计算理论 第一章 陈彦帆 2018K8009918002

1.14. a. 设 $M(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ 是识别语言 B 的DFA，

构造DFA $M'(Q,\Sigma,\delta,q_0,Q\setminus F)$

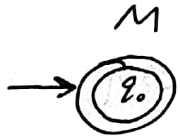
$\forall$ 字符串 $w\in L_B$，即 $w\in L(M)$，由于 M 与 M' 仅有接受状态不同，M 和 M' 读完 w 进入的状态相同，故 M' 拒绝 w，即 $w\notin L(M')$

$\forall w\in L_B^c$，则 $w\notin L(M)$，同理 $w\in L(M')$

故 M' 识别 B 的补集，正则语言在补运算下封闭

b. 例：$M(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$

$Q=\{q_0\}$



Σ 为任意非空有穷集合

对 $\forall r\in Q$ 和 $a\in\Sigma_\varepsilon$，$\delta(r,a)=\emptyset$

$F=\{q_0\}$

则 $L(M)=\{\varepsilon\}$，而 $L^c(M)=\Sigma^+$

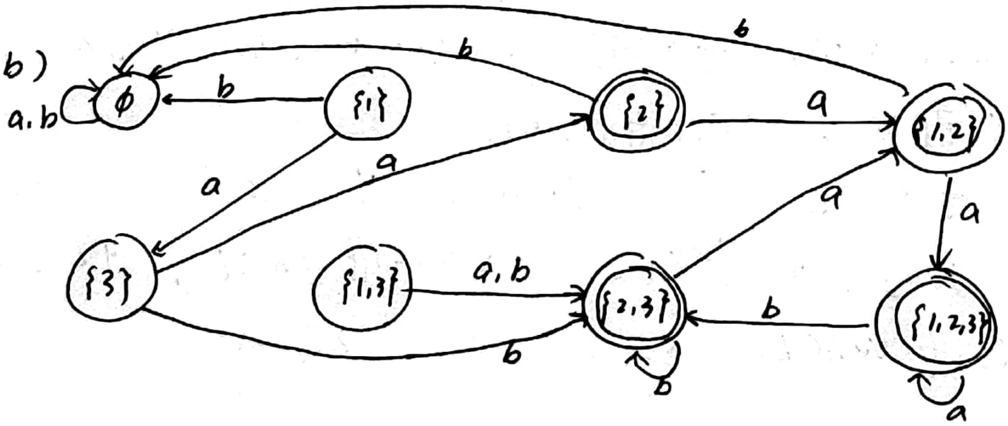
而 $M'(Q,\Sigma,\delta,q_0,\emptyset)$

$L(M')=\emptyset\neq L^c(M)$，$M'$ 不识别 M 的补集

由于NFA和DFA等价，而补运算在DFA识别的语言（即正则语言）下封闭，故也在NFA识别的语言下封闭.

~~1.28~~

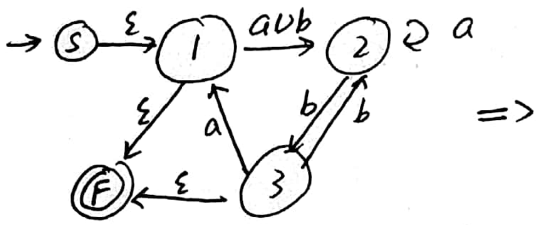
1.16(b)



陈彦帆 2018K8009918002

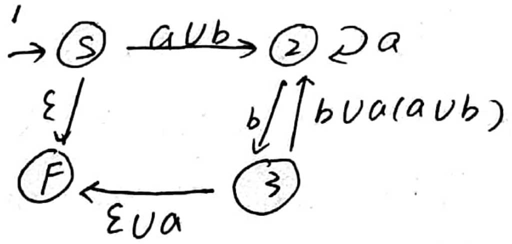
1.21

(b)

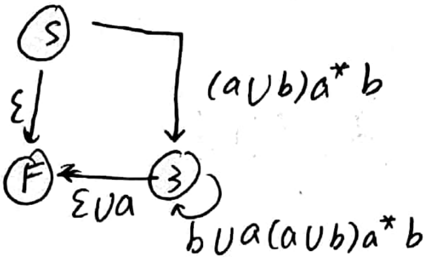


=>

删去1



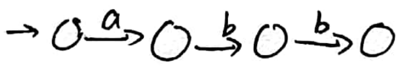
删去2：



删去3，得正则表达式 $\varepsilon \cup (a\cup b)a^*b(b\cup a(a\cup b)a^*b)^*(\varepsilon\cup a)$

