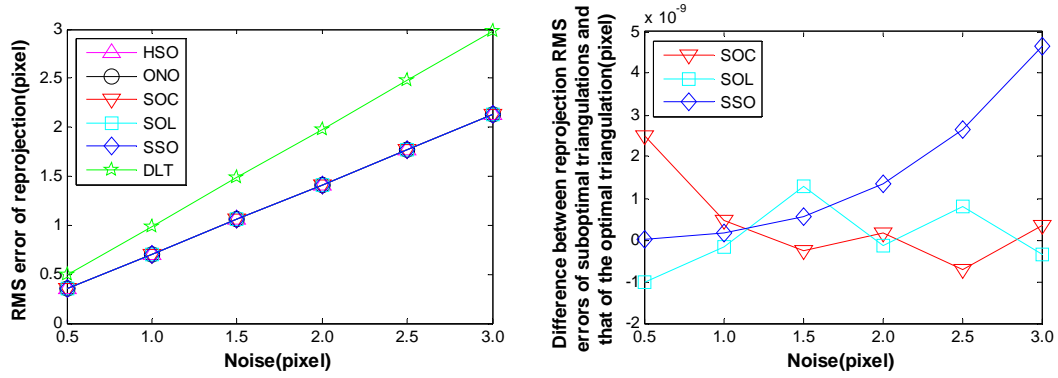
a 基高比1/1



b 基高比1/2

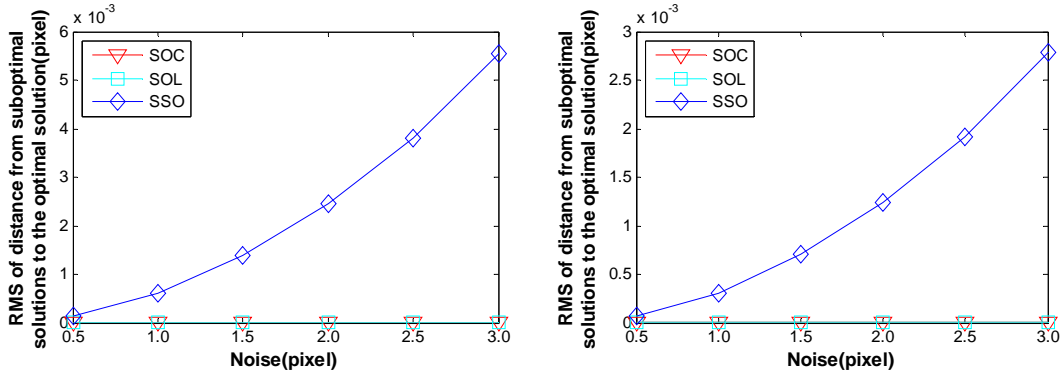


c 基高比1/20



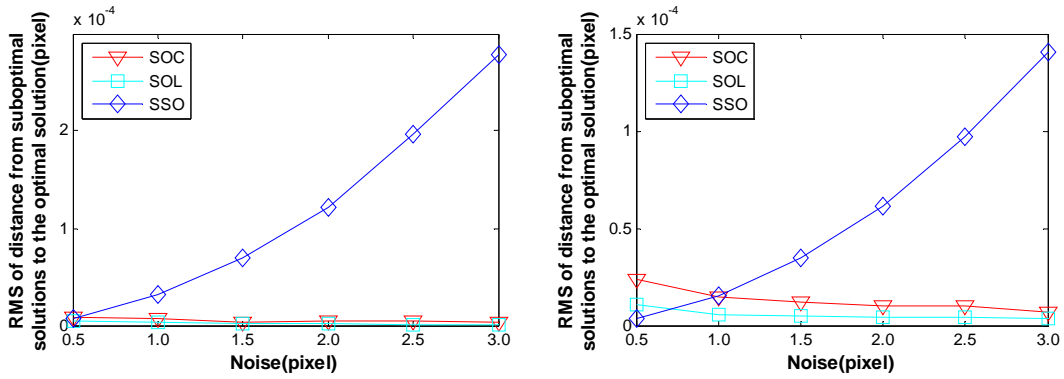
d 基高比1/40

图 2-5 结构 I 的实验结果：左图为重投影均方根误差（像素）；右图为三种次优算法与最优算法的重投影均方根误差的差值（像素）



a 基高比1/1

b 基高比1/2

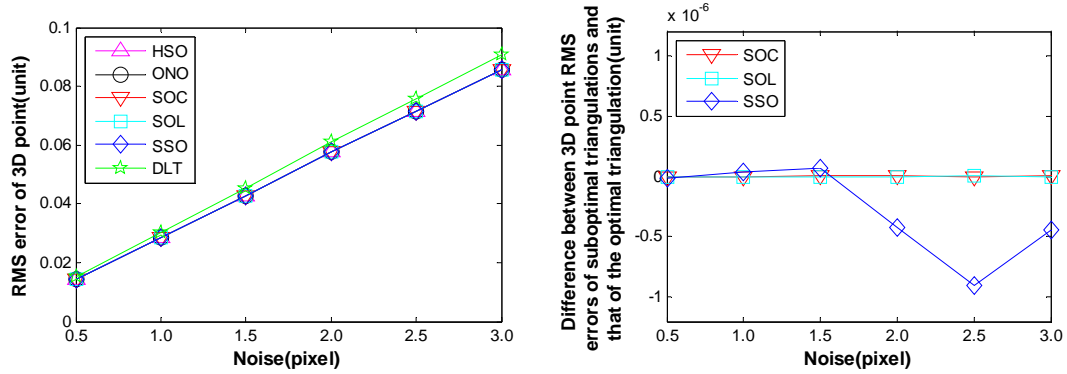


c 基高比1/20

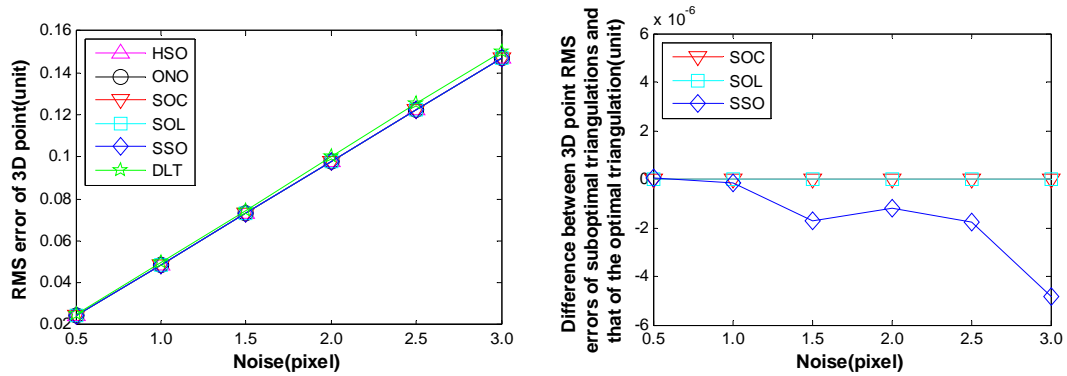
d 基高比1/40

图 2-6 结构 I 的实验结果：三种次优算法与最优算法重投影差值的均方根（像素）

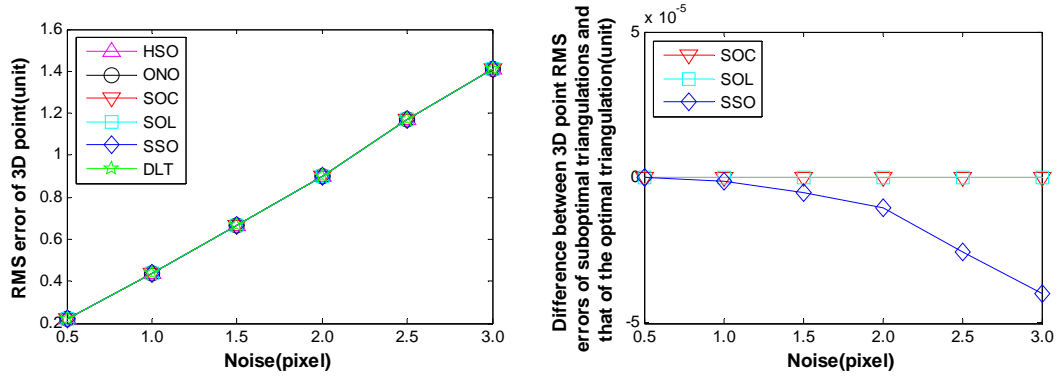
从图 2-6 给出的三种次优算法与最优算法重投影差值的均方根，可以看出，SOC 与 SOL 的均方根接近于零，并且它们的均方根不随基线缩短或噪声增加发生变化。虽然 SSO 与最优算法重投影差值的均方根随噪声增加而增大，但总不会超过 10^{-2} 像素。这表明 SOC 与 SOL 的估计精度与最优算法相当，而 SSO 与最优算法的估计精度也相差不大。从图 2-7 给出的重建均方根误差可以看出，在长基线时 DLT 的误差同样远远大于其它三角化方法。而三种次优三角化方法与最优算法的均方根误差相当。从图 2-7（右）给出的次优算法与最优算法的重建均方根误差的差值可以看出，SSO 的三维重建最为精确，SOC 与 SOL 与最优算法的重建精度相当。表 2-7 给出的是 SSO 在噪声为 3 个像素时的平均迭代次数，从中可以看出，经过几次迭代 SSO 的结果就可以非常接近 Sampson 点，例如经过三次迭代的结果就可以以 10^{-9} 精度接近 Sampson 点。



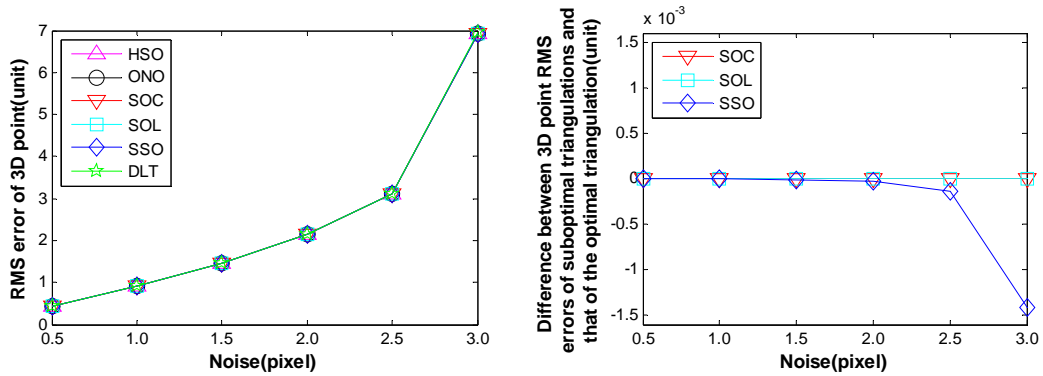
a 基高比1/1



b 基高比1/2



c 基高比1/20



d 基高比1/40

图 2-7 结构 I 的实验结果：左图为重建均方根误差（单位）；右图为三种次优算法与最优算法的重建均方根误差的差值（单位）

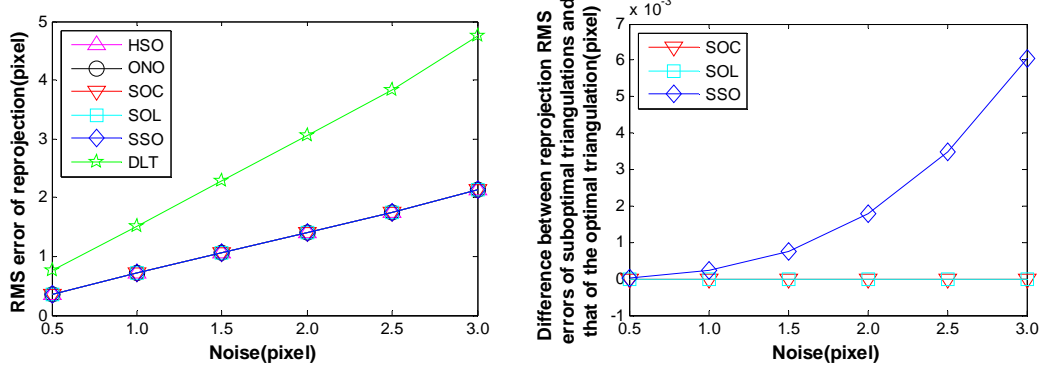
表 2-7 结构 I 中 SSO 的平均迭代次数

$\varepsilon = \left \varphi \left(\mathbf{x}_n^S \right) \right $	$<10^{-1}$	$<10^{-3}$	$<10^{-4}$	$<10^{-5}$	$<10^{-7}$	$<10^{-9}$
平均迭代次数	1.0114	1.2828	1.5263	1.7334	1.9372	2.0476

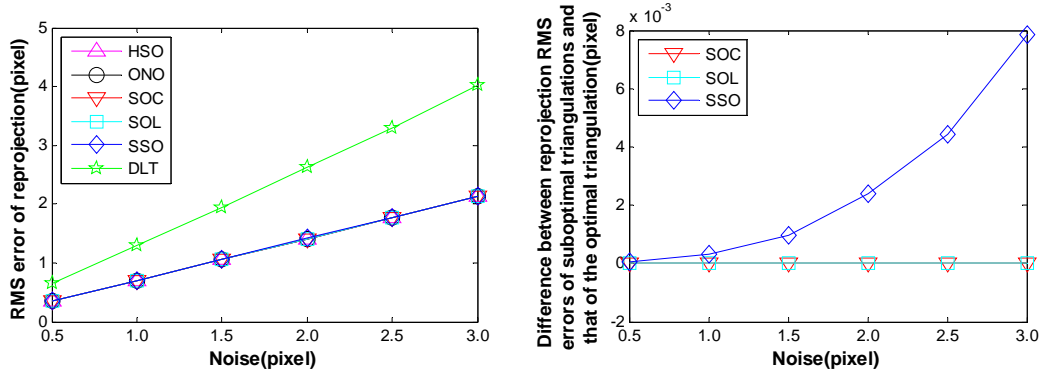
结构 II 的实验结果：

结构 II 的实验结果如图 2-8，图 2-9，图 2-10，表 2-8 所示。对于重投影均方根误差，如图 2-8，DLT 的均方根误差最大；SOC 和 SOL 与最优算法具有相当的均方根误差并且其误差不随基线缩短以及噪声增加而增大；虽然 SSO 的均方根误差随噪声的增加而增大，但也不会超过最优算法均方根误差 10^{-2} 个像素。对于次优算法与最优算法重投影差值的均方根，如图 2-9，SOC 和 SOL 的均方根均为零，即这两种

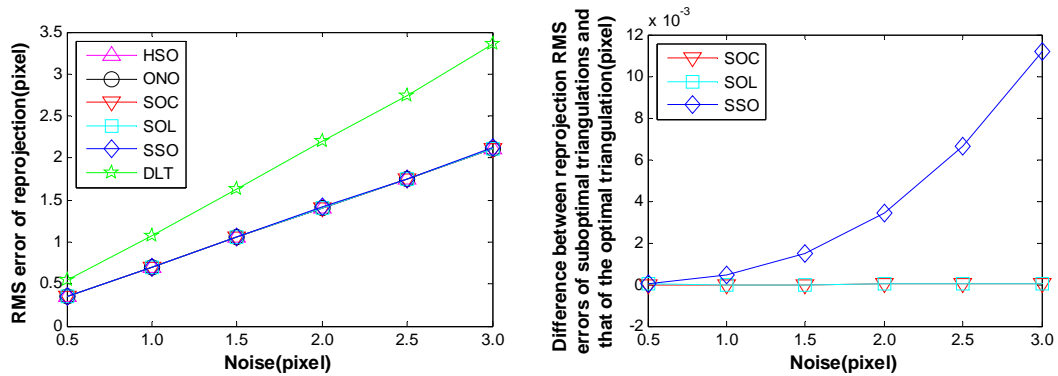
次优解就是最优解。出现这种情况是由于结构 II 中基本矩阵左上角的 2×2 子阵的两个非零奇异值相等，因此由命题 2-2，SOC 与 SOL 的解与最优算法的解相同。而对比结构 I，在大噪声时 SSO 的均方根更大，但始终不会超过最优算法均方根 0.2 个像素。



