计算理论 第七章 陈彦帆 2018K8009918002

7.1

(a) 真 (b) 假 ~~c~~ (e) 真. 因为 $3^n = 2^{(\log_2 3)n} = 2^{O(n)}$

(f) 真

7.4

T	T,R	S	S,R,T
	R	S	S
		T	T,R
			R

$S \in Table(1,4)$

$w \in CFG\ G$.

7.6 设 $L_1 \in P$, $L_2 \in P$, M_1 判定 L_1, M_2 判定 L_2

(1) 令 $L_3 = L_1 \cup L_2$

构造图灵机 M_3 判定 L_3

M_3 = "对于输入 w:

1、在 w 上模拟 M_1, 若 M_1 接受, 则接受

2. 在 w 上模拟 M_2, 若 M_2 接受, 则接受

否则拒绝。"

由于 1, 2 两步均为 $O(n^k)$ 的, 故 M_3 运行时间也为 $O(n^k)$

即 $L_1 \cup L_2 \in P$, P 在并下封闭.

(2) $L_3 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

构造图灵机 M_3 判定 L_3

M_3 = "对于输入 w (设长度为 n):

1. 将 w 分为 w_1 和 w_2 两段,

2. 在 w_1 上模拟 M_1, 在 w_2 上模拟 M_2, 若 M_1 和 M_2 都接受, 则接受, ~~否则拒绝~~.

3. 重复 1. 还有不同的分法, 重复回到 1. 否则拒绝。"

由于 W 分为两段是 $O(n)$ 的, 且有 ~~2n~~ $n+1$ 种分法, 也为 $O(n)$, 第 2 步为 $O(n^k)$, 故 M_3 的运行时间为 $O(n^{k+2})$, 故 $L_3 \in P$, 即 P 在连接下封闭

Scanned by CamScanner

(3) 设 $L_3 = \{w \mid w \notin L_1\}$

构造图灵机 M_3 判定 L_3

M_3 = "对于输入 w:

在 w 上模拟 M_1，若 M_1 接受，则接受，否则拒绝。"

故 M_3 的运行时间也是 $O(n^k)$，$L_3 \in P$，P对补封闭。

7.7

(1) 并运算

设 $L_1, L_2 \in NP$，L_1 的验证机为 M_1，L_2 的验证机为 M_2

~~构造 NTM M 在非确定的多项式时间内判定 $L_1 \cup L_2$~~

~~M = "对于输入 w~~

构造验证机 M_3 验证 $L_1 \cup L_2$

M_3 = "对于输入 $\langle w, (c_1, c_2) \rangle$,

1. 在 $\langle w, c_1 \rangle$ 上模拟 M_1，若 M_1 接受，则接受
2. 在 $\langle w, c_2 \rangle$ 上模拟 M_2，若 M_2 接受，则接受

否则拒绝。"

如上述，对于 w 和证书 (c_1, c_2)，M_3 能在多项式时间~~判~~验证 w，因为 1、2 均为多项式时间的，~~故 L~~ $L_1 \cup L_2 \in NP$

(2) 连接运算

设 $L_1, L_2 \in NP$，构造 NTM M 在多项式时间判定 L_3

$L_3 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

M = "对于输入 w,

1. 非确定地将 w 分为 2 个片段，$w = x_1 x_2$
2. 分别对 x_1, x_2，非确定地猜测可证明 $x_1 \in L_1$ 和 $x_2 \in L_2$ 的证书
3. 验证所有可能的证书，若验证成功，则接受，否则拒绝。"

注意到 L_1、L_2 的证书具有多项式长度，故 M总 能在（非确定的）多项式时间内完成。故 M 为接受 w 当且仅当 $w = x_1 x_2$ 且 $x_1 \in L_1$，$x_2 \in L_2$，故 M 非确定地在多项式时间判定 L_3，即 NP对连接封闭

Scanned by CamScanner

7.8 设输入长度为 n，则顶点数和边数都是 $O(n)$ 的

3.3.2的算法分为以下几步

0. 扫描并验证输入为图 G 的编码

(1) 检查序列格式，是 $O(n)$ 的

(2) 检查顶点不应包含重复元素，采用暴力算法，两两比较，

比较次数为 $\frac{n(n-1)}{2}$，为 $O(n^2)$

(3) 检查边序列出现的顶点也应出现在顶点序列中

也为 $O(n^2)$

1. 选择并标记 G 的第1个顶点 $O(n)$

2. 重复~~以下~~步骤3直到没有新顶点可标记，~~检查~~，需重复 $O(n)$ 步

3. 对于 G 的每一个顶点，若能通过一条边将其连到某个已标记的顶点，则标记该顶点。

"对于每一个顶点"要循环 $O(n)$ 次

"若能…"，先确定一个已标记的新顶点，再逐个检查边，要 $O(n^2)$

4. 看是否所有顶点都被标记 $O(n)$

总共需要 $O(n^2)+\overset{O(n)}{O(n)}\cdot O(n^2)+O(n)=O(n^4)$，为多项式时间

故 CONNECTED $\in$ P

7.9 构造TM M 判定 TRIANGLE

M = "对于输入 w，w 为图 G 的编码 （检查编码 $O(n^2)$）

1. 每次选取 G 的3个顶点，检查是否两两之间都有边，若有，则接受

2. 若穷举完所有3顶点，则拒绝，否则重复1。"

