理计 第九章　　陈彦帆 2018K8009918002

9.21

若 $A\in TIME(n^6)$，设 TM M在 $O(n^6)$ 判定 A

构造TM N = "对于输入 w（长度设为n）：

1. 检查w是否为 $s\#^{|s|^2}$ 格式，若不是，拒绝

2. 在s上模拟M，若M接受，则接受，否则拒绝。"

则N判定 $Pad(A,n^2)$，~~复~~其中第1步复杂度 $O(n)+O((\sqrt{n})^2)=O(n)$

第2步复杂度 $O((\sqrt{n})^6)=O(n^3)$，故 $pad(A,n^2)\in TIME(n^3)$

9.22

下证 若P=NP，则 NEXPTIME=EXPTIME 即可

首先 NTM可在相同时间内模拟TM，故 $EXPTIME\subseteq NEXPTIME$

然后，若P=NP，设语言 $A\in NEXPTIME \overset{NTIME}{=} \cancel{O}(2^{n^k})$

考察 $Pad(A,2^{n^k})$ 的时间复杂度，~~输入长度为 $n=x+2^{x^k}\geq 2^{x^k}$~~

对于输入 $s\#^j$，计算 $|j|$ 是否等于 $2^{|s|^k}$ 是 $O(2^{|s|^k})$ 的，又

$n=|s|+2^{|s|^k}$，故也是 $O(n)$ 的；同理计算是否 $s\in A$ 也是 $O(n)$ 的。

故 $Pad(A,2^{n^k})\in NP$，又 $P=NP$ 故 $Pad(A,2^{n^k})\in P$

设 $Pad(A,2^{n^k})=TIME(n^c)=TIME((|s|+2^{|s|^k})^c)=TIME((2^{|s|^k})^c)$

~~= EXPTIME，故~~

即 A 至多是 $TIME(2^{cn^k})$ 的，故 $A\in EXPTIME$

综上，EXPTIME=NEXPTIME

故其逆否命题成立。

9.24
考察课本定理8.8关于把PSPACE问题归约到TQBF的证明，可以发现这个过程可在~~多~~对数空间下完成。

~~① 计数器 $t=2^{df(n)}$，用二进制~~

① $t = 2^{dn^k}$，每次递归，$t/2$，故只需记录 dn^k 即可，用二进制，只需 $\log(dn^k)$ 空间

② 递归地构造 $\phi_{c_1,c_2,t}$ 的过程，只需要记录当前的位置即可

③ 验证代表 c_1 的每个三元组的值能正确产生相应的 c_2 三元组，每次验证，只需记下每个三元组和位置即可，仍在对数空间内

故 $PSPACE \leq_L TQBF$

又由空间层次定理，$SPACE(n^{\frac{1}{3}}) \subsetneq PSPACE$

故 $TQBF \notin SPACE(n^{\frac{1}{3}})$

9.9 若 $NP=P^{SAT}$

~~若 $A\in NP$，则 $A\in P^{SAT}$，$A^c\in P^{SAT}$，$A^c\in NP \Rightarrow coNP\subseteq NP$~~

若 $A\in coNP \Leftrightarrow A^c\in NP \Leftrightarrow A^c\in P^{SAT} \Leftrightarrow A\in P^{SAT} \Leftrightarrow A\in NP$，

故 $NP=coNP$

9.11 首先 $CLIQUE\in NP$，设 f_P 将CLIQUE归约到SAT

构造TM M="对于输入 $w=\langle G,k\rangle$，G为图：

1. 询问谕示 $f_P(G,k)$ 是否属于SAT
2. 询问谕示 $f_P(G,k+1)$ 是否属于SAT
3. 若1回答是，2回答否，则接受，否则拒绝。"

由此M利用SAT谕示在P下判定MAX-CLIQUE.

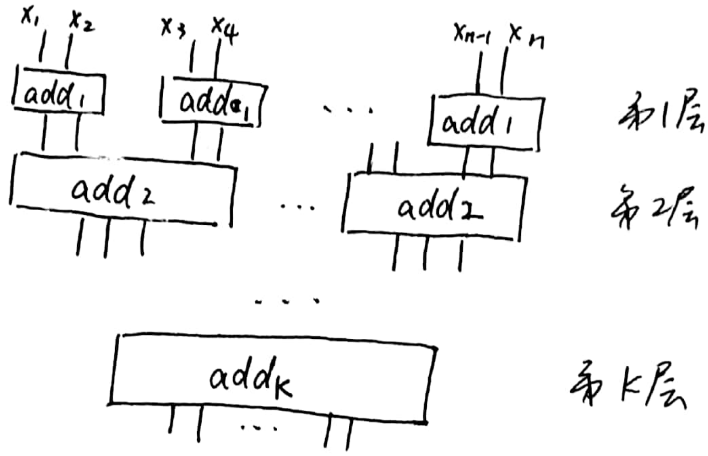
9.14

(1) 首先，设 $add_n:\{0,1\}^{2n}\to\{0,1\}^{n+1}$ 计算两个 n 位二进制数的和并输出 $n+1$ 位结果的加法器是 $O(n)$ 的。

采用串行进位即可。每一位生成结果和进位是 $O(1)$ 的，n 位是 $O(n)$ 的。

(2) $majority_n$ 电路第一部分，把所有输入相加并以二进制输出。

① 设 $n=2^k$



规模：$S=\sum_{i=1}^{k}O(i)\cdot\frac{n}{2^i}$

$\frac{1}{2}S=\sum_{i=1}^{k}O(i)\frac{n}{2^{i+1}}$

相减并乘2得 $S=O\left(\left(2-\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{k}{2^k}\right)n\right)=O(n)$

② 若 $2^k<n<2^{k+1}$

电路基本结构仍相同，其中每一层无法组成加法器的部分直接用线引到下一层，并在其高位添零信号。

规模为 $O(2^{k+1})=O(2n)=O(n)$

(3) 第二部分，把得到的二进制信号与 $\frac{n}{2}$ 的二进制信号比较，小于则输出0，大于等于则输出1。

只需用 add_{k+1} 即可实现：将第一部分得到的二进制信号与 $-\frac{n}{2}$ 的补码相加，其结果的最高位(carryout位)即为 $majority_n$ 的结果。复杂度为 $O(k+1)=O(\log n)$

总复杂度为 $O(n)$ □