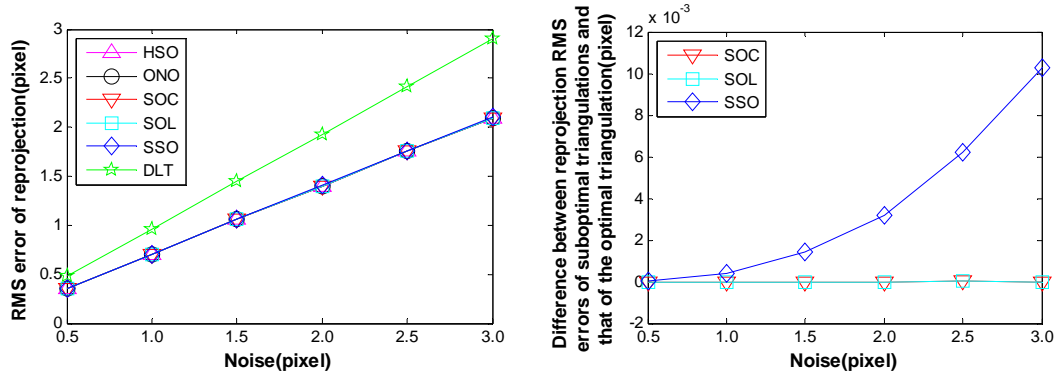
a 基高比 2/3



b 基高比 3/5

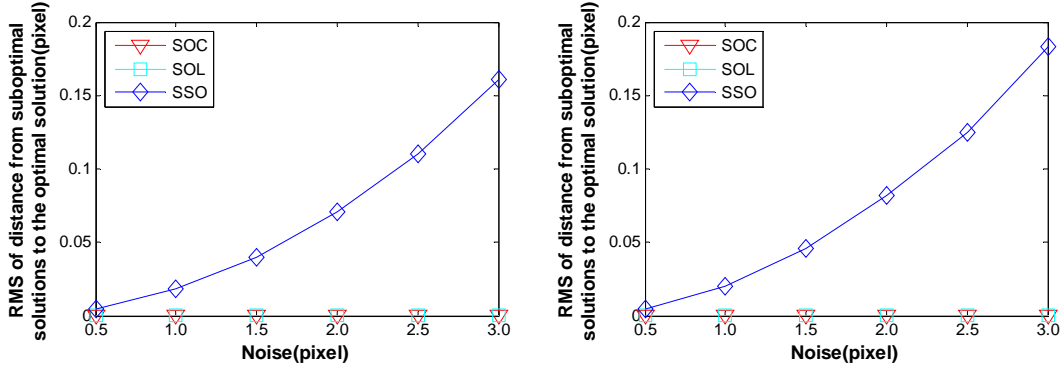


c 基高比 1/2



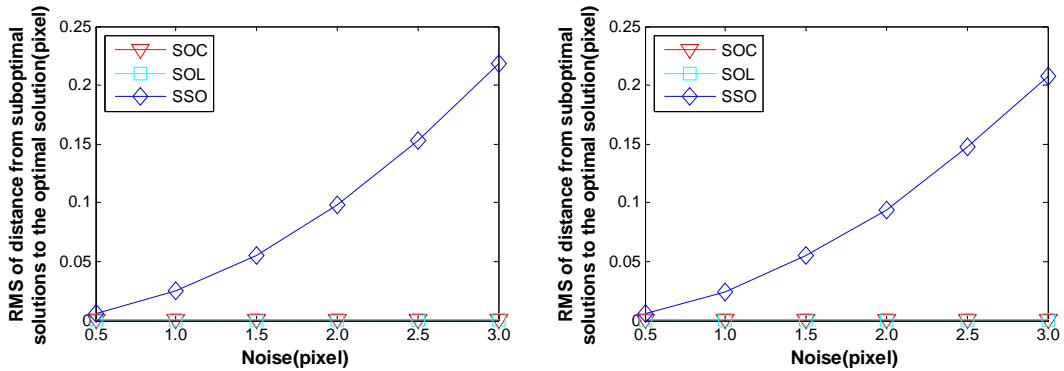
d 基高比 2/5

图 2-8 结构 II 的实验结果：左图为重投影均方根误差（像素）；右图为三种次优算法与最优算法的重投影均方根误差的差值（像素）



a 基高比 2/3

b 基高比 3/5

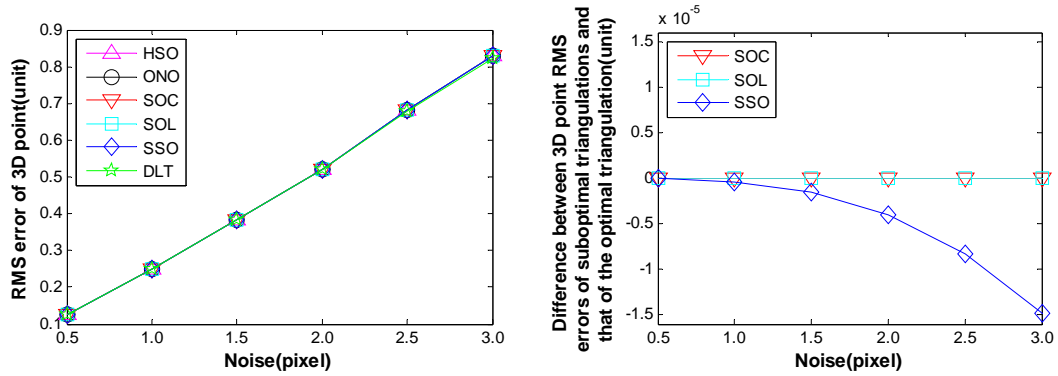


c 基高比 1/2

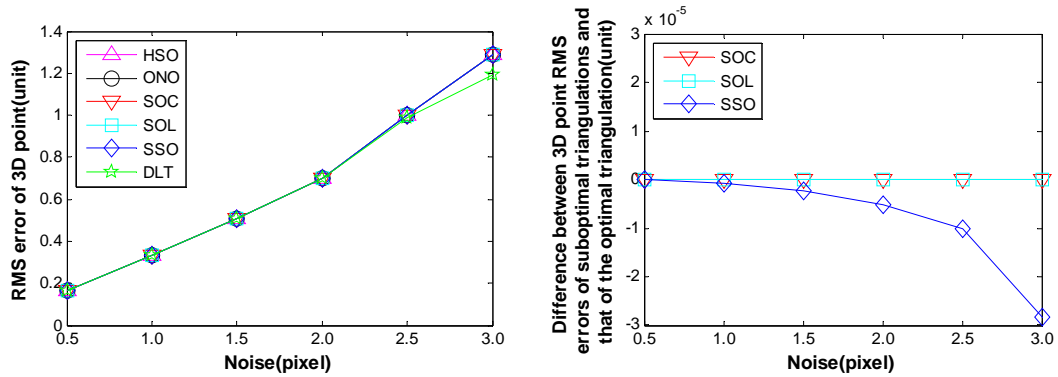
d 基高比 2/5

图 2-9 结构 II 的实验结果：三种次优算法与最优算法重投影差值的均方根（像素）

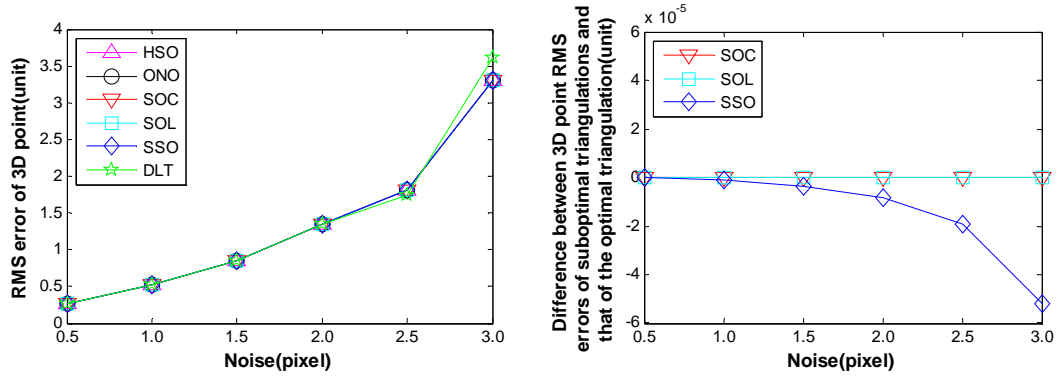
对于重建均方根误差,如图 2-10, DLT 在基线缩短时与其它三角化方法稍有差异;而由于结构 II 中 SOC 和 SOL 的结果就是最优算法的结果,所以它们的重建结果也与最优算法的结果一致;与结构 I 相同,SSO 的重建结果精度最好。值得注意的是大噪声时,所有的三角化方法的重建结果随着基线的缩短而变的不稳定,这与 Hartley 和 Sturm 的报道一致[25]。表 2-7 给出了 SSO 在噪声为 3 个像素的平均迭代次数。与结构 I 一样,只经过几次迭代 SSO 就逼近 Sampson 点。



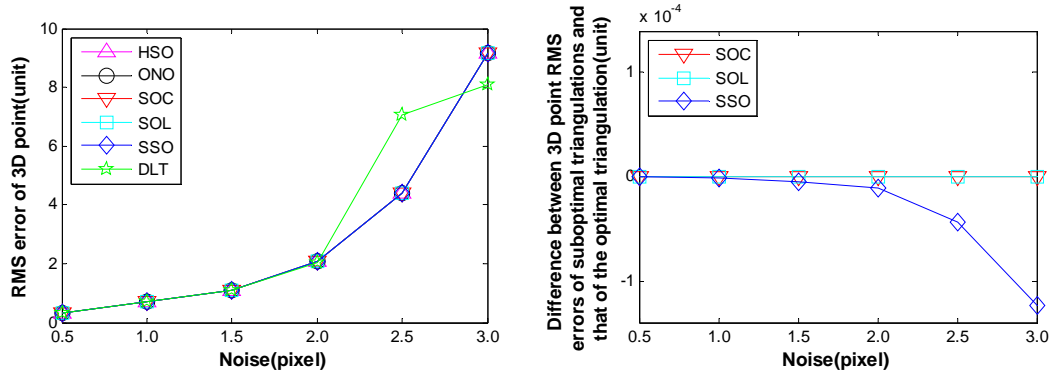
a 基高比 2/3



b 基高比 3/5



c 基高比1/2



d 基高比2/5

图 2-10 结构 II 的实验结果：左图为重建均方根误差（单位）；右图为三种次优算法与最优算法的重建均方根误差的差值（单位）

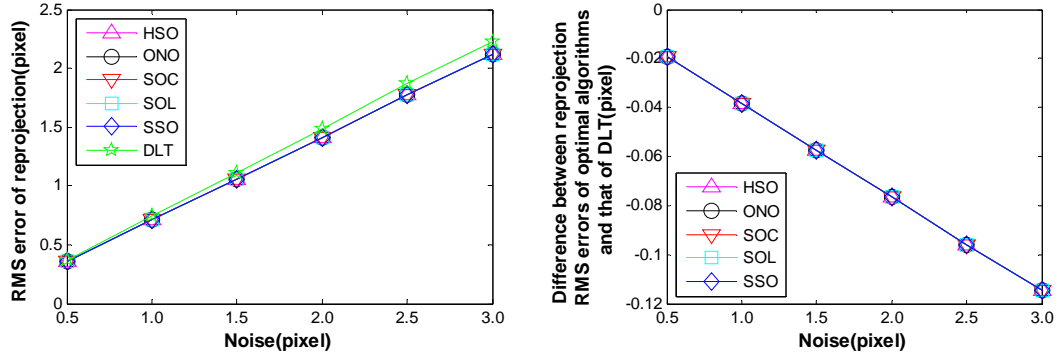
表 2-8 结构 II 中 SSO 的平均迭代次数

$\varepsilon = \left \varphi(\mathbf{x}_n^s) \right $	$<10^{-1}$	$<10^{-3}$	$<10^{-4}$	$<10^{-5}$	$<10^{-7}$	$<10^{-9}$
平均迭代次数	1.3485	1.7968	1.9058	1.9652	2.0554	2.1881

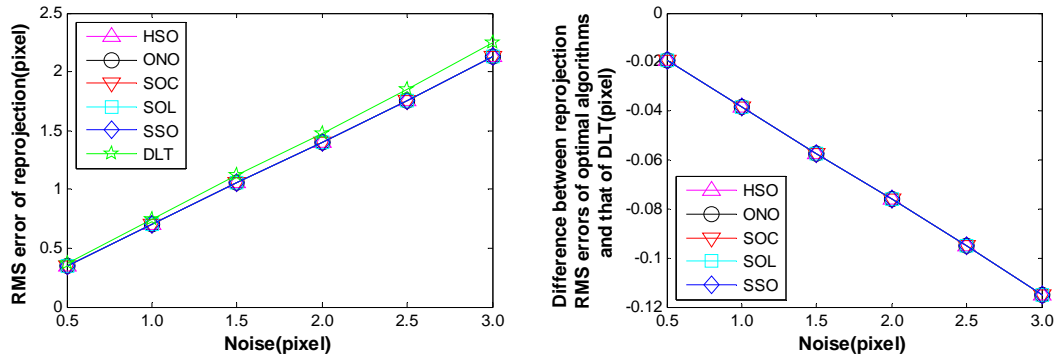
结构 III 的实验结果：

由于基本矩阵的 2×2 左上角矩阵秩为零，三种次优算法的结果理论上就是最优结果，这从图 2-11 和图 2-12 给出结果可以得到验证。而在这些算法中，DLT 的重投影均方根误差最大，并且除基高比为 $1/40$ 之外，DLT 的重建均方根误差也为最大。值得注意的是，接近退化的情况，例如基高比为 $1/40$ ，会使得所有三角化方法的

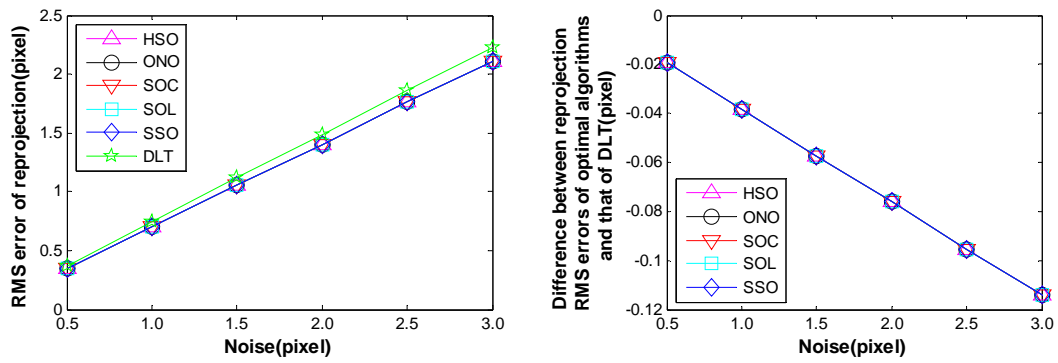
重建在大噪声时变的不稳定。而由于 Sampson 点就是 Sampson 近似，所以结构 III 的情况下，SSO 的迭代次数总是 1。



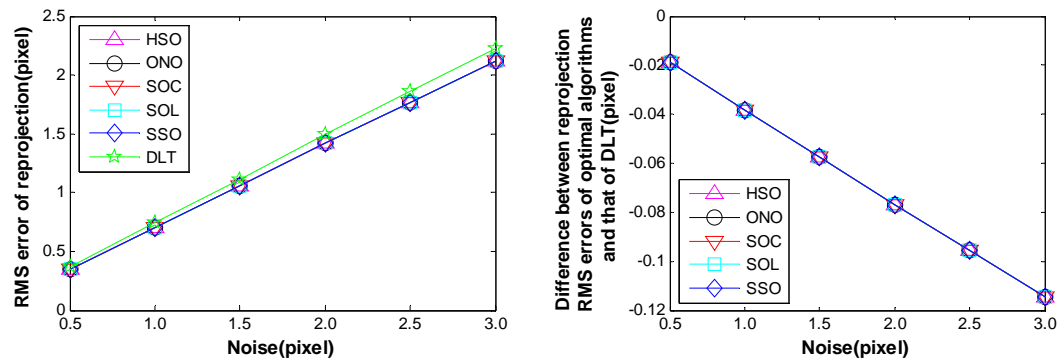
a 基高比1/1



b 基高比1/2

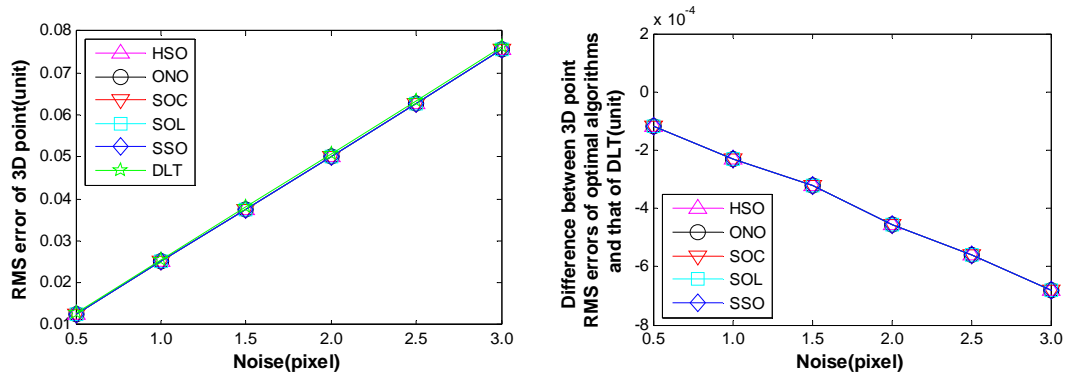


c 基高比1/20

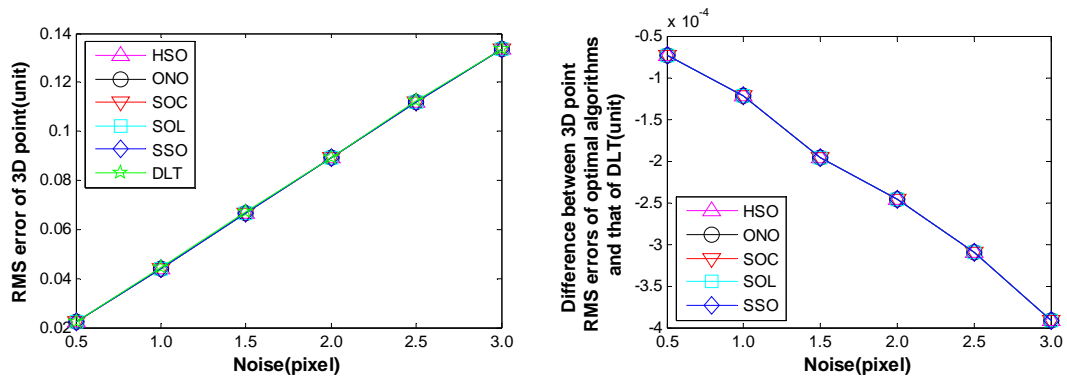


d 基高比1/40

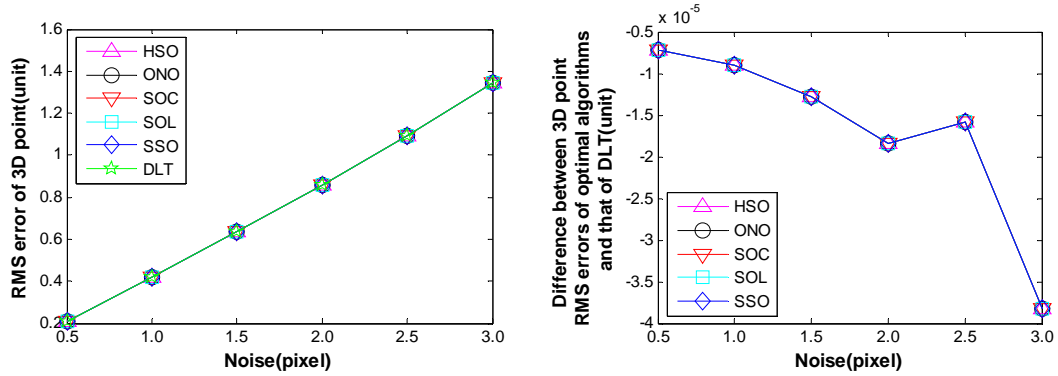
图 2-11 结构 III 的实验结果：左图为重投影均方根误差（像素）；右图为三种次优算法与最优算法的重投影均方根误差的差值（像素）



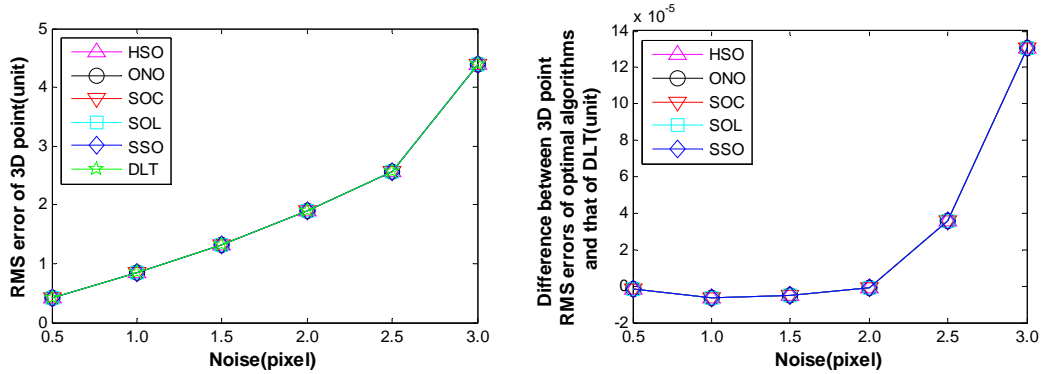
a 基高比1/1



b 基高比1/2



c 基高比1/20



d 基高比1/40

图 2-12 结构 III 的实验结果：左图为重建均方根误差（单位）；右图为三种次优算法与最优算法的重建均方根误差的差值（单位）

2.6.2 真实实验

真实实验的图像如图 2-13 所示，由尼康 40D 在分辨率为 3008×2000 时拍摄得到。并且两台摄像机如上节中结构 I 进行配置，包括大基线，中基线和短基线（接近退化）三个场景。在每一幅图像上，均提取标定块的 108 个角点做为测量点，并用这些角点和对应的测量点计算摄像机矩阵和基本矩阵。

实验结果如图 2-14，图 2-15，图 2-16，表 2-9 所示。对于重投影均方根误差，如图 2-14，DLT 的误差最大，而三种次优算法的误差与最优算法几乎相同。对于重建均方根误差，如图 2-15，三种次优算法的结果与最优算法相当，并稍稍好于 DLT 的结果。从表 2-9 可以看出，三种次优算法与最优算法重投影差值的均方根不超过 10^{-4} 个像素；相较而言，DLT 的差值的均方根非常大。从图 2-16 可以看出，三种次

优算法的计算时间少于最优算法，特别是 SOL 和 SSO 的计算时间分别只有 HSO 的 $2/5$ 和 $1/5$ 。



I 大基高比



II 中基高比



III 小基高比

图 2-13 三种基高比配置下的图像

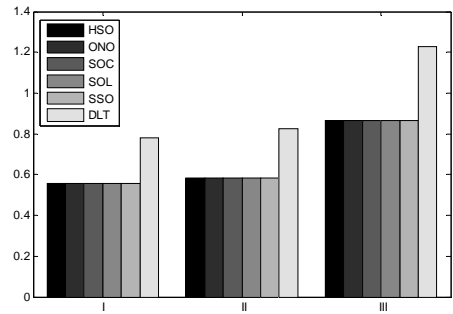


图 2-14 重投影均方根误差（像素）

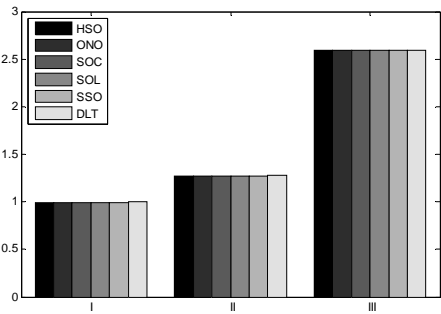


图 2-15 重建均方根误差（单位）

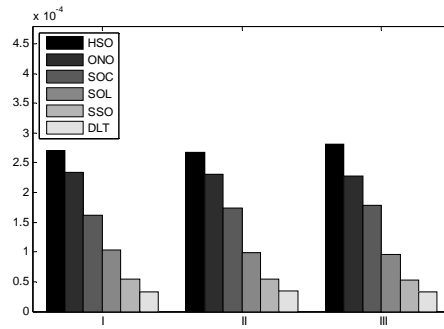


图 2-16 平均计算时间（秒）

表 2-9 三种次优算法及 DLT 与最优算法重投影差值的均方根（像素）

基高比	SOC	SOL	SSO	DLT
I	0.00000917	0.00001066	0.00001606	0.54914095
II	0.00001132	0.00001259	0.00002011	0.82953005
III	0.00001009	0.00001042	0.00002892	0.90717425

由此，基于以上模拟和真实实验的实验结果，可以得出结论：一般情况下，三种次优三角化方法在重建方面可以获得与最优三角化方法相当的精度，但只需要较少的计算代价。在实际应用中，由于计算复杂度较低，SOL 和 SSO 要好于 SOC。

2.7 本章小结

本章对两视情况下点三角化问题进行了研究，基于基本锥面和 Lagrange 乘子法，提出了一种新的最优三角化方法。基于生成锥面，生成线和 Sampson 近似，定义了测量点在基本锥面上的三个近似最近点，并提出了三个对应的次优三角化方法。这三个次优算法不但在估计精度与最优三角化方法相当，并且有效的减小了计算复杂度。除此以外，给出了一个簇的 Sampson 序列的定义，并证明了 n 维空间中测量点关于锥面或椭球面的 Sampson 序列总是收敛于锥面或椭球面上的一点。

第三章 多视三角化的迭代算法

3.1 引言

本章将要讨论的三角化方法特指多视的点三角化方法，该方法旨在给定多幅图像上的对应点匹配和摄像机投影矩阵的情况下，估计各个摄像机中心到测量点的反投影线在空间中的交点。与两视三角化相比，多视三角化采用多幅图像，增加了三角化的精度。但由于多幅视图之间几何关系更加复杂，多视三角化在目前仍没有什么有效的解决方法。相比两视最优三角化只要求解一元六次方程，多视三角化的困难表现在：对于三幅图像的情况，文献[34]中的算法需要构造三元六次方程组，再用 Groebner 基的方法得到 47 个解，并从中找出最优解；对于三幅以上的图像问题，则需要求解更高次数的方程组。所以，对于三幅以上图像的三角化，已有文献中都是使用某种优化准则并采用迭代优化方法来求解。其中，最常用的方法是基于 LM (Levenberg-Marquardt) 迭代的黄金标准算法[7]。在该算法中，LM 迭代算法具有非常大的计算量，而由于 L_2 -范数目标函数并非凸函数[79]，使得不能保证得到全局最优解。为了得到 L_2 -范数的优化准则的全局最优解，文献[40-42]采用了具有更大计算量的分支定界算法。为了避免多个局部极小值的存在，文献[48,50,51]采用 L_∞ -范数的优化准则。由于 L_∞ -范数导致一个准凸的代价函数，因此该优化准则可以得到一个全局最优解。然而 L_∞ -范数的优化准则不像 L_2 -范数的优化准则那样具有统计意义（在测量误差服从高斯分布时， L_2 -范数的优化准则为最大似然估计），因此在具体应用中没有得到广泛使用。