选取3顶点~~时间~~有 C_n^3 种可能，为 $O(n^3)$，检查是否有边为 $O(n)$，总复杂度为 $O(n^4)$ 的，故 TRIANGLE $\in$ P

Scanned by CamScanner

7.10 M="
对于$O(n)$的DFA编码w:

1. ~~从初始状态开始,~~ 将初始状态作标记，对于每一个标记的状态q_1，选择一个未被标记的状态q_2，检查是否有q_1转q_2的规则，若有，则将q_2标记，重复直到没有新状态被标记。

2. 检查所有被标记的状态是否为接受状态，若是则接受，否则拒绝。" M判定ALL_{DFA}

以上操作是$O(n^4)$的(理由同7.8)，故$ALL_{DFA} \in P$.

7.11

a. ~~构造~~ 利用定理4.5给出的方法:

F="对于输入<A,B>，其中A,B均为DFA:

1. 构造 ~~L(C)~~ DFA C 使

$$L(C)=(L(A)\cap\overline{L(B)})\cup(\overline{L(A)}\cap L(B))。$$

对于补语言,将原自动机的接受、拒绝状态对换即可.

~~对于并，按定理1.12的构造，对于交~~

对于$L(A)\cap L(B)$，只要分别模拟DFA A和DFA B，再令接受状态为两个接受状态的交即可，对并也是同理.

因此DFA C的构造是多项式时间的

2. 在输入<C>上模拟定理4.4中的图灵机T

~~这一步的时间是~~ T是E_{DFA}的判定机，其算法恰与ALL_{DFA}的判定机相同(除最后一步)，时间复杂度也相同，为$O(n^4)$ (见7.10)

3. 若T接受，则接受，否则拒绝。"

故F ~~对于~~ 在多项式时间判定EQ_{DFA}，即$EQ_{DFA}\in P$

7.11

b. ~~利用定理1.24的构造方式~~，设 DFA $N_1(Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ 识别A

构造DFA B 使 $L(B)=A^*$，$B(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

方法如下：

1. $Q = Q_1 \cup \{q'\}$

~~2. $q_0 = q_1$~~

2. $F = F_1 \cup \{q_1\}$

3. 将所有与 q_1 相关的转移函数复制一遍，并用 q' 替换 q_1

4. 删去所有形如 ~~$q \rightarrow q$~~ $\delta(q, a) = q_1$ 的函数，其中 q 为不等于 q_1 的任意状态，$a \in \Sigma$

5. 对每一条形如 $\delta(q_0, a) = q$ 的函数，~~添加~~ 对每一个 $q_f \in F$，添加 $\delta(q_f, a) = q$

在输入长度n下，以上操作是多项式时间的

构造TM M 判定 A是否为星闭的

M = "对于输入w，w为DFA A：

1. 按上述方法构造DFA B，$L(B)=A^*$

2. 在 <A, B> 上模拟 EQ_{DFA}（T判定 T）后者由(7.11a)给出.

3. 若 T接受，则接受，否则拒绝。"

其中第2步在7.11a说明是多项式时间的，故 M判定星闭$_{DFA}$。

Scanned by CamScanner

7.12

构造验证机A验证ISO

A="对于输入<<G,H>,c>，G、H为图，c为证书，为m个元素到m个元素的置换：

1. 检查G、H的顶点数相同且为m，且c为m元置换

2. 依次检查G中每对顶点a, b，若 $Edge(a,b)\in G$ iff $Edge(\pi(a),\pi(b))\in H$ 对任意一对顶点都成立，则接受，否则拒绝。"

以上第1步是 $O(n)$ 的，第2步为 $O(n^2)\times O(n)=O(n^3)$

故为多项式时间，故 $ISO\in NP$.

