理计 第八章 陈彦帆 2018K8009918002

8.1

~~(1) 对于~~ ~~设~~记单带模型下的 SPACE(f(n)) 为 $SPACE_1(f(n))$

记双带只读输入模型下的 SPACE(f(n)) 为 $SPACE_2(f(n))$

(1) 设 $A \in SPACE_1(f(n))$，~~构造~~ TM M 在 f(n) 空间判定 A

构造双带 TM N 在 f(n) 内判定 A:

N = "对于输入 w:

1. 将 w 复制到工作带上，在工作带上模拟 M

2. 若 M 接受，则接受，否则拒绝。"

故 $A \in SPACE_2(f(n))$

(2) 设 $A \in SPACE_2(f(n))$，T~~M N 在~~ 双带只读输入 TM N 在 f(n) 内判定 A，构造单带 TM M 在 f(n) 空间判定 A:

M = "对于输入 w:

1. 在 w 结尾加上符号 '#'，设 # 不出现在 N 的输入和工作过程中

2. 在 "#" 的左边模拟 N 的输入带，在 "#" 的右边模拟 N 的工作带，从而使 M 模拟 N

3. 若 N 接受，则接受，否则，拒绝。"

故 M 在 $f(n)+n+1 = O(f(n))$ 空间模拟了 N，且判定 A

故 $A \in SPACE_1(f(n))$

综上，~~SA~~ $SPACE_1(f(n)) = SPACE_2(f(n))$.

8.4

设 $A、B \in PSPACE$，TM M 判定 A，TM N 判定 B

(1) 并：构造 TM T 在 PSPACE 下判定 $A \cup B$

T = "对于输入 $w = w_1 w_2 \cdots w_n$:

1. 把带子改为 $w_1 w_1 w_2 w_2 \cdots w_n w_n$

2. 在奇数带上模拟 M，在偶数带上模拟 ~~B~~ N

若 M、N 有一个接受，则接受，否则拒绝。"

空间复杂度为 $O(n^{k_1}) + O(n^{k_2}) = O(n^k)$ 故 $A \cup B \in PSPACE$

(2) 补：

构造图灵机T在PSPACE下判定$\overline{A}$

T="对于输入w：

1. 在w上模拟M，若M接受，则拒绝，否则接受。"

则T在$O(n^k)$空间下判定$\overline{A}$，故$\overline{A} \in PSPACE$

(3) 星号

构造TM T在PSPACE下判定A^*

T="对于输入$w = w_1 w_2 \cdots w_n$

1. 若$w=\varepsilon$，接受

2. 对$k=1$到n

3. 把w分为k段

4. 对每一段运行M，若k段均接受，则接受；否则，若有不同的分法，回到3.

5. 拒绝。"

需要的空间：① 需要额外的n格保存输入w，$O(n)$

② 需要存储k及分段的方法、~~O(n)~~及模拟的结果，$O(n)$

③ 对每一段进行模拟为$O(n^k)$，此空间可重复使用

故空间复杂度仍为多项式的，$A^* \in PSPACE$.

8.6 若A为PSPACE难 $\Leftrightarrow \{\forall w, \forall B \in PSPACE, w \in B \Leftrightarrow f_p(w) \in A\}$

$\because$ ~~NP⊆P~~ $NP \subseteq PSPACE$

$\therefore$ A为PSPACE难 $\Rightarrow \{\forall w, \forall B \in NP, w \in B \Leftrightarrow f_p(w) \in A\}$

故A为NP难的。

8.16

(1) ~~先证明~~ 强连通是NL的。设NTM N在NL下判定PATH(G,s,t)

NTM M ="对于输入G，G为图：

1. ~~非确定~~ 选择两个顶点 s,t，运行 N(G,s,t)，若N 接受，则拒绝。"

由此，M在NL下判定 强连通的补

故强连通的 $\in$ coNL，又 coNL = NL

$\therefore$ 强连通的 $\in$ NL

(2) ~~再证明~~ PATH $\leq_L$ 强连通的

$f_L(w)$ = "对于输入<G, s, t>，G为图，s,t为G的顶点：

1. 输出G。

2. 对每个顶点 $e \in$ ~~Edge~~ Vertex(G)，~~加入~~ 输出边 $e \to s$ 和 $t \to e$。"

~~3. 输出修改后的图 G'。"~~

首先 f_L 是L空间的，其读写工作带只需记下当前循环的位置。

而且，若 G,s,t $\in$ PATH，设 $f_L(G,s,t) = G'$

则 $\forall i,j \in$ ~~edge~~ Vertex(G')，有边 $i \to s \to \cdots \to t \to j$

和 $j \to s \to \cdots \to t \to i$，故 G'是强连通的。

若 G' $\in$ 强连通的，则由于添加的边为s的入边和t的出边，不会影响PATH<G,s,t>的结果，故<G,s,t> $\in$ PATH

故 ~~PA~~ <G,s,t> $\in$ PATH $\iff$ ~~G'~~ $f_L(G,s,t)$ $\in$ 强连通的。

又PATH为NL完全的，故强连通也是NL完全

8.31

(1) 先证明它是PSPACE的。用极大-极小值搜索，

~~用深度优先搜索~~，遍历每种可能的选择情况，若有一组分支表明Ⅰ必胜或Ⅱ必胜，则停止

需要存储：当前分支的序号；当前分支下Ⅰ和Ⅱ的选择及结果~~是O(n)的~~；当前的极大、极小值。是$O(n)$的。

(2) 再证明 FORMULA-GAME ~~TQBF~~ $\leq_p$ PUZZLE(Ⅰ必胜)

对~~于公式 $\exists x_1$~~

与定理8.11相同，假定 $\varphi = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \cdots Q x_k [\psi]$

φ的量词以∃开头，以∃结尾，并且∃和∀严格地交替出现，且ψ是合取范式的

设ψ有变量 $x_1, \cdots x_n$，子句 $l_1, \cdots l_m$，构造对应的卡片集

1. 每列有m个可能的孔位

2. 对于每个 $x_i \in \psi$，加入一张卡片，其左列除了$\{j \mid x_i \in l_j\}$的孔位不打孔，其余全打孔，右侧除了$\{j \mid \overline{x_i} \in l_j\}$的孔位不打孔，其余全打孔，记为第i张卡片

3. 再加入一张卡片，作为第一张，左侧全不打孔，右侧全打孔

容易看出，这个构造是多项式时间的，且φ值为1 $\Leftrightarrow$ 卡片全覆盖

故 FORMULA-GAME的"存在"方"必胜 $\Leftrightarrow$ PUZZLE的先手必胜

由此 FORMULA-GAME $\leq_p$ PUZZLE

故 PUZZLE双人版是PSPACE完全的。

8.33. "对于输入w：

只需记下未配对半括号的个数m即可

每读入个左括号，m+1，每读入一个右括号，m-1

若发现m<0或到结尾时m≠0，则拒绝，否则接受。"

将O(n)的括号按二进制编码，记下个数，只需$O(\log_2 n)$空间，

故 B∈L