针对多视三角化问题，本章提出了一种新的 L_2 -范数的优化准则。根据该优化准则，提出了计算复杂性较小的 Sampson 近似迭代算法；为了进一步减少 Sampson 近似迭代的迭代次数，还提出了沿共轭梯度的迭代算法。实验表明，本章的两种迭代算法的迭代次数和运算时间明显少于黄金标准算法，而计算精度却与之相当。

本章的组织结构如下：3.2 节给出新的优化准则；3.3 节给出基于 Sampson 近似的迭代算法；3.4 节给出空间矩阵最小奇异值递减的充分条件，以及基于共轭梯度的迭代算法；3.5 节报道模拟和真实图像的实验结果；最后是本章的小结。

3.2 一种新的优化准则

L_2 -范数优化准则下的多幅图像的三角化方法可以表述为：给定某一空间点在 m 幅图像的测量点 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ ，以及相应的摄像机投影矩阵 $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m\}$ ，估计点对应 $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_m\}$ ，使其在满足多视极几何约束的情况下到测量点的 L_2 -范数距离（即欧氏距离）最小。其中， $\{\tilde{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_m\}$ 称为测量点 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ 的几何校正。下面引入空间平面矩阵的概念，将多视极几何约束转化为空间平面矩阵最小奇异值为零的约束，从而给出一种新的优化准则。

令 $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)^T$ ，则由图像上两条经过 \mathbf{x}_n 的直线 $\mathbf{l}_{n1} = (1, 0, -x_n)$ ， $\mathbf{l}_{n2} = (0, 1, -y_n)$ 和第 n 个摄像机中心可以确定两个空间平面，即这两条直线的反投影平面[9]：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\pi}_{n1}^T = \mathbf{l}_{n1} \mathbf{P}_n = (1, 0, -x_n) \mathbf{P}_n \\ \boldsymbol{\pi}_{n2}^T = \mathbf{l}_{n2} \mathbf{P}_n = (0, 1, -y_n) \mathbf{P}_n \end{cases} \quad (3-1)$$

\mathbf{x}_n 对应的空间点则位于这两个反投影平面的交线上。将测量点 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ 得到的 $2 \times m$ 个这样的空间平面，记为 $\boldsymbol{\pi}_{11}, \boldsymbol{\pi}_{12}, \dots, \boldsymbol{\pi}_{m1}, \boldsymbol{\pi}_{m2}$ ，构成（测量点 \mathbf{x} 导致的）空间平面矩阵

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi}_{11}^T \\ \boldsymbol{\pi}_{12}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}_{m1}^T \\ \boldsymbol{\pi}_{m2}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1, 0, -x_1) \mathbf{P}_1 \\ (1, 0, -y_1) \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ (1, 0, -x_m) \mathbf{P}_m \\ (1, 0, -y_m) \mathbf{P}_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

如果 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ 满足多视极几何约束，则存在空间点 \mathbf{X} 满足 $\boldsymbol{\pi}_{n1}^T \mathbf{X} = 0, \boldsymbol{\pi}_{n2}^T \mathbf{X} = 0, n = 1 \dots m$ ，于是可以得到

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{X} = 0 \quad (3-3)$$

(3-3) 式说明平面矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 不满秩，即 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 的最小奇异值 $\sigma_4(\mathbf{x}) = 0$ 。因此， m 幅图像的最优三角化问题可转化为求解以下的最小化问题：

$$\min \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad \text{s.t.} \quad \sigma_4(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (3-4)$$

值得注意的是这里的最小化问题 (3-4) 中仅包含一个等式约束，即多视极几何约束可以用一个方程表示。而一般情况下，多幅图像的极几何约束的表示形式较为复杂，如三幅图像的三焦张量和四幅图像的四焦张量都包含了多个方程。本章提出空间平面矩阵的概念，并将对应点的反投影线交于同一空间点转化为空间平面矩阵

具有零最小奇异值，由此不但描述了多幅图像下的极几何约束，并且给出了非常简洁的表示形式。对于最小化问题（3-4）的求解，一般采用优化理论中的非线性等式约束最优化方法，如乘子法[80]等，但这些优化方法存在计算复杂性高、运算量大的缺点，为此下文中将给出两种简单的迭代算法。

3.3 基于 Sampson 近似的迭代算法

最小化问题（3-4）可以看作是一种特殊的最近点问题。一般最近点问题是指：给定由一组方程确定的点集 $\mathbb{G} = \{\tilde{\mathbf{x}} : G(\tilde{\mathbf{x}}) = 0\}$ 和来自该集合的一个测量点 \mathbf{x} ，求 $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{G}$ 使得它到测量点 \mathbf{x} 的 L_2 -范数距离达到最小，即求最小化问题：

$$\min \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2^2 \quad \text{s.t. } G(\tilde{\mathbf{x}}) = 0 \quad (3-5)$$

令 $\Delta \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ ，最小化问题（3-5）可以改写为

$$\min \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} \quad \text{s.t. } G(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) = 0 \quad (3-6)$$

用 $G(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ 的一阶 Sampson 近似[26]来替代原约束，新的约束可以写为

$$G(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) \approx G(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (3-7)$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 为 G 在测量点 \mathbf{x} 的 Jacobi 矩阵。于是得到了如下线性约束最小二乘问题

$$\min \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} \quad \text{s.t. } G(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})^T \Delta \mathbf{x} = 0 \quad (3-8)$$

用拉格朗日乘子法可以解得（3-8）的最优解为

$$\Delta \mathbf{x} = -\mathbf{J}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right)^{-1} G(\mathbf{x}) \quad (3-9)$$

则点 \mathbf{x} 的 Sampson 近似解为

$$\mathbf{x}^S = \mathbf{x} - \mathbf{J}(\mathbf{x}) \left(\mathbf{J}(\mathbf{x})^T \mathbf{J}(\mathbf{x}) \right)^{-1} G(\mathbf{x}) \quad (3-10)$$

如果函数 G 是线性的，Sampson 近似解 \mathbf{x}^S 就是原优化问题的最优解。否则， $G(\mathbf{x}^S) \neq 0$ ，即 Sampson 近似解 \mathbf{x}^S 不在集合 \mathbb{G} 中，此时，采用 Sampson 迭代

$$\mathbf{x}_{k+1}^S = \mathbf{x}_k^S - \mathbf{J}(\mathbf{x}_k^S) \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}_k^S)^T \mathbf{J}(\mathbf{x}_k^S) \right)^{-1} G(\mathbf{x}_k^S), \quad k \geq 0, \quad \mathbf{x}_0^S = \mathbf{x} \quad (3-11)$$

其中， \mathbf{x}_k^S 称为第 k 次 Sampson 近似解。如果 $G(\mathbf{x}_k^S) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ ，则称 Sampson 迭代收敛。

文献[81]将 Sampson 迭代应用于两视情况，并取得了很好的效果。这里本节将 Sampson 迭代应用到多视情况（3-4）。通过直接计算，（3-4）式的 Sampson 迭代可

表示为

$$\mathbf{x}_{k+1}^S = \mathbf{x}_k^S - \frac{\sigma_4(\mathbf{x}_k^S)}{\left(\frac{\partial \sigma_4(\mathbf{x}_k^S)}{\partial \mathbf{x}}\right)^T \left(\frac{\partial \sigma_4(\mathbf{x}_k^S)}{\partial \mathbf{x}}\right)} \left(\frac{\partial \sigma_4(\mathbf{x}_k^S)}{\partial \mathbf{x}}\right) \quad (3-12)$$

其中 $\sigma_4(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_4(\mathbf{x})^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_4(\mathbf{x})$, $\mathbf{u}_4(\mathbf{x}), \mathbf{v}_4(\mathbf{x})$ 分别表示 $\sigma_4(\mathbf{x})$ 对应的左右奇异向量。

在 Sampson 迭代过程中, 可使用下述方法计算 $\sigma_4(\mathbf{x})$ 的偏导数。

从 $\mathbf{u}_4^T \mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4^T \mathbf{v}_4 = 1$, 不难证明 $\frac{\partial \mathbf{u}_4^T}{\partial x_i} \mathbf{u}_4 = 0$, $\frac{\partial \mathbf{v}_4^T}{\partial x_i} \mathbf{v}_4 = 0$, 其中 x_i 是 \mathbf{x} 的第 i 个分量。为了表述的简洁, 下文中采用 \mathbf{A}_k 表示 \mathbf{x}_k 导致的空间平面矩阵, 用 σ_4^k 表示 \mathbf{A}_k 的最小奇异值, 用 \mathbf{u}_4^k 和 \mathbf{v}_4^k 表示 σ_4^k 对应的左右奇异向量。于是, σ_4^k 关于 x_i 的一阶偏导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_4^k}{\partial x_i} &= \frac{\partial((\mathbf{u}_4^k)^T \mathbf{A}_k \mathbf{v}_4^k)}{\partial x_i} \\ &= \sigma_4^k \frac{\partial(\mathbf{u}_4^k)^T}{\partial x_i} \mathbf{u}_4^k + (\mathbf{u}_4^k)^T \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x_i} \mathbf{v}_4^k + \sigma_4^k (\mathbf{v}_4^k)^T \frac{\partial \mathbf{v}_4^k}{\partial x_i} \\ &= (\mathbf{u}_4^k)^T \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x_i} \mathbf{v}_4^k \end{aligned} \quad (3-13)$$

其中, $\frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial x_i} = -\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{p}_{\lfloor i/2 \rfloor, 3}$, \mathbf{e}_i 为第 i 项为 1 的 $2 \times m$ 维单位列向量, \mathbf{p}_{n3}^T 为摄像机矩阵 \mathbf{P}_n 的第 3 行, $\lfloor a \rfloor$ 表示大于或等于 a 的最小整数, \otimes 表示 kronecker 积。

由此可以得到

$$\frac{\partial \sigma_4^k}{\partial \mathbf{x}} = \text{diag}(\mathbf{u}_4^k) \mathbf{D} \mathbf{v}_4^k \quad (3-14)$$

其中, $\mathbf{D} = (\mathbf{p}_{13}, \mathbf{p}_{13}, \dots, \mathbf{p}_{m3}, \mathbf{p}_{m3})^T$, $\text{diag}(\mathbf{x})$ 表示向量 \mathbf{x} 的对角阵。

在具体应用中, 当满足 $\partial \sigma_4^k / \partial \mathbf{x} = 0$ 或 $\sigma_4^k \leq \varepsilon$ 时 (ε 是控制计算精度的阈值), 则终止 Sampson 迭代, 并输出空间点 \mathbf{v}_4^k 和对应的图像点 (注: 最小奇异值对应的右奇异向量就是空间点对应的齐次坐标, 输出该空间点对应的图像点是为了使输出的图像点满足多视极几何约束)。

另外, 上述 Sampson 迭代在理论上不能保证收敛性。这是因为函数 $\sigma_4(\mathbf{x})$ 不是一个凸函数, 不能保证点 \mathbf{x}_k^S 梯度反方向上的 Sampson 近似解 \mathbf{x}_{k+1}^S 的 σ_4^{k+1} 一定小于

σ_4^k ，所以无法保证序列 $\{\sigma_4^k\}$ 的收敛性。

3.4 基于共轭梯度的迭代算法

如果一种迭代算法能使得序列 $\{\sigma_4^k\}$ 单调递减，则该算法不仅保证了 $\{\sigma_4^k\}$ 的收敛性，同时相较于 Sampson 迭代也减少了迭代次数。为此，本节先给出一种 $\{\sigma_4^k\}$ 单调递减的充分条件，然后提出一种基于共轭梯度的迭代算法。

3.4.1 $\{\sigma_4^k\}$ 单调递减的充分条件

当迭代点为 \mathbf{x}_k 时，从 \mathbf{A}_k 可以计算 σ_4^k 和 \mathbf{v}_4^k ，并由此得到变量 \mathbf{x} 的方程：

$$(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{A}(\mathbf{x})^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_4^k = (\sigma_4^k)^2 \quad (3-15)$$

由于空间平面矩阵 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ 能被表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} - \text{diag}(\mathbf{x})\mathbf{D} \quad (3-16)$$

其中 $\mathbf{M} = (\mathbf{p}_{11}, \mathbf{p}_{12}, \dots, \mathbf{p}_{m1}, \mathbf{p}_{m2})^T$ ， $\mathbf{p}_{n1}, \mathbf{p}_{n2}$ 为摄像机矩阵 \mathbf{P}_n 的 1, 2 行。所以，方程 (3-15) 可以改写为

$$\mathbf{x}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{x} - 2(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{M}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k) \mathbf{x} + (\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_4^k = (\sigma_4^k)^2 \quad (3-17)$$

显然，方程 (3-17) 表示一个椭球面，本章称它为 \mathbf{x}_k 所确定的椭球方程。

命题 3-1 给定迭代点 \mathbf{x}_k ，如果下一个迭代点 \mathbf{x}_{k+1} 满足 $(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{v}_4^k < (\sigma_4^k)^2$ ，则 $\sigma_4^{k+1} < \sigma_4^k$ 。

证明：由于 $\mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1}$ 为半正定对称矩阵，所以由 Rayleigh-Rize 定理[82]知， $\mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1}$ 的最小特征值 $(\sigma_4^{k+1})^2$ 满足不等式

$$(\sigma_4^{k+1})^2 \leq (\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{v}_4^k$$

因此，从条件 $(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{A}_{k+1}^T \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{v}_4^k < (\sigma_4^k)^2$ 得到

$$\sigma_4^{k+1} < \sigma_4^k$$

得证。 □

命题 3-1 说明，要使 $\{\sigma_4^k\}$ 单调递减，就要保证迭代点 \mathbf{x}_{k+1} 位于前次迭代点 \mathbf{x}_k 所确定的椭球内部。如果椭球过于扁平，沿梯度方向搜索到的迭代点 \mathbf{x}_{k+1} 的 σ_4^{k+1} 可能几乎不发生变化。为了克服沿梯度方向搜索的这一缺点，下面引入共轭梯度方向

[80], 以增加 σ_4^{k+1} 减少的程度, 这样不仅可以减少算法的迭代次数, 同时也保证了序列 $\{\sigma_4^k\}$ 的收敛性。

3.4.2 基于共轭梯度的迭代算法

对于当前迭代点 \mathbf{x}_k , 其关于椭球方程 (3-17) 的共轭梯度 \mathbf{d}_k 可以通过如下过程得到: 如果 $k=0$, 则 $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$, 其中 $\mathbf{g}_k = \frac{\partial \sigma_4^k}{\partial \mathbf{x}}$ 为 $\sigma_4(\mathbf{x})$ 在 \mathbf{x}_k 的梯度; 否则, 定义 $k > 0$ 次迭代的共轭梯度为

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1} \quad (3-18)$$

由于 \mathbf{d}_k 和 \mathbf{d}_{k-1} 关于 $\text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2$ 共轭, 所以用 $\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2$ 左乘 (3-18) 式两端得到

$$\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_k = -\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_{k-1} = 0 \quad (3-19)$$

如果 $\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_{k-1} = 0$ 或者 $\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{g}_k - \|\mathbf{d}_{k-1}\| \|\mathbf{g}_k\| = 0$, 则令 $\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k$; 否则,

$$\beta_k = \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_{k-1}}.$$

于是, \mathbf{x}_k 的共轭梯度为

$$\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k + \frac{\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{g}_k}{\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_{k-1}} \mathbf{d}_{k-1} \quad (3-20)$$

参照 Sampson 迭代, 这里将下一个迭代点 \mathbf{x}_{k+1} 定义在 \mathbf{x}_k 的共轭梯度方向上, 即 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$, 其中步长 λ_k 可通过求解 $f(\lambda) = (\mathbf{v}_4^k)^T (\mathbf{A}_k - \lambda \text{diag}(\mathbf{d}_k) \mathbf{D})^T (\mathbf{A}_k - \lambda \text{diag}(\mathbf{d}_k) \mathbf{D}) \mathbf{v}_4^k$ 的最小值得到。

于是, 由拉格朗日乘子法, $\min f(\lambda)$ 的解为

$$\lambda_k = \frac{(\mathbf{v}_4^k)^T (\mathbf{A}_k)^T \text{diag}(\mathbf{d}_k) \mathbf{D} \mathbf{v}_4^k}{(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{D}^T \text{diag}(\mathbf{d}_k)^2 \mathbf{D} \mathbf{v}_4^k} \quad (3-21)$$

因此, 下一个迭代点为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{(\mathbf{v}_4^k)^T (\mathbf{A}_k)^T \text{diag}(\mathbf{d}_k) \mathbf{D} \mathbf{v}_4^k}{(\mathbf{v}_4^k)^T \mathbf{D}^T \text{diag}(\mathbf{d}_k)^2 \mathbf{D} \mathbf{v}_4^k} \mathbf{d}_k \quad (3-22)$$

这样, 就得到了基于共轭梯度的迭代序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 。

在具体应用中, 当满足 $\mathbf{g}_k = 0$ 或 $\sigma_4^k \leq \varepsilon$ 时 (ε 是控制计算精度的阈值), 终止迭

代并输出空间点 \mathbf{v}_4^k 和对应的图像点。基于共轭梯度的迭代算法的基本流程如表 3-1。

表 3-1 基于共轭梯度的迭代算法

初始设置：给定测量值 \mathbf{x}_0 及阈值 ε ，并置 $k = 0$
<ol style="list-style-type: none"> 1. 计算空间平面矩阵 \mathbf{A}_k，对 \mathbf{A}_k 进行 SVD 分解得到 $\sigma_4^k, \mathbf{u}_4^k, \mathbf{v}_4^k$，梯度 \mathbf{g}_k 可由 (3-14) 式求得； 2. 若 $\sigma_4^k \leq \varepsilon$ 或者 $\mathbf{g}_k = 0$，则停止计算，并输出空间点 \mathbf{v}_4^k 和对应的图像点；否则，执行下一步； 3. 计算共轭梯度 \mathbf{d}_k：当 $k = 0$ 时，则 $\mathbf{d}_0 = -\mathbf{g}_0$。当 $k > 0$ 时，判断 $\mathbf{d}_{k-1}^T \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{v}_4^k)^2 \mathbf{d}_{k-1}$ 或者 $\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{g}_k - \ \mathbf{d}_{k-1}\ \ \mathbf{g}_k\$ 是否为 0：如果是，则 $\mathbf{d}_k = -\mathbf{g}_k$；否则，由 (3-20) 式求得 \mathbf{d}_k； 4. 由 (3-21) 式求得步长 λ_k，令 $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$，置 $k = k + 1$，转 1。

3.5 实验

本节以本章中提出的两种迭代算法 ISA（基于 Sampson 近似的迭代算法）以及 ICG（基于共轭梯度的迭代算法）与 DLT（齐次线性三角化方法）和 DLT+GS（DLT 结果为初始估计值的黄金标准算法）进行模拟实验和真实实验方面的比较。对于本章两种算法，在运算前先将摄像机矩阵进行归一化，使其 F-范数为 1，并且将 $\sigma_4(\mathbf{x})$ 的阈值 ε 设为 10^{-7} 。实验中，本节采用 2.33GHz Inter Core2 DUO CPU，2GB 内存的戴尔台式电脑进行实验。

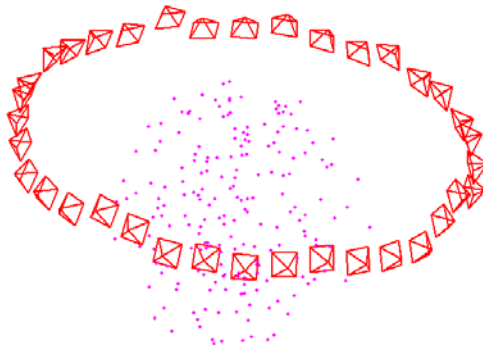


图 3-1 模拟实验中的 36 台摄像机的位置

3.5.1 模拟实验

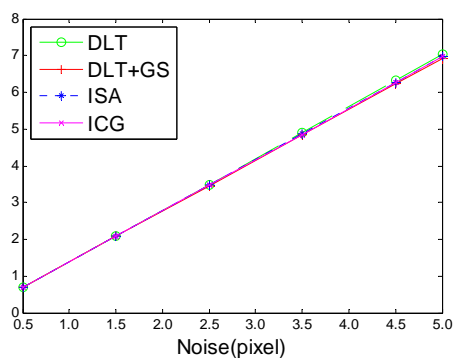
模拟实验的场景如图 3-1 所示，36 台摄像机围成一圈向下俯视空间点，摄像机之间大致相差 10 度，200 个空间点随机分布于半径为 8 个单位的空间球内。实验中每台摄像机的内参数均取为

$$K = \begin{pmatrix} f_u & 0 & u_0 \\ 0 & f_v & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 512 \\ 0 & 700 & 512 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

