计算理论 第十章 陈彦帆 2018K8009918002

10.8

设 $A\in BPL$ 且 PTM M 在对数空间判定 A

构造 TM N 在多项式时间判定 A:

$M=$"对于输入 w:

1. 从初始格局 s 开始, 构造 M 在 w 输入上的计算格局树图

2. 检查所有的终止格局, 若接受格局数为终止格局总数的 $\frac{2}{3}$, 则接受, 否则拒绝。"

其中, 第 1 步需要列出所有计算格局, 其长度为 $c\log n$ 的, 故能在对数空间完成, 然后检查这些格局是否符合要求, 检查所有的 (C_1, C_2), 看是否为计算格局~~树~~图合格的边。

第 2 步需要检验某格局是否为终止格局, 并计数, 由于格局~~数为~~的长度为 $O(c\log n)$ 的, 故能在多项式时间完成

故 $BPL\subseteq P$

10.11

先证明若 $SAT\in BPP$, 则 $SAT\in RP$:

设 PTM M 以错误概率 $2^{-p(n)}$ 判定 SAT

构造 PTM N 在 RP 中判定 SAT:

$N=$"对于输入 φ:

1. 在 φ 上运行 M, 若 M 拒绝, 则拒绝

2. 对于 φ 的变元 $x_1, \cdots x_k$, ~~$i+1, \cdots k$~~ 将 x_i 设为 1, 然后运行 M, 若接受, 则对 x_{i+1} 进行同样的操作, 否则, 将 x_i 设为 0, 然后对 x_{i+1} 进行同样的操作

3. 对所有变元赋值完毕后, 若公式为真, 则接受, 否则拒绝。"

显然上述过程是多项式时间的.

若 N ~~拒绝~~ 接受 φ, 则 φ 必为可满足的

若 φ 为可满足的, ~~则~~ 注意到第 2 步重复了 k 次, $k=O(\log n)$

则~~拒绝~~接受概率为 $(1-2^{-p(n)})^{c\log n+1}$, 选取 $p(n)$ 可使其大于 $\frac{2}{3}$

于是，若 $NP \subseteq BPP$，则 $SAT \subseteq BPP$，又易知 $RP \subseteq NP$
则才证明了 $SAT \subseteq RP$，SAT 是 NP 完全的，故 $NP \subseteq RP$
即 $NP = RP$

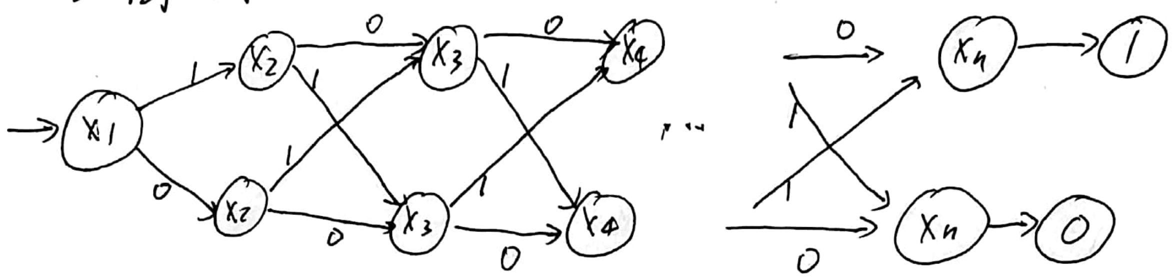
10.2

$2^{12-1} \not\equiv 1 \pmod{12}$ 因为 2^{12-1} 为偶数，$2^{12-1} \bmod 12$ 也为偶数

~~10.3~~

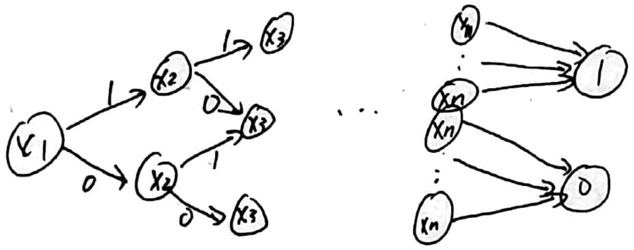
10.4

如图所示



需要 $O(2n)=O(n)$ 个顶点，

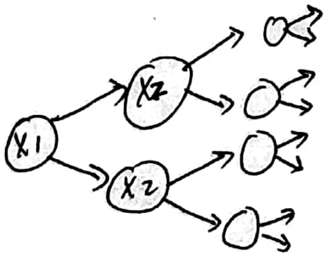
10.5



第 i 层有 i 个顶点(除第 $n+1$ 层)

顶点数 $O(n^2)$

10.6 n 输入的布尔函数共有 2^n 种可能的映射



如左图的树形分支程序，可对所有 2^n 种可能的输入分别赋结果的值，共有 2^n 个顶点。
$O(2^n)$

10.3

设 NC 电路 N 判定 B，设 $A \leq_L B$ 的规约函数为 $f(w)$
则对于输入 w，构造 $f(w)$ 的格局图和传递闭包，把可达的接受格局的顶点接到电路 N 的输入上，即可判定 A。
故 $A \subseteq NC$