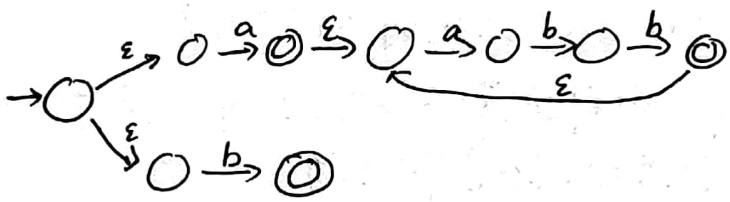
1.28(a)

abb



$a(abb)^*$

$a(abb)^* \cup b$



1.47

自反性：$\forall z$, ~~xz iff~~ $xz\in L$ iff $xz\in L$，∴ x 与 x 不可区分，$x \equiv_L x$

对称性：若 $x \equiv_L y$ 即 $\forall z$, $xz\in L$ iff $yz\in L$

则 $yz\in L$ iff $xz\in L$，y 与 x 不可区分，$y \equiv_L x$

传递性：若 $x \equiv_L y$, $y \equiv_L w$，则有 $\forall z$, $xz\in L$ iff $yz\in L$，$yz\in L$ iff $wz\in L$

则有 $xz\in L$ iff $wz\in L$，x 与 w 不可区分，$x \equiv_L w$

故 $\equiv_L$ 是等价关系

陈彦帆 2018K8009918002

1.48

~~a.~~ 扩充定义 $\delta(q_i, s) = q_j$ 表示自动机在 q_i 状态下读入子串 s 后进入 q_j 状态。

a. 若 L 的指数超过 k，设 L 被 $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 识别，$|Q| = k$

存在 $X = \{s_1, s_2, \dots s_n\}$ 两两可区分，$n > k$，由鸽巢原理，$\exists i, j \in \{1, \dots n\}, i \neq j$ 使

$q = \delta(q_0, s_i) = \delta(q_0, s_j)$，又因为 M 识别 L

所以 $q \in F$ iff $s_i \in L$ iff $s_j \in L$，$s_i \equiv_L s_j$，矛盾，原

故 L 指数不超过 k。□

b. 设 $X = \{s_1, s_2, \dots s_k\}$ 两两可区分，其中 k 为 L 的指数

构造 DFA $M(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$Q = \{q_1, \dots q_k\}$ Σ 为 L 中的字母表

$\delta(q_i, a) = q_j$，当 $s_i a \equiv_L s_j$，$i, j \in \{1, \dots k\}$

δ 是良定义的，∵ 在 $\{s_1, \dots s_k\}$ 中总能找到 s_j 使 $s_j \equiv_L s_i a$；否则把 $s_i a$ 加入

X，~~L的指数~~ $|X| = k+1 > k$，矛盾（$s_{[illegible]} \equiv_L s_{[illegible]}$ 确保此时 $s_i a$ 不同于 X 中元素）(*)

$q_0 \equiv q_n$，其中 $s_n \equiv_L \varepsilon$，$n \in \{1, \dots k\}$

$q_m \in F$ iff $s_m \in L$ $m \in \{1, \dots k\}$

下证 M 识别 L

首先有 $\delta(q_0, s) = q_m$，其中 $s_m \equiv_L s$ (**)，以下用归纳法证明：

当 $s = \varepsilon$ 时 $s_\varepsilon \equiv_L \varepsilon$，由定义 $\delta(q_0, \varepsilon) = q_\varepsilon$ 成立

归纳地假设 $\delta(q_0, s) = q_m$，其中 $s_m \equiv_L s$

则设 $\delta(q_0, sa) = q_{m'}$ ~~由定义 $s_{m'} \equiv_L sa$~~

又有 $\delta(q_0, s) = q_m = \delta(q_0, s_m)$，故 $\delta(q_0, sa) = \delta(q_m, a) = q_{m'}$，$s_{m'} \equiv_L s_m a$ 成立

~~实际上~~

$\forall s \in L$，由(*)可知 $\exists m \in \{1, \dots k\}$ 使 $s \equiv_L s_k$，$\delta(q_0, s) = \delta(q_0, s_m) = q_m$（由(**)）

$s \in L$ iff $s_m \in L$ iff $q_m \in F$，故 M 识别 L。□

c. ~~由b~~ 若 L 正则，则 L 被某 DFA M 识别，设 M 有 k 个状态，由 a，L 指数 $\le k$，有穷

若 L 指数有穷，由 b，它能被某 DFA 识别，故 L 正则。

设识别 L 的最小 DFA M 有 k 个状态，由 a，L 的指数 $\le k$；若 L 指数 $< k$，由 b，

M 不是识别 L 的最小 DFA，矛盾，故 L 的指数等于 k

□