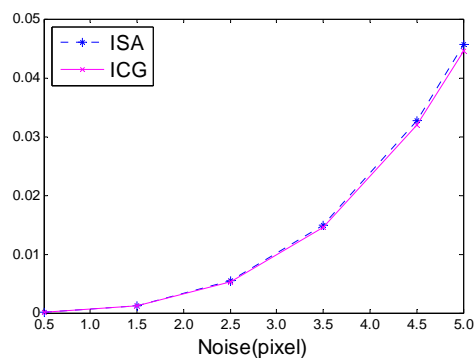
图像范围均取为 1024×1024 。

模拟实验分为两个部分：实验 1，固定图像个数为 36，在每个图像点上加入零均值、标准差为 σ 的高斯噪声。噪声大小 σ 从 0.5 个像素变化到 5 个像素，每种噪声进行 1000 次实验。实验 2，固定噪声大小 σ 为 2 个像素，采用 10 种不同图像个数进行实验。图像个数分别为 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36，每种图像个数下进行 1000 次实验。

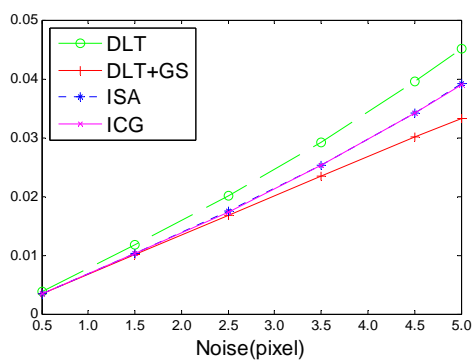
图 3-2 和图 3-3 分别为实验 1 和实验 2 的结果。从图 3-2a, 3-2c 和图 3-3a, 3-3c 可以看出，2 个实验中 3 种迭代算法的重投影均方根误差和空间位置均方根误差均明显小于 DLT。图 3-2b, 3-2d 和图 3-3b, 3-3d 分别给出了本章的两种算法与 DLT+GS 关于重投影均方根误差和空间位置均方根误差的差值，可以看出实验 2 差值的数量级分别是 10^{-3} 个像素和 10^{-4} 个单位，这与实验 1 噪声小于 2 个像素的结果一致，而当实验 1 中噪声增大时差值的数量级也不超过 10^{-2} 个像素和 10^{-3} 个单位。从图 3-2f 和图 3-3f 可以看出，DLT+GS 的迭代次数总是位于 40 到 45 次之间，ISA 的迭代次数随噪声或图像个数的增加而增大但都小于 20 次，ICG 的迭代次数受噪声和图像个数的影响不太明显，总小于 10 次。而由于迭代次数的明显差异，图 3-2e 和图 3-3e 可以看出，ISA 和 ICG 的运算时间仅为 DLT+GS 的 $2/5$ 甚至是 $1/6$ 。



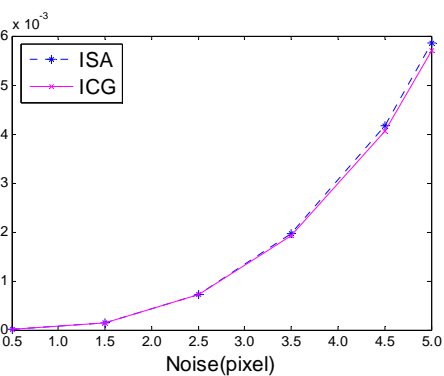
a 重投影均方根误差 (像素)



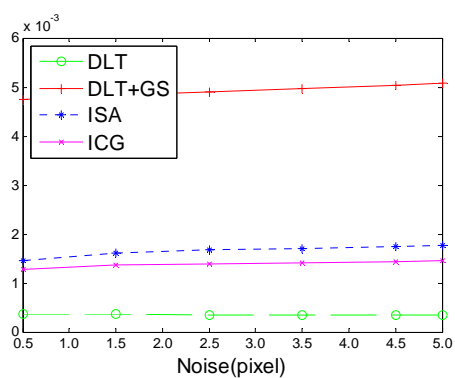
b ISA 和 ICG 与 DLT+GS 重投影均方根误差的差值 (像素)



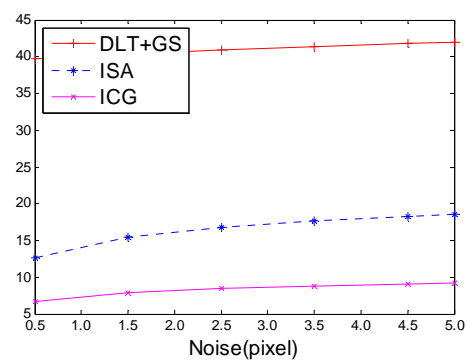
c 空间位置均方根误差 (单位)



d ISA 和 ICG 与 DLT+GS 空间位置均方根误差的差值 (单位)

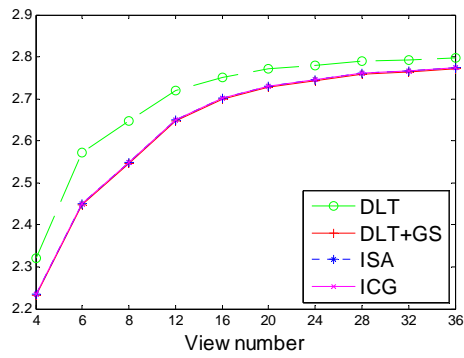


e 平均运算时间 (秒)

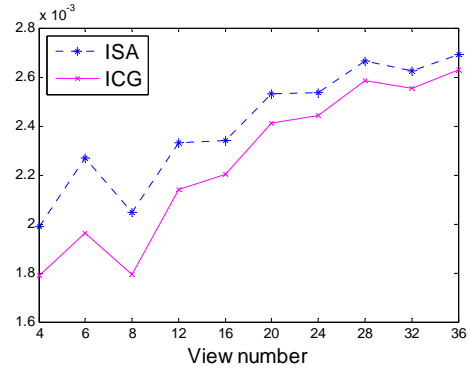


f DLT+GS, ISA 和 ICG 的平均迭代次数

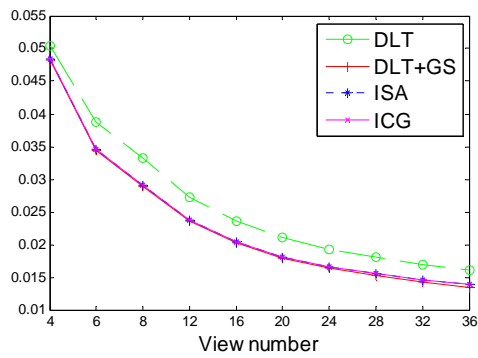
图 3-2 实验 1 的结果



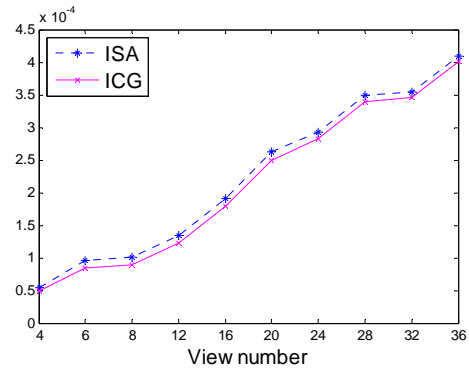
a 重投影均方根误差 (像素)



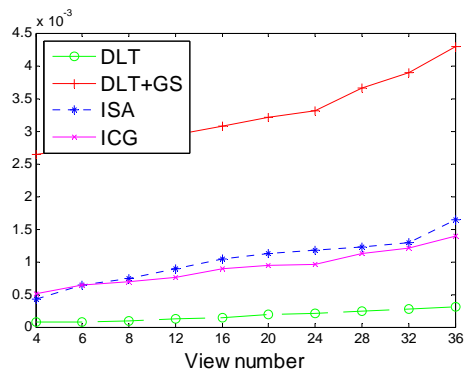
b ISA 和 ICG 与 DLT+GS 重投影均方根误差的差值 (像素)



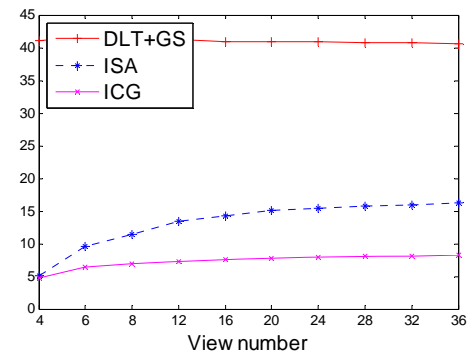
c 空间位置均方根误差 (单位)



d ISA 和 ICG 与 DLT+GS 空间位置均方根误差的差值 (单位)



e 平均运算时间 (秒)



f DLT+GS, ISA 和 ICG 的平均迭代次数

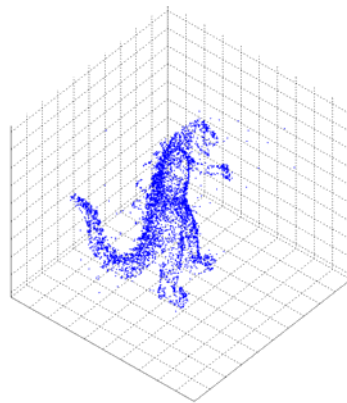
图 3-3 实验 2 的结果

3.5.2 真实实验

真实实验采用 Oxford dinosaur 和应县木塔 2 组数据。其中 Oxford dinosaur 数据¹，如图 3-4a，包括 36 个摄像机矩阵以及 4983 个空间点的图像坐标，应县木塔数据，如图 3-4c，包括 24 个摄像机矩阵以及 16715 个空间点的图像坐标。图 3-4b 和 3-4d 分别给出了由 ICG 得到的这 2 组数据的欧氏重建结果。



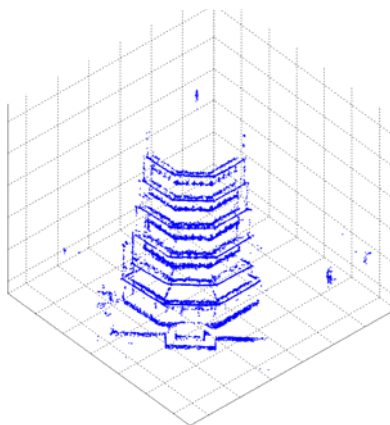
a Oxford dinosaur 数据中的 6 幅图像



b Oxford dinosaur 的重建结果



c 应县木塔数据中的 3 幅图像



d 应县木塔的重建结果

图 3-4 真实实验中采用的两组数据及 ICG 的重建结果

从表 3-2 和表 3-3 给出的实验结果可以看出，本章两种算法的重投影均方根误差与 DLT+GS 的相差不大（差值的数量级为 10^{-4} 个像素），而迭代次数以及运算时间与 DLT+GS 的相比却成倍减小。较之 DLT，本章两种算法的运算时间虽增加了 5 倍

¹ <http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/>

左右，但与 GS 的重投影均方根误差的差值却减少了上百倍。对于本章的两种迭代算法，在运算时间上 ISA 稍小于 ICG，这是由于真实实验中大部分空间点的成像图像都等于或少于 6 幅（这类点在 Oxford dinosaur 数据中占 93.26%，在应县木塔数据中占 82.77%），这与模拟实验 2 的结果图 3-3e 一致。因此，在具体应用中，如果空间点的成像图像等于或少于 6 幅，可使用 ISA 以提高运算速度；否则，可以使用 ICG。

表 3-2 Oxford dinosaur 数据的实验结果

	DLT	DLT+GS	ISA	ICG
重投影均方根误差(像素)	1.515387	1.467379	1.467603	1.467557
平均迭代次数		40.4	2.8	2.8
平均运算时间 (10^{-5} 秒)	7.102	257.233	32.895	37.888

表 3-3 应县木塔数据的实验结果

	DLT	DLT+GS	ISA	ICG
重投影均方根误差(像素)	0.573813	0.530410	0.530636	0.530739
平均迭代次数		41.4	3.5	3.2
平均运算时间 (10^{-5} 秒)	10.623	293.297	40.238	46.047

3.6 本章小结

针对多视最优三角化问题，本章提出了一种新的优化准则。在此优化准则下，给出了基于 Sampson 近似和共轭梯度的两种迭代算法。实验结果表明，这两种迭代算法的迭代次数和运算时间均明显小于黄金标准算法，而精度几乎与之相当。

第四章 三视的直线三角化方法

4.1 引言

本章主要讨论的三角化方法均是指三视的直线三角化方法，它是在给定三台摄像机投影矩阵和图像上对应直线匹配时求解空间直线的方法。与点三角化类似，直线三角化在理论上是求解由各摄像机中心和对应直线匹配构成的反投影平面在空间中的交线。由于在实际场景中，尤其是在人造景物中存在着大量的直线，并且直线结构具有一些点所没有的优点[24]，例如：直线的提取比点的提取要更加精确，直线被完全遮挡的机会比点要少以及直线能够提供更多的景物结构信息，所以直线三角化的研究一直备受关注。但是，相比点三角化，直线三角化也更加困难。如图 1-4 所示，最少三幅图像上的对应直线匹配才能有效地确定空间中的一条直线，即同一空间直线的三个投影必须满足三线性的极几何关系。而又由于空间直线具有四个自由度，所以它不存在一个简单却又完全的表示方法。

虽然直线三角化的研究存在很多困难，但还是引起了很多科研人员的兴趣，并基于空间直线的不同表示提出了不同算法。Wang 和 Huang 等人[74]提出的算法中采用了空间直线的方向和它到原点的最近点来表示直线，并将方向和最近点分开求解得到空间直线的估计，但是这种方法对于噪声十分敏感。基于 Plucker 坐标的直线表示，Bartoli 和 Sturm[67]提出了三种求解方法：其中线性算法类似两视的点三角化中的线性方法得到一个关于直线坐标的线性方程，并对线性方程中的系数矩阵进行奇异值分解得到空间直线的初步估计。由于 Plucker 坐标需要满足一个非线性约束，即 Klein 曲面约束[66]，初步估计并不一定是直线的 Plucker 坐标，为此必须对初步估计进行校正；准线性算法一则是在线性算法的基础上，将空间直线投影得到的图像直线坐标的前两个元素的 L_2 -范数加入到线性方程中并迭代求解该方程得到近似于几何误差最小化的直线估计，该算法在每次迭代中都要对初步估计进行校正；准线性算法二为了避免算法一中的校正过程，将 Klein 曲面约束进行线性化，并将其做为约束代入迭代过程。这三种算法均不能直接得到满足 Klein 曲面约束的估计结果，而校正结果容易受到噪声的影响，并且它们最小化代数误差或近似几何误差，所得的结果没有真正的几何意义。文献[7]中的黄金标准算法，采用两幅图像上的直

线坐标做为空间直线的表示，并用三焦张量计算另一幅图像上的直线坐标，最小化图像上的 L_2 -范数几何距离。由于黄金标准算法的优化准则不是凸函数，虽然优化时 LM 算法花费大量的运算时间却只能得到局部极值解。

本章对三视的直线三角化进行了研究，提出了两种新的直线三角化方法。基于 Plucker 坐标的直线表示，提出在满足 Klein 曲面约束条件下最小化代数误差的次优算法。该算法并不直接求解最小化问题，而是将该问题转化为六个一元十次方程进行求解。此外，在给出了图像上估计直线的法线距离表示的基础上，提出了以点-线-线三焦张量为约束条件最小化图像几何误差的优化准则以及一种有效的迭代算法。实验表明，基于代数距离的次优算法的代数误差最多不到线性算法的一半，它的估计精度也更加接近黄金标准算法，而基于几何距离的迭代算法的估计精度几乎与黄金标准算法相同，但两种算法的运算时间都少于黄金标准算法。

本章的组织结构如下：4.2 节给出基于代数距离的次优算法；4.3 节给出基于几何距离的迭代算法；4.4 节报道模拟和真实图像的实验结果；最后是本章的小结。

4.2 基于代数距离的次优算法

本节先简要介绍空间直线的 Plucker 坐标表示及摄像机的直线投影矩阵等基础知识，再给出 Klein 曲面约束下的代数误差最小化的优化准则，并提出求得该准则次优解的算法，最后进行算法分析。

4.2.1 Plucker 坐标表示及直线投影矩阵

文献[58,68-76]中已经给出了多种空间直线的表示方法，这些方法各有优点和缺点。Plucker 坐标由于可以表示空间中任意位置直线而成为一种常用的表示方法。

给定两个空间点坐标 $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^T, m)^T$, $\mathbf{Y} = (\mathbf{y}^T, n)^T$ ，由它们所确定的空间直线的六维 Plucker 坐标为 $\mathbf{L} \approx (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T)^T$ ，其中

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} \\ \mathbf{b} &= m\mathbf{y} - n\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4-1)$$

但不是所有六维向量都是 Plucker 坐标，很容易证明 \mathbf{L} 中的元素必须满足约束

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0 \quad (4-2)$$

该约束称为 Klein 曲面约束。

基于直线的 Plucker 坐标表示，可以将空间点投影矩阵推广到空间直线的情况，以下是直线投影矩阵的定义。

定义 4-1 令 $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ 为摄像机投影矩阵，其中 \mathbf{p}_i 为 P 的第 i 列，则直线投影矩阵可以定义为 $Q = (\mathbf{p}_4 \times \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_4 \times \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_4 \times \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)$ 。

通过直线投影矩阵得到空间直线 \mathbf{L} 到图像直线 \mathbf{l} 的投影表达式

$$\mathbf{l} \approx \mathbf{Q}\mathbf{L} \quad (4-3)$$

4.2.2 Klein 曲面约束下的最小代数距离问题

给定三幅图像上对应直线匹配的端点坐标， $\{\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}\}, i=1,2,3$ ，由 (4-3) 可知空间直线 \mathbf{L} 在图像上的投影满足

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{i1}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{L} = 0 \\ \mathbf{x}_{i2}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{L} = 0 \end{cases} \quad (4-4)$$

其中 \mathbf{Q}_i 为第 i 幅图像的直线投影矩阵。当测量直线的端点存在误差时，并不存在完全满足 (4-4) 式的空间直线，仿照点的最小代数距离问题，可以通过最小化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{L}} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} = 1 \end{aligned} \quad (4-5)$$

得到直线估计 $\bar{\mathbf{L}}$ ，其中 $\mathbf{A} = (\mathbf{Q}_1^T \mathbf{x}_{11}, \mathbf{Q}_1^T \mathbf{x}_{12}, \mathbf{Q}_2^T \mathbf{x}_{21}, \mathbf{Q}_2^T \mathbf{x}_{22}, \mathbf{Q}_3^T \mathbf{x}_{31}, \mathbf{Q}_3^T \mathbf{x}_{32})^T$ 。与几何距离相对应， $\|\mathbf{A}\bar{\mathbf{L}}\|$ 被称为代数距离或代数误差。由 (4-2) 可知，最小化问题 (4-5) 求得的坐标并不一定是 Plucker 坐标，所以需要将 Klein 曲面约束加入到最小化问题 (4-5) 中，于是得到带非线性约束的最小化问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{L}} \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\mathbf{L}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{L}} = 0 \\ & \bar{\mathbf{L}}^T \bar{\mathbf{L}} = 1 \end{aligned} \quad (4-6)$$

其中 $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} I_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$ 。

4.2.3 次优算法

Bartoli 和 Sturm[67]提出的线性算法中并没有直接最小化 (4-6)，而是将这个问题分成两步求解：(1) 用最小二乘法求解 (4-5)；(2) 对求得的结果进行 Plucker

校正。这样得到的估计结果对噪声非常敏感，不能满足实际应用的需求。为此，本节介绍一种最小化问题（4-6）的次优算法。

将矩阵 G 特征分解为 $V_G \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix} V_G^T$ ，并令 $\tilde{\mathbf{L}} = (\tilde{\mathbf{L}}_1^T, \tilde{\mathbf{L}}_2^T)^T = V_G^T \bar{\mathbf{L}}$ ，则最小化问题（4-6）可以改写成

$$\begin{aligned} \min & \quad (\tilde{\mathbf{L}}_1^T, \tilde{\mathbf{L}}_2^T) V_G^T A^T A V_G \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_1 \\ \tilde{\mathbf{L}}_2 \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & \quad \tilde{\mathbf{L}}_1^T \tilde{\mathbf{L}}_1 = \tilde{\mathbf{L}}_2^T \tilde{\mathbf{L}}_2 \\ & \quad \tilde{\mathbf{L}}^T \tilde{\mathbf{L}} = 1 \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中， $\tilde{\mathbf{L}}_1, \tilde{\mathbf{L}}_2$ 分别为 $\tilde{\mathbf{L}}$ 的前三个元素和后三个元素组成的向量。对矩阵 $V_G^T A^T A V_G$ 的左上角和右下角 3×3 子矩阵进行特征分解得到 $V_1 \Sigma_1 V_1^T$ 和 $V_2 \Sigma_2 V_2^T$ ，则（4-7）化为

$$\begin{aligned} \min & \quad \mathbf{L}_1^T \Sigma_1 \mathbf{L}_1 + 2 \mathbf{L}_1^T B \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_2^T \Sigma_2 \mathbf{L}_2 \\ \text{s.t.} & \quad \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 \\ & \quad \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2^T \mathbf{L}_2 = 1 \end{aligned} \quad (4-8)$$

其中 $\begin{pmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^T & 0 \\ 0 & V_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_1 \\ \tilde{\mathbf{L}}_2 \end{pmatrix}$ ， $B = (V_1^T \ 0) V_G^T A^T A V_G \begin{pmatrix} 0 \\ V_2 \end{pmatrix}$ 。由于最小化问题（4-8）