~~7.16~~

~~7.34~~

~~7.16~~

7.34

首先 $U\in NP$，~~因为可以用NFA~~

构造~~NFA~~NTM B="对于输入 $\langle M, x, \#^t\rangle$，

在x上模拟NFA M t步，若M的任何一个分支接受，则接受，否则拒绝。"

显然上述过程是多项式时间的（t步）

下面证 $3SAT\le_p U$

设NTM A多项式时间判定3SAT，其输入为公式φ，长度为n，其最大运行时间为~~f(φ)，f(φ)=O(n^k)~~ cn^k

~~构造~~ ~~将~~ 在输入 $w=\langle A,\varphi,\#^{cn^k}\rangle$ 上运行B，则有

A接受φ <=> B接受w

转化过程是多项式时间的，~~故~~又3SAT为NPC，故U为NPC.

Scanned by CamScanner

7.39

下证 $3SAT \le_p PUZZLE$

对于一个 3SAT 公式 φ，设有变量 $x_1, \cdots x_n$，子句 $l_1, \cdots l_m$

构造对应的卡片集：

1. 每列 ~~最多~~ 有 m 个可能的孔位

2. 对于每个 $x_i \in \varphi$，加入一张卡片，其左列除了

$\{j \mid x_i \in l_j\}$ 的孔位不打孔，其余全打孔，

右侧除了 $\{j \mid \bar{x_i} \in l_j\}$ 的孔位不打孔，其余全打孔

3. 再加入一张卡片K，左侧全打孔，右侧全不打孔。

对于每个可满足的 φ，将所有卡片 ~~代表 x_i~~ 对应的x_i或$\bar{x_i}$取1 的一边放在同侧，且与

K全打孔的一边放在同侧，即完成了全覆盖。

对于某一全覆盖的卡片摆放方式，考察卡片K全打孔的那一侧，将其它卡片那一侧对应的元素（x_i或$\bar{x_i}$）取1，即

可让 φ 得到满足。

故 φ 可满足 $\Leftrightarrow$ ~~构造~~ $f(\varphi)$ 有解，又 3SAT 是 NPC 的

故 PUZZLE 为 NPH

又 PUZZLE 为 NP，因为给定一个卡片放置的 0、1（正放、倒放）序列

作为证明，即可在多项式时间验证 PUZZLE

故 PUZZLE 为 NPC 的.

Scanned by CamScanner

7.45

若 $P=NP$，对 $\forall A\in P$ 且 $A\neq\emptyset$ 且 $A\neq\Sigma^*$

存在 $x_1\in A$ 和 $x_2\notin A$

对于 $\forall$ 语言 $B\in NP$ 即 $B\in P$

对 $\forall w\in$ ~~B~~

令 $f(w)=$" ~~模拟~~在 w 上模拟 B 的判定器 TM M

若 M 接受：x_1

若 M 拒绝：x_2 "

因为 $B\in P$ 故 ~~f(w) 总~~ M 和 $f(w)$ 总能在多项式时间完成

有 $w\in B$ iff $f(w)\in A$

故 $B\leq_P A$，即 A 为 NP 完全的。

7.16

首先问题是属于 NP 的。给定输入 w 和证明 C，C 是一个有向图，可以在多项式时间内验证：C 与 w 的图 G 只有边的方向不同，其它均相同，且 ~~C满~~ 遍历 C 的每个顶点，可验证 C 满足输入 w 的子集 C 的要求。

以下证明 $3SAT\leq_P$ 该问题

对于 3SAT 公式 φ，设变元为 $x_1,\cdots x_n$，子句为 $l_1,\cdots l_m$

构造对应的无向图 G 和结点集 C："

1. G 有 $m+2n$ 个顶点，记为 $x_1,\cdots x_n, l_1\cdots l_m, \overline{x_1},\cdots \overline{x_n}$

2. 若 $x_i\in l_j$，增加一条 x_i 到 l_j 的无向边，若 $\overline{x_i}\in l_j$，增加一条 $\overline{x_i}$ 到 l_j 的无向边

~~3. 结点集 C 为 $x_1,\cdots x_n$。~~

~~对于每个可满足的~~ φ，3. ~~对每~~对 x_i, $\overline{x_i}$，连一条边

4. 结点集 C 为 $x_1,\cdots x_n, \overline{x_1},\cdots \overline{x_n}$。"

对每个可满足的 φ 的一组解，设值为 1 的变元~~为~~集合为 A，值为 0 的变元集合为 B

对 $x_i\in A$，令与 x_i 相连的边为出边，与 $\overline{x_i}$ 相连的边为入边

对 $x_i\in B$，令与 x_i 相连的边为入边，与 $\overline{x_i}$ 相连的边为出边，即满足题意。

同理，对一组满足题意的解，令结点集 C 中入度为 0 的顶点代表的变元值为 1，出度为 0 的变元值为 0，使对应的公式 φ 得到满足。故 φ 可满足 $\Leftrightarrow$ $f(\varphi)$ 可解

~~故~~ 又 3SAT 是 NPC 的，故该问题也是 NPC 的。

Scanned by CamScanner