中存在两个非线性约束，很难得到全局极值解，所以本节重新定义一个六维向量 $\hat{\mathbf{L}}_j$ ，并固定该向量的第 j ($1 \leq j \leq 6$) 个元素为 1。这样就去掉了（4-8）中的第二个约束，得到关于 $\hat{\mathbf{L}}_j$ 的最小化问题

$$\begin{aligned} \min & \quad \hat{\mathbf{L}}_j^T \begin{pmatrix} \Sigma_1 & B \\ B^T & \Sigma_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_j \\ \text{s.t.} & \quad \hat{\mathbf{L}}_j^T \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_j = 0 \end{aligned} \quad (4-9)$$

为了避免第 j 个元素可能为零的情况，需要对 j 所有取值 ($j=1, \dots, 6$) 时的最小化问题（4-9）进行求解。下文将以 $j=1$ 为例给出求解（4-9）的全局极值解的算法， $j=2, \dots, 6$ 的情况可以同样处理。由 $\hat{\mathbf{L}}_1$ 得到的最小化问题（4-9）可以写成

$$\begin{aligned} \min & \quad \sigma_1 + \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \Sigma'_1 \hat{\mathbf{L}}_{1,2} + 2 \mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} + 2 \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T B_2 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} + \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T \Sigma_2 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \\ \text{s.t.} & \quad 1 + \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,2} = \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{aligned} \quad (4-10)$$

其中 $\hat{\mathbf{L}}_{1,2}$ 和 $\hat{\mathbf{L}}_{1,3}$ 分别为 $\hat{\mathbf{L}}_1$ 的第 2, 3 个元素和后 3 个元素组成的向量， σ_1, Σ'_1 分别为 Σ_1

的第一个元素和右下角 2×2 矩阵， $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ 分别为矩阵 \mathbf{B} 的第一行和后两行。由 Lagrange 乘子法可以得到最小化问题 (4-10) 的 Lagrange 函数

$$F = \sigma_1 + \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \Sigma_1' \hat{\mathbf{L}}_{1,2} + 2\mathbf{B}_1 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} + 2\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} + \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T \Sigma_2 \hat{\mathbf{L}}_{1,3} + \lambda(1 + \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,2} - \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,3}) \quad (4-11)$$

以及 Lagrange 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial (\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 1 + \hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,2} - \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T \hat{\mathbf{L}}_{1,3} = 0 \end{cases} \quad (4-12)$$

其中 $\mathbf{M}(\lambda) = \begin{pmatrix} \Sigma_1' + \lambda \mathbf{I}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & \Sigma_2 - \lambda \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$ 。假定 λ 不会使得 $\det(\mathbf{M}(\lambda)) = 0$ ，即矩阵 \mathbf{M} 可逆，则 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 可以由 (4-12) 中的第一个方程得到

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{M}^*}{\det(\mathbf{M})} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} \quad (4-13)$$

其中 \mathbf{M}^* 是矩阵 \mathbf{M} 的伴随矩阵。将等式 (4-13) 代入 (4-12) 中第二个方程，可以得到只与 λ 有关的方程

$$1 + \frac{(0^T \ \mathbf{B}_1) \mathbf{M}_1^{*T} \mathbf{M}_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{M})^2} - \frac{(0^T \ \mathbf{B}_1) \mathbf{M}_2^{*T} \mathbf{M}_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}}{\det(\mathbf{M})^2} = 0 \quad (4-14)$$

其中 $\mathbf{M}_1^*, \mathbf{M}_2^*$ 分别是伴随矩阵 \mathbf{M}^* 的前两行和后三行。(4-14) 经过整理可以得到

$$\det(\mathbf{M})^2 + (0^T \ \mathbf{B}_1) \mathbf{M}_1^{*T} \mathbf{M}_1^* \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} - (0^T \ \mathbf{B}_1) \mathbf{M}_2^{*T} \mathbf{M}_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} = 0 \quad (4-15)$$

这是一个关于 λ 的十次方程，可以通过友矩阵的方法进行求解。而方程中的系数可以由附录 C 给出的 $\det(\mathbf{M}), \mathbf{M}_1^*, \mathbf{M}_2^*$ 中的 λ 系数计算得到。得到方程 (4-15) 的根后将满足 $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ 的实根代入矩阵 \mathbf{M} 中，并由 (4-13) 求出向量 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 做为备选结果。

接下来还要考虑 $\det(\mathbf{M}) = 0$ 的情况。在 $\det(\mathbf{M}(\lambda)) = 0$ 时，可以解方程得到 λ 的 5 个根，即 λ_i ($1 \leq i \leq 5$)。将 λ_i 代入 \mathbf{M} 得到对称矩阵 $\mathbf{M}(\lambda_i)$ ，进行特征分解得

$U_i \begin{pmatrix} 0_{m_i} & 0 \\ 0 & \Sigma_{5-m_i} \end{pmatrix} U_i^T$ ，其中 $0_{m_i}, \Sigma_{5-m_i}, (1 \leq m_i \leq 4)$ 分别为 $m_i \times m_i$ 零矩阵和 $(5-m_i) \times (5-m_i)$ 对角矩阵。此时，(4-12) 的第一个方程可以写成

$$\begin{pmatrix} 0_{m_i} & 0 \\ 0 & \Sigma_{5-m_i} \end{pmatrix} U_i^T \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{pmatrix} = U_i^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix} \quad (4-16)$$

很明显，(4-16) 有解的充要条件是向量 $U_i^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}$ 的前 m_i 个元素均为零。因此，当 λ_i 求得的 U_i 满足此条件时，可以用附录 D 中讨论的方法求解 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 得到备选结果。

在得到向量 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 的所有备选结果后，将它们代入 $\hat{\mathbf{L}}_1$ ，并从中选择使 (4-9) 的目标函数值最小的向量 $\hat{\mathbf{L}}_1^{opt}$ ，再由

$$\bar{\mathbf{L}}_1 = V_G \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_1^{opt} \quad (4-17)$$

得到 $j=1$ 时，最小化问题 (4-6) 的次优解 $\bar{\mathbf{L}}_1$ 。如此依次将 $\hat{\mathbf{L}}_j$ 中的其它元素固定为 1，求解另外五个次优解 $\bar{\mathbf{L}}_j (2 \leq j \leq 6)$ 。最后从这些次优解中选择能使问题 (4-6) 最小的解做为最终的估计解 $\bar{\mathbf{L}}$ 。

4.2.4 算法分析

本节给出上述算法估计结果的代数误差上限。假设第 j 个元素为 1，并且 (4-9) 的最优解 $\hat{\mathbf{L}}_j^{opt}$ 及其对应的代数误差为 err_{est}^1 ，令 $\hat{\mathbf{L}}_j^{opt}$ 归一化后的第 j 个元素为 β ，则 $\hat{\mathbf{L}}_j^{opt}$ 在归一化后的代数误差为 $err_{est} = \beta err_{est}^1$ 。由 (4-9) 中的约束可知 β 的取值范围是 $\beta \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ 。同理，假设 (4-6) 的全局极值解对应的代数误差为 err_{best} ，并且全局极值解对应的 $\hat{\mathbf{L}}_j$ 的代数误差为 err_{best}^1 ，因此 $\hat{\mathbf{L}}_j$ 归一化后的第 j 个元素为 $\alpha = err_{best} / err_{best}^1$ 。由不等式 $err_{est}^1 \leq err_{best}^1$ 可得

$$err_{best} \leq err_{est} \leq \frac{\beta}{\alpha} err_{best} \quad (4-18)$$

从 (4-18) 看出 $\hat{\mathbf{L}}_j^{opt}$ 的代数误差的上限取决于 β 的最大值以及 α 的最小值。因为，上述算法估计了 j 的所有取值情况，并选择使问题 (4-6) 最小的解做为最终结果，所以可以认为 α 不小于 $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ，所以不等式 (4-18) 可以写成

$$err_{best} \leq err_{est} \leq \sqrt{3}err_{best}$$

由此得出结论：上述算法求得次优解的代数误差的上限为（4-6）的全局极值解的代数误差的 $\sqrt{3}$ 倍。

4.3 基于几何距离的迭代算法

本节先给出图像上估计直线的法线距离表示并提出新的优化准则，再给出一种迭代求解算法。

4.3.1 图像上估计直线的法线距离表示

本章讨论的直线三角化都是假设测量直线不存在不匹配的情况，所以可以认为测量直线与真实直线的夹角不会相差太大，更不可能达到相互垂直的程度。因此，真实直线与过测量端点的测量直线的法线必有交点。这里将上述交点称为法线端点，将测量端点到法线端点的有向距离称为法线距离。同样，图像上的估计直线也可以用它的两个法线端点 $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\}$ 进行定义，并且用法线距离表示如下

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4-19)$$

其中， \mathbf{n} 为测量直线 \mathbf{l} 的归一化的前两项， \mathbf{x}, \mathbf{y} 为测量直线上的两个测量端点， λ_1, λ_2 为法线距离。由两个法线端点可以得到图像上估计直线 $\bar{\mathbf{l}}$ 的坐标

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{l}}(\lambda_1, \lambda_2) &= \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{l} + \lambda_1 \mathbf{g}_1 + \lambda_2 \mathbf{g}_2 \\ &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix} \times \mathbf{y} + \lambda_2 \mathbf{x} \times \begin{pmatrix} \mathbf{n} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-20)$$

如果已知两台摄像机投影矩阵及其图像上的估计直线就可以由它们的反投影平面相交得到空间直线。

4.3.2 新的优化准则

如果以（4-20）的形式给定空间估计直线在后两幅图像上的投影 $\bar{\mathbf{l}}_1, \bar{\mathbf{l}}_2$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{l}}_1(\lambda_{21}, \lambda_{22}) &= \mathbf{l}_1 + \lambda_{21} \mathbf{g}_{11} + \lambda_{22} \mathbf{g}_{12} \\ \bar{\mathbf{l}}_2(\lambda_{31}, \lambda_{32}) &= \mathbf{l}_2 + \lambda_{31} \mathbf{g}_{21} + \lambda_{32} \mathbf{g}_{22} \end{aligned}$$

则它在第一幅图像上的投影必须满足极几何约束。本节采用点-线-线的三焦张量来

描述它们之间的极几何约束

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{x}_1\mathbf{T}_1 + \bar{x}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 &= 0 \\ \bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{y}_1\mathbf{T}_1 + \bar{y}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 &= 0\end{aligned}\quad (4-21)$$

其中

$$\begin{aligned}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 1)^T &= (x_1 + \lambda_{11}n_1, x_2 + \lambda_{11}n_2, 1) = \bar{\mathbf{x}} \\ (\bar{y}_1, \bar{y}_2, 1)^T &= (y_1 + \lambda_{12}n_1, y_2 + \lambda_{12}n_2, 1) = \bar{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

为第一幅图像上直线的两个法线端点。由此，可以得到基于法线距离的优化准则

$$\begin{aligned}\min \quad & \lambda^T \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{x}_1\mathbf{T}_1 + \bar{x}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 = 0 \\ & \bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{y}_1\mathbf{T}_1 + \bar{y}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 = 0\end{aligned}\quad (4-22)$$

其中， $\lambda = (\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{31}, \lambda_{32})^T$ 为三幅图像上估计直线的法线距离。如果在(4-22)的目标函数中加入正定对称矩阵 \mathbf{D} ，来改变所要优化的距离，则该优化准则还可以写成

$$\begin{aligned}\min \quad & \lambda^T \mathbf{D} \lambda \\ \text{s.t.} \quad & \bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{x}_1\mathbf{T}_1 + \bar{x}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 = 0 \\ & \bar{\mathbf{l}}_1^T(\bar{y}_1\mathbf{T}_1 + \bar{y}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3)\bar{\mathbf{l}}_2 = 0\end{aligned}\quad (4-23)$$

附录 E 中描述的距离不仅考虑了估计直线的法线距离还包括了它与测量直线的夹角信息。对比两个优化准则可以看出，(4-22) 是 (4-23) 在 \mathbf{D} 为单位阵时的特殊形式，所以下一节就以 (4-23) 为例给出求解的迭代算法。

4.3.3 迭代算法

因为优化准则 (4-23) 是带有非线性约束的二次规划问题，需要复杂的优化方法才能求解，并且不能保证得到全局极值解。本节给出一种求解该问题的简单的迭代算法。

令正定对称矩阵 \mathbf{D} 奇异值分解为 $\mathbf{V}\Sigma\mathbf{V}^T$ ，并令 $\mathbf{M} = \mathbf{V}\Sigma^{-1}$ ， $\lambda = \mathbf{M}\lambda'$ ，优化准则 (4-23) 变为

$$\begin{aligned}
& \min \lambda'^T \lambda' \\
& s.t. \quad (\mathbf{M}_3 \lambda' \mathbf{g}_{11} + \mathbf{M}_4 \lambda' \mathbf{g}_{12} + \mathbf{I}_1)^T (\mathbf{M}_1 \lambda' n_1 T_1 + \mathbf{M}_1 \lambda' n_2 T_2 \\
& \quad + (x_1 T_1 + x_2 T_2 + T_3)) (\mathbf{M}_5 \lambda' \mathbf{g}_{21} + \mathbf{M}_6 \lambda' \mathbf{g}_{22} + \mathbf{I}_2) = 0 \\
& \quad (\mathbf{M}_3 \lambda' \mathbf{g}_{11} + \mathbf{M}_4 \lambda' \mathbf{g}_{12} + \mathbf{I}_1)^T (\mathbf{M}_2 \lambda' n_1 T_1 + \mathbf{M}_2 \lambda' n_2 T_2 \\
& \quad + (y_1 T_1 + y_2 T_2 + T_3)) (\mathbf{M}_5 \lambda' \mathbf{g}_{21} + \mathbf{M}_6 \lambda' \mathbf{g}_{22} + \mathbf{I}_2) = 0
\end{aligned} \tag{4-24}$$

其中 $\mathbf{M}_i, i=1, \dots, 6$ 是矩阵 \mathbf{M} 的第 i 行。因为 $\lambda' = 0$ 对应测量直线端点的法线距离，仿照 Taylor 级数将 (4-24) 约束中的两个六元三次多项式在 $\lambda' = 0$ 进行展开，得到如下的二阶近似

$$\begin{aligned}
& (\lambda'^T, 1) \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\
& (\lambda'^T, 1) \begin{pmatrix} \mathbf{M}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{4-25}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_3 & \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{22} & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{I}_2 \\ \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{I}_2 \\ \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{21} & \vdots & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} & 0 & 0 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} \\ \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{22} & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} \\ \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & 0 & \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_x \mathbf{I}_2 & \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_x \mathbf{I}_2 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{21} & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_x \mathbf{g}_{22} & 2 \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_x \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{B} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{22} & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 \\ 0 & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{I}_2 \\ \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & 0 & 0 & 0 & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} & \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{I}_2 \\ \vdots & \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} & 0 & 0 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} \\ \mu \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{g}_{22} & \mu \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} & \mu \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} \\ 0 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_n \mathbf{I}_2 & \mathbf{g}_{11}^T \mathbf{T}_y \mathbf{I}_2 & \mathbf{g}_{12}^T \mathbf{T}_y \mathbf{I}_2 & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{21} & \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_y \mathbf{g}_{22} & 2 \mathbf{l}_1^T \mathbf{T}_y \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

, $\mathbf{T}_n = n_1 \mathbf{T}_1 + n_2 \mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_x = x_1 \mathbf{T}_1 + x_2 \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3$, $\mathbf{T}_y = y_1 \mathbf{T}_1 + y_2 \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_3$ 。矩阵 \mathbf{A}, \mathbf{B} 中的常数 $\mu (0.5 \leq \mu \leq 1)$ 为二阶项的控制参数。当 $\mu = 0.5$ 时，(4-25) 为 (4-24) 中约束的二阶 Taylor 展开；当 $\mu > 0.5$ 时，则在二阶 Taylor 展开的基础上用 $(2\mu - 1)$ 倍的二阶项近

似三阶项。用 (4-25) 替代 (4-24) 中两个约束，得到新的优化准则

$$\begin{aligned} \min \lambda'^T \lambda' \\ s.t. \quad (\lambda'^T, 1) A' \begin{pmatrix} \lambda' \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (\lambda'^T, 1) B' \begin{pmatrix} \lambda' \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (4-26)$$

其中 $A' = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} M^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 为六维空间中的两个二次曲面，而测量直线的法线距离为该空间的原点 \mathbf{o} 。最小化问题 (4-26) 等价于在二次曲面 A' 和 B' 的交上寻找距原点的最近点。下面对最小化问题 (4-26) 迭代求解。

令 λ'_n 为第 n 次迭代得到的法线距离，则它关于 (4-26) 中两个二次曲面约束的极平面分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= A' \begin{pmatrix} \lambda'_n \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{p}_2 &= B' \begin{pmatrix} \lambda'_n \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4-27)$$

令 $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 分别为极平面 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 的两个法方向，则它们的生成空间中的向量可以表示为 $\mathbf{d} = x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2$ 。求解生成空间中位于两个二次曲面交上的向量，并将距原点 \mathbf{o} 最近的做为估计结果，则第 $n+1$ 次迭代需要求解如下二元二次方程

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 xy + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0 \\ b_1 x^2 + b_2 y^2 + b_3 xy + b_4 x + b_5 y + b_6 = 0 \end{cases} \quad (4-28)$$

其中 $a_1 = \mathbf{d}_1^T A' \mathbf{d}_1$, $a_2 = \mathbf{d}_2^T A' \mathbf{d}_2$, $a_3 = 2\mathbf{d}_1^T A' \mathbf{d}_2$, $a_4 = 2\mathbf{e}_7^T A' \mathbf{d}_1$, $a_5 = 2\mathbf{e}_7^T A' \mathbf{d}_2$, $a_6 = \mathbf{e}_7^T A' \mathbf{e}_7$, $b_1 = \mathbf{d}_1^T B' \mathbf{d}_1$, $b_2 = \mathbf{d}_2^T B' \mathbf{d}_2$, $b_3 = 2\mathbf{d}_1^T B' \mathbf{d}_2$, $b_4 = 2\mathbf{e}_7^T B' \mathbf{d}_1$, $b_5 = 2\mathbf{e}_7^T B' \mathbf{d}_2$, $b_6 = \mathbf{e}_7^T B' \mathbf{e}_7$, \mathbf{e}_7 为第 7 项元素为 1 的 7 维单位向量。

求解该方程组时先假设 y 为已知量，则由 (4-28) 的第一个方程得到 x 的解

$$x = \frac{-(a_3 y + a_4) \pm \sqrt{(a_3 y + a_4)^2 - 4a_1(a_2 y^2 + a_5 y + a_6)}}{2a_1} \quad (4-29)$$

再将 (4-29) 代入 (4-28) 的第二个方程中，得到关于 y 的一元四次方程

$$\left(\frac{2(a_3y + a_4)^2 - 4a_1(a_2y^2 + a_5y + a_6)}{4a_1^2} - \frac{(b_3y + b_4)(a_3y + a_4)}{2a_1} + b_2y^2 + b_5y + b_6 \right)^2 - \left(\frac{(a_3y + a_4) - a_1(b_3y + b_4)}{2a_1^2} \right)^2 \left((a_3y + a_4)^2 - 4a_1(a_2y^2 + a_5y + a_6) \right) = 0 \quad (4-30)$$

用友矩阵方法求解该方程，并将实根代入 (4-29)，得到 x, y 的解。将 x, y 对应的向量 $x\mathbf{d}_1 + y\mathbf{d}_2$ 的前六项做为备选结果代入 (4-26) 的目标函数中，选择使目标函数最小的备选结果做为第 $n+1$ 次的迭代结果 λ'_{n+1} 。当 $\|\lambda'_n - \lambda'_{n+1}\| \leq \varepsilon$ 时停止迭代；否则置 $n = n+1$ ，重新开始迭代。其中 ε 为迭代终止参数。

上述迭代算法的初始迭代点 λ'_0 为原点 \mathbf{o} ，直到满足终止条件时结束。在达到终止条件后得到了法线距离估计 λ'_{est} ，再由 $\lambda = M\lambda'$ 和 (4-19) 式得到端点估计，最后用 4.2 节中的算法求出空间直线坐标。

4.4 实验

本节以本章提出的两种直线三角化方法，SSAD（基于代数距离的次优算法）和 ISGD（基于几何距离的迭代算法）与 LIN（线性算法[67]），GS+d（最小化测量端点到估计直线距离的黄金标准算法）以及 GS+nd（最小化法线距离的黄金标准算法）进行比较。实验中，ISGD 的矩阵 D 取单位阵（除特殊说明外），二阶项的控制参数 μ 取值 0.75，迭代终止参数 ε 取值 10^{-5} ，并且在得到端点估计坐标后采用 SSAD 求解空间直线。

4.4.1 模拟实验

模拟实验如图 4-1，三台摄像机位于以立方体顶点为球心的球面上并且面向球心。摄像机与立方体距离为 10 个单位，立方体的边长为 1 个单位。实验中将立方体的 28 个对角线做为观测直线，将每台摄像机的内参数矩阵固定为

$$K = \begin{pmatrix} 700 & 0 & 512 \\ & 700 & 512 \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

图像大小固定为 1024×1024 。

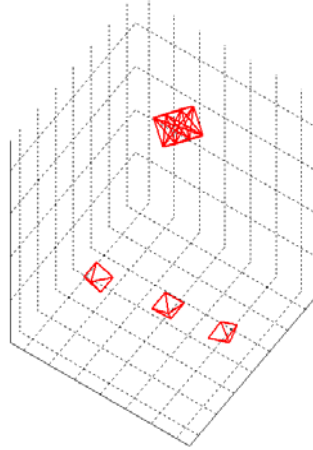
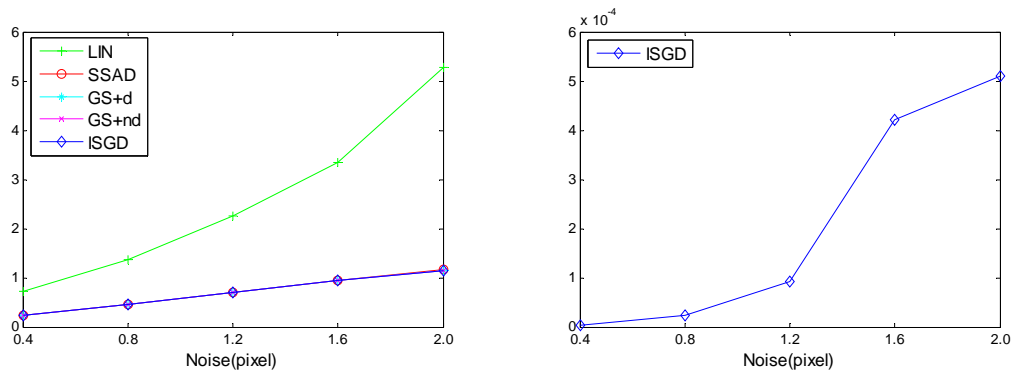


图 4-1 模拟实验的摄像机位置

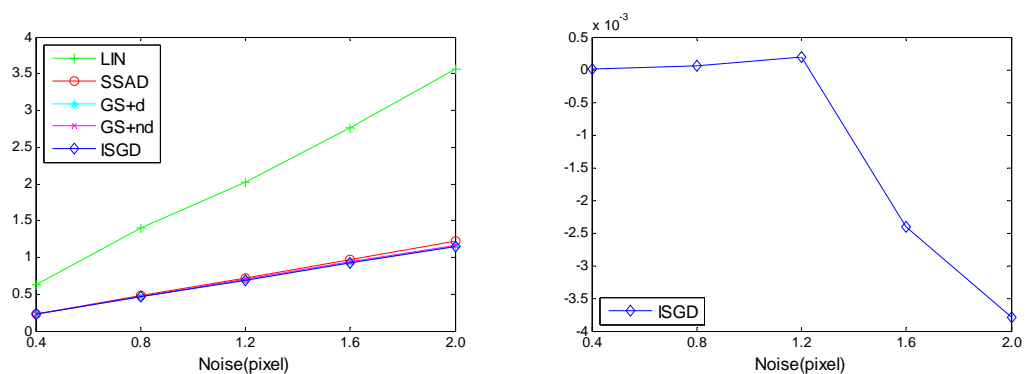
模拟实验中，设置邻近摄像机的三种不同夹角对测试算法进行比较，这三种夹角分别为约为 10 度，20 度，30 度。每次实验，在测量端点上加入均值为零标准差为 σ 的高斯噪声。标准差大小从 0.4 个像素到 2 个像素递增，每递增 0.4 个像素进行 100 次实验。实验比较的内容包括：点线均方根误差（测量端点到估计直线之间距离的均方根）；法线的均方根误差（法线距离的均方根）；角度平均误差（空间中估计直线与真实直线夹角的均值）；重建均方根误差（空间中估计直线和真实直线之间距离的均方根）；LIN 和 SSAD 的代数均方根误差以及 ISGD 的平均迭代次数。

图 4-2 图 4-3 分别给出了点线均方根误差和法线均方根误差的结果。从它们左边的图像可以看出，在不同的夹角下 LIN 的精度都远远差于其它算法，而虽然 SSAD 最小化代数距离，但精度在夹角大约为 10 度时与三种迭代算法相当，在夹角增大时精度稍稍差于三种迭代算法。从它们右边图像中可以看出，虽然 ISGD 最小化法线距离，但其与 GS+d 的点线均方根误差的差值和与 GS+nd 的法线均方根误差的差值一样都仅在 10^{-4} 数量级上，并且在夹角增大噪声增加时它在这两种误差方面好于 GS+d 和 GS+nd。

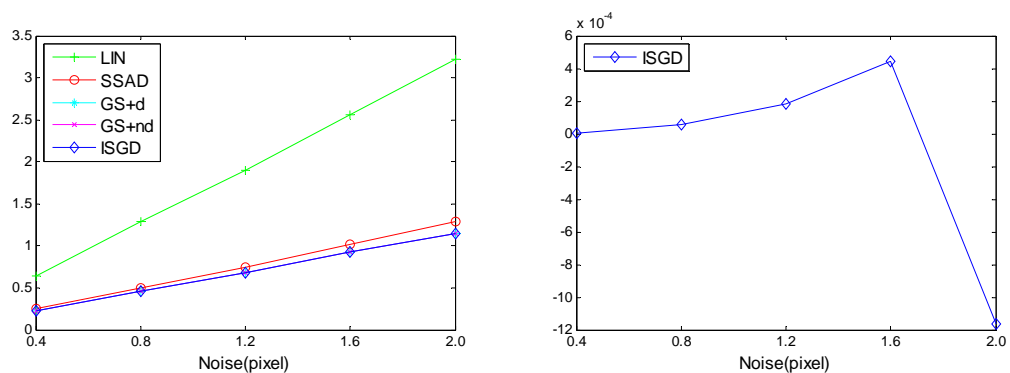
图 4-4 给出了空间中估计直线与真实直线的角度平均误差和重建均方根误差。从左边的三幅图像可以看出，SSAD 的夹角平均误差要稍大于三种迭代算法，但右边的三幅图像表明 SSAD 的重建均方根误差却与三种迭代算法相差不大。而 ISGD 在这两种误差方面均与两种黄金标准算法相当。



a 夹角约为 10 度

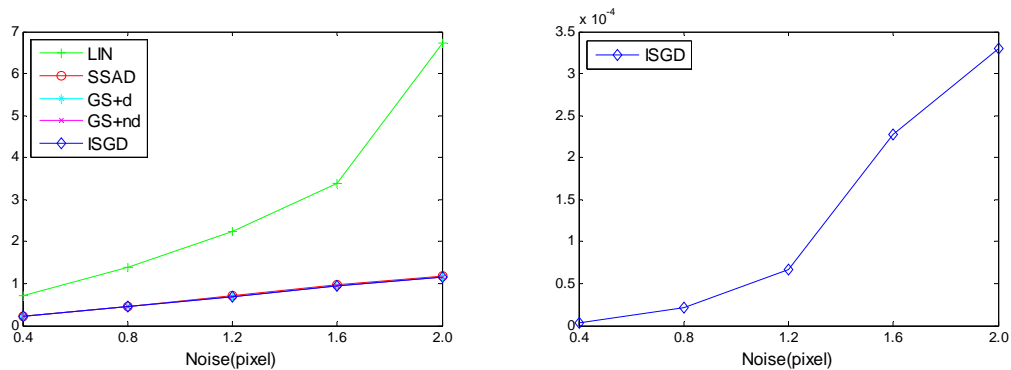


b 夹角约为 20 度

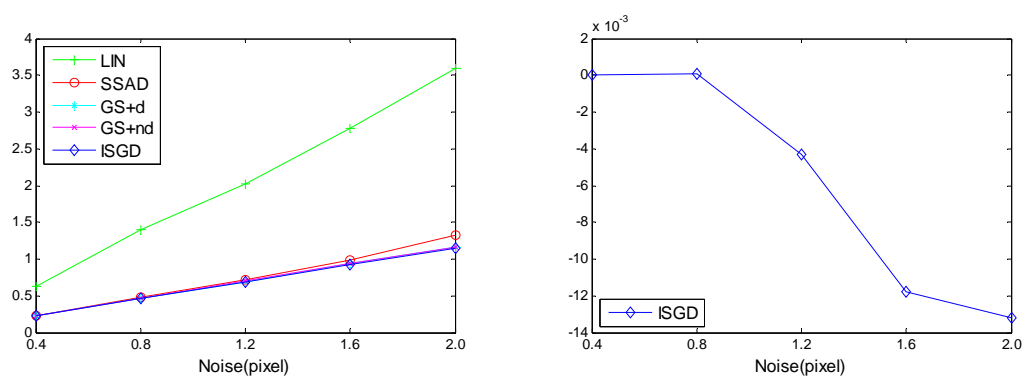


c 夹角约为 30 度

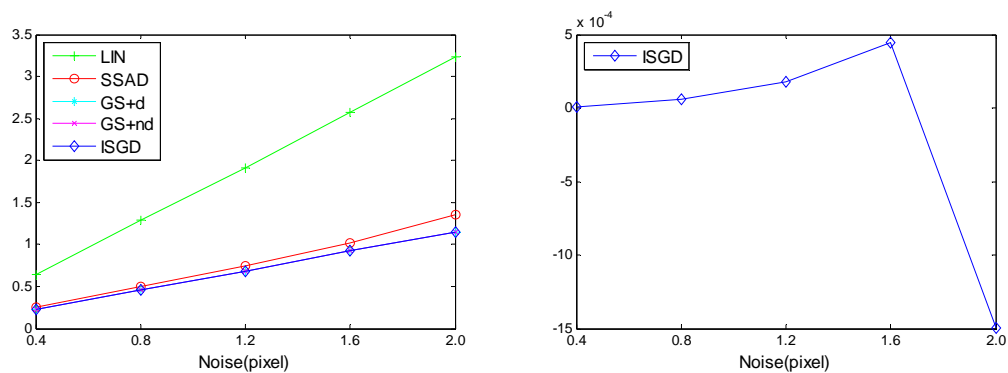
图 4-2 三组实验的点线均方根误差 (像素) (左图) 以及 ISGD 与 GS+d 的点线均方根误差的差值 (像素) (右图)



a 夹角约为 10 度

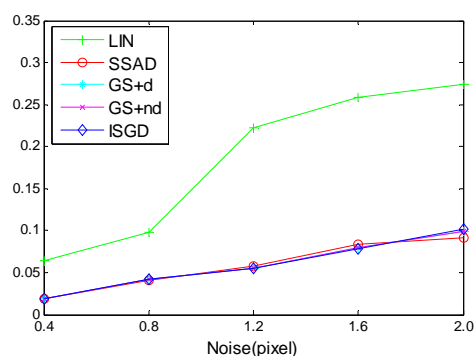
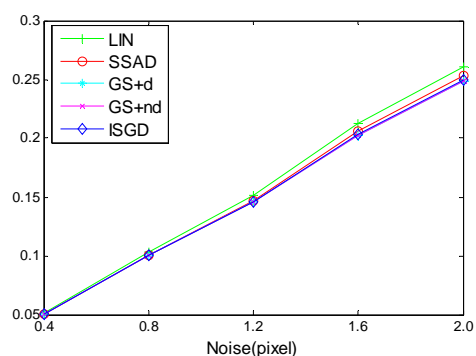


b 夹角约为 20 度

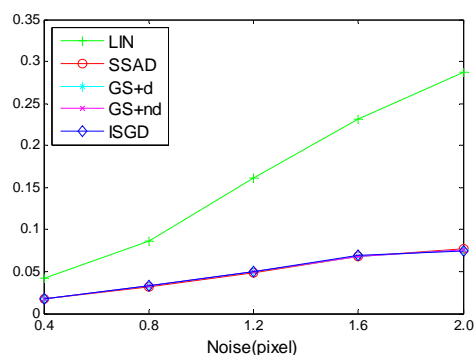
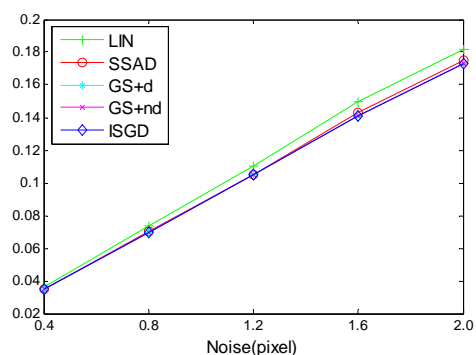


c 夹角约为 30 度

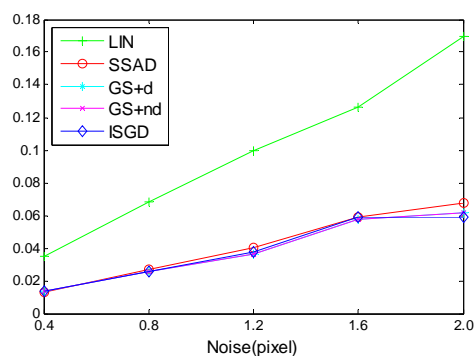
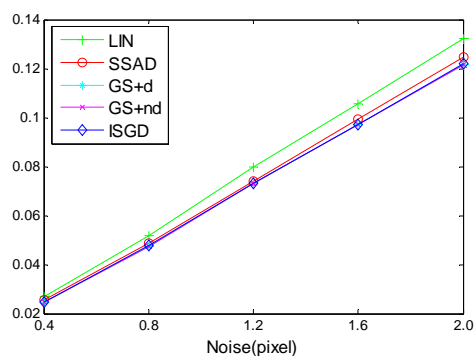
图 4-3 三组实验的法线均方根误差（像素）（左图）以及 ISGD 与 GS+nd 之间法线均方根误差的差值（像素）（右图）



a 夹角约为 10 度



b 夹角约为 20 度



c 夹角约为 30 度

图 4-4 三组实验的角度平均误差(弧度)(左图)以及重建均方根误差(单位)(右图)

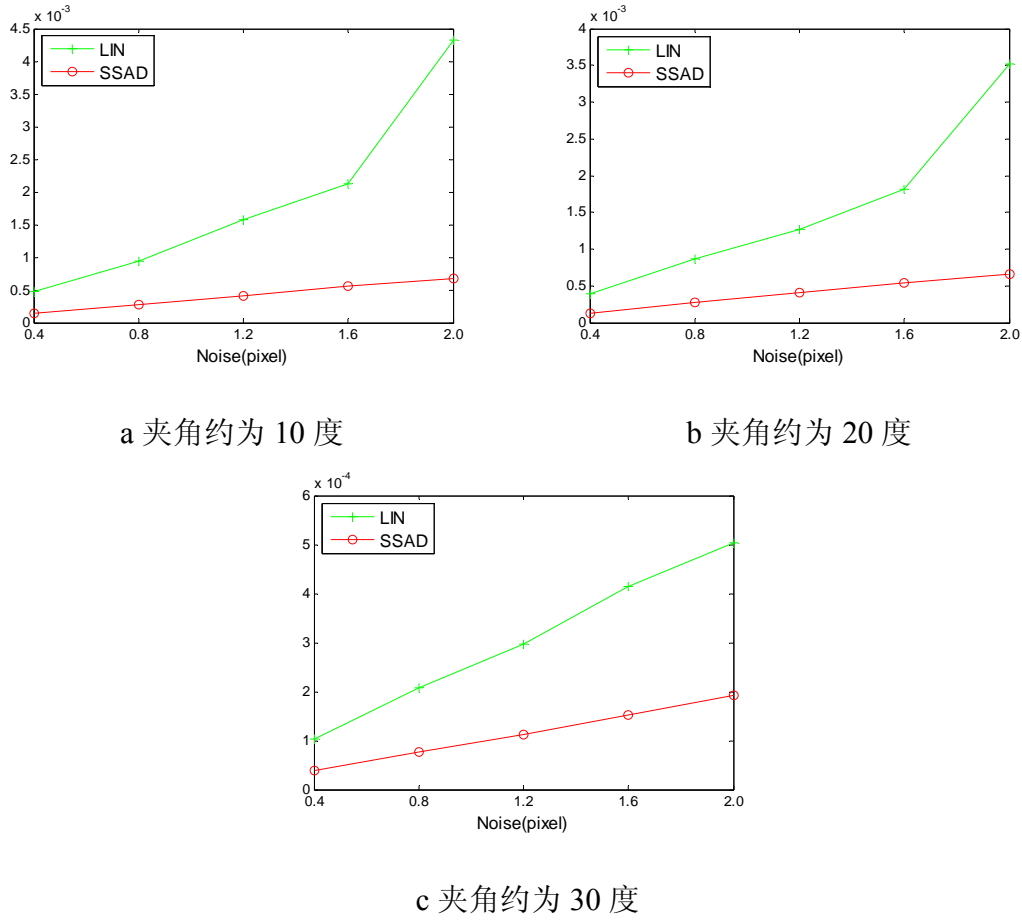


图 4-5 LIN 和 SSAD 代数均方根误差

图 4-5 给出了 LIN 和 SSAD 的代数均方根误差的比较。很明显，SSAD 的代数均方根误差与 LIN 的代数均方根误差的比值最多不到 $1/2$ ，并且随着噪声的增加迅速减少。在模拟实验中，我们还发现，ISGD 的平均迭代次数不会超过 6 次，SSAD 中没有出现使得 (4-16) 式有解的乘子，所获得的次优解均来自 $\det(M) \neq 0$ 的情况。

4.4.2 真实实验

我们选择了两组三幅图像的数据进行真实实验，一组数据拍摄于室内物体如图 4-6，观测直线为 36 条，均由手工提取直线上的点并拟合得到，另一组数据拍摄于室外的清华学堂如图 4-8，观测直线为 196 条，均由 Canny 算子提取得到。图 4-7 给出了由 ISGD 得到的室内物体三维重建结果。图 4-9 分别给出了矩阵 D 为单位阵和 D_E 时 ISGD 得到的清华学堂三维重建结果。



图 4-6 室内物体数据中的观测直线（白色线段）

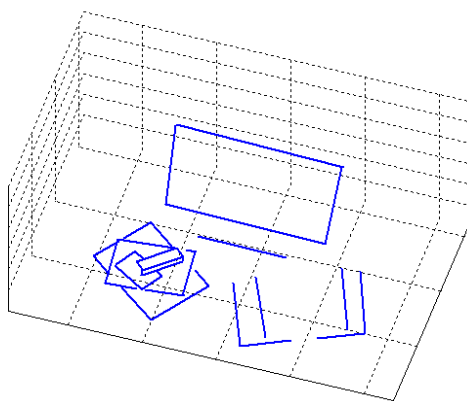


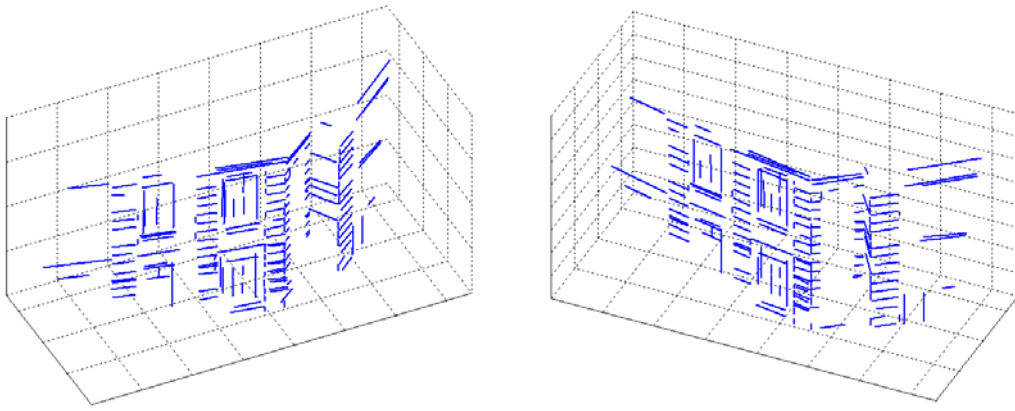
图 4-7 ISGD 得到的室内物体数据的三维重建结果



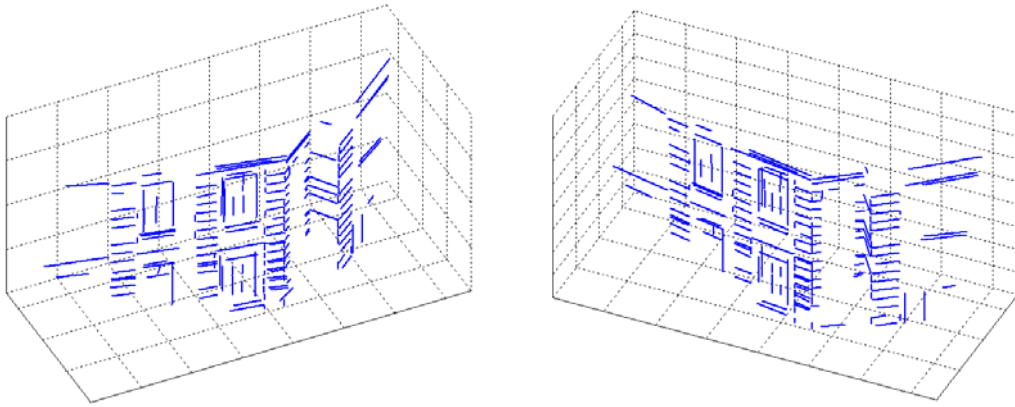
图 4-8 清华学堂数据中的观测直线（左边大部分为白色线段，右边少部分为黑色线段）

从表 4-1 和表 4-2 给出的实验结果可以看出。在点线均方根误差和法线均方根误差方面，SSAD 与 GS+d 和 GS+nd 的差值在 10^{-3} 个像素的数量级上，而 ISGD 与这两种算法的差值则更小仅在 10^{-5} 个像素的数量级上。而在时间方面，SSAD 不超过 GS+d 和 GS+nd 的 $1/3.5$ ，ISGD 不超过它们的 $1/2.5$ 。相较之下，LIN 的计算时间虽然更少，但不论从它的代数误差还是两种几何距离误差均表明其结果不能用于实际

情况。



a 当 $D=I$ 时的结果



b 当 $D=D_e$ 时的结果

图 4-9 ISGD 得到的清华学堂三维重建结果

表 4-1 室内物体数据的实验结果

	LIN	SSAD	ISGD	GS+d	GS+nd
点线均方根误差 (像素)	0.763341	0.296090	0.292959	0.292944	0.292944
法线均方根误差 (像素)	0.763419	0.296118	0.292986	0.292972	0.292972
代数均方根误差 (10^{-4})	1.1011	0.4509			
平均运算时间 (10^{-4} 秒)	2.19	39.40	64.15	175.17	179.86

表 4-2 清华学堂数据的实验结果

	LIN	SSAD	ISGD	GS+d	GS+nd
点线均方根误差（像素）	3.537979	0.197434	0.191622	0.191571	0.191571
法线均方根误差（像素）	3.537996	0.197435	0.191622	0.191572	0.191572
代数均方根误差（ 10^{-4} ）	15.2992	0.6843			
平均运算时间（ 10^{-4} 秒）	2.23	45.64	68.37	182.91	172.54

4.5 本章小结

本章对三视的直线三角化问题进行了研究，提出了两种新的直线三角化方法。基于 Plucker 坐标的直线表示，本章提出在满足 Klein 曲面约束条件下最小化代数距离的次优算法。该方法并不直接求解代数距离最小化问题，而是将该问题转化为六个一元十次方程进行求解。此外，本章又给出了图像上估计直线的法线距离表示，并基于该表示提出了以点-线-线三焦张量为约束条件最小化图像上几何距离的优化准则以及一种有效的迭代求解算法。实验表明，基于代数距离的次优算法的估计精度相比线性算法更加接近黄金标准算法，而基于几何距离的迭代算法的估计精度几乎与黄金标准算法相当，但这两种算法的运算时间都要少于黄金标准算法。

第五章 结论与展望

在计算机视觉中,用二维图像恢复三维物体可见表面的几何结构不论在 Marr 计算视觉理论中,还是实际应用中都是核心问题。而利用多视几何学进行三维重建又是这几年来的热点。对于多视几何学的三个重建过程来说,射影空间下的重建是其它两个重建过程的基础。利用射影空间下点和直线的重建结果不仅可以迭代估计摄像机的射影矩阵,保证射影矩阵的准确性,还可以对摄像机射影矩阵的估计结果做出评价。随着 RANSAC 方法的提出,保证了估计结果不会受到外点的影响。但原有算法要么在估计的准确性方面达不到要求,要么在算法的计算复杂度方面达不到要求。所以,需要结合多视几何学和最优化理论,给出较为有效算法。对于空间点来说,射影空间中点的重建经常应用于机器人的双目视觉系统中,所以有必要对两视的点三角化方法进行研究。在一般情况下,相比两视的点三角化,多视的点三角化得到的点重建具有更高的准确性,但如何降低多视的点三角化方法的计算复杂度是一个需要解决的问题。在人造场景中,存在大量直线。相比空间点,直线含有更多的物体结构信息,所以研究最小摄像机配置下射影空间的直线三角化方法也受到了广泛的关注。

为此,本论文着重研究了两视和多视的点三角化方法以及三视的直线三角化方法。研究的主要工作包括:

1. 两视的最优三角化方法及其次优方法。基于联合图像点空间中的基本锥面的定义,提出了求解测量点到基本锥面上最近点的最优三角化方法。为了减少计算复杂度,又提出了三种满足对极几何约束的次优方法,它们分别是:基于生成锥面的次优三角化方法,该方法只需求解一元四次方程;基于生成线的次优三角化方法,该方法只需求解一元二次方程;基于 Sampson 序列的次优三角化方法,该方法只需迭代求解 Sampson 近似。此外,还给出了 Sampson 序列收敛性及其收敛点位于基本锥面上的证明。

2. 多视三角化的迭代算法。提出一种新的优化准则:在空间平面矩阵最小奇异值为零的约束下最小化估计点到测量点的 L_2 -范数距离。基于该优化准则,提出计算复杂性较小的 Sampson 近似迭代算法;为了进一步减少 Sampson 近似迭代的迭代

次数，还根据空间平面矩阵最小奇异值单调递减的条件和共轭梯度，给出了沿共轭梯度方向的迭代算法。

3.三视的直线三角化方法。提出了两种新的直线三角化方法。基于 **Plucker** 坐标的直线表示，提出在满足 **Klein** 曲面约束下最小化代数距离的次优算法。该算法并不直接求解最小化问题，而是将该问题转化为求解六个一元十次方程。基于图像上估计直线的法线距离表示，还提出了以点-线-线三焦张量为约束条件最小化图像上几何距离的优化准则以及一种有效的迭代求解算法。

总之，本文在计算机视觉重要研究领域射影空间下点和直线三角化方法等方面做了一些有益的尝试，并取得了一定的研究成果。需要指出的是，本文提出的算法和技术仍有许多地方有待进一步的研究和改进。下一步我们将集中考虑以下几方面的问题：（1）对于多视的点三角化，本文还没能给出具有收敛性的迭代算法，并且如何进一步提高算法的精度也需继续研究；（2）对于三视的直线三角化中最小化代数误差的问题，本文提出的次优方法虽然有效的减小了代数误差，但计算复杂度稍大，如何给出一个线性方法还需要继续研究；（3）对于三视的直线三角化方法中最小化几何距离的问题，还应继续研究严格满足极几何约束的迭代方法。

参考文献

- [1]刘向. 说苑·理政. 西汉.
- [2]马颂德, 张正友. 计算机视觉——计算理论与算法基础. 北京: 科学出版社, 1998.
- [3] S. Negahdaripour and A. Jain. Final Report of the NSF Workshop on the Challenges in Computer Vision Research. Future Directions of Research, 1991, 7-8.
- [4] 贾云得. 机器视觉. 北京: 科学出版社, 2000.
- [5] L. Roberts. Machine perception of three-dimensional solids. Optical and Electro-Optical, MIT Press, 1965.
- [6] D. Marr. Vision. Freeman, Oxford, 1982.
- [7] R. Hartley and A. Zisserman. Multiple view geometry in computer vision. Cambridge Univ. press, 2003.
- [8] M. Fischler. Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. Communications of the ACM, 1981, 24(6): 381-395.
- [9] 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法. 北京: 科学出版社, 2008.
- [10] H. Longuet-Higgins. A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections. Nature, 1981, 293(10): 133-135.
- [11] T. Huang and O. Faugeras. Some properties of the E-matrix in two-view motion estimation. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell, 1989, 11(12): 1310-1312.
- [12] S. Maybank. Theory of reconstruction from image motion. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [13] B. Horn. Relative orientation. International Journal of Computer Vision, 1990, 4(1): 59-78.
- [14] O. Faugeras. What can be seen in three dimensions with an uncalibrated stereo rig?

- In Proc. European Conference on Computer Vision, 1992, 563-578.
- [15] O. Faugeras, Q. Luong, and S. Maybank. Camera self-calibration: Theory and experiments. In Proc. European Conference on Computer Vision, 1992, 321-334.
- [16] R. Hartley. Estimation of relative camera positions for uncalibrated cameras. In Proc. European Conference on Computer Vision, 1992, 579-587.
- [17] R. Hartley, R. Gupta, and T. Chang. Stereo from uncalibrated cameras. In Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1992, 761-764.
- [18] B. Boufama, R. Mohr. Epipole and Fundamental Matrix Estimate using the Virtual Parallax Property. In Proc. International Conference of Computer Vision, 1995, 1030-1036.
- [19] Z. Zhang. Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review. International Journal of Computer Vision, 1998, 27(2): 161-195.
- [20] Z. Zhang. Estimating the Fundamental Matrix by Transforming Image Points in Projective Space. Computer Vision and Image Understanding, 2001, 82(2): 174-180.
- [21] G. Chesi, A. Garulli, et al. Estimating the Fundamental Matrix via Constrained Least-Squares: A Convex Approach. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell, 2002, 24(3): 397-401.
- [22] G. Chesi, A. Garulli, et al. Solving quadratic distance problems: an LMI-based approach. IEEE trans. on Automatic Control, 2003, 48(2): 200-212.
- [23] G. Chesi, A. Garulli, et al. Characterizing the solution set of polynomial systems in terms of homogeneous forms: an LMI approach. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003, 13(13): 1239-1257.
- [24] P. A. Beardsley, A. Zisserman, et al. Navigation using affine structure from motion. In Proc. European Conference on Computer Vision, 1994, 85-96.
- [25] R. Hartley, P. Sturm. Triangulation. Computer Vision and Image Understanding, 1997, 68(2): 146-157.
- [26] P. Sampson. Fitting conic sections to “very scattered” data: an iterative refinement of the Bookstein algorithm. Computer Graphics and Image Processing, 1982, 18(1):

97–108.

- [27] R. Hartley, F. Schaffalitzky. Reconstruction from projection using Grassman tensors. *International Journal of Computer Vision*, 2009, 83:274-294.
- [28] W. Triggs. The geometry of projection reconstruction i: matching constraints and the joint image. In *Proc. International Conference of Computer Vision*, 1995, 338-343.
- [29] O. Faugeras, B. Mourrain. On the geometry and algebra of point and line correspondences between N images. In *Proc. International Conference of Computer Vision*, 1995, 951-962.
- [30] A. Shashua, M. Werman. On the trilinear tensor of three tensor of three perspective views and its underlying geometry. In *Proc. International Conference of Computer Vision*, 1995, 920-925.
- [31] A. Heyden. Geometry and algebra of multiple projective transformations. PhD thesis, department of mathematics, Lund Univ., Sweden, 1995.
- [32] A. Heyden. Reconstruction from multiple images by means of using relative depths. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 24(2):155-161.
- [33] P. Torr, A. Zisserman. Robust parameterization and computation of the trifocal tensor. *Image and Vision Computing*, 1997, 15:591-605.
- [34] Stewenius H, Schaffalitzky F, et al. How hard is 3-view triangulation really. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, 2005:686–693
- [35] C. Engels, H. Stewenius, et al. Bundle adjustment rules. *Photogrammetric Computer Vision*, 2006.
- [36] N. Kai, D. Steedly, et al. Out-of-core bundle adjustment for large-scale 3d reconstruction. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007, 1-8.
- [37] B. Triggs, P. McLauchlan, et al. Bundle adjustment - a modern synthesis. *Vision algorithms: theory and practice*, 1999, 153-177.
- [38] R. Hartley and F. Kahl. Optimal algorithms in multiview geometry. In *Proc. Asian Conference on Computer Vision*, 2007, 13-34.
- [39] A. Fusiello, A. Benedetti, et al. Globally convergent autocalibration using interval

- analysis. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 2004, 26(12): 1633-1638.
- [40] C. Olsson, F. Kahl, et al. Branch and bound methods for Euclidean registration problems. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 2009, 31(5):783-794.
- [41] C. Olsson, F. Kahl, et al. Projective least-squares: global solutions with local optimization. In Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, 2009: 1216–1223
- [42] F. Lu, R. Hartley. A fast optimal algorithm for L_2 triangulation. In Proc. Asian Conference on Computer Vision, 2007: 279–288
- [43] F. Kahl, S. Agarwal, et al. Practical global optimization for multiview geometry. International Journal of Computer Vision, 2008, 79(3): 271– 284
- [44] J. Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments. SIAM Journal of Optimization, 2001, 11:796 – 817.
- [45] M.Tawarmalani, N. Sahinidis. Semidefinite relaxations of fractional programs via novel convexification techniques. Journal of Global Optimization, 2001, 20: 137–158.
- [46] H.Benson. Using concave envelopes to globally solve the nonlinear sum of ratios problem. Journal of Global Optimization, 2002, 22: 343–364.
- [47] S. Boyd, L.Vandenberghe. Convex optimization. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [48] R. Hartley, F. Schaffalitzky. L_∞ minimization in geometric reconstruction problems. In Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, 2004: 504–509
- [49] F. Kahl. Multiple View Geometry and the L_∞ -Norm. In Proc. International Conference of Computer Vision, 2005, 1002-1009.
- [50] Q. Ke, T. Kanade. Quasiconvex optimization for robust geometric reconstruction. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 2007, 29(10): 1834–1847.
- [51] F. Kahl, R. Hartley. Multiple-view geometry under the L_∞ -norm. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 2008, 30(9): 1603–1617.
- [52] J. Weng, N.Ahuja, et al. Closed-form solution and maximum likelihood: A robust approach to motion and structure estimation. In Proc. International Conference of

- Computer Vision, 1988, 381-386.
- [53] M. Spetsakis, J. Aloimonos. A multi-frame approach to visual motion perception. *International Journal of Computer Vision*, 1991, 16(3): 245-255.
- [54] R. Hartley. Projective reconstruction from line correspondences. In *Proc. International Conference of Computer Vision*, 1994, 903-907.
- [55] T. Vieville, Q. Luong. Motion of points and lines in the uncalibrated case. Technical report 2054, INRIA, 1993.
- [56] A. Shashua. Trilinearity in visual recognition by alignment. In *Proc. European Conference on Computer Vision*, 1994, 479-484.
- [57] A. Shashua. Algebraic functions for recognition. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1995, 17(8):779-789.
- [58] R. Hartley. Lines and points in three view and trifocal tensor. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 22(2): 125-140.
- [59] R. Hartley. A linear method for reconstruction from lines and points. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, 1995, 882-887.
- [60] A. Zisserman. A user guide to the trifocal tensor. Dept. of Engineering Science, Univ. of Oxford, 1996.
- [61] O. Faugeras, T. Papadopoulos. Grassmann-Cayley algebra for modeling system of cameras and the algebraic equations of the manifold of trifocal tensors. Technical report 3225, INRIA, 1997.
- [62] R. Hartley. In defense of the eight-point algorithm. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1997, 19(6): 580-593.
- [63] F.C.Wu, Z.Y. Hu, and F.Q. Duan. 8-point algorithm revisited: factorized 8-point algorithm. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, 2005, 488-494.
- [64] L. Wang, Fc Wu. A factorization algorithm for trifocal tensor estimation. In *Proc. Computer Vision and Pattern Recognition*, 2008, 1-4.
- [65] R. Hartley. Minimizing algebraic error in geometric estimation problems. In *Proc. International Conference on Computer Vision*, 1998, 469-475.

- [66] C. Ressel. Geometry, Constraints and Computation of the Trifocal Tensor. PhD thesis, Technical University of Vienna, 2003.
- [67] A. Bartoli, P. Sturm. Structure-from-motion using lines: representation, triangulation, and bundle adjustment. *Computer vision and image understanding*, 2005, 100: 416-441.
- [68] H. Pottmann, M. Hofer, et al. Line geometry for 3D shape understanding and reconstruction. In *Proc. European Conference on Computer Vision*, 2004, 297-309.
- [69] Y. Seo, K.S. Hong. Sequential reconstruction of lines in projective space. In *Proc. International Conference on Pattern Recognition*, 1996, 503 – 507.
- [70] A. Habib, M. Morgan, et al. Bundle adjustment with self-calibration using straight lines. *The Photogrammetric Record*, 2002, 635-650.
- [71] D. Mulawa, E. Mikhail. Photogrammetric treatment of linear features. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 1988, 27: 383 – 393.
- [72] C. Taylor, D. Kriegman. Structure and motion from line segments in multiple images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1995, 17(11): 1021 – 1032.
- [73] A. Tommaselli, J. Lugini. An alternative mathematical model to collinearity equations using straight features. *Internat. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 1998, 27: 765 – 774.
- [74] J. Weng, T. Huang, et al. Motion and structure from line correspondences: closed-form solution, uniqueness, and optimization. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1992, 14(3): 318 – 336.
- [75] M. Spetsakis, J. Aloimonos. Structure from motion using line correspondences, *International Journal of Computer Vision*, 1990, 4:171 – 183.
- [76] J. Denavit, R. Hartenberg. A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1955, 22: 215 – 221.
- [77] P. Anandan, S. Avidan. Integrating local affine into global projective images in the joint image space. In *Proc. European Conference on Computer Vision*, 2000, 907-921.

-
- [78] Torr, P. H. S., & Zisserman, A.. Robust computation and parameterization of the multiple view relations. In Proc. International Conference on Computer Vision, 1998, 727–732.
- [79] R. Hartley, Y. Seo. Verifying global minima for L_2 minimization problems. In Proc. Computer Vision and Pattern Recognition, 2008, 1–8.
- [80] 陈宝林. 最优化理论与算法(第二版). 北京: 清华大学出版社, 2005.
- [81] K. Kanatani, Y. Sugaya, et al. Triangulation from two views revisited: Hartley-Sturm vs. optimal correction. In Proc. British Machine Vision Conference 2008, 173-182
- [82] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式. 北京: 科学出版社, 2006.

附录 A：命题 2-1 中情况 2, 3 的证明

命题 2-1 中情况 2 的证明：

首先证明，当 $F_{2 \times 2}$ 的秩为 1 时，两幅图像中至少存在一个无穷远对极点。不失一般性的假设 $F_{11} \neq 0$ ，则基本矩阵可以写成

$$F = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ x & xa & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

如果第一幅图像上的对极点 \mathbf{e} 不在无穷远处，则由 $F\mathbf{e} = 0$ 可知， $c - xb = 0$ 。这样， F 前两行的任意 2×2 余子式为零，即前两行线性相关。因此，第二幅图像的对极点 \mathbf{e}' 必在无穷远处。同理，当 \mathbf{e}' 不在无穷远处时， \mathbf{e} 必在无穷远处。在实际应用中，以下两种情况都有可能发生：（1）只有一个对极点在无穷远处；（2）两个对极点都在无穷远处。由此可知，在情况 2 下，基本锥面的奇异点（此后，将锥面的顶点称为锥面的奇异点。）必在联合图像点空间的无穷远处。

现在先考虑只有一个对极点在无穷远处的情况。不失一般性的假设 $\mathbf{e} = (e_1, e_2, 1)^T$ ， $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2, 0)^T$ ，则基本锥面可以写成

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & x & d \\ 0 & 0 & a & xa & e \\ 1 & a & 0 & 0 & b \\ x & xa & 0 & 0 & xb \\ d & e & b & xb & 2f \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & 2f \end{pmatrix},$$

并且不难发现，联合图像点空间中由对极点 \mathbf{e}' 定义的无穷远点 $\mathbf{E}' = (0, 0, e'_1, e'_2, 0)^T$ 为 Ω 的奇异点，即 $\Omega \mathbf{E}' = 0$ 。令 $F_{2 \times 2}$ 的奇异值分解为 $U \text{diag}(\sigma, 0) V^T$ ，则存在正交变换矩阵

$$W' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & V \\ -U & U \end{pmatrix} \quad (\text{A-1})$$

使得矩阵 B 的特征分解为 $B = W' \underbrace{\text{diag}(-\sigma, 0, \sigma, 0)}_{\Sigma} W'^T$ 。因此，正交变换矩阵

$$W = \begin{pmatrix} W'^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A-2})$$

使得基本锥面 Ω 具有以下形式

$$\Omega' = W^{-T} \Omega W^{-1} = \begin{pmatrix} W'^T B W' & W'^T \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T W' & 2f \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} \Sigma' & \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'^T & c' \end{pmatrix} \quad (\text{A-3})$$

其中 $\Sigma' = \text{diag}(-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{b}' = W'^T \mathbf{b} / \sigma$, $c' = 2f / \sigma$ 。

由平移变换矩阵 $T = \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($\mathbf{t} = (-b'_1, 0, b'_3, 0)^T$), 可以得到

$$\Omega'' = T^{-T} \Omega' T^{-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & s \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 & r \\ 0 & s & 0 & r & t \end{pmatrix},$$

其中 $s = b'_2, r = b'_4, t = b_1'^2 - b_3'^2 + c'$ 。又由 $\Omega \mathbf{E}' = 0$, 可以得到 $\Omega'' \mathbf{Y}' = 0$ ($\mathbf{Y}' = T \mathbf{W} \mathbf{E}'$)。通过直接计算, 得到 $\mathbf{Y}' = T \mathbf{W} \mathbf{E}' = \frac{1}{\sqrt{2}} (-y'_1, -y'_2, y'_1, y'_2, 0)^T$, 其中 $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix} \neq 0$, 可知 \mathbf{Y}' 是一个非零向量。所以由 $\Omega'' \mathbf{Y}' = (y'_1, 0, y'_1, 0, -s y'_2 + r y'_2)^T = 0$, 可知 $y'_1 = 0$, $-s y'_2 + r y'_2 = 0$, 从而 $s = r$ 。由此可以得到

$$\Omega'' = T^{-T} \Omega' T^{-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & s \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 & s \\ 0 & s & 0 & s & t \end{pmatrix} \quad (\text{A-4})$$

其中, $s \neq 0$, 否则, 任意 $(x, y) \in R^2$ 只要满足 $x^2 + y^2 \neq 0$, $\mathbf{Y} = (0, x, 0, y, 0)^T$ 就是 Ω'' 的奇异点, 即 $\Omega'' \mathbf{Y} = 0$, 这说明第一幅图像的对极点也在无穷远处。所以在平移变换矩阵 $T' = \begin{pmatrix} I_4 & \mathbf{t}' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 下, 其中 $\mathbf{t}' = \left(0, \frac{t}{4s}, 0, \frac{t}{4s}\right)$, 可以得到

$$\mathbf{T}'^{-T} \boldsymbol{\Omega}'' \mathbf{T}'^{-1} = \sigma \begin{pmatrix} -1 & & & & 0 \\ & 0 & & & s \\ & & 1 & & 0 \\ & & & 0 & s \\ 0 & s & 0 & s & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-5})$$

综上所述，在欧氏变换 $\mathbf{E} = \mathbf{T}'\mathbf{T}\mathbf{W}$ 下，基本锥面具有如下标准形式

$$-x_1^2 + x_3^2 + 2s(x_2 + x_4) = 0 \quad (\text{A-6})$$

在变换后的坐标系中，对于测量点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ，最小化问题 (2-5) 可以简化为

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{x}}} \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - x_i)^2 \\ \text{s.t. } -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2 + 2s(\bar{x}_2 + \bar{x}_4) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

由 Lagrange 乘子法，可得

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{1-\lambda}, \bar{x}_2 = x_2 - \lambda s, \\ \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{1+\lambda}, \bar{x}_4 = x_4 - \lambda s. \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

以及

$$-\left(\frac{x_1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{1+\lambda}\right)^2 + 2s(x_2 + x_4 - 2\lambda s) = 0 \quad (\text{A-9})$$

或等价形式

$$-x_1^2(1+\lambda)^2 + x_3^2(1-\lambda)^2 + 2s(x_2 + x_4 - 2\lambda s)(1+\lambda)^2(1-\lambda)^2 = 0 \quad (\text{A-10})$$

由此通过求解这个一元五次多项式可以得到 (A-7) 的解。

最后，考虑第一幅图像的对极点也在无穷远处的情况，即就是

$$\mathbf{e} = (e_1, e_3, 0)^T, e_1^2 + e_3^2 \neq 0 \quad (\text{A-11})$$

这种情况下， $\mathbf{E} = (e_1, e_3, 0, 0, 0)^T$ 也是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的奇异点。同理可知，(A-4) 中的 $s = 0$ 。因此，基本锥面为

$$\Omega'' = \sigma \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix},$$

明显 $t \neq 0$ ，否则锥面 Ω'' 具有奇异点 $\mathbf{S} = (0, x, 0, y, 1)^T$ ($x, y \in R$)，也就是说两个对极点均不在无穷远处。因此，基本锥面具有标准方程

$$-x_1^2 + x_3^2 + t = 0 \quad (\text{A-12})$$

在变换后的坐标系下，测量点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ 的最小化问题 (2-5) 可以简化为

$$\begin{aligned} \min_{\bar{\mathbf{x}}} \sum_{i=1}^4 (\bar{x}_i - x_i)^2 \\ \text{s.t. } -\bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2 + t = 0 \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

由 Lagrange 乘子法，可得

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{x_1}{1-\lambda}, \bar{x}_2 = x_2, \\ \bar{x}_3 &= \frac{x_3}{1+\lambda}, \bar{x}_4 = x_4. \end{aligned} \quad (\text{A-14})$$

以及

$$-\left(\frac{x_1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{1+\lambda}\right)^2 + t = 0 \quad (\text{A-15})$$

或等价形式

$$-x_1^2(1+\lambda)^2 + x_3^2(1-\lambda)^2 + t(1+\lambda)^2(1-\lambda)^2 = 0 \quad (\text{A-16})$$

因此，两对极点都在无穷远处时，最优三角化简化为一个一元四次方程。

命题 2-1 中情况 3 的证明：

由 $F_{2 \times 2} = 0$ 可知， $F_{11} = F_{12} = F_{21} = F_{22} = 0$ ，因此基本锥面退化成三维超平面 $F_{31}x + F_{32}y + F_{13}x' + F_{23}y' + F_{33} = 0$ 。对于测量点 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ ，最小化问题 (2-5) 是线性的，并由 Lagrange 乘子法可以得到 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \lambda \mathbf{b}$, $\lambda \mathbf{b}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33}$ ，其中， $\mathbf{b} = (F_{31}, F_{32}, F_{13}, F_{23})^T$ 。所以，情况 3 下，最小化问题 (2-5) 的解为

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{x} + F_{33}}{\mathbf{b}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \quad (\text{A-17})$$

附录 B：两种最优三角化方法的比较

总的来说，新的最优三角化方法与 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法都需要进行欧氏变换求解一元六次方程，但对比两种算法还是存在细微的差异：

1. Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法中的多项式方程的次数与两幅图像的次序有关，即用哪一幅图像做为第一幅图像，而新的最优三角化方法给出的多项式方程的次数却与图像的次序无关。例如，令基本矩阵及它的对极点为

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = (1, 0, 1)^T, \mathbf{e}' = (1, 1, 0)^T。$$

对于测量点 $\mathbf{x} = (2, 1, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{x}' = (0, 1, 1)^T$ （其严格满足对极几何约束），Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法中的多项式为

$$g_1(t) = t^6 - 2\sqrt{2}t^5 + 12t^4 - 16\sqrt{2}t^3 + 20t^2 - 8\sqrt{2}t。$$

如果调换两幅图像的次序，基本矩阵变为 F^T 并且第一幅图像的对极点在无穷远处。测量点 $\mathbf{x} = (0, 1, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{x}' = (2, 1, 1)^T$ 在 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法中的多项式为

$$g_2(t) = 9t^5 + 12\sqrt{2}t^4 + 20t^3 + 10\sqrt{2}t^2 + 8t。$$

这种不合理的现象出现的原因是由于多项式的次数依赖于对极线的参数化。

接下来，给出新的最优三角化方法中多项式与图像次序无关的证明。其中用到的符号与 2.3 节的一致。如果第二幅图像为参照图像，则基本矩阵为 F^T ，两个对极点对调。这时，联合图像点空间中的基本锥面为

$$\hat{\mathbf{X}}' \hat{\Omega} \hat{\mathbf{X}} \triangleq (x, y, x', y', 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ 0 & 0 & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{11} & F_{21} & 0 & 0 & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & 0 & 0 & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{31} & F_{32} & 2F_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

此处仅给出情况 1 的证明，情况 2 的证明类似。如 2.3 节，先给出欧氏变换后 $\hat{\Omega}$ 的

标准形式。 $\hat{\Omega}$ 的顶点为 $\hat{\mathbf{E}}=(e'_1, e'_2, e_1, e_2, 1)^T$ ，并且基本锥面可以写成

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{B}} & -\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{e}} \\ -\hat{\mathbf{e}}^T\hat{\mathbf{B}} & \hat{\mathbf{e}}^T\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{e}} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{F}_{2 \times 2} \\ \mathbf{F}_{2 \times 2}^T & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T. \quad \text{则欧氏变换矩阵为}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{W}}^T & -\hat{\mathbf{W}}^T\hat{\mathbf{e}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } \hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{U} & -\mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad \text{基本锥面的标准形式为}$$

$\hat{\mathbf{E}}^{-T}\hat{\Omega}\hat{\mathbf{E}}^{-1} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2 - \sigma_1, -\sigma_2, 0)$ 。令 $\hat{\mathbf{X}}' = \hat{\mathbf{E}}\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, 1)^T$ ，则必有 $\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 。由此，可以得到与 2.3 节中 (2-13) 相同的优化准则。所以，调换两幅图像的次序后，新的最优三角化方法仍然可以给出与 (2-16) 相同的多项式。

2. 当 $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 有两个相等的非零奇异值时，由命题 2-1 中的情况 1 可知对于所有测量点，新的最优三角化方法只用求解一个一元二次方程，但 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法仍然要求解一元六次方程，并且方程的次数与测量点有关。例如，

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = (1, 1, 1)^T, \mathbf{e}' = (-1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{F}_{2 \times 2} \text{ 的两个奇异值均为 } 1. \quad \text{对于测量点}$$

$\mathbf{x} = (0, 1, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{x}' = (1, 2, 1)^T$ 和 $\mathbf{x} = (1, 2, 1)^T \leftrightarrow \mathbf{x}' = (-1, -1, 1)^T$ (这两对测量点均严格满足对极几何约束)，则 Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法中的多项式为

$$g_1(t) = 2t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 4t^3 - 2t^2 - 2t - 2 \text{ 和 } g_2(t) = 3t^5 + 6t^3 + 3t.$$

3. 当 $\mathbf{F}_{2 \times 2}$ 仅有一个非零奇异值时，由附录 A 可知，两幅图像中至少有一个对极点在无穷远处。如果第二幅图像上的对极点位于无穷远处而第一幅图像上的对极点位于有限远处，Hartley 和 Sturm 的最优三角化方法中的多项式次数为六次；反之或均在无穷远处，则多项式次数为五次。而由命题 2-1 可知，对于情况 2，新的三角化方法在只有一个对极点在无穷远处时，多项式次数为五次，在两个对极点均在无穷远处时，多项式次数为四次（见附录 A 的 (A-10)，(A-16)）。

附录 C: $\det(\mathbf{M}), \mathbf{M}_1^*, \mathbf{M}_2^*$ 中 λ 的系数

对于 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \Sigma'_1 + \lambda \mathbf{I}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & \Sigma_2 - \lambda \mathbf{I}_3 \end{pmatrix}$, 其行列式关于 λ 展开为

$$\det(\mathbf{M}) = -\det\left(\begin{pmatrix} \Sigma'_1 & -\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & -\Sigma_2 \end{pmatrix} + \lambda \mathbf{I}\right) = -\lambda^n - \sum_{i=1}^n \left[\begin{pmatrix} \Sigma'_1 & -\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & -\Sigma_2 \end{pmatrix} \right]_i \lambda^{n-i}, \quad (\text{C-1})$$

其中 $[\cdot]_i$ 为矩阵所有 $i \times i$ 主子式的和。由等式 (4-15) 可知, 计算中只需要伴随矩阵的后三列, 此处给出计算伴随矩阵各元素中 λ 系数的三种情况:

1. 元素位于对角线上: 该元素对应的代数余子式可以按照 (C-1) 求解;
2. 元素不在对角线上也不为零: 很容易证明该元素对应的代数余子式与去掉 \mathbf{M} 中该元素所在行和列的子矩阵通过矩阵基本变换后得到的如下形式的行列式相等

$$\begin{vmatrix} 0 & p + \lambda & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & q_1 - \lambda & 0 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & q_2 - \lambda \end{vmatrix} = -h_{21}\lambda^3 - h_{21}(p - q_1 - q_2)\lambda^2 - (h_{13}h_{21}h_{32} + h_{14}h_{21}h_{42} + h_{21}q_1q_2 - h_{13}h_{22}h_{31} - h_{14}h_{22}h_{41} \\ - h_{21}pq_1 - h_{21}pq_2)\lambda + h_{14}h_{21}h_{42}q_1 + h_{13}h_{21}h_{32}q_2 - h_{14}h_{22}h_{41}q_1 - h_{13}h_{22}h_{31}q_2 - h_{21}pq_1q_2$$

3. 元素不在对角线上但为零: 很容易证明该元素对应的代数余子式与去掉 \mathbf{M} 中该元素所在行和列的子矩阵通过矩阵基本变换后得到的如下形式的行列式相等

$$\begin{vmatrix} p_1 + \lambda & 0 & h_{13} & h_{14} \\ 0 & p_2 + \lambda & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & 0 & 0 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & q - \lambda \end{vmatrix} = (h_{13}h_{31} + h_{23}h_{32})\lambda^2 + (h_{23}h_{32}p_1 + h_{13}h_{31}p_2 - h_{13}h_{31}q - h_{23}h_{32}q)\lambda \\ + h_{14}h_{23}h_{32}h_{41} + h_{13}h_{24}h_{31}h_{42} - h_{13}h_{24}h_{32}h_{41} - h_{14}h_{23}h_{31}h_{42} - h_{23}h_{32}p_1q - h_{13}h_{31}p_2q$$

附录 D：方程（4-16）有解情况讨论

当 $U_i^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}$ 的前 m_i 个元素为零时，下面分两种情况讨论 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 的解。

情况 1 当 $m_i=1$ 时，令

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{pmatrix} = U_i \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \quad (\text{D-1})$$

其中 μ_i 为未知数， $\mathbf{v}_i = (0 \ \Sigma_4^{-1}) U_i^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}$ 为常向量。把（D-1）代入（4-12）的第二个方程中，得到一元二次方程。求解该方程，如果得到的根不是实根，则舍弃；否则，由（D-1）得到 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 的备选结果。

情况 2 当 $m_i > 1$ 时，令

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{L}}_{1,2} \\ \hat{\mathbf{L}}_{1,3} \end{pmatrix} = U_i \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} \quad (\text{D-2})$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_i$ 为未知向量， $\mathbf{v}_i = (0 \ \Sigma_{s-m_i}^{-1}) U_i^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{B}_1^T \end{pmatrix}$ 为常向量（ $m_i \leq 3$ ）或常数（ $m_i = 4$ ）。

此时，将（D-2）直接代入（4-12）的第二个方程中，将得到一个 m_i 元二次方程，无法给出确定的解。所以，将（D-2）代入（4-10）得到下述最小化问题

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\mu}_i} & \left(\boldsymbol{\mu}_i^T, \mathbf{v}_i^T, 1 \right) \mathbf{D} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} & \left(\boldsymbol{\mu}_i^T, \mathbf{v}_i^T, 1 \right) \mathbf{S} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{v}_i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D-3})$$

其中 $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} U_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_1' & \mathbf{B}_2 & 0 \\ \mathbf{B}_2^T & \Sigma_2 & \mathbf{B}_1^T \\ 0 & \mathbf{B}_1 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ， $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} U_i^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。对

(D-3) 进行整理可以得到

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{D}_{11} \boldsymbol{\mu}_i + 2\mathbf{d}_1 \boldsymbol{\mu}_i + d_2 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{S}_{11} \boldsymbol{\mu}_i + 2\mathbf{s}_1 \boldsymbol{\mu}_i + s_2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D-4})$$

其中 $\mathbf{d}_1 = (\mathbf{v}_i^T, 1) \mathbf{D}_{12}^T$, $d_2 = (\mathbf{v}_i^T, 1) \mathbf{D}_{22} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^T \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{s}_1 = (\mathbf{v}_i^T, 1) \mathbf{S}_{12}^T$, $s_2 = (\mathbf{v}_i^T, 1) \mathbf{S}_{22} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_i^T \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{22}$ 和 $\mathbf{S}_{11}, \mathbf{S}_{12}, \mathbf{S}_{22}$ 分别为矩阵 \mathbf{D} 和 \mathbf{S} 的左上角 $m_i \times m_i$ 子矩阵, 右上角 $m_i \times (6 - m_i)$ 子矩阵和右下角 $(6 - m_i) \times (6 - m_i)$ 子矩阵。

由 Lagrange 乘子法, 可以得到 (D-4) 的 Lagrange 方程

$$\begin{cases} (\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) \boldsymbol{\mu}_i + \mathbf{d}_1 + \gamma \mathbf{s}_1 = 0 \\ \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{S}_{11} \boldsymbol{\mu}_i + 2\mathbf{s}_1 \boldsymbol{\mu}_i + s_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{D-5})$$

其中 γ 为乘子。求解 (D-5) 同样要考虑三种情形。

情形 a 假设 γ 使得 $\det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) \neq 0$, 则有

$$\boldsymbol{\mu}_i = -\frac{(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^* (\mathbf{d}_1 + \gamma \mathbf{s}_1)}{\det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})} \quad (\text{D-6})$$

其中 $(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^*$ 表示矩阵 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 的伴随矩阵。将 (D-6) 代入 (D-5) 的第二个方程后得到关于 γ 的 $2m_i$ ($2 \leq m_i \leq 4$) 元方程

$$\begin{aligned} & (\mathbf{d}_1 + \gamma \mathbf{s}_1)^T (\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^{*T} \mathbf{S}_{11} (\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^* (\mathbf{d}_1 + \gamma \mathbf{s}_1) \\ & - 2 \det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) \mathbf{s}_1 (\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^* (\mathbf{d}_1 + \gamma \mathbf{s}_1) + s_2 \det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11})^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{D-7})$$

由于 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 最多为 4×4 矩阵, 其行列式和伴随矩阵中 γ 的系数可以直接算得。求解方程 (D-7) 后, 先去掉使 $\det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) = 0$ 的实根, 再将剩余实根代入 (D-6)

并找出使得 (D-4) 的目标函数值最小的根 $\boldsymbol{\mu}_{i,est}$, 从而由 (D-2) 得到 $(\hat{\mathbf{L}}_{1,2}^T, \hat{\mathbf{L}}_{1,3}^T)^T$ 的备选结果。

情形 b 如果 $\det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) = 0$ 的某根代入 (D-5) 第一个方程后使方程有解, 但使得矩阵 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 只有一个特征值为零, 则参照 $m_i = 1$ 时的情况, 将 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 进行特征分解, 引入 (D-1) 等式左边的向量, 再将向量代入 (D-5) 的第二个方程检查有无实根, 如果有实根则由实根计算备选结果;

情形 c 如果 $\det(\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}) = 0$ 的某根代入 (D-5) 的第一个方程后使方程有解, 并且使得矩阵 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 有多个特征值为零, 则又回到了情况 2, 将 $\mathbf{D}_{11} + \gamma \mathbf{S}_{11}$ 进行特征分解, 引入 (D-2) 等式左边的向量, 再构造形如 (D-4) 的优化准则, 再分上述三种情形进行求解, 直到情形 c 不再出现为止。最后通过 (D-2) 给出备选结果。由于情

况 2 中 c 的求解过程与情况 2 类似这里不再赘述。

附录 E: (4-23) 的一种新的目标函数

此处给出 (4-23) 的一种新的目标函数。一般情况下, 最小化问题 (4-23) 的目标函数中的 D 为单位阵, 即就是将每幅图像上的法线距离平等对待。但假定法线距离不变, 如果变化它对应的测量端点之间的距离, 就可以改变估计直线与测量直线之间的夹角。测量端点变远则夹角变小, 反之则夹角变大。本节将夹角引入到 (4-23) 的目标函数中, 来抑制测量端点较近时估计直线与测量直线夹角偏大的情况出现。令第 i ($i=1,2,3$) 幅图像上两个测量端点为 $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}$, 并且估计直线的法线距离为 $\{\lambda_{i1}, \lambda_{i2}\}$, 则测量直线与估计直线夹角的正切为

$$\operatorname{tg} \theta_i = \frac{|\lambda_{i1} - \lambda_{i2}|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|}$$

但此处并不直接将 $\operatorname{tg} \theta_i$ 引入目标函数, 而是先将三幅图像的测量端点距离归一化, 再由归一化后的距离得到关于夹角的函数

$$\varphi(\theta_i) = \sum_{i=1}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\| \cdot \operatorname{tg} \theta_i = \frac{\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|} |\lambda_{i1} - \lambda_{i2}|$$

将 $\varphi(\theta_i)$ 代入 (4-23) 的目标函数, 得到新的带有夹角信息的目标函数

$$F = \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 + \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 + \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 + (\omega_1 |\lambda_{11} - \lambda_{12}|)^2 + (\omega_2 |\lambda_{21} - \lambda_{22}|)^2 + (\omega_3 |\lambda_{31} - \lambda_{32}|)^2$$

$$= [\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{31}, \lambda_{32}] D_E \begin{bmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{31} \\ \lambda_{32} \end{bmatrix}$$

其中 $\omega_i = \frac{\sum_{i=1}^3 \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\|}$, $\mathbf{D}_E = \begin{bmatrix} (1+\omega_1^2) - \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & (1+\omega_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\omega_2^2) - \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & (1+\omega_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\omega_3^2) - \omega_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_3^2 & (1+\omega_3^2) \end{bmatrix}$ 为正定对称矩

阵。

攻读博士学位期间参与项目和研究成果

攻读博士学位期间参与项目

[1]国家自然科学基金（60835003）：基于图象的大场景三维重建的理论和研究。

攻读博士学位期间完成论文

[1] 张强，吴福朝. 多视三角化的迭代算法. 计算机辅助设计与图形学学报, 已录用.

[2] F.C. Wu, Q. Zhang, Z.Y. Hu. Efficient Suboptimal Solutions to the Optimal Triangulation. International Journal of Computer Vision, 2011, Vol.91(1): 77-106.

致 谢

在我的研究生生活即将结束，博士论文完成之际，我最想感谢我的导师吴福朝研究员。感谢吴老师几年来在学习科研和生活上给予我的悉心指导和耐心帮助。在我攻读博士学位期间，从论文的选题到研究，直至论文的撰写、修改，每一步都凝聚着吴老师的无数心血。吴老师严谨的治学态度、渊博的知识、忘我的钻研精神以及平易近人的处世风范，为我树立了榜样，并时刻激励着我。在此谨向吴老师致以诚挚的敬意和衷心的感谢！

衷心的感谢胡占义研究员。胡老师学识渊博、治学严谨、严于律己，对工作兢兢业业，对学生尽职尽责。不但在学术上给予了我无私的帮助，还教会了我很多为人处事的道理，在此向胡老师表示最诚挚的谢意！

感谢吴毅红研究员，她勤奋踏实的研究作风给了我很多启发和激励。

感谢计算机视觉组的同学们，感谢大家对我的帮助。和大家在一起，我度过了一段充实快乐的时光。祝大家万事如意、前程似锦！

感谢模式识别国家重点实验室和自动化所研究生部的各位老师，他们的辛勤工作为我创造了良好的学习、科研和生活环境。

衷心的感谢我的家人。他们在我多年的求学生涯中，默默的支持着我鼓励着我，让我后顾之忧的追求自己的梦想，享受自己选择的生活。祝愿他们永远健康快乐！

张强

2011 年 11 月于北京